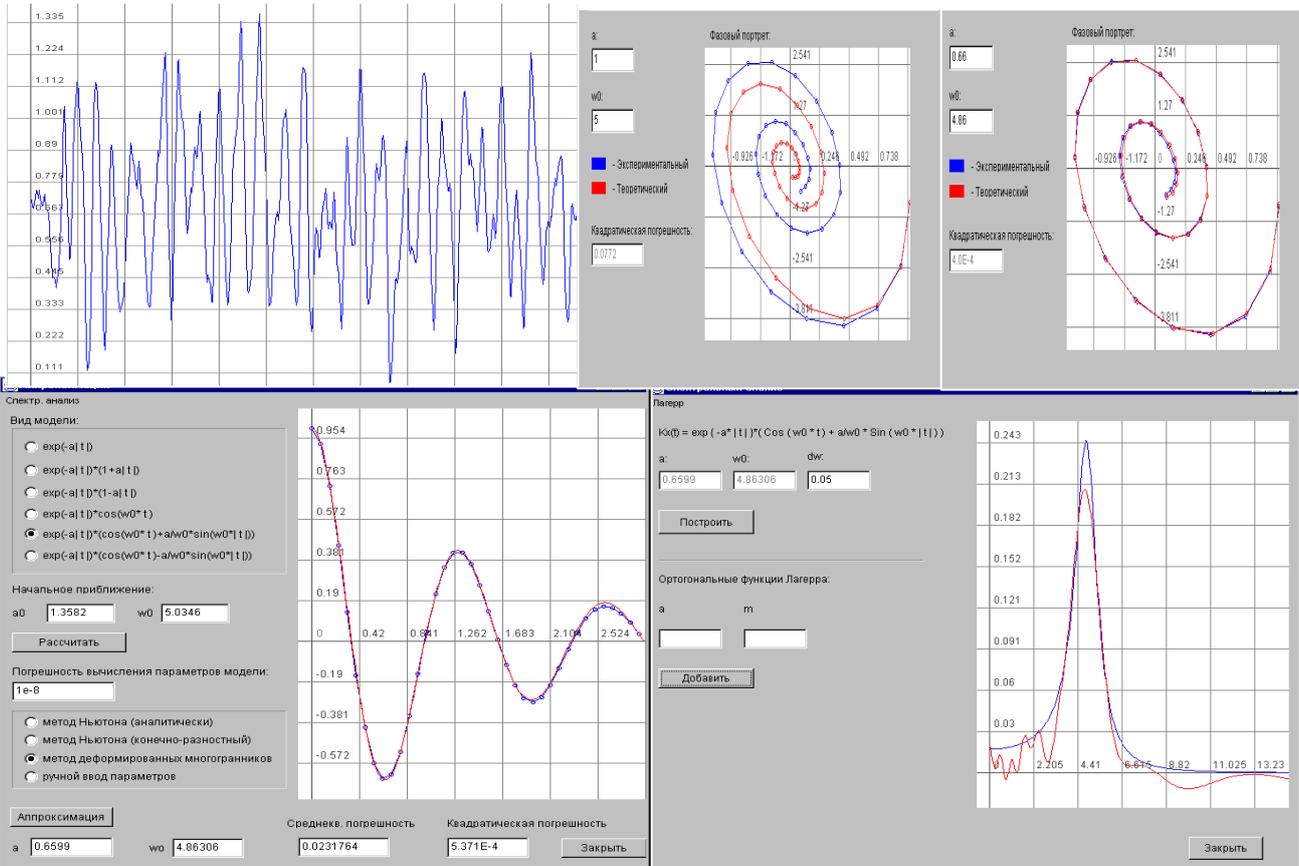


С.А. Прохоров

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Лабораторный практикум

Издание второе, переработанное и дополненное



Самара 2002 г.

Об авторе



Прохоров Сергей Антонович – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, декан факультета информатики, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета, директор Самарского филиала Российского НИИ информационных систем.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести науч-

но-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 191 научных трудах, в том числе, 11 монографиях, 40 авторских свидетельствах, 6 работах, опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 50 международных, всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

**УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/
ББК 32.965я73**

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д. т. н., профессор
Сойфер В.А.;
д. ф.-м. н., профессор Жданов А.И.

П 10 Прохоров С.А.

Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., переработанное и дополненное/ СИЦ РАН, 2002. 277 с., ил.

ISBN 5-93424-072-2

Рассматриваются методы и алгоритмы генерирования временных рядов с заданным видом законов распределения, корреляционных функций, неэквидистантных временных рядов с заданными вероятностными характеристиками.

Анализируются методы, алгоритмы анализа вероятностных характеристик временных рядов, включая неэквидистантные, основанные на применении классического подхода, а также с использованием интервальной корреляционной функции.

Рассматриваются задачи вторичной обработки временных рядов, включающие: идентификацию случайных процессов по виду функциональной характеристики, аппроксимацию законов распределения, корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями, представляющими собой как функции заданного вида, так и ортогональные функции Лагерра.

Приводится описание разработанных автоматизированных информационных систем для аппроксимативного анализа функциональных характеристик.

Издание лабораторного практикума поддержано грантом 4-Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары».

Предназначена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по изучению основ моделирования и прикладного анализа случайных процессов.

ББК 32.965я73

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

**П 4310020000
00 (05) - 01**

ISBN 5-93424-072-2

© Самарский научный центр Российской академии наук, 2002

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2002

© С.А. Прохоров, 2002

СОДЕРЖАНИЕ	Стр.
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	3
ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ	9
1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	11
1.1. Теоретические основы лабораторной работы	25
1.2. Задание на самостоятельную работу	25
1.3. Содержание отчёта	32
1.4. Контрольные вопросы	33
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ- БЛИЖЕННЫМ МЕТОДОМ	39
2.1. Теоретические основы лабораторной работы	40
2.2. Задание на самостоятельную работу	40
2.3. Содержание отчёта	52
2.4. Контрольные вопросы	53
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	53
3.1. Теоретические основы лабораторной работы	54
3.2. Задание на самостоятельную работу	54
3.3. Содержание отчёта	60
3.4. Контрольные вопросы	60
4. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	66
4.1. Теоретические основы лабораторной работы	67
4.2. Задание на самостоятельную работу	67
4.3. Содержание отчёта	75
4.4. Контрольные вопросы	75
5. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	75
5.1. Теоретические основы лабораторной работы	79
5.2. Задание на самостоятельную работу	79
5.3. Содержание отчёта	83
5.4. Контрольные вопросы	84
6. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ	91
6.1. Теоретические основы лабораторной работы	92
6.2. Задание на самостоятельную работу	92
6.3. Содержание отчёта	103
6.4. Контрольные вопросы	104
7. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕР- РА	106
7.1. Теоретические основы лабораторной работы	108
7.2. Задание на самостоятельную работу	108
7.3. Содержание отчёта	114
7.4. Контрольные вопросы	115
8. АППРОКСИМАЦИЯ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПА- РАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ	118
8.1. Теоретические основы лабораторной работы	119
8.2. Задание на самостоятельную работу	119
8.3. Содержание отчёта	120
8.4. Контрольные вопросы	121
9. АППРОКСИМАЦИЯ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТО- ГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА	121
	126

9.1.	Теоретические основы лабораторной работы	126
9.2.	Задание на самостоятельную работу	128
9.3.	Содержание отчёта	128
9.4.	Контрольные вопросы	128
10.	АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ	132
10.1.	Теоретические основы лабораторной работы	132
10.2.	Задание на самостоятельную работу	137
10.3.	Содержание отчёта	138
10.4.	Контрольные вопросы	138
11.	АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА	144
11.1.	Теоретические основы лабораторной работы	144
11.2.	Задание на самостоятельную работу	144
11.3.	Содержание отчёта	145
11.4.	Контрольные вопросы	147
12.	АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	148
12.1.	Теоретические основы лабораторной работы	148
12.2.	Задание на самостоятельную работу	157
12.3.	Содержание отчёта	157
12.4.	Контрольные вопросы	160
13.	АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА	161
13.1.	Теоретические основы лабораторной работы	161
13.2.	Задание на самостоятельную работу	164
13.3.	Содержание отчёта	164
13.4.	Контрольные вопросы	165
14.	АППРОКСИМАТИВНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	166
14.1.	Теоретические основы лабораторной работы	166
14.2.	Задание на самостоятельную работу	176
14.3.	Содержание отчёта	176
14.4.	Контрольные вопросы	178
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	179
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	181
	ПРИЛОЖЕНИЯ	182
П.1.	Типовые законы распределения	182
П.2.	Характеристические функции	187
П.3.	Обратные функции законов распределения	189
П.4.	Функции распределения вероятностей и их обратные функции	190
П.5.	Характеристики типовых законов распределения ($P_d=0,999$)	192
П.6.	Таблица χ^2 распределения	195
П.7.	Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова	195
П.8.	Производные для однопараметрических плотностей распределения вероятностей	196
П.9.	Производные для двухпараметрических плотностей распределения вероятностей	197

П.10.	Производные для однопараметрических функций распределения вероятностей	199
П.11.	Производные для двухпараметрических функций распределения	200
П.12.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации	202
П.13.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации	203
П.14.	Параметрические модели корреляционных функций	204
П.15.	Ортогональные функции Лагерра	207
П.16.	Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций	208
П.17.	Моменты для типовых моделей корреляционных функций	208
П.18.	Количество ординат корреляционной функции и интервалы дискретизации	209
П.19.	Спектральные плотности мощности	210
П.20.	Обобщенные спектральные характеристики	211
П.21.	АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов	213
П.22.	Подсистема генерирования псевдослучайных последовательностей автоматизированной системы аппроксимативного анализа законов распределения	227
П.23.	АИС для аппроксимативного анализа авто корреляционно-спектральных характеристик	236
П.24.	Блок-схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа.	256
П.25.	АИС для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик	259

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АЦП - аналого-цифровой преобразователь;
ИП - измерительный преобразователь (датчик);
К - коммутатор;
КФ - корреляционная функция;
НКФ – нормированная корреляционная функция;
МУ - масштабирующее устройство;
ПО - процессор обработки;
 $A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$ - алгоритм оценки вероятностной характеристики Θ ;
 $A_s \{ \epsilon(t_k) \}$ - алгоритм оценки сигнала;
 $C_x(J)$ - интервальная корреляционная функция;
 d - параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);
 \mathcal{D}_x - оценка дисперсии;
 $\text{ent}[\]$ - операция взятия целой части числа;
 $F\{ \}$ - функциональное преобразование полученных оценок вероятностных характеристик;
 $|F''(x)|_{\max}$ - максимум модуля второй производной функции распределения;
 $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ - аппроксимирующее выражение плотности распределения вероятностей;
 $F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ - аппроксимирующее выражение функции распределения вероятностей;
 $F_x(x)$ - функция распределения вероятностей;
 $f_x(x)$ - плотность распределения вероятностей;
 $g[\]$ - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;
 $K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - аппроксимирующее выражение корреляционной функции;
 k_a - коэффициент асимметрии;
 k_ϵ - коэффициент эксцесса;
 k_ϕ - коэффициент формы;
 $K_x(\tau)$ - корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $K_x(t, t')$ - корреляционная функция случайного процесса;
 $K_{xy}(\tau)$ - взаимная корреляционная функция;
 k_{xy} - корреляционный момент;
 $L_k(\tau, \alpha)$ - ортогональная функция Лагерра k -го порядка;
 M - количество дифференциальных коридоров;
 Me - медиана;
 Mo - мода;
 \mathcal{M}_x - оценка математического ожидания;

\mathfrak{B}_j - частота попадания анализируемой случайной величины в j -ый дифференциальный коридор;
 S_d - оператор усреднения;
 Signu - знаковая функция;
 $S_x(\omega)$ - спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 $S_{xH}(\omega)$ - нормированная спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 $S_{xy}(\omega)$ - взаимная спектральная плотность мощности;
 T_ϕ - постоянная времени ФНЧ;
 $W(j\omega)$ - частотная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;
 $W_k(j\omega)$ - частотная характеристика фильтра Лагерра k -го порядка;
 $x_j(t)$ - j -ая реализация случайного процесса;
 $\bar{x}(\vec{\Theta}, t)$ - реализация случайного процесса;
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - параметры аппроксимирующего выражения;
 α_k - начальный момент k -го порядка;
 β_k - коэффициент разложения ортогонального ряда;
 χ - коэффициент вариации;
 Δ - абсолютная погрешность аппроксимации;
 Δu - шаг квантования по уровню;
 δ - среднеквадратическая погрешность аппроксимации;
 δ_{ji} - индикатор состояния;
 $\delta(t)$ - δ -функция Дирака;
 Δt_{ji} - интервал дискретизации;
 $\Delta\omega_\phi$ - полоса пропускания фильтра;
 $\Delta\omega_c$ - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;
 Δx - ширина дифференциального коридора;
 $\gamma_{см}$ - погрешность от смещенности оценки;
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$ - допустимые значения погрешностей оценки;
 γ_m - методическая статистическая погрешность;
 η - пикфактор;
 μ - показатель колебательности;
 μ_k - центральный момент k -го порядка;
 $\mathfrak{B}_j[X(t)]$ - j -текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\Theta[X(t)], \Theta$ - измеряемая вероятностная характеристика;
 $\vec{\Theta}$ - вектор информативных параметров случайного процесса;
 $\mathfrak{B}_{cp}[X(t)]$ - средняя оценка вероятностной характеристики;
 $\mathfrak{B}[X(t)]$ - оценка измеряемой вероятностной характеристики;
 $\mathfrak{B}_t[X(t)]$ - t -текущая оценка вероятностной характеристики;

$\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;

$\rho_x(\tau)$ - нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;

$\rho_x(t, t')$ - нормированная корреляционная функция случайного процесса;

$\rho_{xy}(\tau)$ - взаимная нормированная корреляционная функция;

ρ_{xy} - коэффициент корреляции;

τ_k - интервал корреляции;

$\tau_{k\max}$ - максимальный интервал корреляции;

$\vec{\Omega}$ - вектор информативных параметров объекта исследований.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый Вашему вниманию лабораторный практикум по моделированию и анализу случайных процессов подготовлен для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по изучению основ моделирования и прикладного анализа случайных процессов и временных рядов и дополняет монографии автора:

1. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 209 с.: ил.

2. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 375 с.: ил.

3. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 329 с.: ил.

4. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с., ил.

Представленные лабораторные работы можно разбить на три блока:

1. моделирование временных рядов с заданными вероятностными характеристиками;
2. аппроксимативный анализ функциональных вероятностных характеристик временных рядов;
3. аппроксимативный анализ функциональных вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов.

Лабораторный практикум прошел апробацию на кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета при подготовке специалистов по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления», и, на наш взгляд, может быть рекомендован для подготовки специалистов по смежным специальностям.

Во втором издании лабораторного практикума (Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. 191 с.: ил.) учтены замечания преподавателей, аспирантов и студентов, отмеченные в ходе выполнения лабораторных работ, приведено описание модернизированных автоматизированных систем и лабораторных работ. Кроме этого, в лабораторный практикум включены 4 новые лабораторные работы:

1. моделирование некоррелированных временных рядов приближенным методом;
2. аппроксимативный анализ обобщенных корреляционно-спектральных характеристик с использованием параметрических моделей;
3. аппроксимативный анализ обобщенных корреляционно-спектральных характеристик с использованием ортогональных функций Лагерра;
4. аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных.

Все это, на наш взгляд, способствует улучшению наглядности при изучении базовых дисциплин, связанных с моделированием и статистической обработкой случайных процессов.

Лабораторные работы выполняются на четырех автоматизированных учебно-исследовательских информационных системах, разработанных под руководством и непосредственном участии автора.

В разработке автоматизированных информационных систем на разных этапах принимали участие аспиранты и студенты кафедры «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва, выполнявшие под руководством автора кандидатские диссертации, курсовые и дипломные проекты: Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Козлов А.Н., Учеватов С.В., Шевченко Д.В., Иващенко А.В., Дегтярёва О.А.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры ИСТ СГАУ за обсуждение материалов лабораторного практикума, критические замечания которых по мере возможности были учтены, особенно профессору Коварцеву А.Н. и доценту Иоффе В.Г.

Большую благодарность автор выражает академику АН СССР Ильичёву В.И., профессорам Витиху В.А., Григоровскому Б.К., Куликовскому К.Л., Кловскому Д.Д., Курочкину Е.П., Мартяшину А.И., Иванову В.Н., Рожкову В.А., Трапезникову Ю.А., Хуснутдинову Г.Н., Тельскнису Л.А. (Литва), М. Бранице (Хорватия), И. Ружичу (Хорватия), Л. Ефтичу (Хорватия), Б. Чосович (Хорватия), Д. Р. Кушину (Австралия), Ф. Вайде (Венгрия) - за обсуждение работы на различных её этапах.

Особую благодарность автор выражает своим учителям: доценту Волкову И.И., профессорам Карпову Е.М., Куликовскому Л.Ф., Самарину Ю.П., Фремке А.В., Цветкову Э.И., Б. Соучеку (Хорватия), - за постоянное внимание, консультации и особенно за то, что привели в чудесный мир теории вероятностей и случайных процессов.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании лабораторного практикума, а также рецензенту д.ф.-м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Неоценимую помощь в редактировании практикума оказала инженер кафедры ИСТ СГАУ Муравьева Е.В., которой автор выражает свою благодарность.

Издание практикума поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары», за что автор выражает глубокую признательность губернатору Самарской области Титову К.А., а также президенту Самарского научного центра РАН академику РАН Шорину В.П.

Большую благодарность автор выражает директору Западно-Казахстанского филиала ОАО «Национальный центр экспертизы и сертификации» (г. Уральск) Графкину В.Н. за дружескую поддержку и первое издание лабораторного практикума в Казахстане.

И, наконец, но не в последнюю очередь, я благодарен своей семье за понимание и поддержку в работе.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», декану факультета информатики, заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp @ smr. ru

ВВЕДЕНИЕ

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия.

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов [1, 6].

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которые невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Theta}, t)$, с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$:

$$\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta}),$$

используемое для построения искомой модели объекта;

5. анализирует полученные результаты;
6. если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3,4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\vec{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров $\vec{\Theta}$ с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;

5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой - зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации: автоматизированных систем научных исследований (АСНИ), информационно-измерительных систем (ИИС), процессорных измерительных систем (ПРИС), - является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

Рассмотрим структуру отдельного измерительно-вычислительного канала.

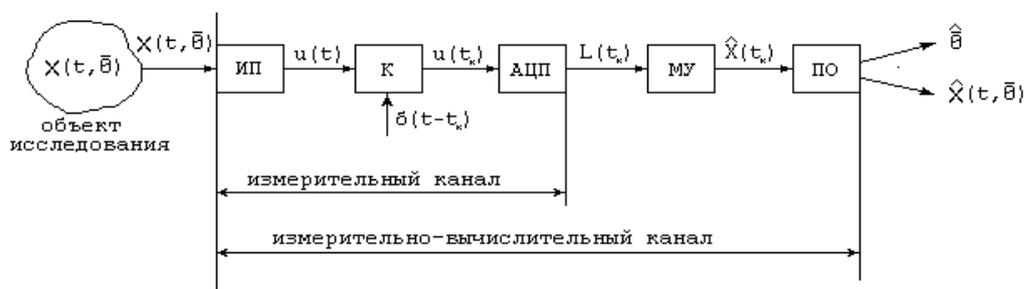


Рисунок В.1. Измерительно-вычислительный канал

На рис. В.1 приняты следующие обозначения:

- **ИП** - измерительный преобразователь (датчик);
- **К** - коммутатор;
- **АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;
- **МУ** - масштабирующее устройство;
- **ПО** - процессор обработки.

С помощью измерительно-вычислительного канала возможны два подхода к решению задачи оценки $\bar{\Theta}$:

- в режиме экспресс-анализа с помощью алгоритма A_{Θ} оценивают вектор неизвестных параметров $\bar{\Theta} = A_{\Theta} \{ \mathbf{x}(t_k) \}$;
- в режиме контроля и регистрации с помощью алгоритма A_s получают оценку сигнала $\mathbf{x}(t, \bar{\Theta}) = A_s \{ \mathbf{x}(t_k) \}$, записывают его на какой-либо промежуточный носитель, а затем обрабатывают. При этом происходит задержка в обработке информации и, следовательно, в получении результата.

Первый подход будем называть **статистическими измерениями**, второй - **статистической обработкой**.

Под **статистическими измерениями** будем понимать измерение вероятностных характеристик случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени.

Под **статистической обработкой** будем понимать оценку вероятностных характеристик случайных процессов на ЭВМ, записанных на промежуточный носитель, с задержкой в обработке информации.

С целью повышения эффективности научных исследований, особенно при исследовании новых объектов, возникает необходимость в разработке и исследовании **новых алгоритмов** оценки вектора неизвестных параметров - $\bar{\Theta} = A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$.

Решая разнообразные задачи научных исследований, исследователь на основании физических представлений и задачи исследований определяет составляющие вектора параметров случайного процесса $\bar{\Theta}$, дающие его исчерпывающее описание.

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. В.2).



Рисунок В.2. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.

На основании общей теории статистических измерений [16] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (B.1)$$

где Θ - измеряемая вероятностная характеристика;

S_d - оператор идеального усреднения;

d - параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);

g - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

$x_j(t)$ - j -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (B.2)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.3)$$

3. При усреднении по времени и совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.4)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\mathfrak{G}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] (j = 1, 2 \dots N). \quad (B.5)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность, состоятельность и эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\mathfrak{G}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (B.6)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(|\mathfrak{G}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon) = 1 \quad (B.7)$$

при любом ε .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

Эффективными называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [3].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (B.2)-(B.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\Theta_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (\text{B.8})$$

- при усреднении по времени

$$\Theta_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (\text{B.9})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\Theta_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (\text{B.10})$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от текущего времени и называется t -текущей характеристикой Θ_t [16]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации j , вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от номера реализации и называется j -текущей характеристикой Θ_j . При усреднении и по времени и совокупности значение $\Theta[X(t)]$ не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой - Θ_{cp} .

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смыслах. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство $\Theta_t = \text{const}$ выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если $\Theta_j = \text{const}$, где j - номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

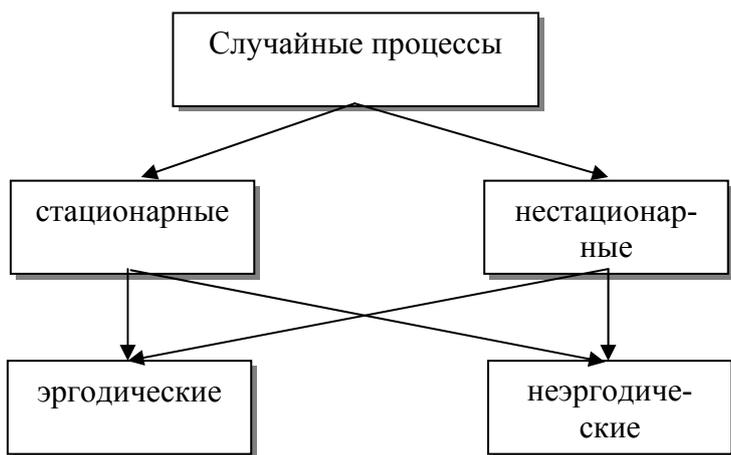


Рисунок В.3. Классификация случайных процессов

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис.В.3):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять: Θ_t , Θ_j , Θ_{cp} , - во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки монографии.

В [1] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса $\Theta_t = \Theta_j = \Theta_{cp}$, для стационарного неэргодического процесса $\Theta_t = \Theta_{cp}$, для нестационарного эргодического - $\Theta_j = \Theta_{cp}$, а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе S_d вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [16]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение N , M и T , т.е. объема выборочных данных.

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

Прямым методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (В. 1).

Косвенным методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\mathfrak{G}[z(t)] = F\left\{S_{d1}g_x[x_j(t_i^{(x)})], S_{d2}g_y[y_l(t_i^{(y)})], \dots\right\} \quad (\text{B. 11})$$

где $F\{ \}$ представляет собой функциональное преобразование полученных оценок $\mathfrak{G}[x(t)]$ и $\mathfrak{G}[y(t)]$ и т.д. с целью получения оценки $\mathfrak{G}[z(t)]$.

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\Xi_i \left\{ S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})] \right\} = 0; \quad (\text{B. 12})$$

$$\Xi_i \left\{ F^{(1)} \left\{ S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})] \right\}, \dots, F^{(m)} \left\{ S_{dm}g[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})] \right\} \right\} = 0. \quad (\text{B. 13})$$

Рассмотренный на рис. В. 1 измерительно-вычислительный канал даёт возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов - временные ряды**.

В этом случае выражения (B.2)-(B.4) при представлении случайного процесса $X(t)$ ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.14})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.15})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (\text{B.16})$$

где t_i - i -ый отсчёт j -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (B.5) примет вид:

$$\mathfrak{G}[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] (j = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, M). \quad (\text{B.17})$$

Выражения (B.8)-(B.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\mathfrak{G}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.18})$$

- при усреднении по времени

$$\mathfrak{G}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.19})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\mathfrak{G}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (\text{B.20})$$

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** - построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик.

Если не принимать во внимание фактор реального времени или задержку в обработке информации, то с точки зрения получения оценки по одному и тому же объему данных два подхода с методической точки зрения не отличаются друг от друга. Существенное отличие заключается в том, что работа в реальном масштабе времени накладывает жесткие ограничения на быстродействие технических средств. Это заставляет, в свою очередь, при статистических измерениях применять упрощенные алгоритмы оценивания интересующих параметров, обладающих значительным быстродействием. Кроме того, работа в реальном масштабе времени не дает возможности получить требуемые оценки, воспользовавшись другими алгоритмами, так как данную реализацию повторить нельзя - она **случайна**. Требуемую оценку необходимо получить за время, отводимое на эксперимент. Реализация же, записанная на промежуточный носитель или в память, становится **детерминированной**, и с ней можно экспериментировать сколь угодно долго. Это важное преимущество статистической обработки позволяет:

- с целью повышения точности оценивания осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации;
- выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию;
- с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

При исследовании сложных объектов проводят, как правило, большое число испытаний. При этом происходит и накопление большого числа массивов числовых и функциональных характеристик, что в значительной степени затрудняет хранение, анализ и интерпретацию полученных результатов.

Один из возможных способов решения этой проблемы заключается в применении аппроксимативных методов (от латинского слова **approximo** - приближаюсь), суть которых заключается в нахождении подходящего аналитического выражения $\varphi(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, удовлетворяющими заданному критерию оптимальности, которое бы описывало найденные экспериментальные результаты. Аппроксимативный подход оказывается эффективным и при обработке результатов имитационного моделирования (вычислительного эксперимента).

