

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ИЗГИБА БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ТЕЙЛОРА

Радченко В. П., Ковалева М. А.

Самарский государственный технический университет, г. Самара,
radchenko.vp@samgtu.ru

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, переменные коэффициенты, многочлены Тейлора, сложный изгиб балки

В работе предложен сеточный метод решения краевых задач для неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с переменными коэффициентами на основе разложений Тейлора, в частности описывающий сложный изгиб балок на упругом основании из неоднородного материала с переменным сечением.

Рассматривается уравнение в самом общем виде:

$$u(t)x^{(4)}(t) + s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t),$$

где $u(t)$, $s(t)$, $r(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ – заданные функции, дифференцируемые нужное число раз, $x(t)$ – искомая функция, являющаяся точным решением задачи, с последующим вычислением порядка её аппроксимации в зависимости от степени k используемого многочлена Тейлора. Рассмотрим спектр граничных условий, в которые входят значения искомой функции $x(t)$, первые три производные и линейные комбинации функции и её производных первого, второго и третьего порядков. В частности, эти граничные условия включают всевозможные комбинации граничных условий для балки.

Метод не подразумевает замену производных через их конечные разности, а используется разложение в ряд Тейлора в каждом узле сетки области изменения параметра t , далее решается система уравнений относительно самой функции и её производных. Получены априорные оценки погрешности для функции и её производных при значениях степени многочлена Тейлора $k \geq 4$ (при $k = 4$ имеем классический метод сеток), при этом увеличение степени многочлена Тейлора на единицу при том же количестве узлов сетки приводит к уменьшению погрешности решения почти на порядок [1].

Разработанный численный метод опробован при решении одномерных задач сложного изгиба балок на упругом основании при сложных комбинациях продольных и поперечных сил, описываемых уравнением

$$(EJW''(x))'' - TW''(x) + k(x)W(x) = q(x), \quad (1)$$

где $q = q(x)$ – распределенная нагрузка, T – осевая сила, $k = k(x)$ – жёсткость упругого основания, E – модуль упругости материала балки (в общем случае $E = E(x)$, т.е. учитывается неоднородность материала), J – момент инерции сечения (в общем случае $J = J(x)$, т.е. учитывается переменная площадь поперечного сечения по длине балки), $W = W(x)$ – величина прогиба балки. С использованием граничных условий метод тейлоровских разложений позволяет находить не только функцию прогиба $W = W(x)$ из (1), но и первую, вторую и третью производные этой функции, причём две последние прямо пропорциональны изгибающему моменту и перерезывающей силе, играющих важную роль в расчётах на прочность балок. Одним из достоинств метода является то, что не используются конечные разности для аппроксимации производных в уравнении (1).

Выполнен детальный параметрический анализ влияния внешних нагрузок, геометрических параметров, упругого основания на зависимости $W(x)$, $W'(x)$, $W''(x)$, $W'''(x)$, включая сингулярный характер сосредоточенной нагрузки. Найдены оценки погрешности для функции $W = W(x)$ и её трёх производных при различном количестве удерживаемых членов в разложении Тейлора по отношению к аналитическому решению в частных случаях. Работа иллюстрируется большим объёмом информации для решения краевых задач с различными граничными условиями.

Список литературы

1. Маклаков В. Н., Ильичева М.А. Численное интегрирование матричным методом и оценка порядка аппроксимации разностных краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами / Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки, 2020. С. 137-162.

Сведения об авторах

Радченко Владимир Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики. Область научных интересов: новые методы решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела.

Ковалева Мария Александровна, аспирант кафедры прикладной математики и информатики. Область научных интересов: численные методы решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела.

SOLUTION OF COMPLEX BEAM BENDING PROBLEM ON ELASTIC BASE BASED ON TAYLOR SERIES

Radchenko V.P., Kovaleva M. A.
Samara State Technical University, Samara, Russia,
radchenko.vp@samgtu.ru

Keywords: ordinary differential of the fourth order, variable coefficients, Taylor series, complex beam bending

A new numerical method for solving edge problems of complex bending of a beam based on Taylor series has been developed. Estimates of decision error were obtained, comparison of numerical and analytical decisions in particular cases was made.