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек и построили график зависимости $\mathcal{E}_i = f(\mathcal{E}_i)$. Желательно обработать экспериментальные данные таким образом, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x и вместе с тем сгладить случайные отклонения, вызванные погрешностями самого эксперимента.

Наиболее эффективным методом решения этой задачи является метод наименьших квадратов [3].

Пусть задан некоторый класс функций $\varphi_j(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с одинаковым числом неизвестных параметров. Тогда наилучшей будет та функция, для которой сумма квадратов

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^M [\epsilon_i - \varphi_j(\epsilon_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 = \min. \quad (\text{B.21})$$

Если в сравнении участвуют функции с различным числом неизвестных параметров, это приводит к увеличению числа связей и к уменьшению числа степеней свободы $m-1$, что, в свою очередь, может ухудшить дисперсию [3].

$$D_j = \frac{\Delta_j}{m-r}. \quad (\text{B.22})$$

Под числом связей r понимают число неопределенных выражений, входящих в аналитическое выражение.

Так как Δ_j является функцией $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ то, как известно [3], необходимыми условиями минимума дифференцируемой функции многих переменных является система нормальных уравнений:

$$\frac{\partial S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0, k = 0, 1, \dots, n, \quad (\text{B.23})$$

решив которую с помощью того или иного численного метода, найдем искомые параметры $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Классификация методов аппроксимации функциональных характеристик случайных процессов и последовательностей представлена на рис. В.4.

Основными преимуществами аппроксимативного подхода являются:

- наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;
- возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований, с целью получения обобщенных вероятностных характеристик;
- сокращение объёма хранимых данных.

К недостаткам метода следует отнести наличие методической погрешности, возникающей при замене полученных экспериментальных данных или другой функции более простым аналитическим выражением.

В общем случае, для реализации аппроксимативного подхода необходимо выполнить следующие этапы:

1. на основании анализа решаемой задачи определить требования к реализации входного процесса (последовательности): длине реализации (объёму выборки), интервалу дискретизации, числу уровней квантования и т.д. с целью получения оценок вероятностных характеристик для последующей аппроксимации с допустимыми погрешностями;

2. по измеренным значениям входного процесса (последовательности) оценить значения функциональной характеристики в заданных точках;

3. проанализировать полученный результат и выбрать подходящее аналитическое выражение, по возможности, с минимальным количеством неизвестных параметров, подлежащих определению, так как количество параметров в значительной мере определяет сложность аппаратуры или вычислений, его сходимости и устойчивость;

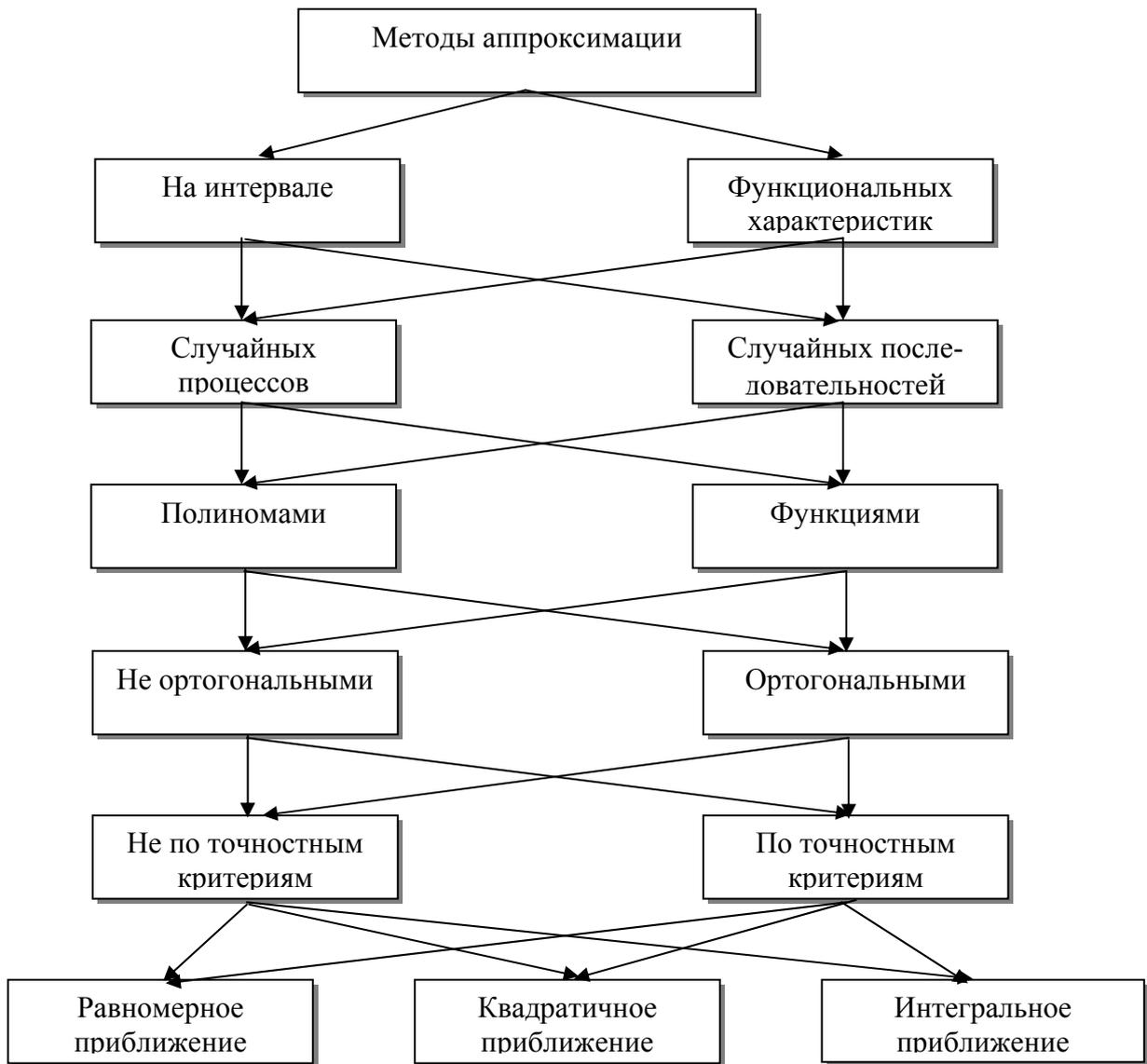


Рисунок В.4. Классификация методов аппроксимации случайных процессов и последовательностей

4. выбрать и обосновать критерий приближения;
5. составить и решить систему уравнений относительно неизвестных параметров аналитического выражения и определить погрешность приближения;
6. разработать структурную схему аппаратуры (программы) и рассчитать её параметры;
7. изготовить и отладить аппаратуру (написать и отладить программное обеспечение);
8. провести экспериментальные исследования (обработать полученные экспериментальные данные);
9. аналитически определить все интересующие обобщённые вероятностные характеристики.

Следует отметить, что определять аналитические выражения возможно как при анализе стационарных, так и нестационарных процессов. В первом случае анализи-

руются функциональные характеристики, во втором - и моментные, являющиеся функциями времени.

Определять параметры аналитических выражений возможно как с помощью **статистических измерений**, так и в результате **статистической обработки**.

Под **статистическими измерениями с аппроксимацией** будем понимать измерение (оценку) параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени. Самыми популярными среди таких технических средств являются **коррелометры** и **спектроанализаторы** с аппроксимацией параметрическими моделями. В литературе их часто называют **статистическими анализаторами**. Статистические анализаторы, как правило, специализированные аппаратно-программные средства, определяющие **параметры реального процесса** (см. рис. В.5).

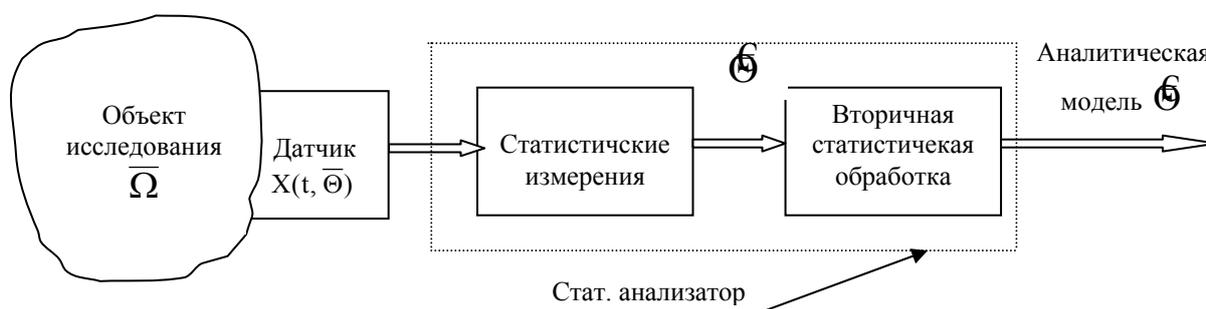


Рисунок В.5. Аппаратно-программные средства статистических измерений и обработки информации

Под **статистической обработкой с аппроксимацией** будем понимать оценку параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью ЭВМ, записанных на промежуточный носитель или память. При этом происходит временная задержка в обработке информации.

Аппроксимативные методы, основанные на применении ЭВМ, можно отнести к методам **вторичной обработки** информации.

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ. Появилось большое количество интересных и важных монографий и статей, посвященных методологии, планированию, конструированию и выполнению моделирования (см. список использованных источников в [11]). Большинство их них описывает метод, который носит название метода Монте-Карло. Современное толкование этого термина базируется на работе Неймана и Улама, выполненной в конце сороковых годов, в которой они применили специальный математический метод для решения проблемы ядерной физики, экспериментальные исследования которых очень дороги, а аналитическое решение очень сложно.

Как правило реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;

- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
 - первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
 - вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;
 - датчик системного времени;
 - управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.
- Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков, представлена на рис. В.6.

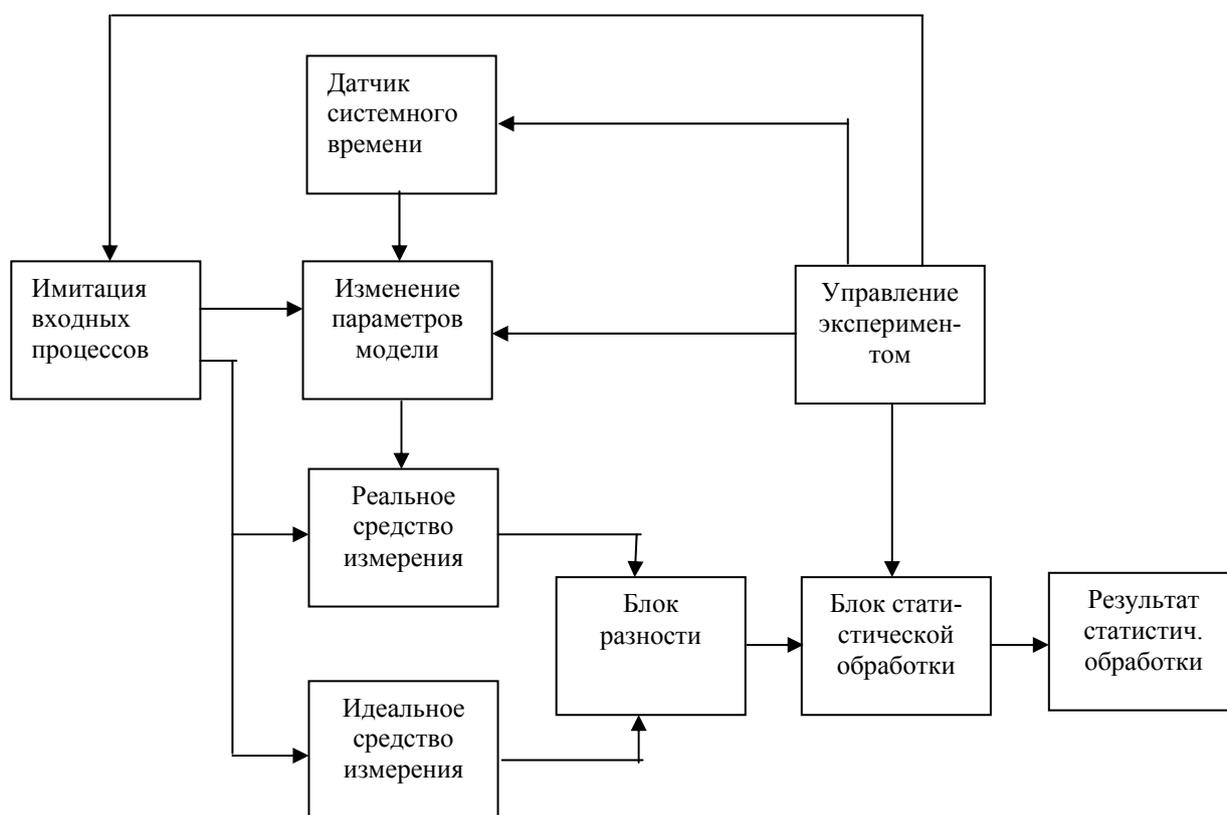


Рисунок В.6. Функциональная схема имитационного моделирования

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования АСНИ, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [1], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.

- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинствами блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [5], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки $\hat{\Theta}$:

$$\Delta = \max \left\{ \left| \Delta_j \right| \right\} j = 1, \dots, N, \quad (B.24)$$

где N-число испытаний, зависящее от доверительной информации P_d . Так, если $P_d = 0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания характеристик неэквидистантных временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является

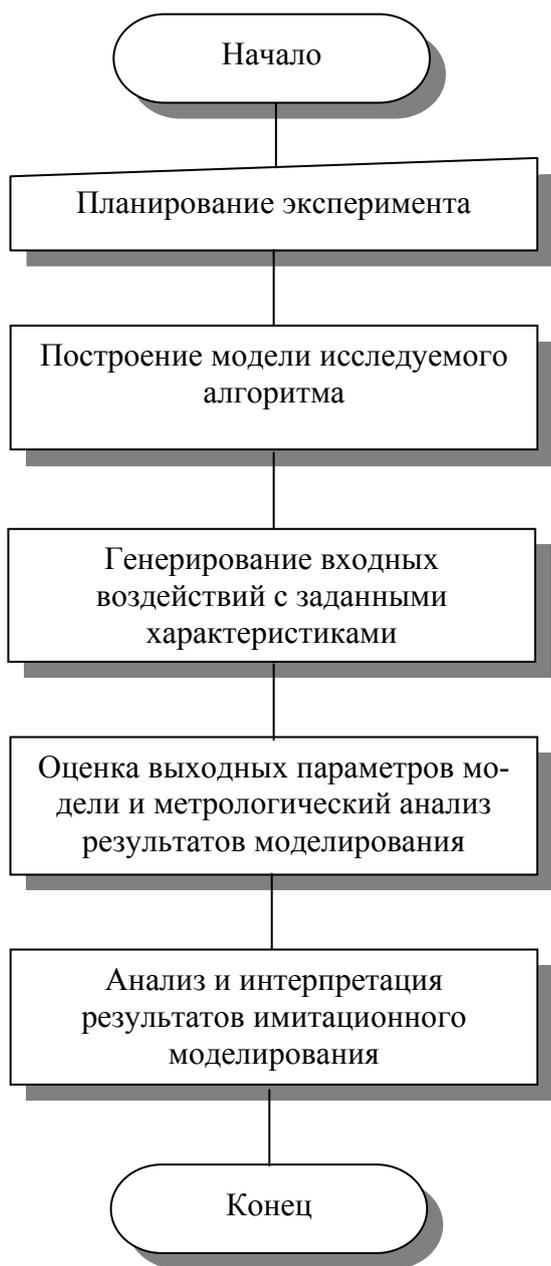


Рисунок В.7

возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий (см. рис. В.7).

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наилучшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересных исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наилучший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

В некоторых случаях, кроме случайных сигналов, возникает необходимость в применении детерминированных образцовых сигналов.

Количество входных сигналов, одновременно обрабатываемых в модели системы, определяется сложностью системы, сложностью модели, количеством каналов и т.д. Т.е. в системе моделирования должна быть предусмотрена возможность генерирования N сигналов как с одинаковыми, так и различными характеристиками.

Отметим, что используемые в монографии термины «генерирование случайных процессов» и «моделирование случайных процессов» являются синонимами.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании некоррелированных временных рядов с заданными законами распределения, проверка качества генерирования.

1.1. Теоретические основы лабораторной работы

Необходимость в решении этой задачи возникает при исследовании методом имитационного моделирования алгоритмов для анализа законов распределения случайных величин, процессов, потоков событий.

Для генерирования ПСП с заданным законом распределения (основные виды моделей приведены в приложении П.1) применяются различные методы [11]:

- метод нелинейного преобразования (обратной функции);
- приближенный метод (метод кусочно-линейной аппроксимации закона распределения);
- метод исключения (метод Неймана) и т.д.

Рассмотрим более подробно первые два.

Для решения задачи моделирования ПСП с заданным законом распределения случайный процесс подвергается нелинейному преобразованию. Теоретической базой для определения вида и характеристик нелинейной функции является теория функций случайного аргумента [3].

Допустим, случайная величина X имеет плотность распределения вероятности $f_x(x)$, а необходимо получить выходную величину Y с плотностью распределения вероятностей $f_y(y)$. Таким образом, мы должны определить вид нелинейной функции преобразования $y=g(x)$.

Известно, что

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (1.1)$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (1.2)$$

Допустим, что обратная функция преобразования

$$x = t(y). \quad (1.3)$$

Тогда

$$t'(y) = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (1.4)$$

Если в качестве входной ПСП выбрать «белый шум» с $f_x(x) = 1$, то

$$x = t(y) = F_y(y). \quad (1.5)$$

Отсюда можно определить вид нелинейной функции преобразования

$$y = g(x) = F_y^{-1}(x). \quad (1.6)$$

Графическая интерпретация метода инверсного преобразования представлена на рис. 1.1.

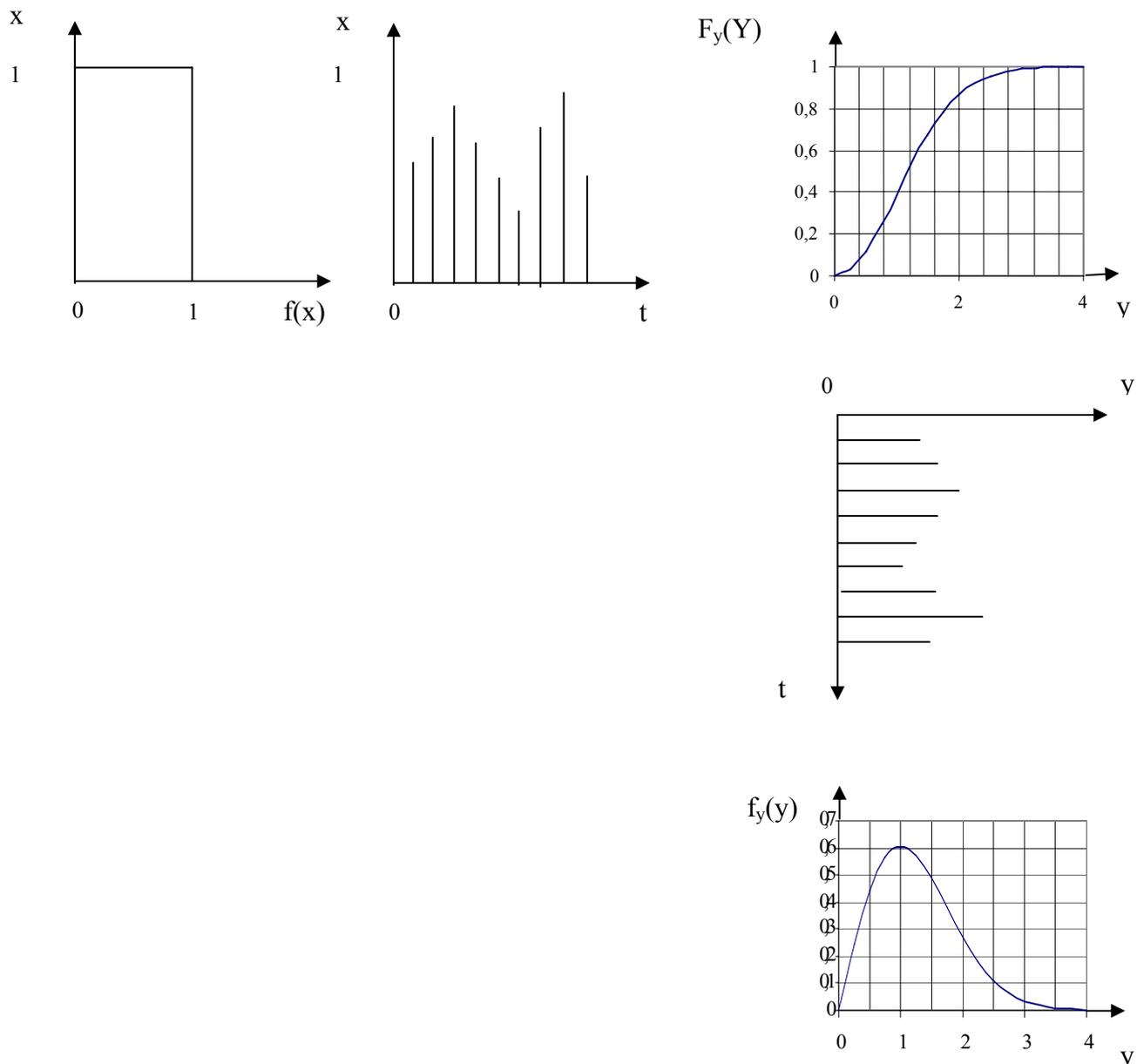


Рисунок 1.1. Моделирование ПСП с заданным видом закона распределения вероятностей

Обычно можно найти аналитическое решение $F_y^{-1}(x)$ только для ограниченного числа случаев. Примеры интегральных функций распределения и обратных им функций приведены в приложении П.3.

Как правило, при решении важных задач методом имитационного моделирования исследователь проверяет качество генерирования псевдослучайной последовательности. Эта задача решается с использованием критериев согласия. Отличие применения этих критериев при оценке качества генерирования от классической задачи сглаживания статистических рядов заключается в том, что исследователь априори задаёт закон распределения и требуемые значения параметров псевдослучайной (сгенерированной) последовательности, а при решении задачи сглаживания необходимо решить задачу идентификации закона распределения.



Рисунок 1.2. Блок-схема проверки качества генерирования ПСП

При оценке качества генерирования псевдослучайной последовательности в качестве теоретического закона распределения возможно использование:

1. заданного закона распределения с заданными параметрами;
2. заданного закона распределения с уточненными параметрами путём решения задачи аппроксимации закона распределения тем или иным способом.

Рассмотрим последовательность этапов решения задачи оценки качества генерирования применительно ко второму случаю, как более общему (см. рис. 1.2).

После ввода исходных данных первым шагом в решении этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда $\{x_i\}_{i=1}^N$. Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. определить диапазон изменения статистического ряда $x_{\min}-x_{\max}$.
2. определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M}, \quad (1.7)$$

где M - количество дифференциальных коридоров [2].

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в j -ый дифференциальный коридор:

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{ij}, \quad (1.8)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x} \right] + 1 = j \wedge x_i = x_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_i = j \Delta x; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.9)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что $\delta_{i,j+1}=1/2$, если $x_i=j\Delta x \wedge x_i \neq x_{\max}$, т.е. в этом случае в j и $j+1$ коридоры добавляется по $1/2$.

4. Если частота попадания в какой-либо k -ый дифференциальный коридор мала ($p_j < 0,01 \div 0,02$), для уменьшения влияния случайности его объединяют с $k+1$ коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходным материалом для построения гистограммы является сгруппированный по дифференциальным коридорам статистический ряд, представленный, как правило, в виде таблицы (см. таблицу 1.1), где $\bar{f}_j = f_j / \Delta x_j$.

Статистический ряд

Таблица 1.1

f_j	0,099	0,1006	0,1003	0,0989	0,099	0,1067	0,0954	0,1008	0,0997	0,0996
$j \Delta x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
\bar{f}_j	0,99	1,006	1,003	0,989	0,99	1,067	0,954	1,008	0,997	0,996

После построения гистограммы и оценки статистических характеристик решают задачу уточнения параметров распределения, используя тот или иной метод аппроксимации закона распределения [3, 7-8].

Заключительным этапом решения задачи является проверка качества генерирования с использованием критериев согласия. Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу H , состоящую в том, что случайная величина X подчиняется заданному закону распределения. Введем случайную величину U , являющуюся мерой расхождения теоретического и статистического распределений. Закон распределения этой случайной величины $f_u(u)$ зависит как от закона распределения случайной величины X , так и от числа опытов N . Если гипотеза H верна, то $f_u(u)$ определяется законом распределения $f_a(x)$ и числом опытов N .

Вычислим вероятность события $P(u \leq U) = P_d$. Если эта вероятность мала, то гипотезу следует отвергнуть как маловероятную, если значительна - экспериментальные данные не противоречат гипотезе H .

Выберем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями случайную величину

$$U = \sum_{j=1}^M c_j (f_j - p_j)^2, \quad (1.10)$$

где c_j - веса;

$p_j = F_a(x_{j+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - F_a(x_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ - теоретические вероятности, соответствующие f_j .

Коэффициенты c_j вводятся для учёта веса отклонений, относящихся к разным разрядам. Так отклонения могут быть малозначительными, если вероятность p_j велика, и наоборот.

К. Пирсон показал, что если положить $c_j = N/p_j$, то при большом N $f_u(u)$ не зависит от $f_x(x)$ и N , а зависит только от числа разрядов M . Этот закон при увеличении N приближается к закону χ^2 с r степенями свободы, плотность распределения вероятностей которого определяется выражением [3]:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ - гамма-функция. (1.12)

В этом случае мера расхождения обозначается χ^2 и определяется выражением:

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^M \frac{(p_j - p_j)^2}{p_j}. \quad (1.13)$$

Иногда для удобства вычислений, чтобы избежать вычислений с промежуточными малыми числами, выражение (1.13) представляют в виде

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{(n_j - N p_j)^2}{N p_j}, \quad (1.14)$$

где n_j - число попаданий x в j -ый дифференциальный коридор.

Распределение χ^2 зависит от параметра r , называемого числом «степеней свободы». Число степеней свободы равно $r=M-k$, где k – число независимых наложенных условий (связей), например, условие нормировки, совпадение теоретических и статистических моментов и т.д.

Для распределения χ^2 составлены специальные таблицы (см. приложение П.6). Пользуясь ими, можно для каждого значения χ^2 и числа степеней свободы r найти вероятность того, что величина, распределенная по закону χ^2 , превзойдет это значение. Если эта вероятность мала, то результат опыта следует признать противоречащим гипотезе о том, что случайная величина распределена по предполагаемому закону. Если на практике она оказывается меньше, чем 0,1, рекомендуется проверить результаты эксперимента и, если это возможно, повторить его.

Схема применения критерия сводится к следующему:

1. строится гистограмма входной последовательности;
2. определяется мера расхождения χ^2 по формуле (1.13) или (1.14);
3. определяется число степеней свободы $r=M-k$;
4. по r и χ^2 по таблице приложения П.6 определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение χ^2 с r степенями свободы, превзойдет данное значение χ^2 ;
5. если вероятность P_d велика, то гипотеза H принимается.

Следует отметить, что с помощью критериев согласия можно только в некоторых случаях опровергнуть гипотезу H . Если вероятность P_d велика, то это указывает лишь на то, что гипотеза H не противоречит опытным данным [3].

Кроме критерия Пирсона на практике применяется критерий А.Н. Колмогорова [3].

В качестве меры расхождения между статистическим и теоретическим распределениями рассматривается величина, равная

$$\delta = \max \left| \hat{F}(x) - F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right|. \quad (1.15)$$

Обоснованием выбора этой меры расхождения являются следующие обстоятельства:

- простота определения δ ;
- при неограниченном числе испытаний N вероятность неравенства $\delta \sqrt{N} \geq \lambda$ стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \lambda^2}. \quad (1.16)$$

Значения $P(\lambda)$, подсчитанные по формуле (1.16), приведены в приложении П.7.

Схема применения этого критерия сводится к следующему:

1. строятся статистическая и теоретическая функции распределения;
2. по графикам определяется δ ;
3. вычисляется $\lambda = \delta \sqrt{N}$;
4. по таблице приложения П.7 определяется $P(\lambda)$;
5. гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P_d $\lambda < \lambda_{1-P_d}$;
6. Если вероятность P_d мала, гипотезу H следует отвергнуть. При сравнительно больших $P(\lambda)$ её можно считать совместимой с опытными данными.

Следует отметить, что критерий Колмогорова можно применять, когда известно теоретическое распределение и численные значения его параметров, например, при проверке качества сгенерированной псевдослучайной последовательности с заданным законом распределения, расчете параметров функций распределения. Если применять этот критерий в случаях, когда параметры теоретического распределения определяются по статистическим данным, критерий даёт завышенное значение $P(\lambda)$. В этом случае мы рискуем принять неправильную гипотезу.

Если уточнение параметров распределения сгенерированной последовательности не производится, т.е. не решается задача аппроксимации законов распределения, оценка качества генерирования ПСП производится с использованием в качестве теоретического распределения заданного закона с заданными параметрами.

Для уточнения параметров распределения часто применяется метод моментов [3, 7-8]. Согласно этому методу, параметры распределения $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ выбираются таким образом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны статистическим характеристикам. При составлении уравнений для определения неизвестных параметров, как правило, выбирают моменты низших порядков. Общими рекомендациями являются здравый смысл и простота решения полученной системы уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

Определим параметры аналитического выражения плотности распределения вероятностей генератора «белого шума» - стандартной программы ПЭВМ. Теоретически закон распределения должен быть равномерным $f_x(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$ с параметрами $a=0$ и $b=1$.

Гистограмма приведена на рис. 1.2, а данные для расчётов - в таблице 1.1.

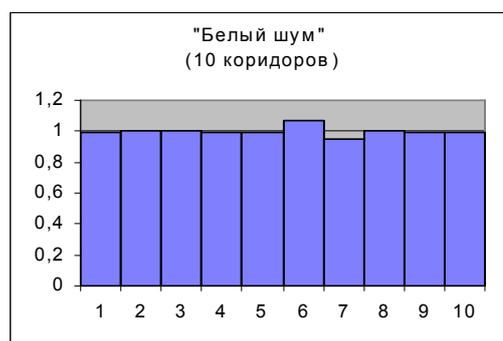


Рисунок 1.2

Уравнения для определения двух неизвестных параметров распределения могут быть составлены различными способами. Потребуем, например, чтобы у статистического и теоретического распределений совпадали математическое ожидание и дисперсия:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_x = \frac{a+b}{2}; \\ \hat{\sigma}_x = \frac{(b-a)^2}{2}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Отметим, что оценка начальных моментов статистического ряда определяется выражением:

$$\hat{\mu}_k = \sum_{j=1}^M \bar{x}_j^k f_j, \quad (1.18)$$

где \bar{x}_j - среднее значение j интервала,

а центральных -

$$\hat{\mu}_k = \sum_{s=0}^k (-1)^s C_k^s \hat{\alpha}_{k-s} \hat{m}_x^s. \quad (1.19)$$

Эта система уравнений имеет аналитическое решение:

$$\begin{cases} a = \hat{\mu}_x - \sqrt{3} \hat{\sigma}_x; \\ b = \hat{\mu}_x + \sqrt{3} \hat{\sigma}_x. \end{cases} \quad (1.20)$$

Для данного статистического распределения

$$\begin{cases} \hat{\mu}_x = 0,49994; \\ \hat{\sigma}_x = 0,082208; \\ \hat{\epsilon}_x = 0,286719. \end{cases}$$

Подставив найденные оценки в выражения (1.20), получим: $a=0,003327$, $b=0,996553$. Отсюда видно, что рассчитанные параметры закона распределения незначительно, но отличаются от заданного при генерировании. Следовательно, при проведении статистического моделирования целесообразно проверять качество программных генераторов и оценивать его реальные характеристики.

Применив критерий Пирсона, вычислим по формуле (1.14) значение $\chi^2 = 7,77$, что соответствует вероятности $P_d > 0,3$ (см. приложение П.6). Таким образом, можно принять гипотезу о том, что данный статистический ряд соответствует равномерному распределению с найденными параметрами.

Преимуществом метода моментов является простота определения параметров распределения, недостатком - неоднозначность в выборе уравнений, которых может быть большое количество. Так, например, оценив $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$, при определении параметра распределения Рэлея σ возможно использование следующих уравнений (см. приложение П.1):

$$\sigma = \frac{\mathfrak{A}_1}{1,25}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}_2}{0,43}}; \quad \sigma = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{0,1775}}; \quad \sigma = \sqrt[4]{\frac{\mathfrak{A}_4}{0,5978}}. \quad (1.21)$$

Результаты расчетов при определении параметра закона распределения Рэлея при различном числе дифференциальных коридоров M и различном объеме выборки приведены в таблице 1.2. При этом, с помощью ЭВМ генерировалась псевдослучайная последовательность, распределенная по закону Рэлея с параметром распределения $\sigma = 1$, а параметр распределения определялся в результате решения одного из уравнений (1.21) через соответствующие моменты.

Результаты экспериментальных исследований при определении параметра закона распределения Рэлея

Таблица 1.2

M	N	\mathfrak{A}_1	\mathfrak{A}_2	\mathfrak{A}_3	\mathfrak{A}_4
10	300	0,9944	1,0585	1,0626	1,0502
	1000	1,0051	1,0320	1,0565	1,040
	5000	0,9947	0,9848	1,0040	0,9931
	10000	1,0086	1,0039	1,0000	1,0074
20	300	1,0209	1,0162	1,0692	1,0378
	1000	0,9989	1,0068	1,0130	0,9975
	5000	1,0086	1,0079	1,0201	1,0141
	10000	1,0072	1,0065	1,0220	1,0165

Анализ результатов показывает, что при составлении уравнений для определения параметров теоретического распределения по методу моментов необходимо выбирать моменты более низких параметров.

Аналитические решения систем уравнений для типовых законов распределений приведены в приложении 1.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить систему моделирования (см. приложение П.22).

1.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным законом распределения с объемом выборки, равным $N=500$ (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).

2. Проверить качество генерирования, воспользовавшись для определения параметров аналитического выражения законов распределения методом моментов.

3. Определить погрешности оценки параметров модели.
4. Пункты 1-3 повторить для объемов выборки $N=1000, 2000, 5000$.

1.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
 2. Метод и алгоритм моделирования некоррелированных временных рядов для заданного закона распределения.
 3. Обратная функция закона распределения вероятностей.
 4. Пример реализации некоррелированного временного ряда.
 5. Примеры гистограмм для различного объёма выборки – $N=500, 1000, 2000, 5000, M=20$.
 6. Значения параметров, определенные по методу моментов, и модуль относительной погрешности оценки параметров закона распределения для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Для определения параметра закона распределения и вычисления погрешности оценки параметра можно воспользоваться пакетом Excel.
 7. Графическая зависимость максимальной по модулю относительной погрешности оценки параметров закона распределения от объёма выборки - $N=500, 1000, 2000, 5000$. Для построения графических зависимостей можно воспользоваться пакетом Excel.
 8. Выводы по работе.
- Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для экспоненциального закона распределения приведен ниже (пункты 4-7 отчёта).

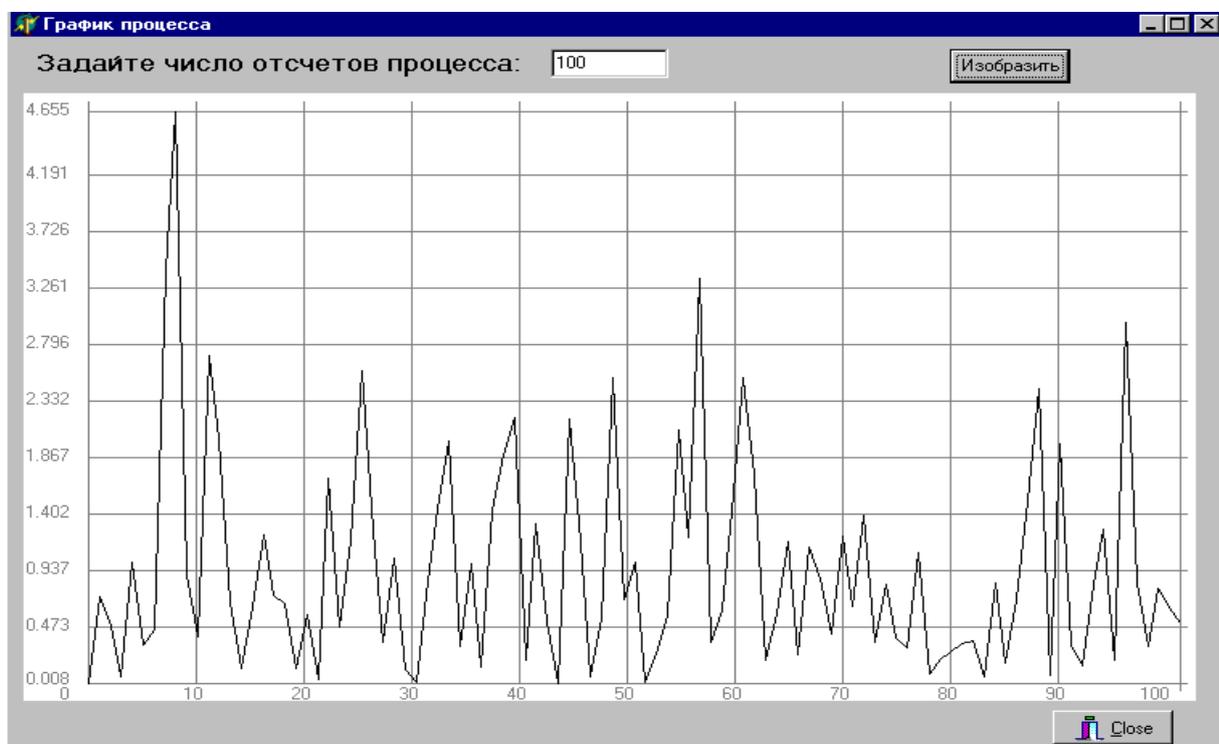


Рисунок 1.3. Результаты генерирования ПСП с экспоненциальным законом распределения методом инверсного преобразования

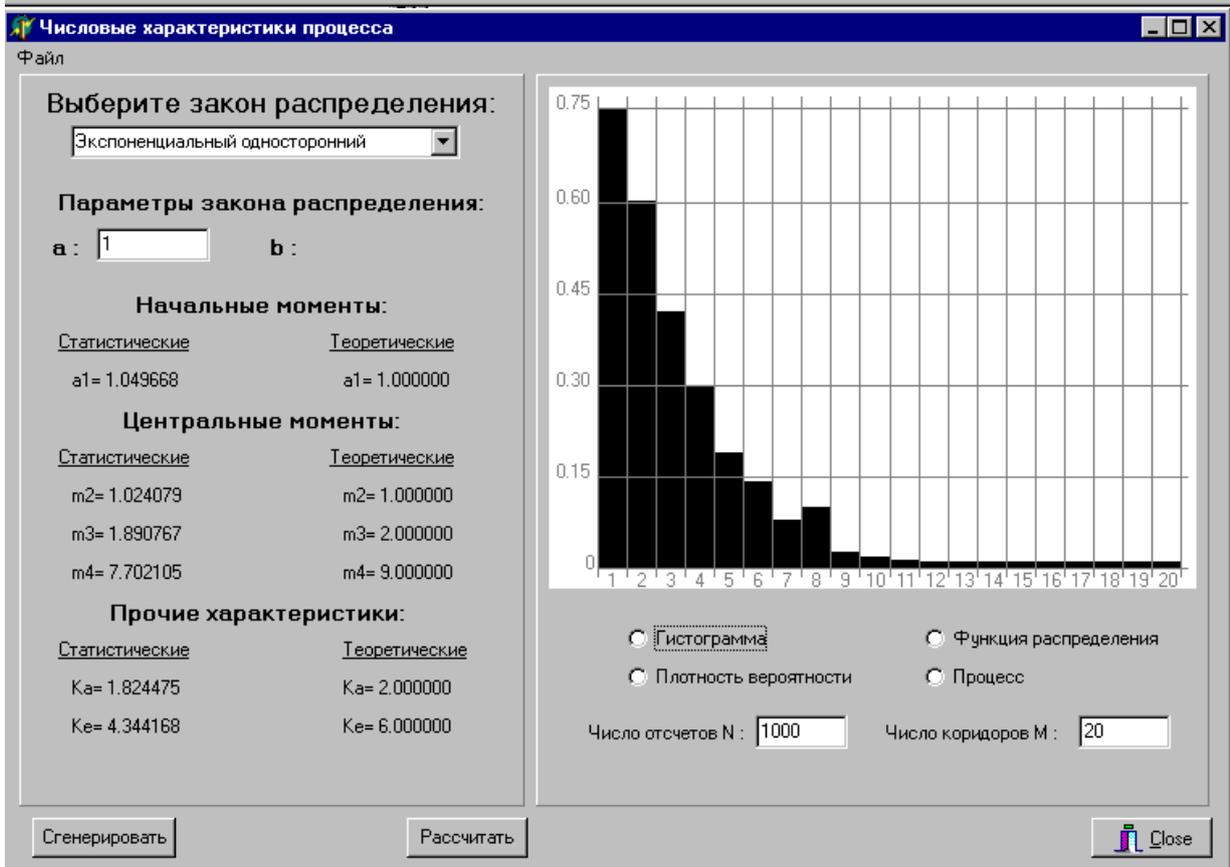
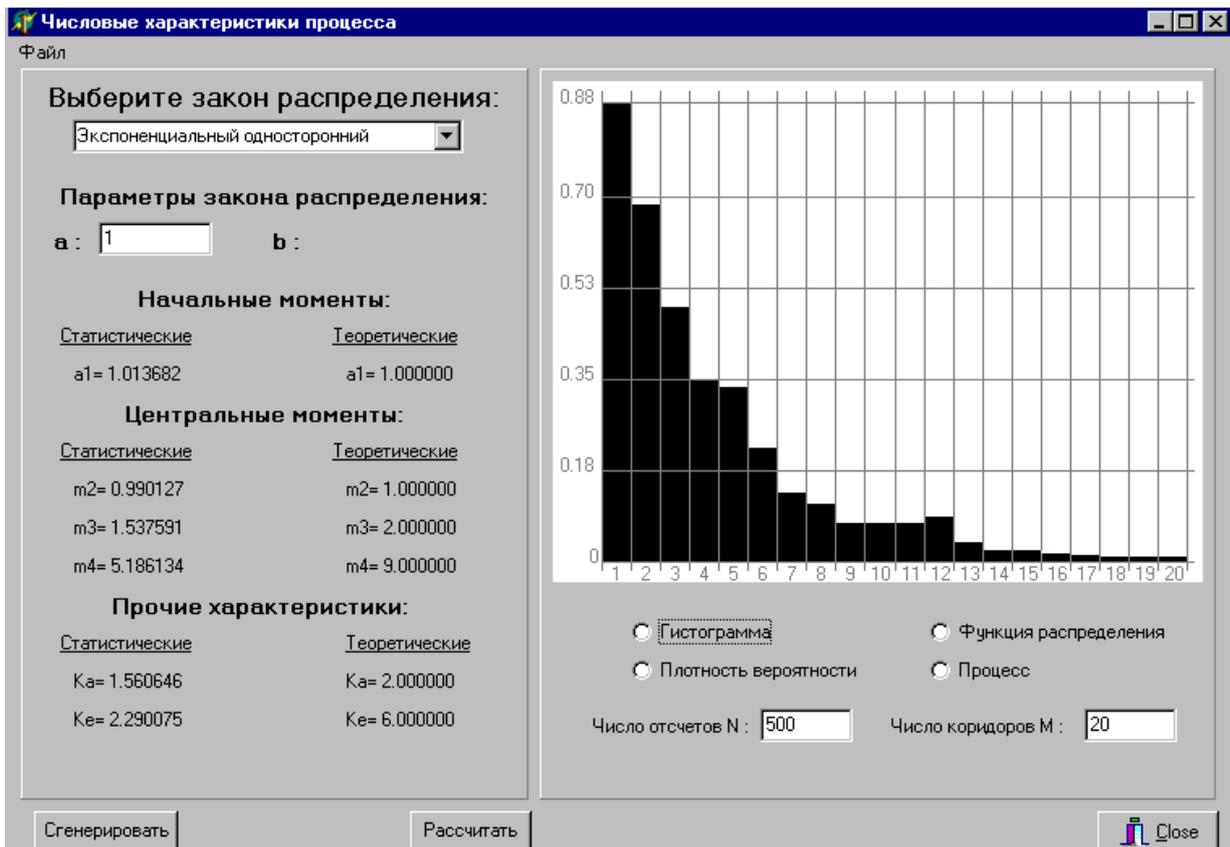


Рисунок 1.4. Пример результатов генерирования ПСП с экспоненциальным законом распределения

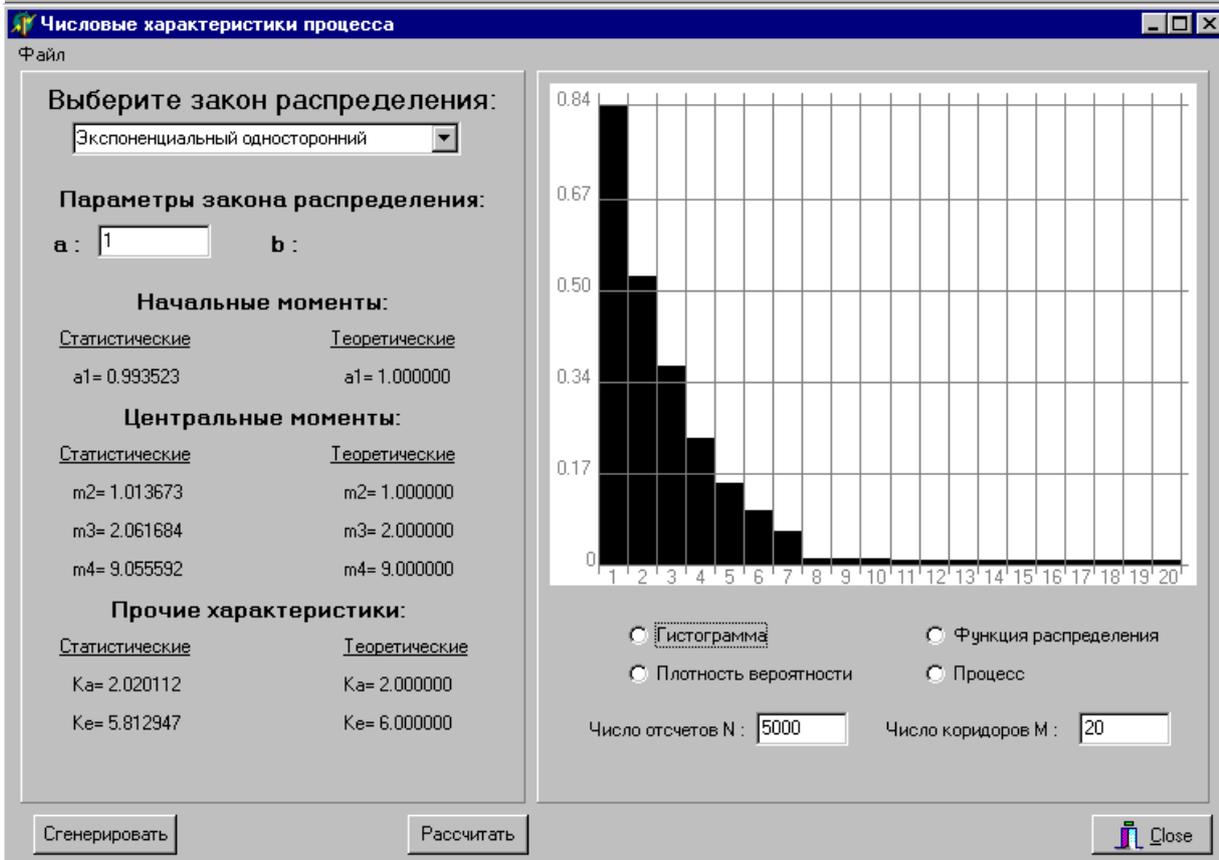
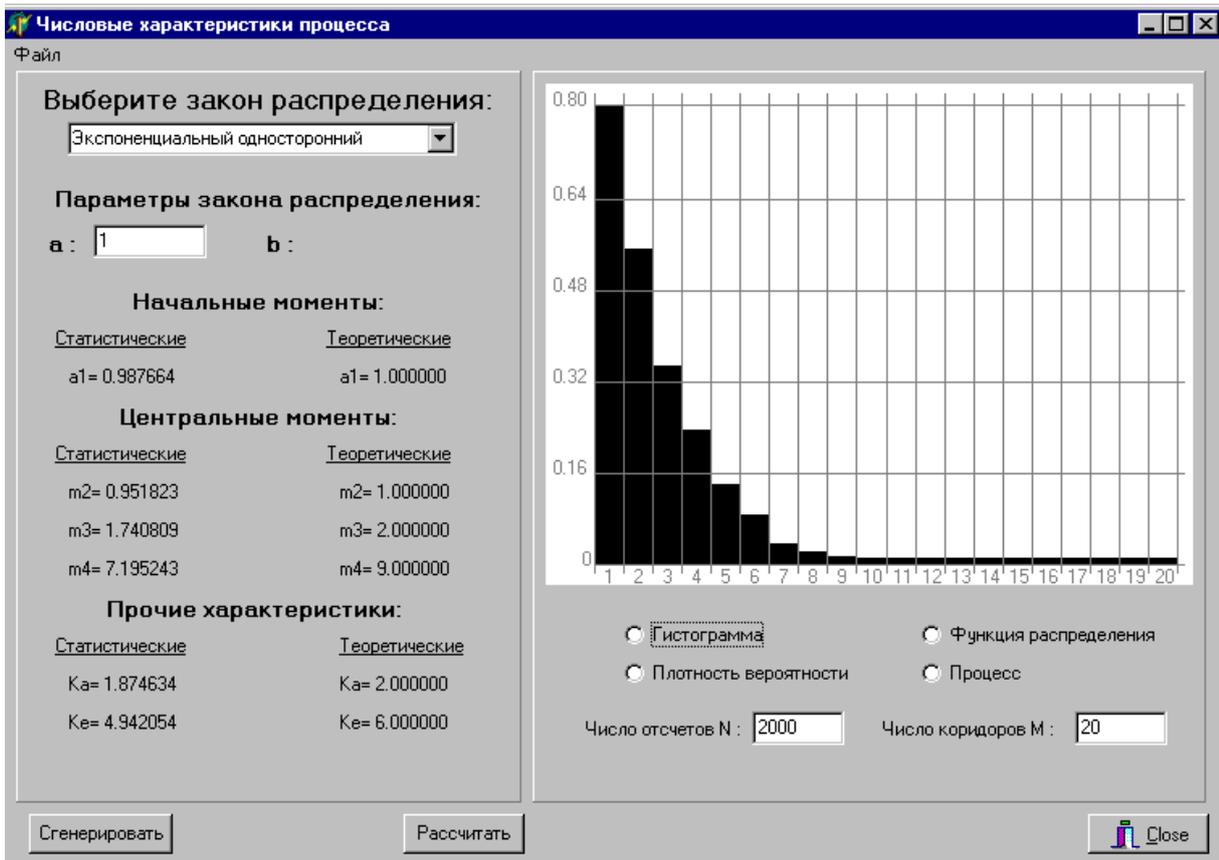


Рисунок 1.5. Пример результатов генерирования ПСП с экспоненциальным законом распределения

Значения параметров, определенные по методу моментов, и относительные погрешности оценки параметров закона распределения

Таблица 1.3

N=500				N=1000			
№	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}_1$	$\delta = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$	№	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}_1$	$\delta = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$
1	0,97723	1,023301	0,023301	1	0,94009	1,063728	0,063728
2	0,96093	1,040659	0,040659	2	0,99149	1,008583	0,008583
3	0,94707	1,055888	0,055888	3	1,01004	0,99006	-0,00994
4	1,0122	0,987947	-0,01205	4	0,98566	1,014549	0,014549
5	1,01325	0,986923	-0,01308	5	1,02001	0,980383	-0,01962
6	1,06513	0,938853	-0,06115	6	0,92825	1,077296	0,077296
7	1,04756	0,954599	-0,0454	7	1,02934	0,971496	-0,0285
8	0,98242	1,017895	0,017895	8	1,0109	0,989218	-0,01078
9	1,01613	0,984126	-0,01587	9	0,99031	1,009785	0,009785
10	0,90731	1,102159	0,102159	10	1,0059	0,994135	-0,00587
11	1,05346	0,949253	-0,05075	11	0,94411	1,059199	0,059199
12	0,97002	1,030907	0,030907	12	0,99562	1,004399	0,004399
13	0,92659	1,079226	0,079226	13	0,9987	1,001302	0,001302
14	0,94311	1,060322	0,060322	14	0,9672	1,033912	0,033912
15	0,91677	1,090786	0,090786	15	1,1127	0,898715	-0,10129
16	0,91441	1,093601	0,093601	16	0,98334	1,016942	0,016942
17	0,97835	1,022129	0,022129	17	1,01539	0,984843	-0,01516
18	0,98175	1,018589	0,018589	18	1,04018	0,961372	-0,03863
19	0,97255	1,028225	0,028225	19	0,98262	1,017687	0,017687
20	1,05078	0,951674	-0,04833	20	1,0151	0,985125	-0,01488
21	1,0076	0,992457	-0,00754	21	0,99286	1,007191	0,007191
22	0,95833	1,043482	0,043482	22	0,925	1,081081	0,081081
23	1,03565	0,965577	-0,03442	23	1,02148	0,978972	-0,02103
24	0,87468	1,143275	0,143275	24	0,97933	1,021106	0,021106
25	1,06397	0,939876	-0,06012	25	0,99113	1,008949	0,008949
26	0,95993	1,041743	0,041743	26	1,00296	0,997049	-0,00295
27	0,96412	1,037215	0,037215	27	1,00701	0,993039	-0,00696
28	1,04051	0,961067	-0,03893	28	1,01401	0,986184	-0,01382
29	0,99359	1,006451	0,006451	29	0,99266	1,007394	0,007394

Продолжение таблицы 1.3

N=2000				N=5000			
№	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}_1$	$\delta = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$	№	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}_1$	$\delta = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$
1	1,00292	0,997089	-0,00291	1	1,02181	0,978656	-0,02134
2	0,99638	1,003633	0,003633	2	0,98327	1,017015	0,017015
3	1,00708	0,99297	-0,00703	3	0,99148	1,008593	0,008593
4	0,98824	1,0119	0,0119	4	0,98502	1,015208	0,015208
5	1,02102	0,979413	-0,02059	5	1,02117	0,979269	-0,02073
6	0,99564	1,004379	0,004379	6	1,00947	0,990619	-0,00938
7	0,96806	1,032994	0,032994	7	1,00089	0,999111	-0,00089
8	0,98639	1,013798	0,013798	8	1,01286	0,987303	-0,0127
9	1,02966	0,971194	-0,02881	9	0,98589	1,014312	0,014312
10	0,99591	1,004107	0,004107	10	0,98445	1,015796	0,015796
11	0,99639	1,003623	0,003623	11	0,99633	1,003684	0,003684
12	1,02298	0,977536	-0,02246	12	0,99761	1,002396	0,002396
13	0,99853	1,001472	0,001472	13	0,99352	1,006522	0,006522
14	0,99237	1,007689	0,007689	14	1,00774	0,992319	-0,00768
15	0,99152	1,008553	0,008553	15	1,00557	0,994461	-0,00554
16	1,02363	0,976915	-0,02308	16	1,01113	0,988993	-0,01101
17	1,00942	0,990668	-0,00933	17	0,99911	1,000891	0,000891
18	1,00899	0,99109	-0,00891	18	1,00916	0,990923	-0,00908
19	0,98241	1,017905	0,017905	19	0,99684	1,00317	0,00317
20	0,98853	1,011603	0,011603	20	1,01254	0,987615	-0,01238
21	0,9678	1,033271	0,033271	21	1,00414	0,995877	-0,00412
22	1,00999	0,990109	-0,00989	22	0,99648	1,003532	0,003532
23	0,98163	1,018714	0,018714	23	1,01124	0,988885	-0,01112
24	0,95262	1,049737	0,049737	24	1,00915	0,990933	-0,00907
25	0,9806	1,019784	0,019784	25	1,00342	0,996592	-0,00341
26	1,02819	0,972583	-0,02742	26	0,98785	1,012299	0,012299
27	1,01243	0,987723	-0,01228	27	0,98125	1,019108	0,019108
28	0,99446	1,005571	0,005571	28	0,99468	1,005348	0,005348
29	0,97052	1,030375	0,030375	29	1,02684	0,973862	-0,02614

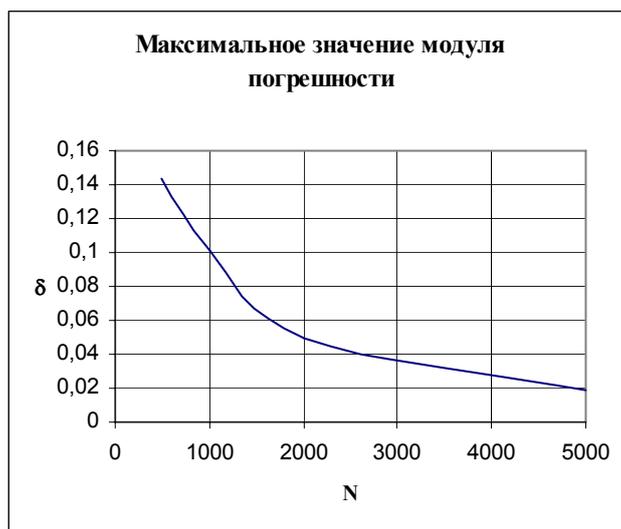
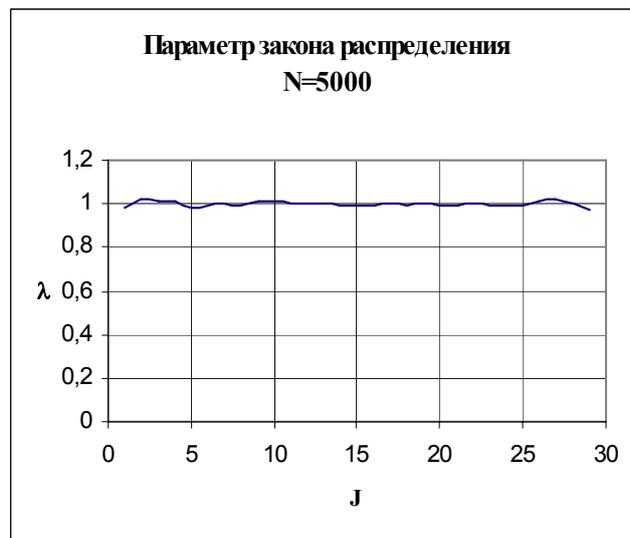


Рисунок 1.6. Результаты моделирования

1.4. Контрольные вопросы

1. Какие временные ряды называются некоррелированными?
2. Какие вероятностные характеристики характеризуют положение случайной величины?
3. Какие вероятностные характеристики характеризуют форму законов распределения случайной величины?
4. У какого закона распределения коэффициент эксцесса имеет наименьшее значение?
5. Для каких законов распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают?
6. Назовите основные методы генерирования случайных процессов.
7. Что лежит в основе метода обратной функции?
8. В чем заключается метод моментов оценки параметров законов распределения?

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИБЛИЖЕННЫМ МЕТОДОМ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании некоррелированных временных рядов с заданными законами распределения приближенным методом, проверка качества генерирования.

2.1. Теоретические основы лабораторной работы

Обычно можно найти аналитическое решение $F_y^{-1}(x)$ только для ограниченного числа случаев. Примеры интегральных функций распределения и обратных им функций приведены в приложении П.3-П.4.

Для большинства случаев интегральную функцию нельзя найти аналитически и тогда применяют приближенный метод моделирования, который основан на использовании ПСП с равномерным законом распределения, кусочно-линейной интерполяции функции распределения и решении задачи обратной интерполяции.

При кусочно-линейной интерполяции функцию распределения представим в виде:

$$F_y(y_i) = \sum_{l=1}^L \left\{ F_y(y_{l-1}) + \frac{y_i - y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}} [F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})] \right\} \mathbb{1}(y_{l-1} \leq y_i < y_l), \quad (2.1)$$

где $i=1,2,\dots,N$.

Отсюда найдем обратную функцию:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + \frac{F_y(y_i) - F_y(y_{l-1})}{F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbb{1}[F_y(y_{l-1}) \leq F_y(y_i) < F_y(y_l)]. \quad (2.2)$$

С учётом того, что при генерировании ПСП $x_l = F_y(y_l)$, получим:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + \frac{x_i - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbb{1}(x_{l-1} \leq x_i < x_l). \quad (2.3)$$

Так как координаты узловых точек $F(y_l)$ рассчитываются заранее, окончательно получим:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + (x_i - x_{l-1}) A_l \right] \mathbb{1}(x_{l-1} \leq x_i < x_l), \quad (2.4)$$

где

$$A_l = \frac{y_l - y_{l-1}}{x_l - x_{l-1}}.$$

Отсюда следует, что необходимо, задавшись допустимой погрешностью восстановления $F_y(y) \delta$, видом интерполяции, определить узловые точки $\{y_l - F_y(y_l)\}$ и A_l . Затем, воспользовавшись формулой (2.4), сгенерировать ПСП с требуемым законом распределения.

Выбор допустимой погрешности аппроксимации функции распределения $F_y(y)$ определяется в зависимости от N - числа генерируемых чисел ПСП, допустимого уровня значимости P , выбранного критерия и его значения.

Наиболее целесообразно в этом случае применить критерий Колмогорова [3], связанный с погрешностью восстановления:

$$\delta = \max |F_y^{(N)}(y) - F_y(y)|, \quad (2.5)$$

где $F_y^{(N)}(y)$ - функция распределения, определяемая экспериментально на выборке размером N ;

$F_y(y)$ - теоретическая функция распределения.

Для определенной погрешности восстановления δ и объема выборки N определяется

$$\lambda = \delta \sqrt{N}. \quad (2.6)$$

Гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P

$$\lambda < \lambda_{1-P}. \quad (2.7)$$

В приложении П.7 приведены результаты расчёта λ для различных δ и N .

Задавшись допустимым уровнем значимости, например $P=0,3$, определим $\lambda=0,97$. Гипотеза принимается, если $\lambda < 0,97$. Так, если необходимо сгенерировать $N=5000$ чисел, допустимая погрешность восстановления $\delta=0,01$.

Для расчёта узловых точек функции распределения $F_y(Y_i)$ необходимо выбрать вид интерполяции, определить диапазон изменения $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$ при заданной доверительной вероятности, интервал дискретизации аргумента Δy и число узловых точек M :

$$M = \text{ent} \left[\frac{y_{\max} - y_{\min}}{\Delta y} \right] + 1. \quad (2.8)$$

В случае применения линейной интерполяции

$$\Delta y = \sqrt{\frac{8\delta}{[F_y''(y)]_{\max}}}. \quad (2.9)$$

В приложении П.5 приведены результаты определения $[F_y''(y)]_{\max}$ и $[y_{\min}, y_{\max}]$.

При генерировании ПСП, т.е. решении задачи обратной интерполяции, возможны три варианта:

1. $\Delta y_1 = \text{const}$, $\Delta x_1 = \text{var}$ (см. рис.2.1 а));
2. $\Delta y_1 = \text{var}$, $\Delta x_1 = \text{const}$ (см. рис.2.1 б));
3. $\Delta y_1 = \text{var}$, $\Delta x_1 = \text{var}$ (см. рис.2.1 в)).

В первом варианте упрощается процедура нахождения узловых точек (интервал дискретизации определяется в соответствии с выражением (2.9)), но больше время генерирования, т.к. необходимо определять участок интерполяции. Во втором - сложнее процедура определения узловых точек, но меньше время генерирования, т.к. упрощается процедура нахождения участка интерполяции. Заметим, что решение третьей задачи аналогично решению задачи адаптивно-временной дискретизации сигнала при

выбранной модели восстановления [11]. В этом случае интервал Δy_1 определяется в соответствии с выражением:

$$\Delta y_1 = \sqrt{\frac{8\delta}{[F_y''(y)]}}. \quad (2.10)$$

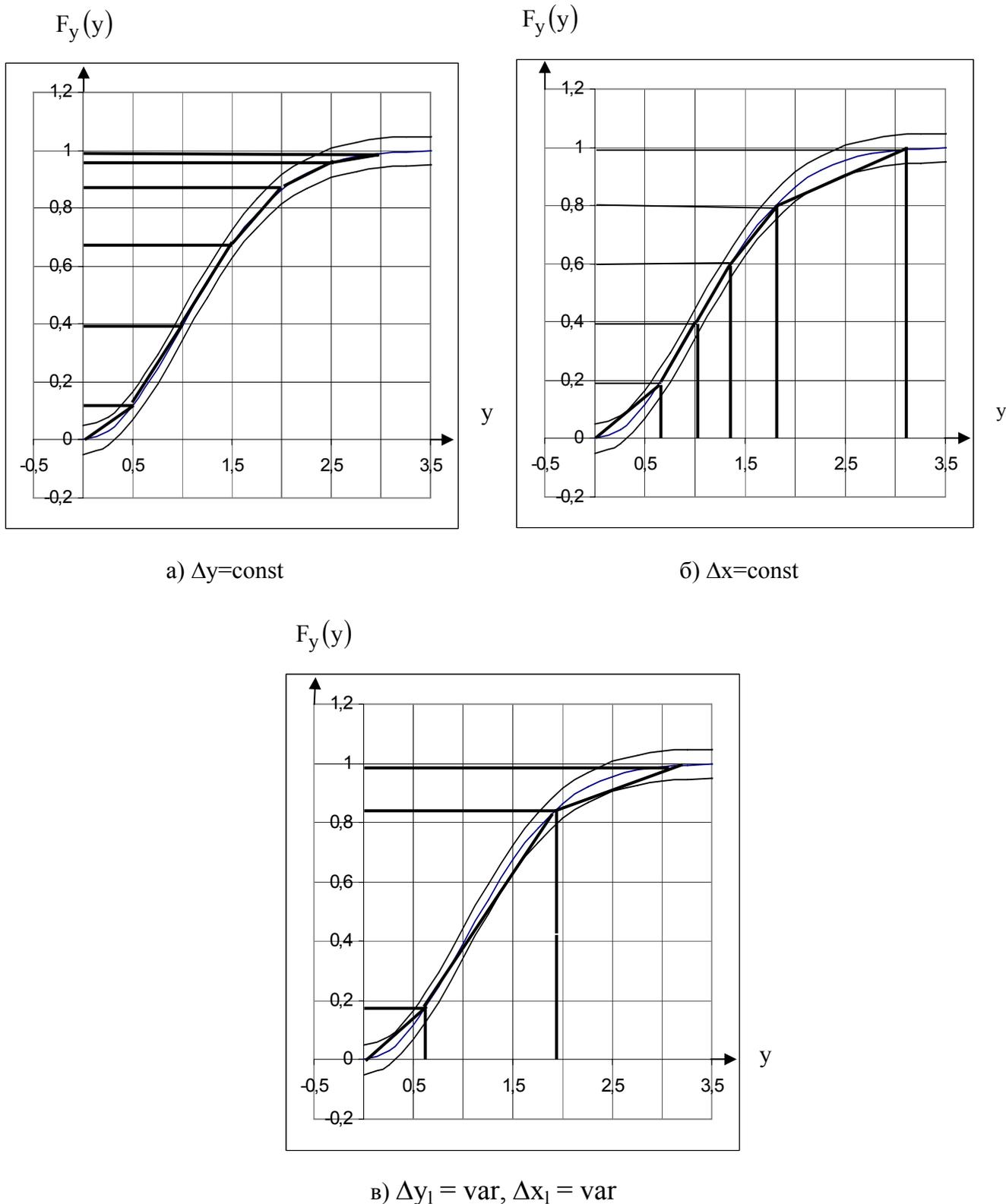


Рисунок 2.1. Формирование параметров кусочно-линейной модели

Достоинствами данного метода являются:

- возможность применения его для моделирования случайных величин со сколь угодно сложным законом распределения;
- значительно меньшее время генерирования ПСП по сравнению с методом инверсного преобразования за счёт уменьшения количества интервалов.

Недостаток - необходимость проведения некоторой подготовительной работы перед непосредственным применением процедуры генерирования ПСП (разбиение области распределения y на интервалы).

В качестве примера рассмотрим генерирование ПСП, имеющей распределение модуля многомерного вектора:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & y > 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) = \int_0^{\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{-t} t^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} dt. \quad (2.12)$$

Для генерирования ПСП необходимо задать параметры распределения. Пусть $\sigma=1$, $n=4$. Тогда выражение (2.11) примет вид:

$$F(y) = \int_0^{y^2/2} e^{-t} t dt. \quad (2.13)$$

Результаты расчёта координат узловых точек для приведенной погрешности интерполяции 1% приведены в таблице 2.1.

Координаты узловых точек

Таблица 2.1

y	0	0,7	1,3	2,5	3,1	3,9	4,2	4,3
$F(y)$	0	0,026	0,207	0,819	0,952	0,996	0,998	0,999

Из таблицы 2.1 видно, что кривая распределения имеет восемь узлов и семь линейных участков.

Гистограмма сгенерированной ПСП приведена на рис. 2.2.

Для проверки достоверности результатов генерирования использовался критерий Пирсона [3], а сами результаты представлены в таблице 2.2.

Результаты расчётов

Таблица 2.2

J	p_i	p_i^*	p_i^* / h	$(p_i^* - p_i) / p_i$
(0- 0,4)	0,00316	0,015	0,036	0,0114335
(0,4 - 0,8)	0,039	0,036	0,091	0,0001030
(0,8 - 1,2)	0,121	0,126	0,316	0,0002900
(1,2 - 1,6)	0,215	0,181	0,450	0,0056300
(1,6 - 2,0)	0,217	0,205	0,512	0,0007500

Продолжение таблицы 2.2

J	p_i	p_i^*	p_i^* / h	$(p_i^* - p_i) / p_i$
(2,0 - 2,4)	0,192	0,205	0,512	0,0008920
(2,4 - 2,8)	0,115	0,118	0,295	0,0000900
(2,8 - 3,2)	0,061	0,088	0,222	0,0012608
(3,2 - 3,6)	0,026	0,032	0,080	0,0010600
(3,6 - 4,0)	0,008	0,010	0,025	0,0003000
(4,0 - 4,4)	0,001	0,0009	0,0013	0,0020000

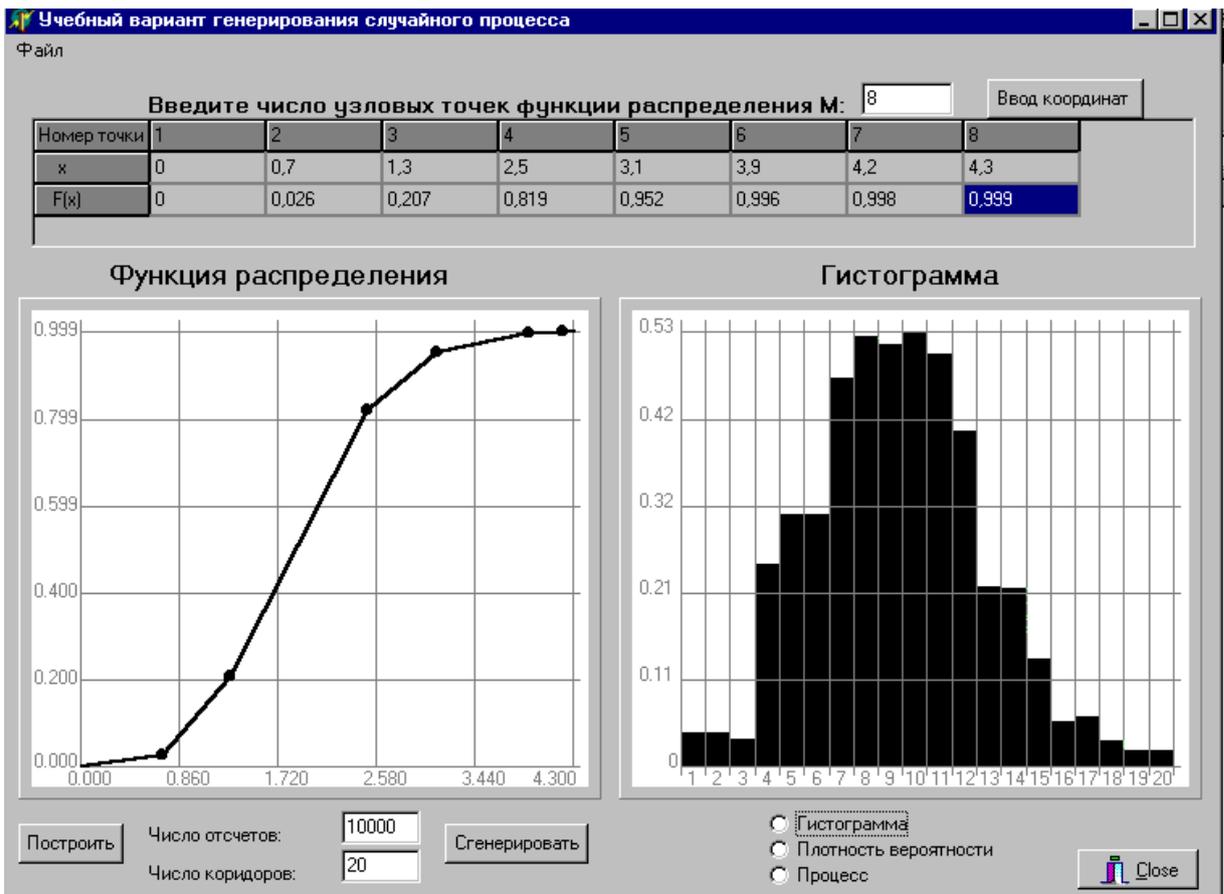


Рисунок 2.2. Гистограмма ПСП

Расчитанное значение $\chi^2 = 1,54$, число степеней свободы $k=11-3 = 8$. В приложении П.6 при выбранном уровне значимости $\alpha = 0,05$ находим $\chi_{k,\alpha}^2 = 15,51$. Так как $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$, сгенерированная ПСП согласуется с требуемым законом распределения.

Для сокращения времени генерирования увеличим погрешность интерполяции до тех пор, пока критерий согласия χ^2 перестанет выполняться.

Численные значения узлов интерполяции для приведенной погрешности 2% представлены в таблице 2.3, а гистограмма сгенерированной ПСП - на рис. 2.3.

Узлы интерполяции

Таблица 2.3

Y	0	0,98	2,55	3,75	4,3
F(y)	0	0,080	0,850	0,985	0,999

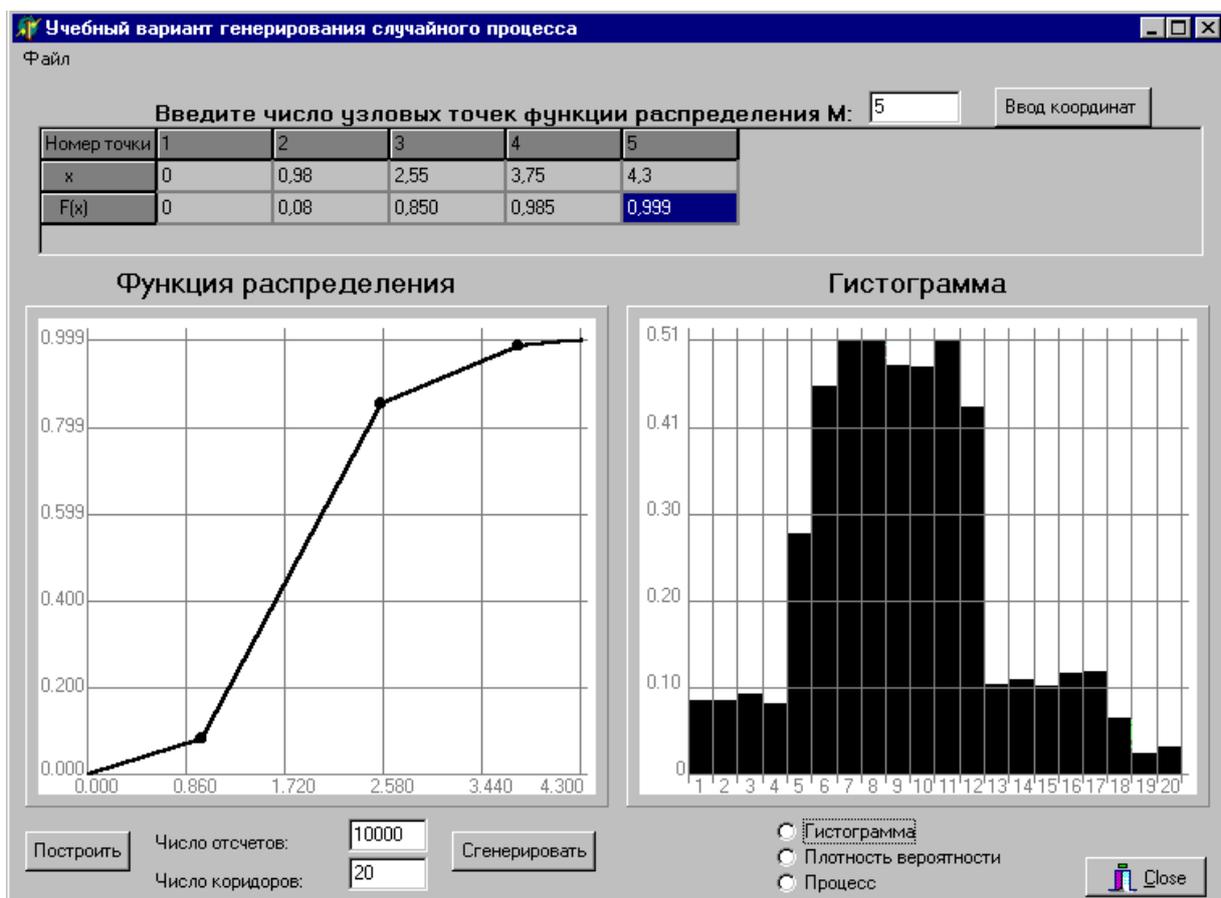


Рисунок 2.3. Гистограмма ПСП

Проведя аналогичные расчёты, получим, что $\chi^2 = 6,55$, и условие $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$ выполняется.

Результаты расчёта $\chi^2 = 12,9$ для приведенной погрешности 3% (узлы функции распределения представлены в таблице 2.4 и на рис. 2.4) показывают, что условие $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$ выполняется.

Узлы интерполяции

Таблица 2.4

Y	0	1,1	3,0	4,3
F(y)	0	0,12	0,94	0,999

При дальнейшем увеличении приведенной погрешности интерполяции критерий согласия нарушается.

Проведем исследование генераторов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. В отличие от предыдущего примера, в этом случае возможно применения метода инверсного преобразования (см. приложение П.3). Результаты сравним с приближенными методами генерирования.

На рис. 2.5 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием инверсной функции. В этом случае $\chi^2 = 7,579$, $r = 7$, $P = 0,4$.

На рис. 2.5 б) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования ПСП $\Delta x = \text{const}$. Для рассматриваемого примера $\chi^2 = 7,054$, $r = 7$, $P = 0,4$.

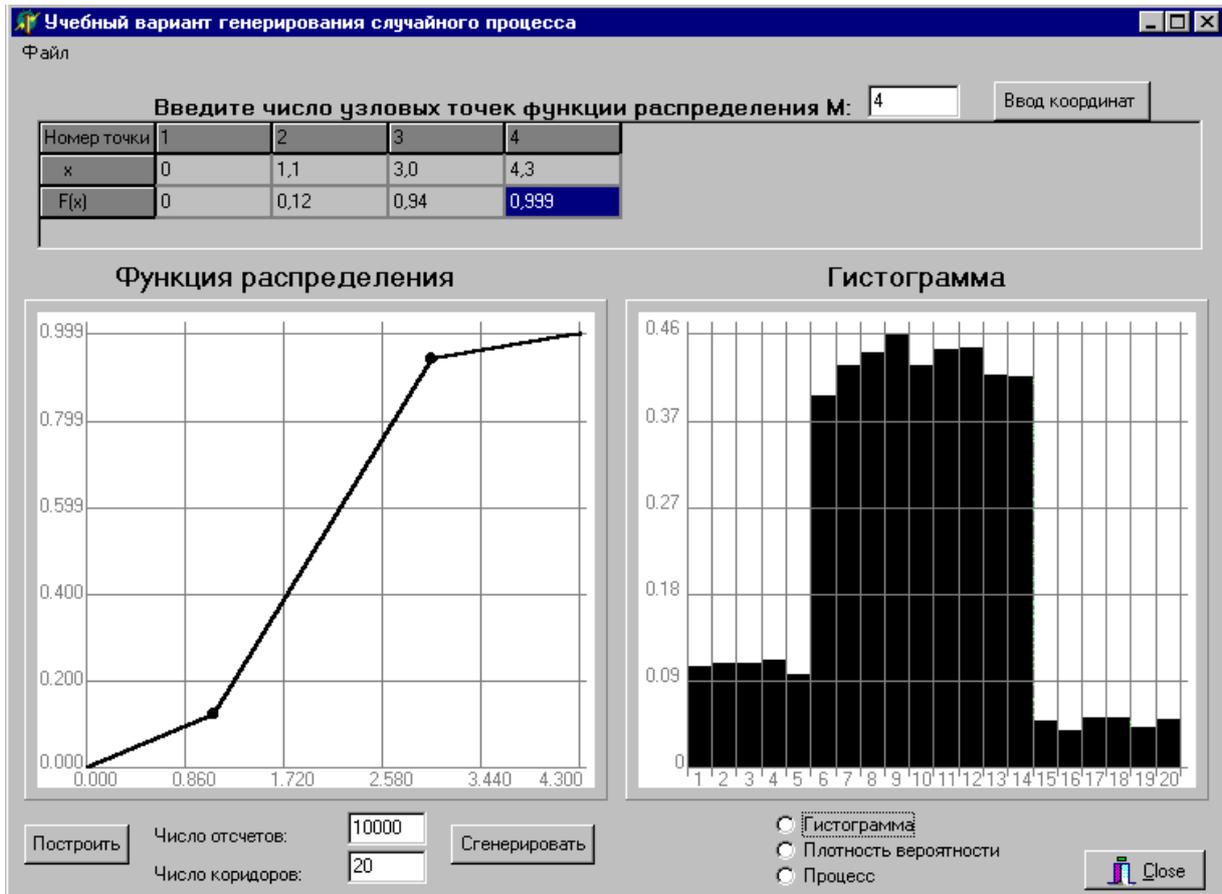
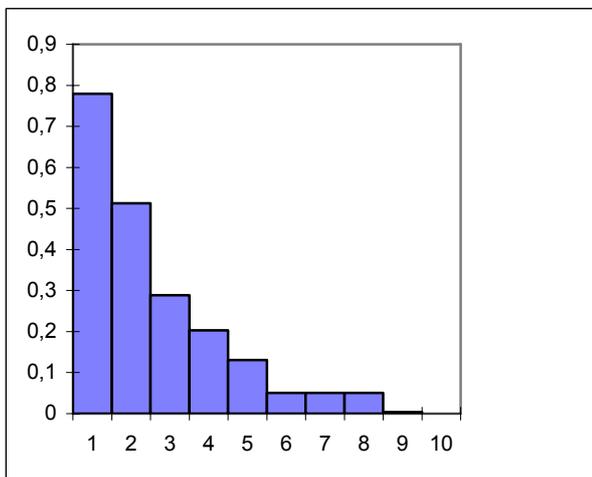
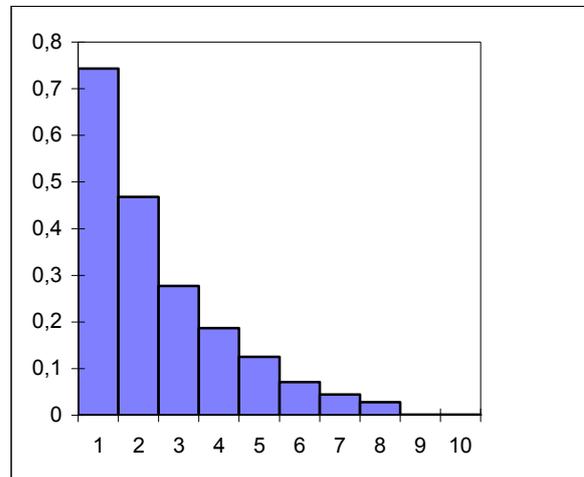


Рисунок 2.4. Гистограмма ПСП



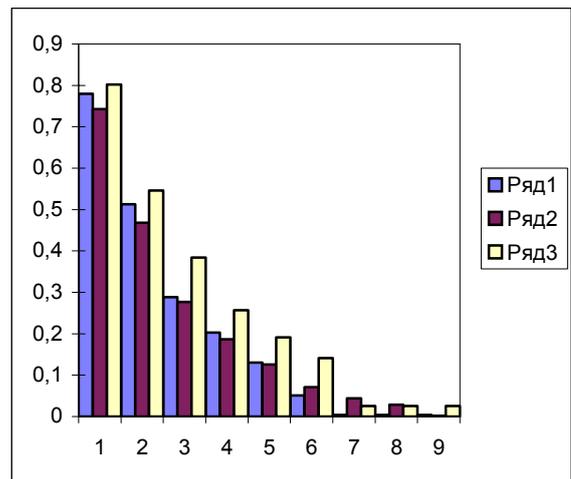
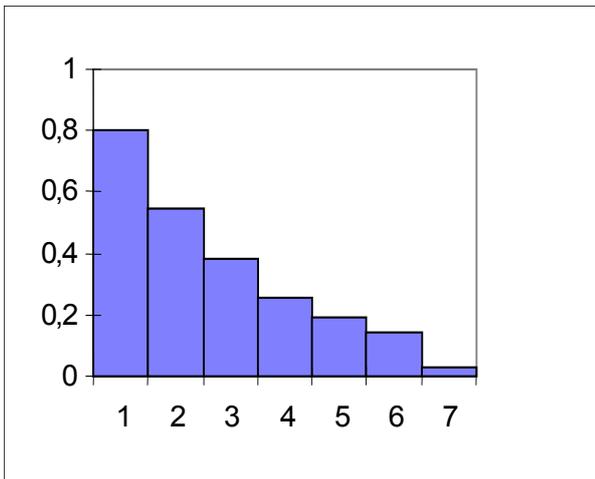
а)



б) $\Delta x = \text{const}$

Рисунок 2.5. Гистограммы экспоненциального распределения

На рис. 2.6 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования $\Delta y = \text{const}$. Для рассматриваемого примера $\chi^2 = 7,33$, $r = 5$, $P = 0,2$.



а) $\Delta y = \text{const}$ б)
Рисунок 2.6. Гистограммы экспоненциального распределения

На рис. 2.6 б) приведены все три гистограммы, полученные в ходе генерирования с использованием различных методов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. Ряд 1 - инверсный метод преобразования, ряд 2 - $\Delta x = \text{const}$, ряд 3 - $\Delta y = \text{const}$.

Таким образом, результаты экспериментальных исследований различных генераторов экспоненциального распределения подтверждают возможность применения приближенного метода генерирования ПСП.

Проведенные исследования для других законов распределения показали, что для обеспечения требуемого качества генерирования ПСП (в смысле критерия Пирсона) достаточно осуществить интерполяцию функции распределения с приведенной погрешностью 1%. В этом случае количество узлов интерполяции для большинства законов меньше 10, что значительно уменьшает общее время моделирования.

Следует отметить, что в ряде случаев при генерировании ПСП более целесообразно применять более простые методы. Так, например, при генерировании ПСП, распределенной по нормальному закону, можно воспользоваться теоремой Ляпунова [3].

Практика показала, что ПСП можно определить в виде

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n/2}{(n/2)^{1/2}}, \quad (2.14)$$

где x_i - случайная величина, распределенная по равномерному закону, а n находится в диапазоне $6 \leq n \leq 12$.

Для получения временного ряда из сгенерированной ПСП необходимо задать интервал дискретизации Δt_0 . Так как отсчеты ПСП некоррелированы, интервал дискретизации может быть любым. Его величина устанавливается исследователем самостоятельно в зависимости от характера решаемой задачи.

В качестве примера приведем результаты моделирования ПСП, обратные функции распределения которых заданы таблично.

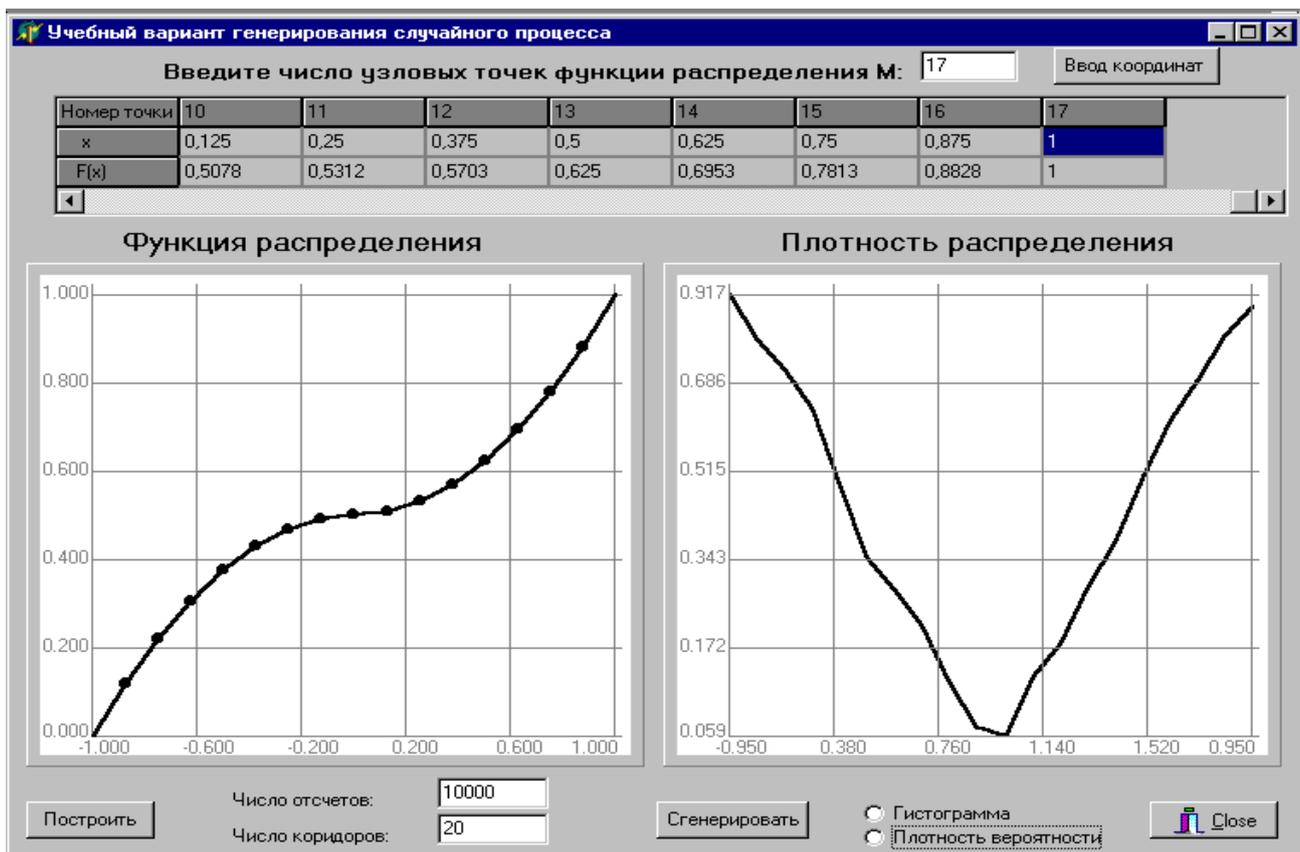


Рисунок 2.7. Результаты генерирования ПСП с антимодальным I законом распределения

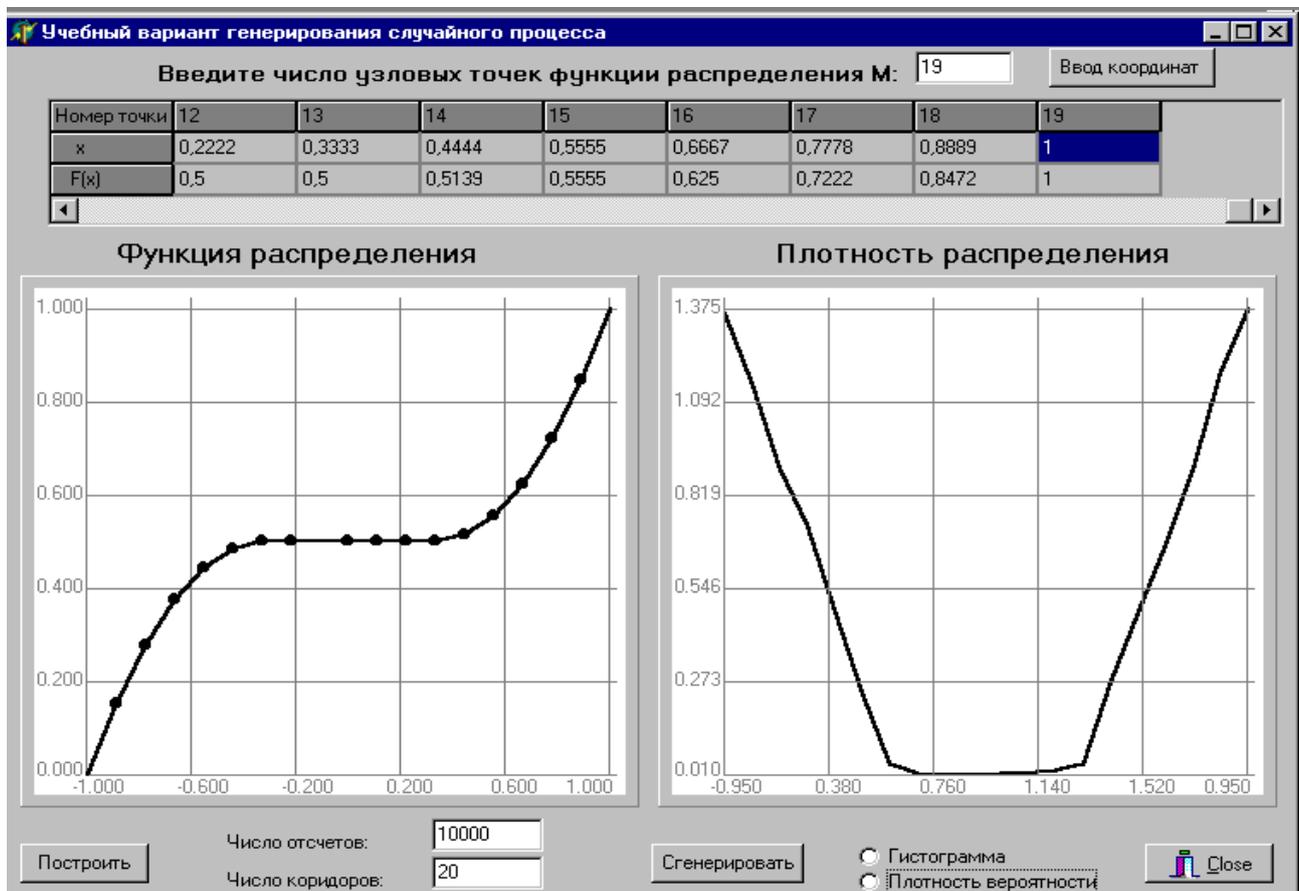


Рисунок 2.8. Результаты генерирования ПСП с антимодальным II законом распределения

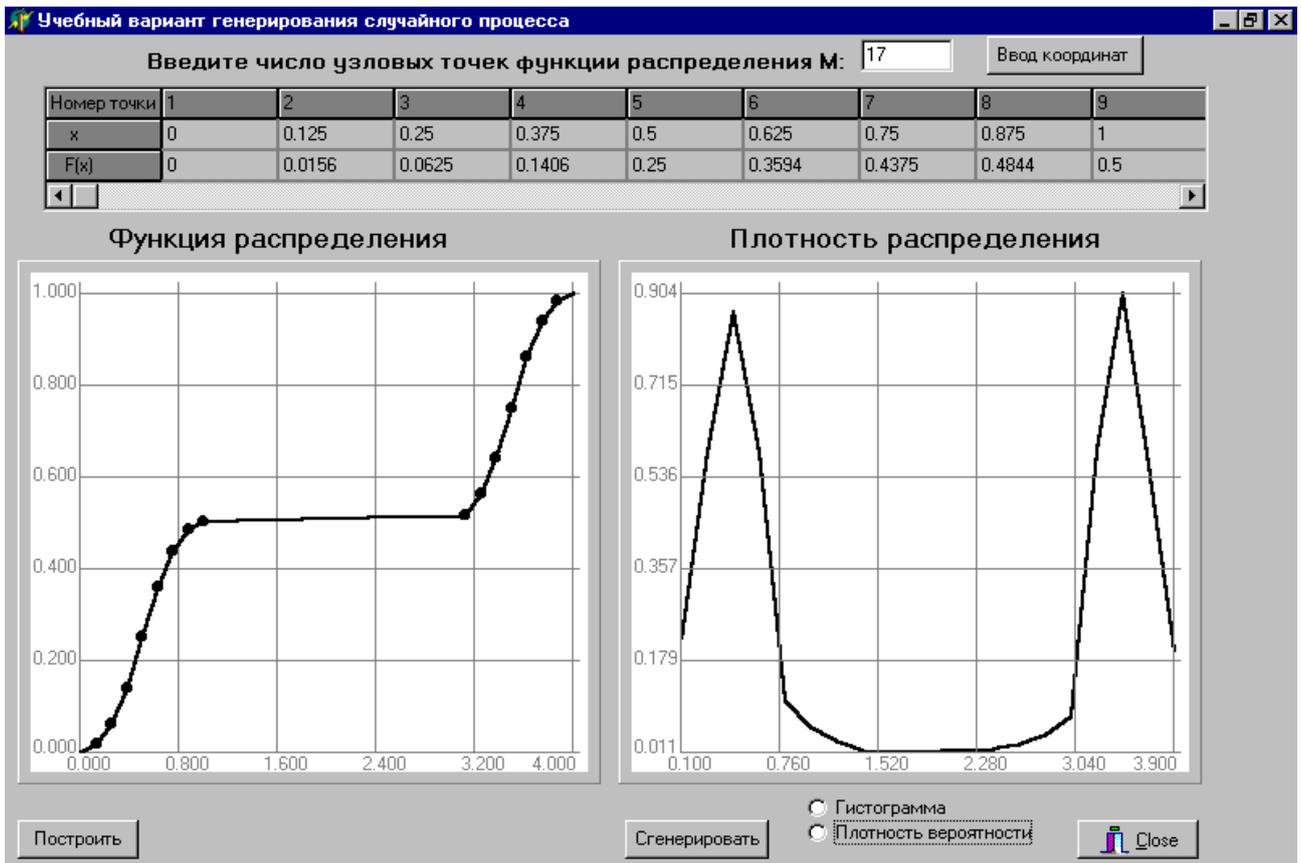


Рисунок 2.9. Результаты генерирования ПСП с двумодальным законом распределения

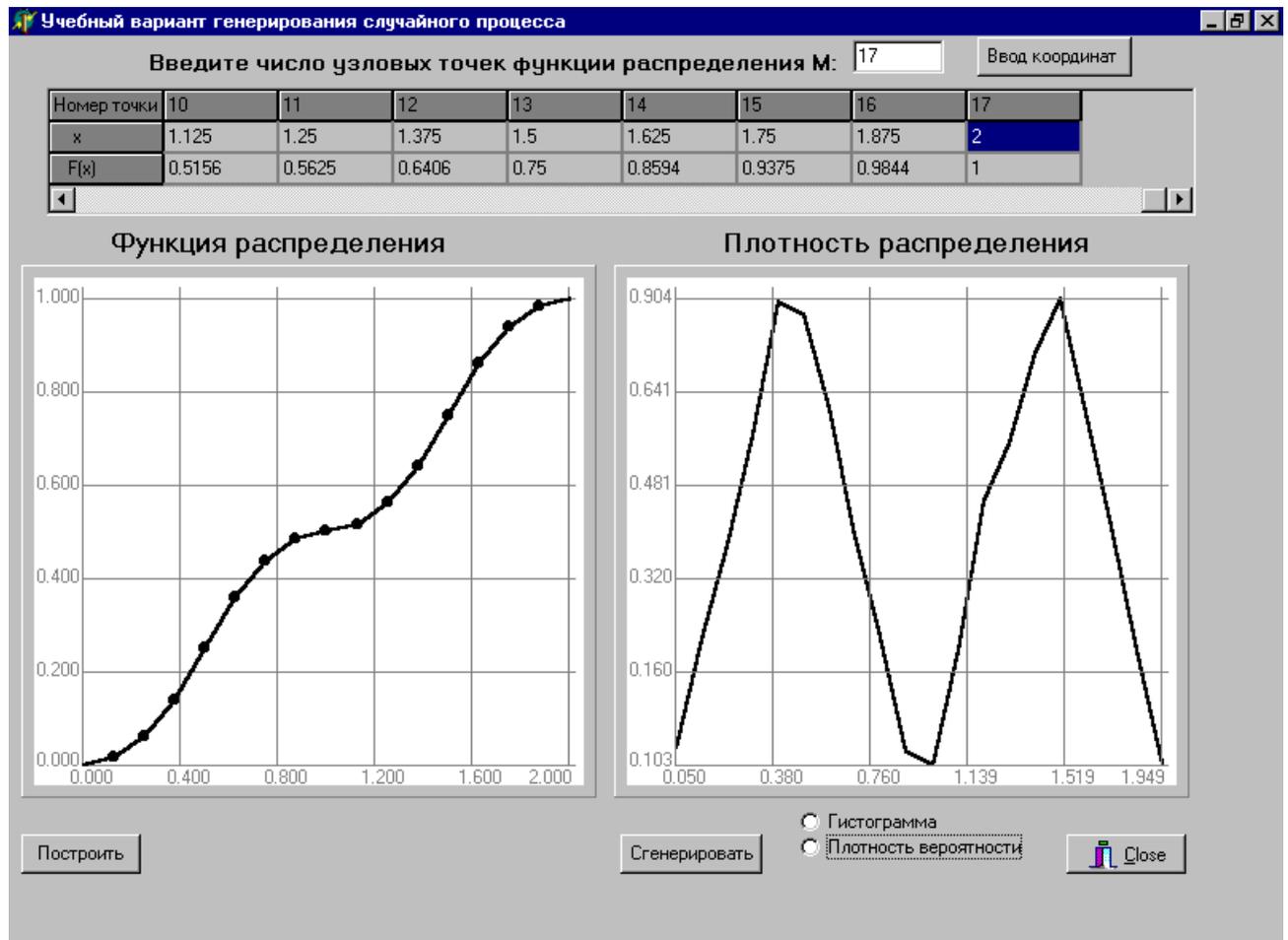


Рисунок 2.10. Результаты генерирования ПСП с двумодальным законом распределения

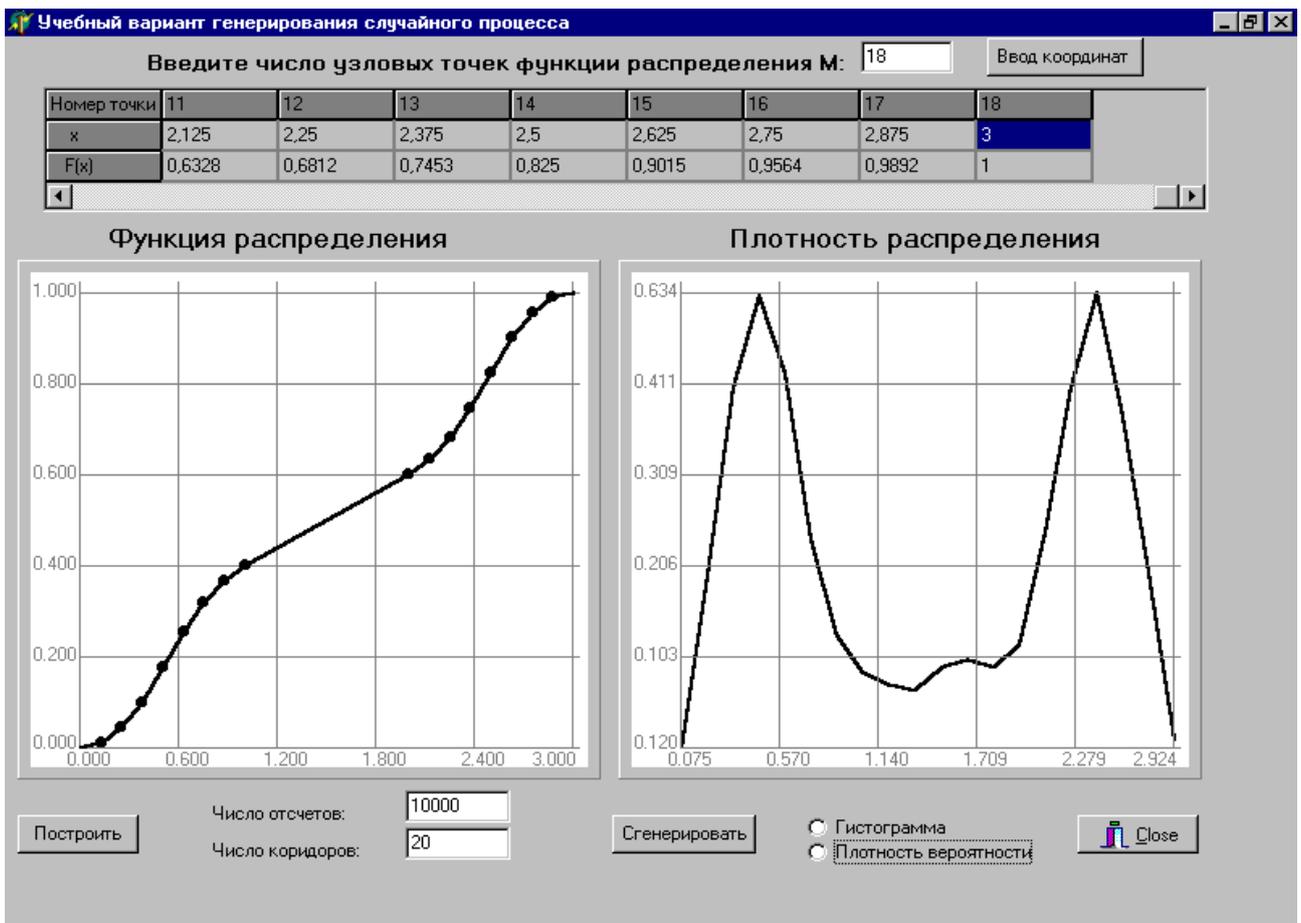


Рисунок 2.11. Результаты генерирования ПСП с двумодальным законом распределения

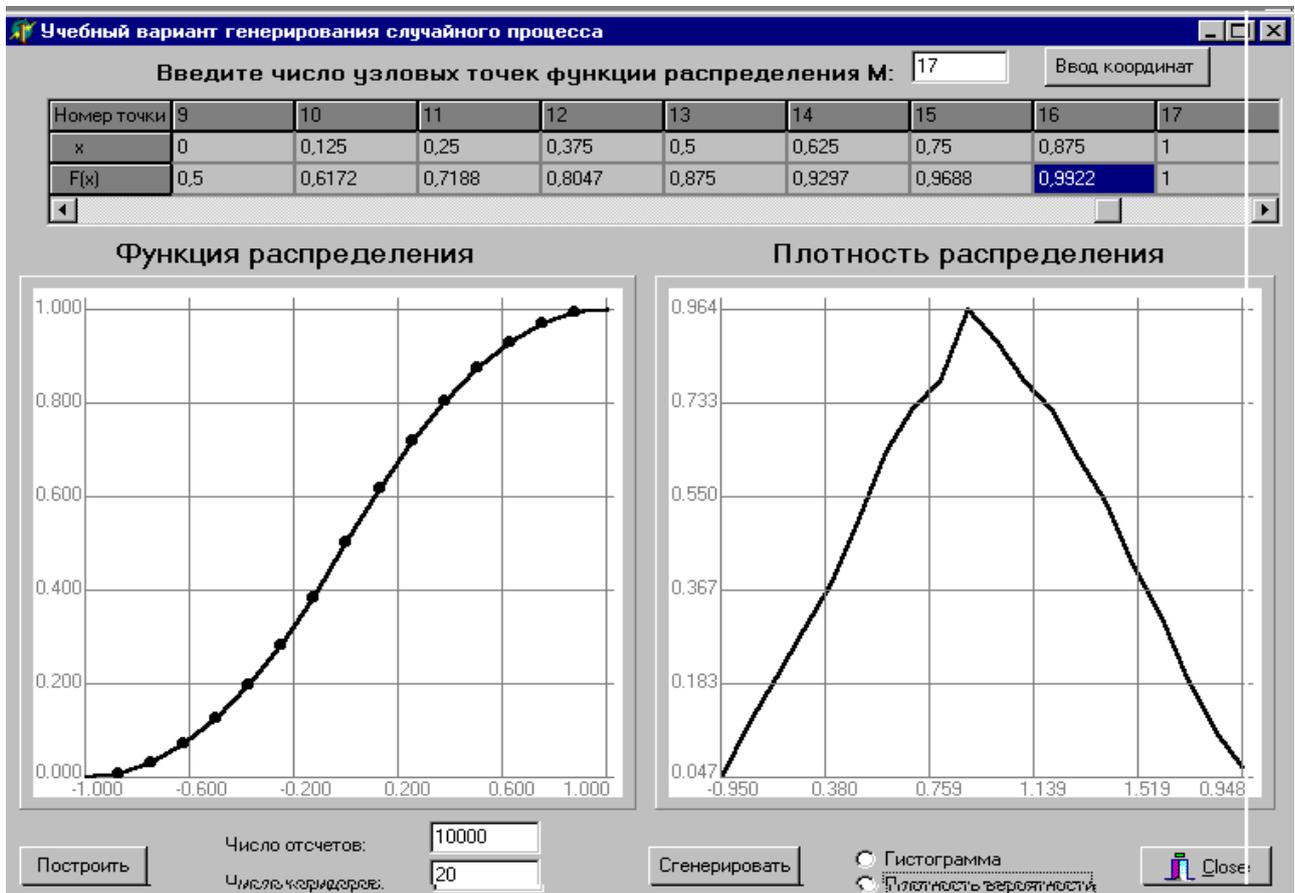


Рисунок 2.12. Результаты генерирования ПСП с двумодальным законом распределения

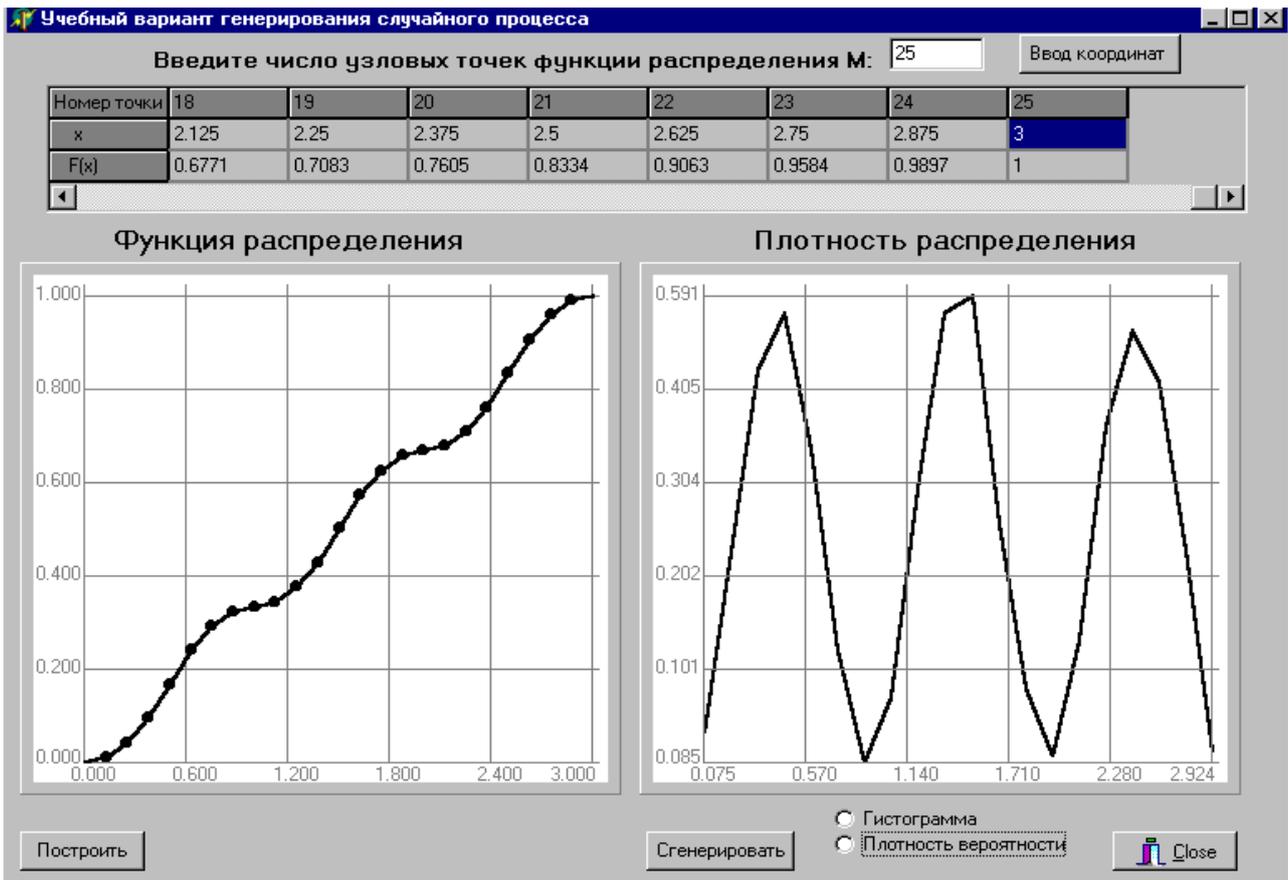


Рисунок 2.13. Результаты генерирования ПСП с трёхмодальным законом распределения

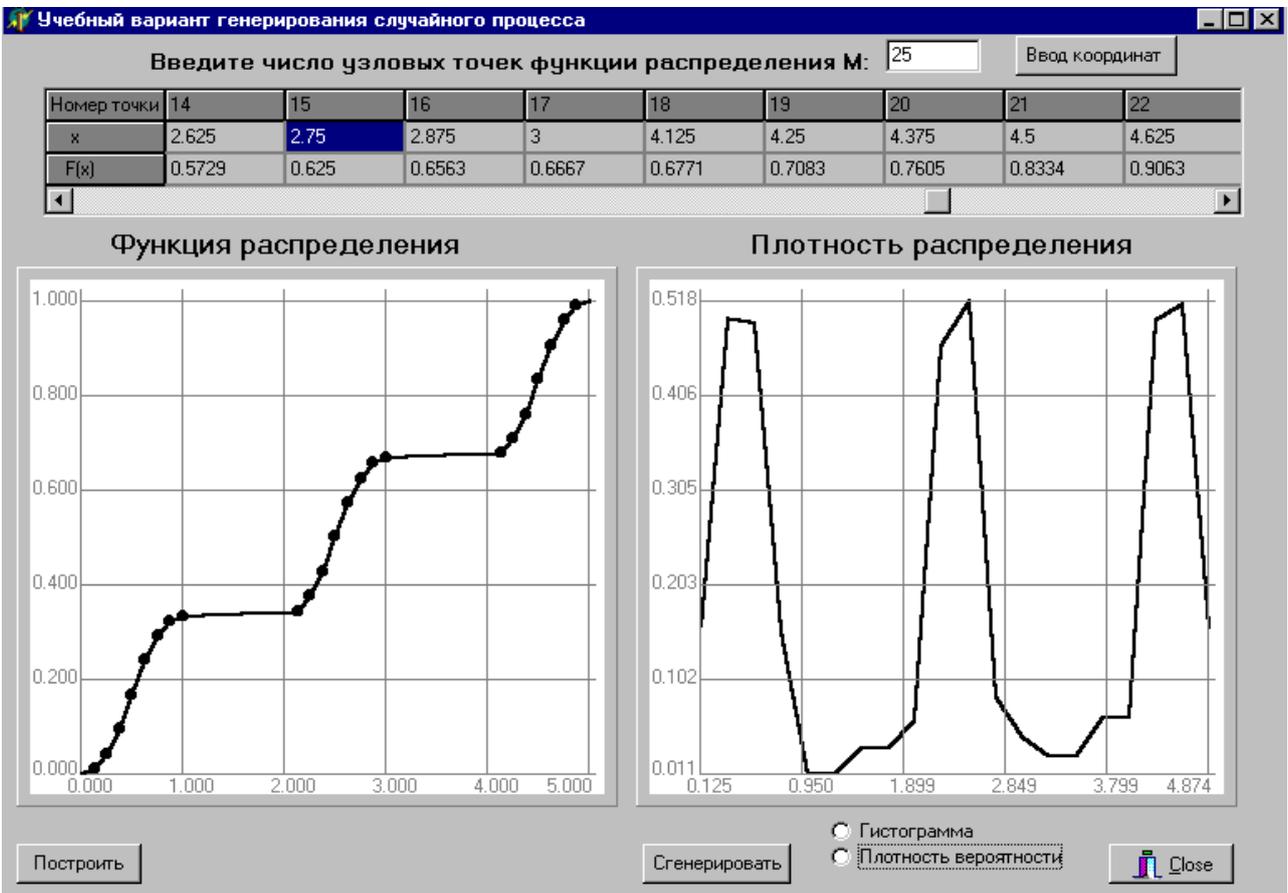


Рисунок 2.14. Результаты генерирования ПСП с трёхмодальным законом распределения

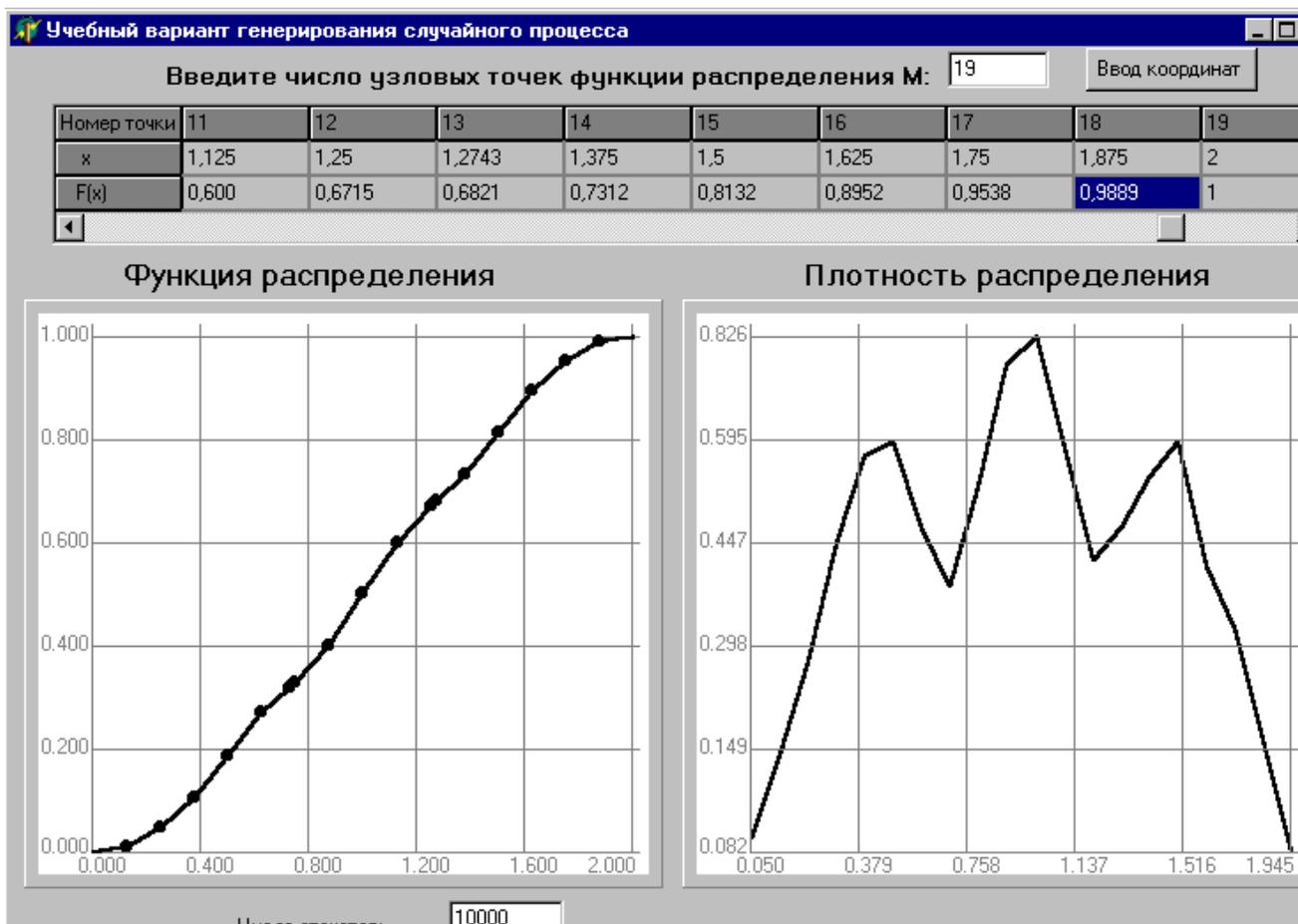


Рисунок 2.15. Результаты генерирования ПСП

2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Открыть подсистему «Генерирование процесса - учебно-показательный вариант» (см. приложение П.22).
2. Ввести координаты узловых точек функции распределения. Построить функцию распределения и сгенерировать ПСП для $N=5000$. Построить гистограмму, статистическую плотность распределения вероятностей, реализацию ПСП.
3. С помощью «мыши» трансформировать функцию распределения. Записать новые координаты узловых точек. Построить гистограмму, статистическую плотность распределения вероятностей, реализацию ПСП. Сделать выводы.
4. Открыть подсистему «Генерирование процесса с помощью линейной интерполяции».
5. Рассчитать и ввести координаты узловых точек для заданного преподавателем закона распределения для $\delta = 0,01$ и $\Delta x = \text{const}$.
6. Сгенерировать временной ряд с заданным законом распределения приближенным способом с объемом выборки, равным $N=5000$, $M=20$.
7. Построить гистограмму, статистическую плотность распределения вероятностей, реализацию ПСП. Проверить качество генерирования, воспользовавшись для определения параметров аналитического выражения законов распределения методом моментов. В качестве критерия приближения применить критерий Пирсона.

8. Привести результаты эксперимента: гистограмму, статистическую функцию распределения (см. приложение П.22, таблицу П.22.1-П.22.2).

9. Определить относительные погрешности оценки параметров модели. Результаты представить в табличной форме.

10. Пункты 4-8 повторить для $\delta = 0,02 - 0,03$ и сделать выводы о качестве генерирования ПСП и допустимой погрешности восстановления функции распределения.

11. Пункты 4-8 повторить для объёмов выборки $N=1000, 2000, 5000$.

12. Пункты 4-8 повторить для $\Delta x = \text{var}$.

13. Сравнить результаты генерирования ПСП с результатом, полученным методом инверсного преобразования с помощью подсистемы **«Генерирование процесса с помощью обратной функции»**.

2.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Метод и алгоритм моделирования некоррелированных временных рядов для заданного закона распределения приближенным методом.

3. Координаты узловых точек функции распределения, заданные таблично, до и после «трансформации» закона распределения. Построить гистограмму, статистическую плотность распределения вероятностей, реализацию ПСП.

4. Примеры реализации некоррелированного временного ряда.

5. Координаты узловых точек для заданного преподавателем закона распределения для $\delta = 0,01 - 0,03$.

6. Примеры гистограмм для различного объёма выборки – $N=500, 1000, 2000, 5000$, $\delta = 0,01$, $M=20$.

7. Пример результатов эксперимента: гистограммы, статистической функции распределения.

8. Значения параметров, определенные по методу моментов, и модуль относительной погрешности оценки параметров закона распределения для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме.

9. Выводы по работе.

2.4. Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется приближенный метод генерирования?

2. Из каких соображений выбирается допустимая погрешность восстановления функции распределения при генерировании ПСП приближенным методом?

3. Назовите способы задания функции распределения, их преимущества и недостатки.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании временных рядов с заданным видом корреляционной функции, проверка качества генерирования.

3.1. Теоретические основы лабораторной работы

Часто при решении задач имитационного моделирования средств измерений возникает необходимость в формировании процессов с заданным видом корреляционной функции. При этом не обращают внимание на закон распределения процесса. Теоретически эта задача решается методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [11] (см. рис. 3.1).

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (3.1)$$

Рисунок 3.1

где $S_x(\omega)$ - спектральная плотность мощности входного сигнала;

$|W(j\omega)|^2$ - квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $|W(j\omega)|^2$ - чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega) \varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega) \psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega) W(-j\omega). \end{cases} \quad (3.2)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (3.3)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра $W(j\omega)$ во многом будет определяться видом $S_x(\omega)$. При использовании в качестве входного сигнала «белого» шума с $S_x(\omega) = S_0$, получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (3.4)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра (см. приложение П.12):

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.5)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$Y(j) = \Delta\tau \sum_{i=0}^{N1} x(j-i)h(i), \quad (3.6)$$

где N1 - число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$ - интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h(i)=h(i\Delta\tau)$ - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, требуемой точности вычисления корреляционной функции δ и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции и различных погрешностях восстановления корреляционной функции представлено в таблице 3.1.

Минимальное количество ординат корреляционной функции

Таблица 3.1

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	0,02	0,05	0,1	0,2
$e^{-\alpha \tau }$	9	6	4	3
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	13	9	7	5
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	19	13	10	7
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2 / 3)$	10	7	5	4
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$

Используя эту таблицу, можно определить интервал дискретизации в виде:

$$\Delta\tau = \frac{\tau_{kmax}}{N1}, \quad (3.7)$$

где τ_{kmax} - максимальный интервал корреляции (см. таблицу 3.2).

Другой подход также сводится к нерекурсивной фильтрации входного ряда [11]:

$$y_n = \sum_{k=0}^N c_k x_{n-k}, \quad (3.8)$$

причём $M[y_n] = 0$,

а

$$M[y_n y_k] = \begin{cases} K_{n-k}, & |n-k| \leq N; \\ 0, & |n-k| > N, \end{cases} \quad (3.9)$$

где K_{n-k} - значение корреляционной функции в точке $(n-k)\Delta$.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей
корреляционных функций

Таблица 3.2

№	Наименование	$\Delta=0,01$	$\Delta=0,02$	$\Delta=0,05$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Коэффициенты $c_k, k=0,1,\dots,N$ удовлетворяют следующей нелинейной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_0 c_0 + c_1 c_1 + c_2 c_2 + \dots + c_N c_N = K_0; \\ c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{N-1} c_N = K_1; \\ \dots \\ c_0 c_N = K_N. \end{cases} \quad (3.10)$$

Решение этой системы дает искомым алгоритм моделирования выходной последовательности. Тем не менее, применение этого метода затруднено из-за трудности решения указанной системы уравнений. Рекуррентный алгоритм оценивания коэффициентов c_k заключается в следующем [11]:

$$\begin{cases} c_0^{(0)} = \sqrt{K_0}; \\ c_k^{(l)} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > l; \\ \frac{K_k - \sum_{i=1}^{m-k} c_i^{(l-k)} c_{i+k}^{(l)}}{c_0^{(l-k)}}, & \text{если } k \leq l; \end{cases} \\ c_0^{(l)} = \sqrt{K_0 - \sum_{i=1}^m (c_i^{(l)})^2}, \end{cases} \quad (3.11)$$

где $l=0,1,2,\dots$ - номер итерации.

Однако при оценочном характере K_k возникают дополнительные сложности в корректировке c_k , что усложняет его и ставит под сомнение его целесообразность.

Поиски более быстродействующих алгоритмов моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции привели к использованию рекурсивной фильтрации [11]:

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i}. \quad (3.12)$$

Для нахождения коэффициентов a_i и b_i (т.е. параметров фильтра) применяются, в основном, три класса методов: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчёта цифровых фильтров в Z -плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. В общем случае невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учётом применимости этих методов в конкретных условиях и многих других факторов, каждый из них может оказаться наиболее подходящим. Однако большинство цифровых фильтров рассчитываются методом билинейного преобразования стандартных аналоговых фильтров. Это обстоятельство связано с тем, что в задачах статистического моделирования необходимо проектировать фильтры, для которых билинейные преобразования аналоговых фильтров уже известны.

Параметры и вид цифрового рекурсивного фильтра для основных моделей корреляционных функций представлены в приложении П.13.

Для проверки качества генерирования ПСП представляется перспективным использование фазовых портретов [7-8]. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: $\rho_x(\tau)$ и $\rho'_x(\tau)$ (см. рис. 3.2-3.3):

$$\rho'_x(\tau) = \Phi_x[\rho_x(\tau)]. \quad (3.13)$$

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет. На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

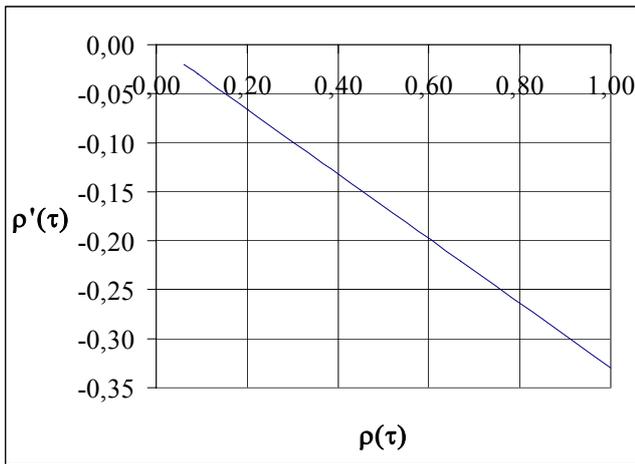
Для сравнения фазовых портретов определим квадратическую погрешность в виде:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} [\Phi_T[\rho_x(\tau_i)] - \Phi_x[\rho(\tau_i)]]^2}{\sum_{i=0}^{J_{\max}} \Phi_T^2[\rho_x(\tau_i)]}, \quad (3.14)$$

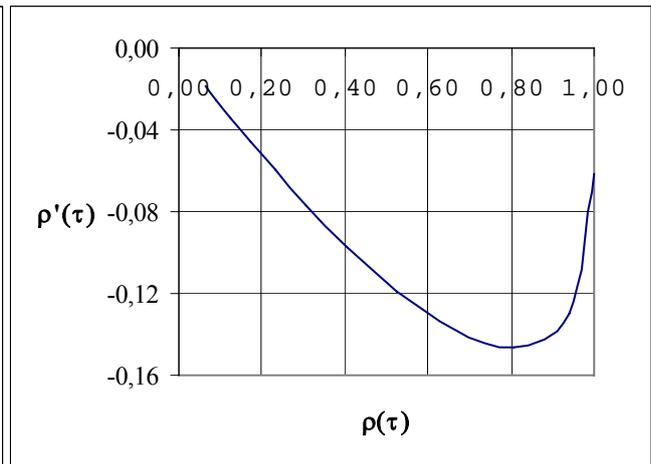
$\Phi_T[\rho_x(\tau_i)]$ - эталонный фазовый портрет.

На рис. 3.2 приведены фазовые портреты широко применяемых однопараметрических моделей. Следует отметить, что за исключением фазового портрета корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$, все фазовые портреты расположены в четвертом квадранте и не пересекают ось абсцисс. Кроме этого, фазовые портреты второй и четвертой моделей очень близки по форме и отличаются лишь численными значениями, в частности, значениями минимума.

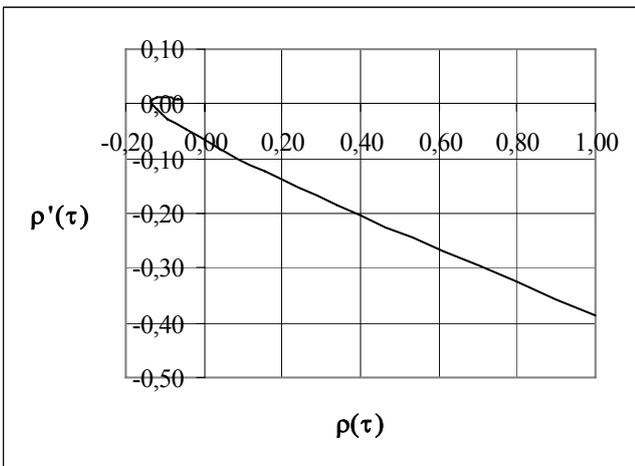
Фазовые портреты колебательных моделей, представленные на рис. 3.3, расположены во всех квадрантах. Причем, количество пересечений оси абсцисс зависит не от вида корреляционной функции, а от численного значения показателя колебательности $\mu = \omega_0 / \alpha$ [7-8].



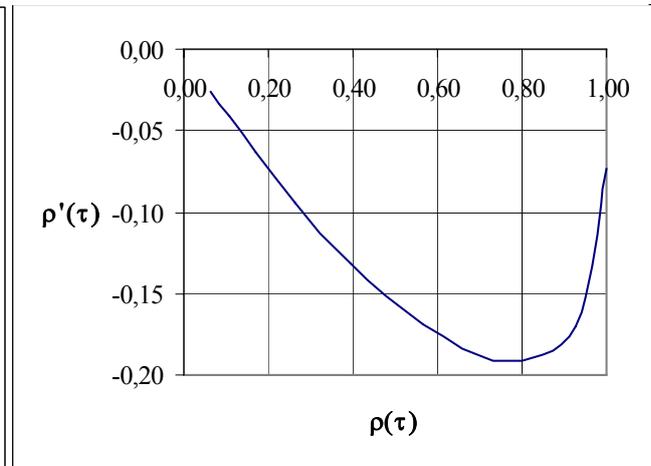
а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha\tau = 0,4$



б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, $\alpha\tau = 0,4$



в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$, $\alpha\tau = 0,23$



г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3)$, $\alpha\tau = 0,693$

Рисунок 3.2. Фазовые портреты однопараметрических моделей

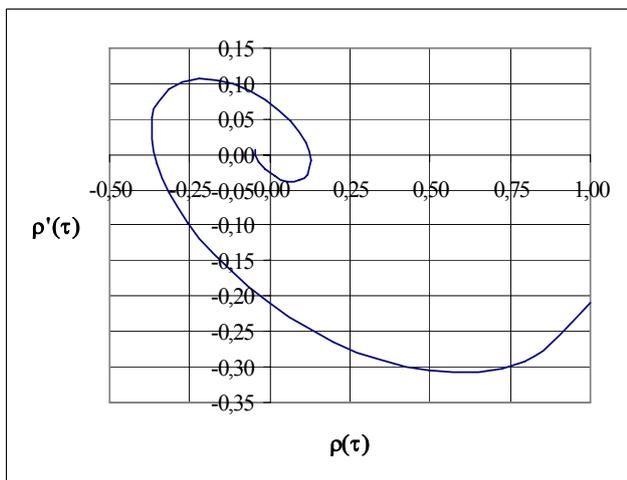
Алгоритм проверки качества генерирования ПСП с заданным видом КФ на основе анализа фазовых портретов (идентификации корреляционной функции ПСП) заключается в выполнении следующих этапов:

1. построения фазового портрета КФ сгенерированной ПСП с заданными параметрами;
2. построения фазового портрета заданной КФ - эталона;
3. сравнения фазовых портретов (вычисление квадратической погрешности).

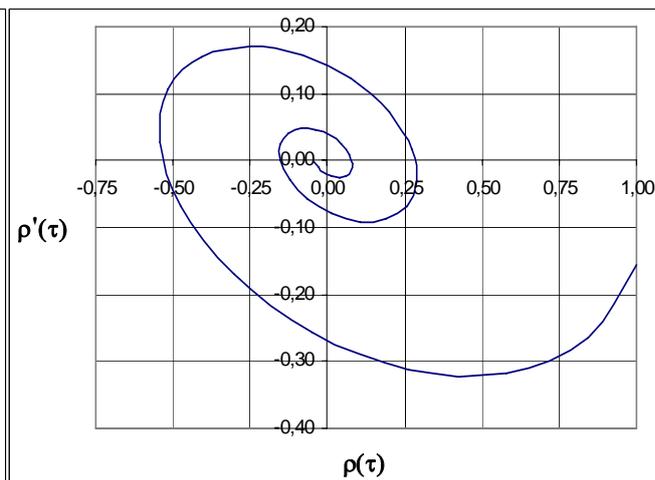
Отметим, что погрешность идентификации КФ по фазовым портретам уменьшается с увеличением объёма выборки. Исследования показали, что фазовые портреты являются устойчивыми при отношении интервала наблюдения к интервалу корреляции ≥ 10 [7-8].

Тем не менее, проверять качество генерирования ПСП рекомендуется на выборке объёмом 5000-10000 отсчётов.

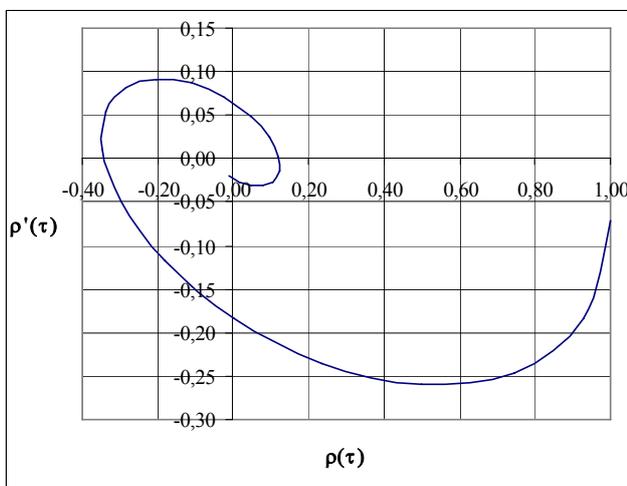
Поскольку при увеличении показателя колебательности наибольшие различия наблюдаются вблизи «нуля» корреляционной функции, наиболее информативным у фазового портрета является «хвост» [7-8].



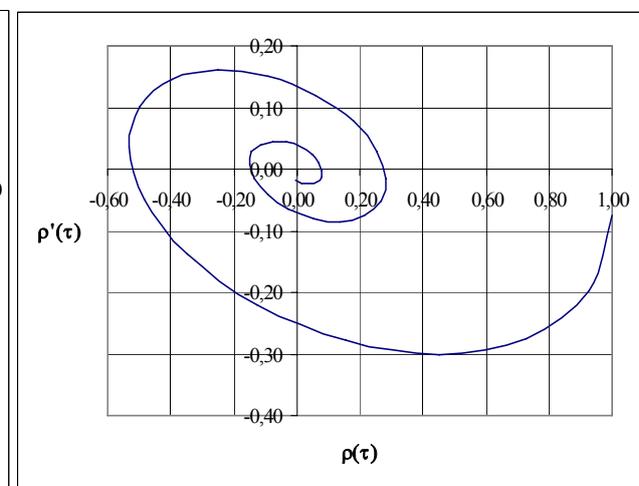
а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 3$



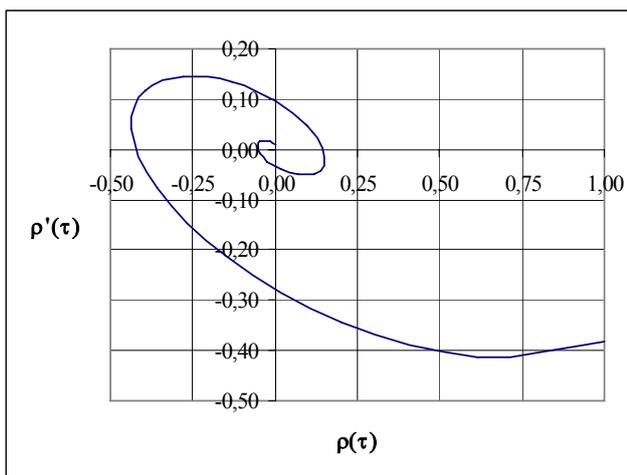
б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 5$



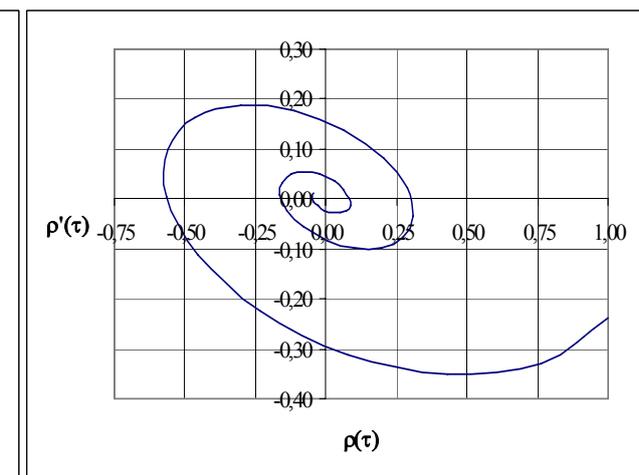
в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$



д) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



е) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$

Рисунок 3.3. Фазовые портреты колебательных корреляционных функций

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить систему моделирования (см. приложение П.23).

3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=1000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
2. Для каждого временного ряда определить корреляционную функцию.
3. Для каждой корреляционной функции построить её фазовый портрет.
4. Наложить на фазовый портрет фазовые портреты типовых моделей корреляционных функций с заданными параметрами. Сделать вывод о виде корреляционной функции временного ряда (идентифицировать вид корреляционной функции).
5. С помощью графического пакета Paint распечатать реализации временных рядов ($N=100$) и соответствующие им корреляционные функции и фазовые портреты.
6. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=500, 1000, 2000, 5000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
7. Определить и построить зависимость максимального значения модуля погрешности оценки корреляционной функции от объёма выборки (число модельных экспериментов равно 29).
8. Определить и построить зависимость максимального значения модуля погрешности оценки фазового портрета от объёма выборки (число модельных экспериментов равно 29).

3.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритм моделирования коррелированных временных рядов с заданным преподавателем видом корреляционной функции.
3. Импульсная характеристика формирующего фильтра (Приложение 9).
4. Примеры реализации коррелированных временных рядов для объёма выборки $M=1000$ и соответствующих им корреляционных функций.
5. Фазовые портреты корреляционных функций.
6. Погрешности генерирования коррелированных временных рядов для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Интервал дискретизации выбрать для восстановления корреляционной функции с погрешностью $\delta = 0,02$.
7. Графические зависимости погрешности генерирования от объёма выборки - $M=500, 1000, 2000, 5000$. Для построения графических зависимостей можно воспользоваться пакетом Excel.
8. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже (пункты 4-7 отчёта).

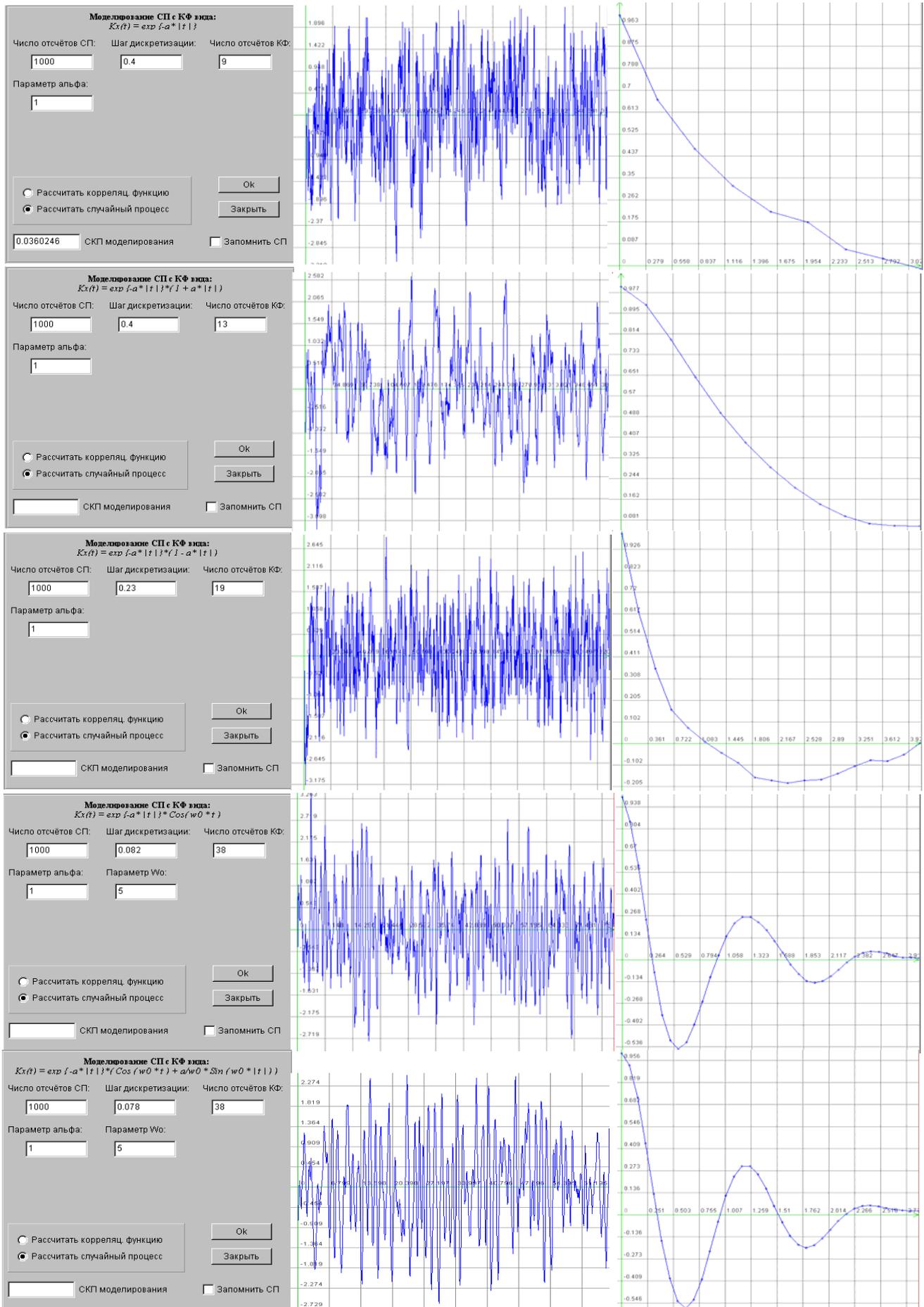


Рисунок 3.4. Случайные процессы и их корреляционные функции

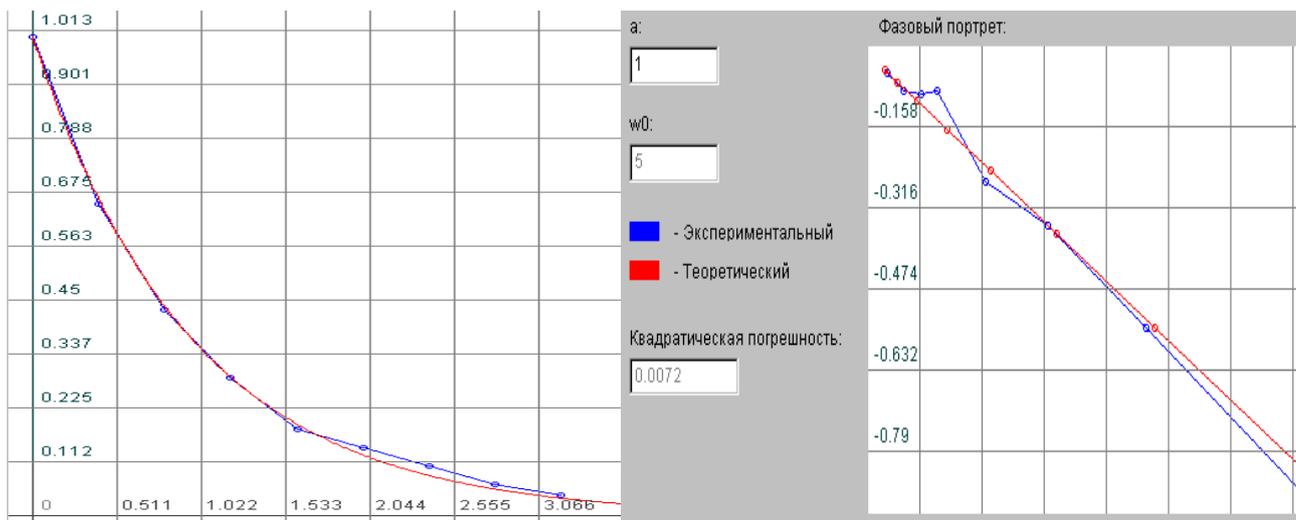


Рисунок 3.5. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

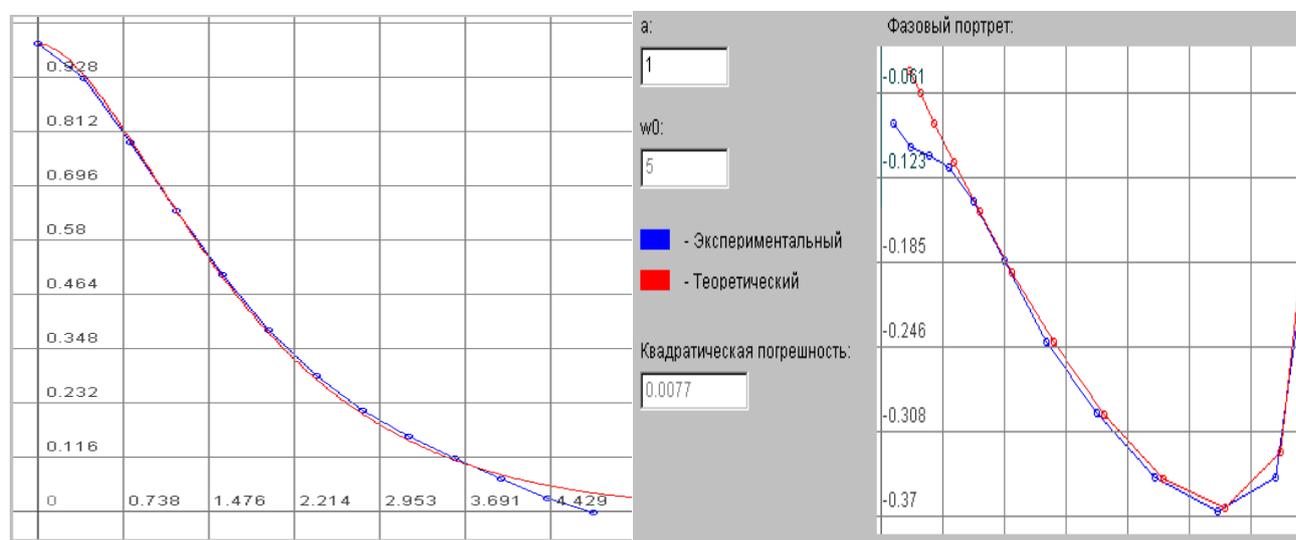


Рисунок 3.6. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$

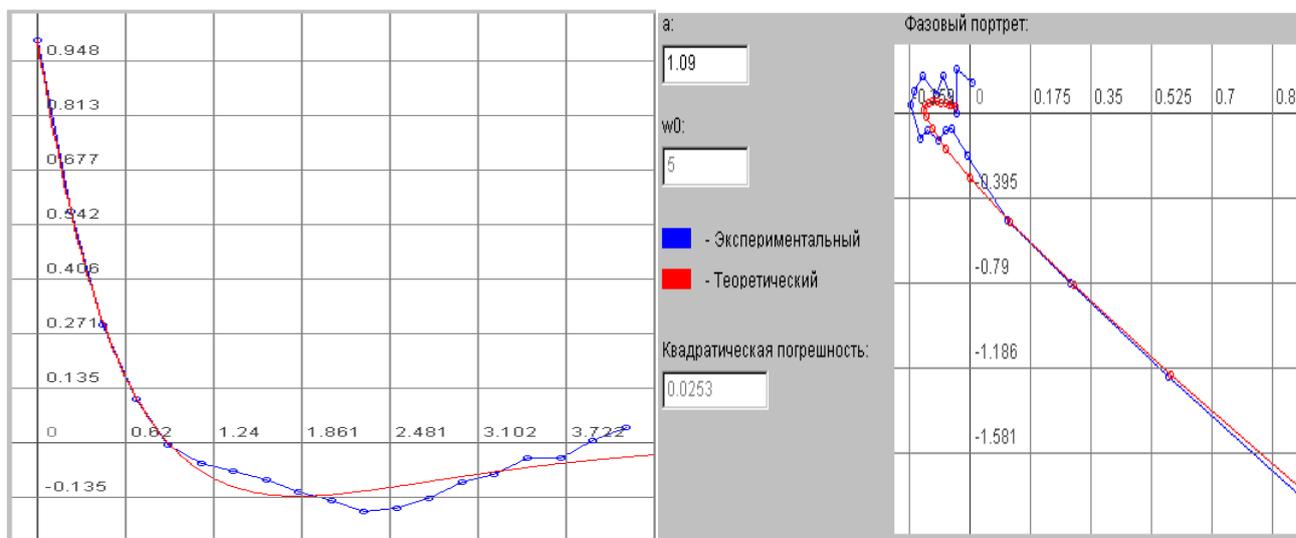


Рисунок 3.7. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$

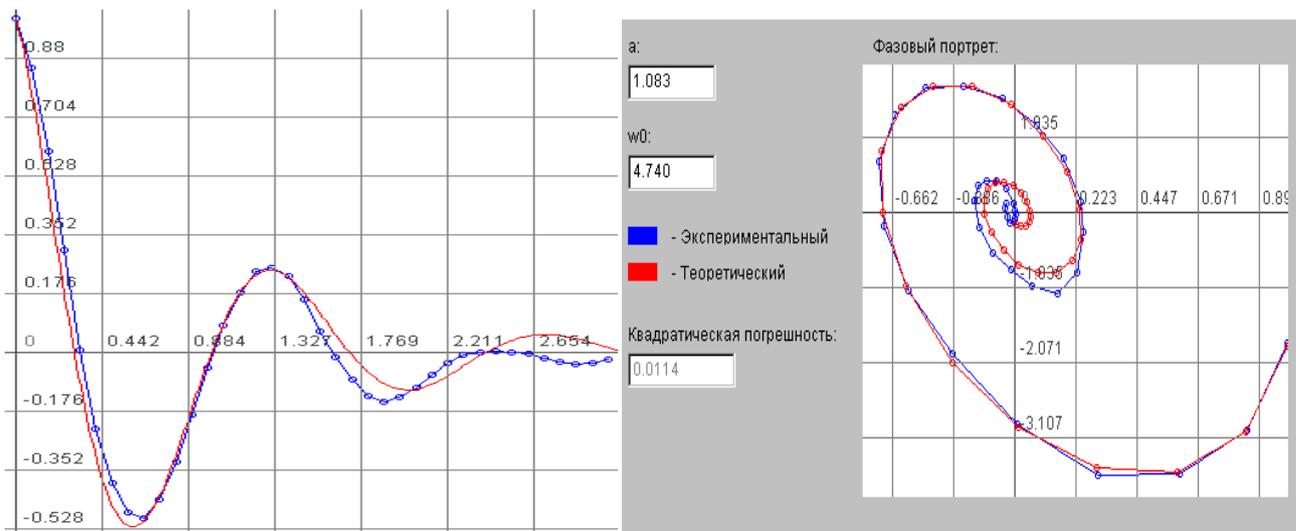


Рисунок 3.8. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

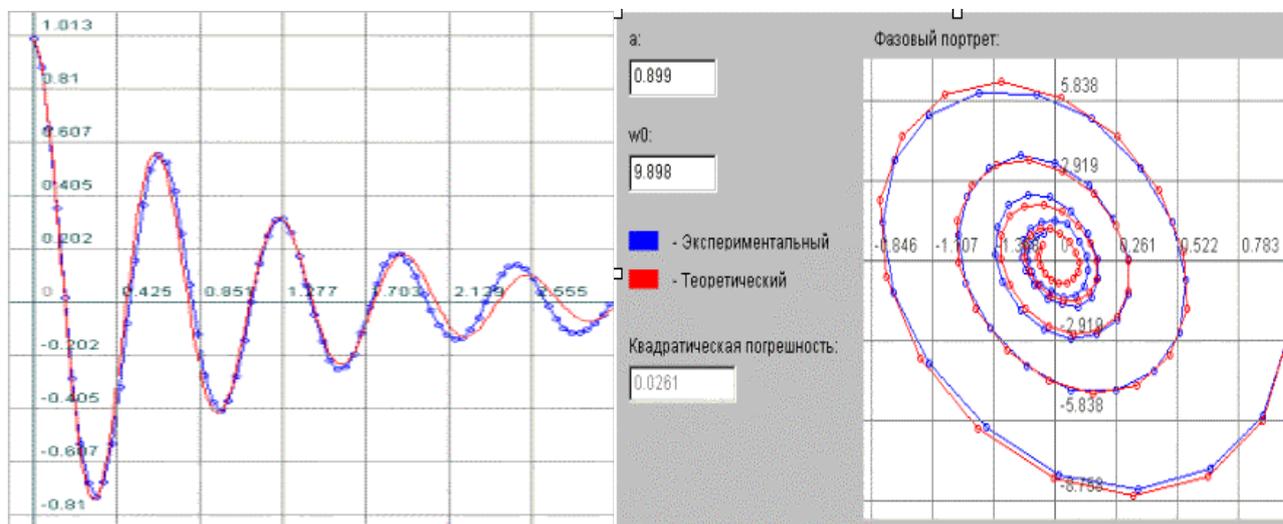


Рисунок 3.9. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \cos \omega_0 \tau)$

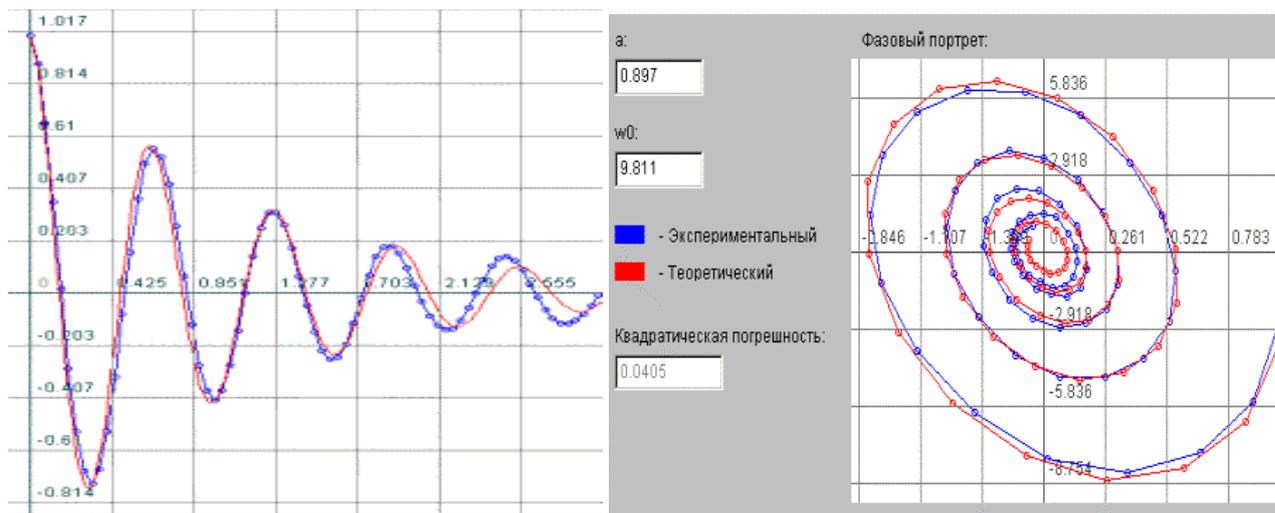


Рисунок 3.10. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \cos \omega_0 \tau)$

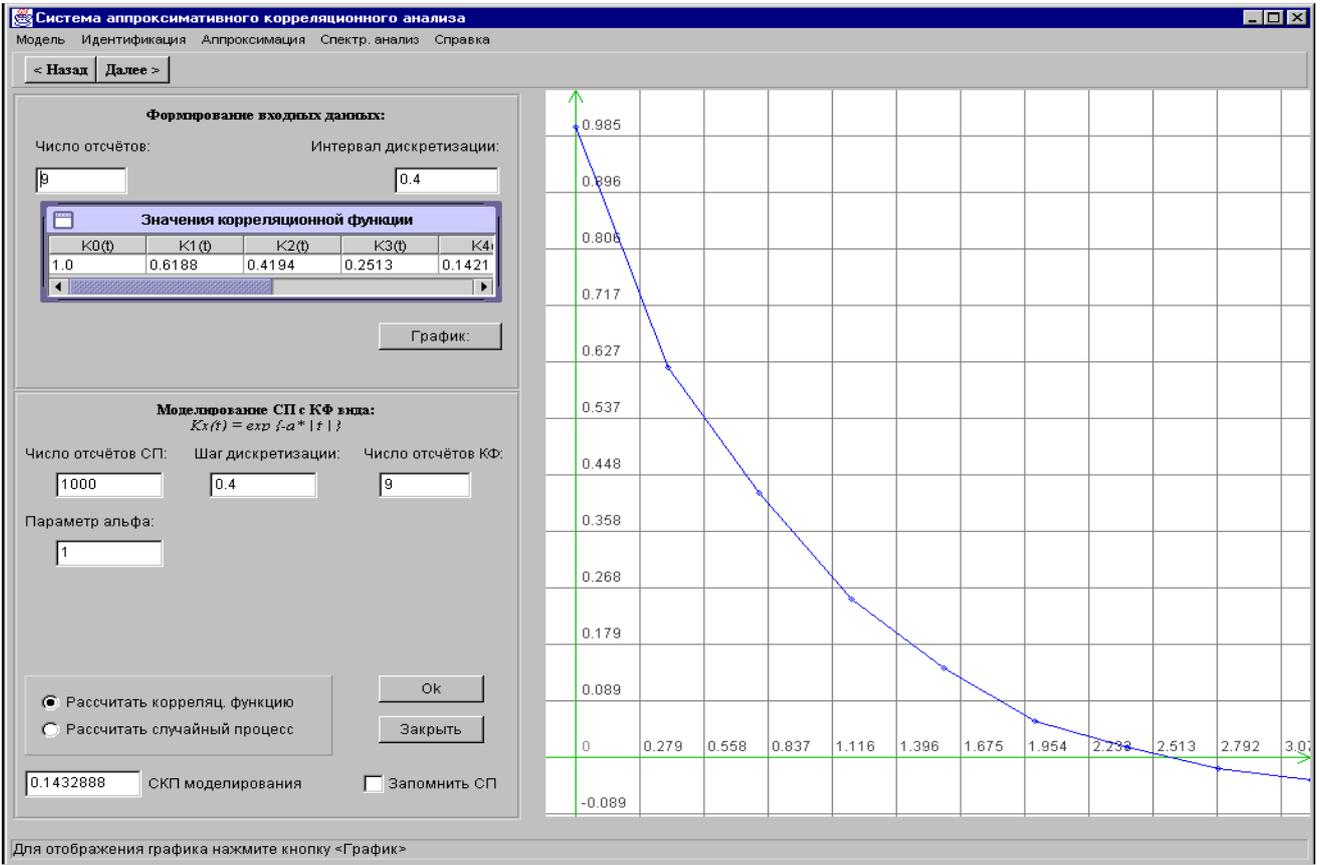
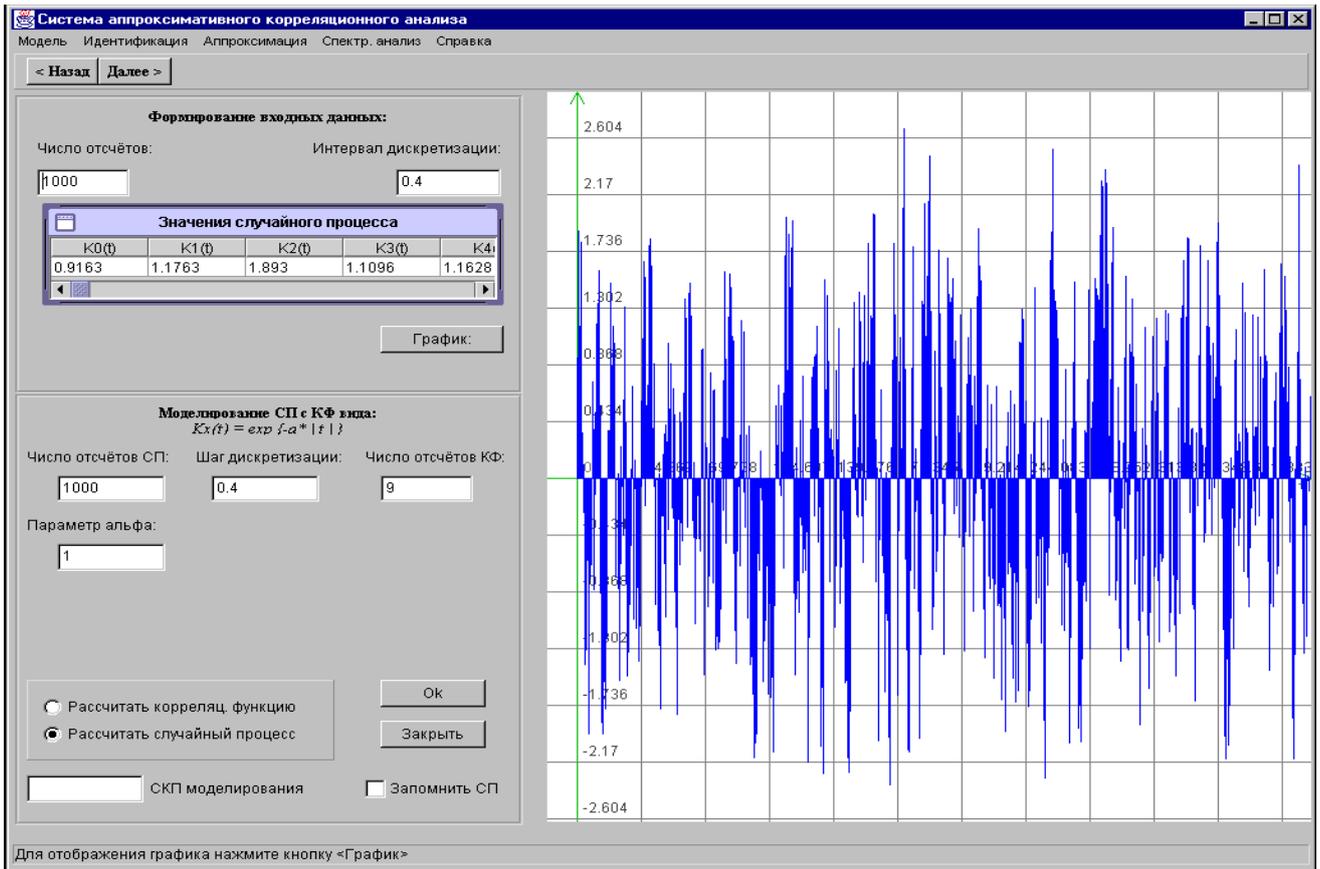


Рисунок 3.11. Результаты моделирования

Погрешности генерирования временного ряда с корреляционной функцией

$$\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \Delta\tau = 0,4/\alpha$$

Таблица 3.3

J\N	500	1000	2000	5000
1	0,1042	0,061	0,0477	0,0362
2	0,1198	0,0709	0,0347	0,0358
3	0,0852	0,0684	0,0378	0,0283
4	0,071	0,1089	0,0827	0,0495
5	0,0744	0,1146	0,0792	0,0208
6	0,0762	0,0857	0,1108	0,0224
7	0,1356	0,0632	0,0667	0,0350
8	0,2661	0,0334	0,0528	0,0263
9	0,092	0,1065	0,132	0,0137
10	0,1203	0,0814	0,0305	0,0409
11	0,0772	0,0813	0,0274	0,0486
12	0,0745	0,0432	0,0916	0,0424
13	0,2757	0,0308	0,0289	0,0478
14	0,152	0,0746	0,0852	0,0167
15	0,2661	0,0707	0,0458	0,0360
16	0,1311	0,0775	0,057	0,0396
17	0,2182	0,0412	0,1455	0,0701
18	0,1581	0,0981	0,0768	0,0690
19	0,0541	0,0927	0,0525	0,0495
20	0,1431	0,0377	0,0272	0,0513
21	0,0816	0,0917	0,0593	0,0263
22	0,0919	0,0808	0,0422	0,0446
23	0,1523	0,076	0,0946	0,0160
24	0,095	0,1487	0,0537	0,0623
25	0,0769	0,0996	0,0291	0,0759
26	0,1973	0,1598	0,0492	0,0399
27	0,1134	0,0658	0,0401	0,0289
28	0,1012	0,0674	0,0584	0,0571
29	0,0668	0,0574	0,04	0,0273



Рисунок 3.12. Результаты моделирования

3.4. Контрольные вопросы

1. Какие вероятностные характеристики относятся к характеристикам взаимосвязи?
2. Какие случайные процессы, временные ряды относятся к коррелированным случайным процессам?
3. Какой метод лежит в основе генерирования временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
4. От чего зависит выбор интервала дискретизации случайного процесса?
5. Что такое фазовый портрет корреляционной функции?
6. Какая часть фазового портрета является наиболее информативной?
7. Как отличить фазовый портрет колебательной корреляционной функции?
8. Что характеризует показатель колебательности корреляционной функции?
9. В чем заключается методика оценки качества генерирования случайного процесса с заданным видом корреляционной функции с использованием фазового портрета корреляционной функции?

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ЗАДАНЫМ ВИДОМ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании неэквидистантных временных рядов с заданным видом корреляционной функции, проверка качества генерирования.

4.1. Теоретические основы лабораторной работы

Необходимость в решении этой задачи возникает при исследовании методом имитационного моделирования алгоритмов для анализа вероятностных характеристик при неравномерной дискретизации случайных процессов, неэквидистантных временных рядов.

При описании неэквидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных: массива мгновенных значений $\{x_{ji}\}$ и соответствующего ему массива меток времени $\{t_{ji}\}$, фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений $\{x_{ji}\}$ использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности $\{t_{ji}\}$ - математический аппарат теории потоков событий. Кроме того, это обстоятельство позволяет иногда рассматривать модели случайных процессов и потоков автономно.

Обозначим j -ую реализацию неэквидистантного временного ряда $x_j(t_i) = \{x_{ji}, t_{ji}\}$. Независимо от особенностей математического описания $\{x_{ji}\}$ и $\{t_{ji}\}$ неэквидистантные временные ряды можно разбить на два класса:

- * характеристики потока событий $\{t_{ji}\}$ не зависят от характеристик исследуемого случайного процесса (см. рис. 4.1);
- * характеристики потока событий $\{t_{ji}\}$ полностью определяются характеристиками исследуемого случайного процесса (см. рис. 4.2).

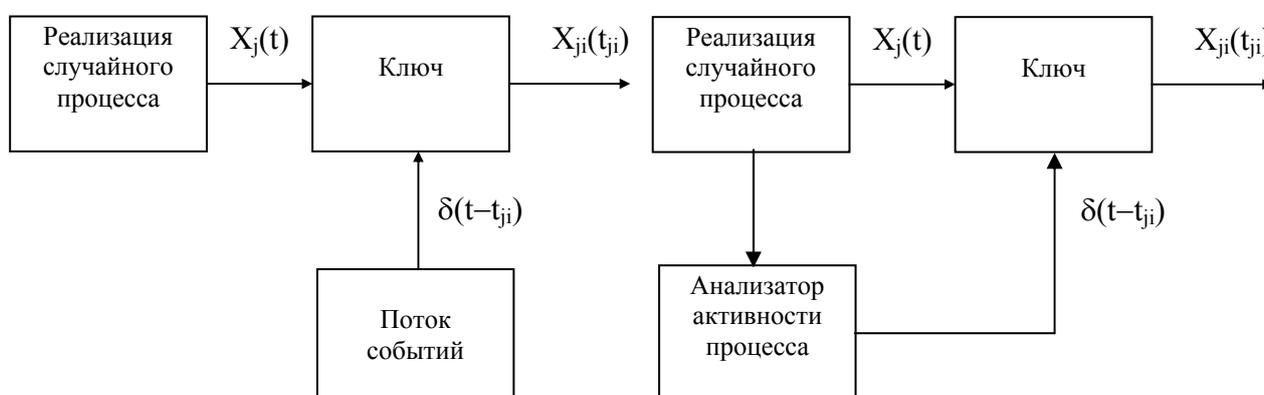


Рисунок 4.1. Характеристики потока не зависят от характеристик процесса

Рисунок 4.2. Характеристики потока зависят от характеристик процесса

К первому классу неэквидистантных временных рядов приводит **непреднамеренная случайная дискретизация**, независящая от желания исследователя, например, при океанологических исследованиях. Ко второму классу относится **преднамеренная нерегулярная дискретизация**, например: адаптивно-временная, спорадическая, - вводимая по желанию исследователя.

Следует подчеркнуть, что чем большей априорной информацией о характере нерегулярной дискретизации располагает исследователь, тем более точную модель потока событий он построит.

Так например, если $\Delta x_{ji} = \text{const}$, а $t_{ji} = \text{random}$, то такая дискретизация называется спорадической [13]. Для неё известна связь между интервалом дискретизации и характеристиками случайного процесса. Учёт этого важного обстоятельства позволяет упростить процедуру оценивания вероятностных характеристик и её метрологический анализ.

Таким образом, математическое описание потоков событий, его характеристики зависят от способа нерегулярной дискретизации, особенно при преднамеренной дискретизации. К сожалению, этого нельзя сказать о непреднамеренной случайной дискретизации, характеристики которой зависят от особенностей проведения эксперимента. Единственным разумным выходом в сложившейся ситуации при построении модели является использование накопленной информации, полученной при решении других задач в данной предметной области.

Случайные потоки после дискретизации можно разбить на три группы:

$$1. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{random}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{const}; \end{cases} \quad (4.1)$$

$$2. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{const}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}; \end{cases} \quad (4.2)$$

$$3. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{random}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}. \end{cases} \quad (4.3)$$

К первой группе относится равномерная дискретизация, ко второй - преднамеренная неравномерная дискретизация: идеальная спорадическая, адаптивно-временная полиномиальная дискретизация ($n=0$) (учет этого обстоятельства позволяет в ряде случаев упростить алгоритмы статистических измерений [13]). К третьей группе относится как преднамеренная неравномерная дискретизация: адаптивно-временная дискретизация и коммутация, стохастическая дискретизация, реальная спорадическая, так и непреднамеренная неравномерная дискретизация: пропуски, сбои, определяемая характером эксперимента и т.д.

Разнообразие способов неравномерной дискретизации, приводящее к этой группе моделей, позволяет считать этот способ представления наиболее общим и требующим наибольшего внимания.

В системах реального времени обработки и передачи информации, управления наблюдаются различные потоки событий. Поток событий представляет собой точечный процесс с событиями, появляющимися случайным или периодическим образом во времени.

Различают потоки **однородных** и **неоднородных** событий. Например, в системах связи, реализующих приоритет определенной группы абонентов, поток вызовов будет с этой точки зрения неоднородным, система по-разному будет реагировать на

разные события (вызовы) в потоке. На рассматриваемые же события (отсчеты первичного процесса) реакция устройств АСНИ, дискретных ИИС, как правило, не меняется при изменении порядкового номера события и поэтому поток выборок можно считать однородным [13].

Основными характеристиками, классифицирующими случайный поток, являются свойства стационарности, ординарности и последствий [13].

Стационарным называется поток событий, для которого вероятность $P_k(l-t, l)$ появления какого-либо числа k событий на определенном интервале времени $(l-t, l)$ зависит лишь от значения этого интервала t и не зависит от его расположения на оси времени.

Ординарным называется поток, для которого вероятность появления на малом участке δt , примыкающем к произвольно выбранному моменту времени, более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления хотя бы одного события.

Последствие потока заключается в зависимости вероятности $P_k(l-t, l)$ от распределения событий на оси времени вне интервала $(l-t, l)$. Либо, другими словами, поток не обладает последствием, если вероятность появления на любом интервале времени какого-либо числа событий не зависит от того, сколько событий произошло на других, не перекрывающихся с данным интервалом. Из литературы известно [13], что не обладает последствием только простейший случайный или иначе стационарный пуассоновский поток, имеющий экспоненциальное распределение интервалов времени между событиями в потоке.

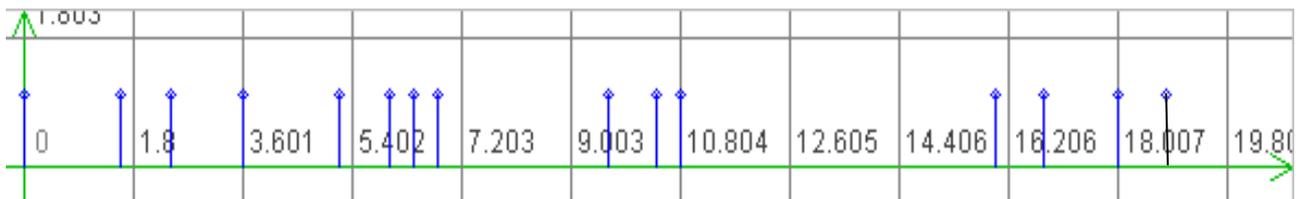
Варьируя этими свойствами, можно образовывать различные классы потоков [13]:

- простейший поток - поток Пуассона, обладающий всеми тремя свойствами, наиболее широко применяемый на практике;
- рекуррентные потоки, относящиеся к классу стационарных потоков Пальма, у которых одномерные законы распределения интервалов дискретизации одинаковы, а сами интервалы независимы между собой;
- поток смены состояний марковского процесса Вольда, предполагающий зависимость соседних интервалов между событиями в потоке;
- альтернирующие потоки, у которых плотность распределения интервалов чередуется от интервала к интервалу (выбирается из двух возможных видов);
- модель рекуррентного потока, получаемого разрежением посредством p -преобразования исходного потока (каждое событие с вероятностью p остается в потоке, а с вероятностью $q=1-p$ выбрасывается).

Выбор модели потока зависит от характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д. При аналитических исследованиях предпочтение следует отдавать простейшим моделям, позволяющим получить сравнительно простые выражения, удобные для инженерного расчета основных параметров алгоритмов. Примеры реализаций различных потоков событий приведены на рис. 4.3.

При решении перечисленных задач необходимо определить характеристики потока, которые можно задать различными способами [13]:

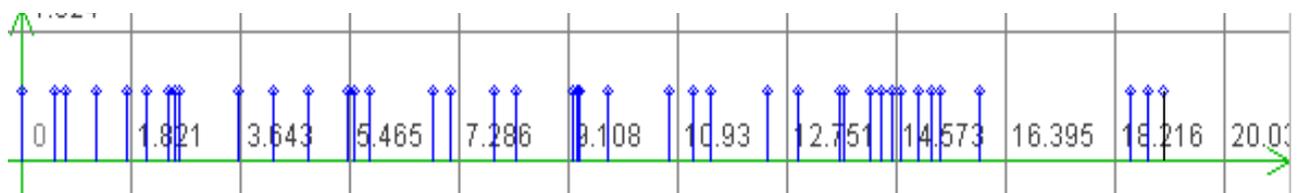
- вероятностью числа событий на заданном временном интервале;
- законом распределения интервалов между отсчетами потока;
- временами возвращения.



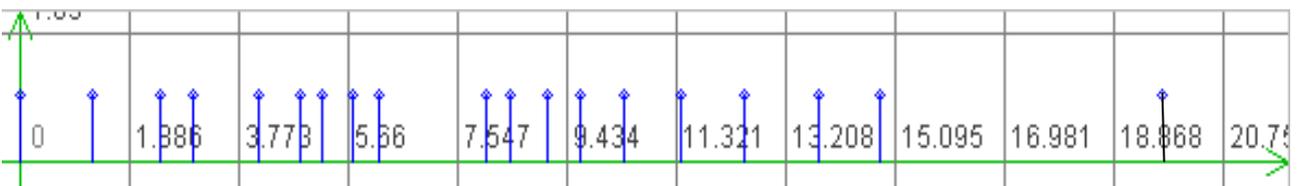
а) периодический (регулярный) поток с p -преобразованием – $p=0,4$



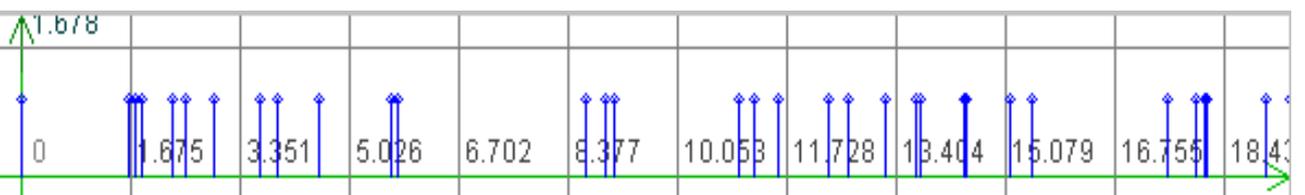
б) периодический поток с «дрожанием»



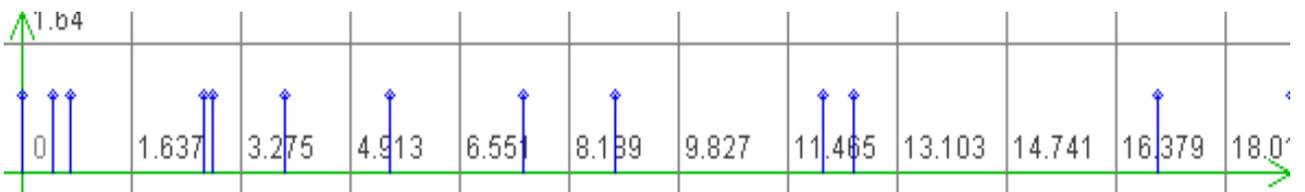
в) поток с аддитивной случайной дискретизацией - $\lambda=2$



г) периодический поток с «дрожанием» и p -преобразованием – $p=0,4$



д) поток с аддитивной случайной дискретизацией и p -преобразованием - $\lambda=2, p=0,8$



е) поток с аддитивной случайной дискретизацией с «дрожанием» и p -преобразованием - $\lambda=2, p=0,4$

Рисунок 4.3. Реализации случайных потоков событий

Эти способы дополняют друг друга, и в зависимости от решаемой задачи применяется один из них или их совокупность.

Плотность распределения вероятностей интервалов $f_{\Delta t}(\Delta t)$ и функция распределения вероятностей интервалов $F_{\Delta t}(\Delta t)$ являются основными характеристиками, позволяющими определить большинство вероятностных характеристик, и при математическом описании потока специфики не имеют. Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает.

Плотности распределения прямого V и обратного U времен возвращеня, необходимые для метрологического анализа оценки взаимных корреляционно-структурных функций, определяются в виде [13]:

$$\varphi(t) = \varphi_v(t) = \varphi_u(t) = \lambda[1 - F(t)], \quad (4.4)$$

где $F(t)$ - функция распределения интервала дискретизации;

λ - интенсивность потока.

При решении ряда прикладных задач представляет интерес время появления события и его отношение к предшествующим событиям, не обращая внимание ни на амплитуду события, ни на информацию, которую они несут. В системах реального времени к событиям могут быть отнесены: электрический импульс, сигнал переключения, прерывания, момент окончания алгоритма и т.д.

В настоящее время в литературе описаны различные статистические методы и аппаратура для анализа случайных событий (см. список использованных источников в [13]). Важной частью этого анализа является корреляционный анализ потоков событий. Корреляция событий основана на измерении распределения интервалов времени между случайными событиями. События могут представлять поток данных в вычислительных системах реального времени или временные ряды экспериментальных импульсов.

Автокорреляция $C_x(t)$ определяет вероятность появления события в потоке X как функцию времени после данного события без учета числа прошедших событий:

$$C_x(t)dt = P[\text{событие в } X(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (4.5)$$

В дальнейшем для отличия автокорреляционной функции случайных процессов (последовательностей) автокорреляционную функцию потоков будем называть **интервальной корреляционной функцией (ИКФ)**.

Взаимная корреляция $C_{xy}(t)$ применяется в случае двух потоков событий X и Y и определяет вероятность наблюдения события в потоке Y как функцию времени после данного события в потоке X , без учета числа прошедших событий:

$$C_{xy}(t)dt = P[\text{событие в } Y(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (4.6)$$

Функцию $C_{xy}(t)$ по аналогии назовем **взаимной интервальной функцией (ВИКФ)**.

Определенные таким образом автокорреляция и взаимная корреляция применяются для объяснения поведения систем реального времени для измерения и управления, нейронных сетей и моделей поведения определения зависимости в случайных потоках, осуществления этой зависимости, обнаружения скрытых моделей в случайной последовательности и предложения соответствующей вероятностной модели исследуемой системы.

При описании неэквидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных: $[x_{ji}(t_{ji}/\Delta t_{ji})]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}$ - массива мгновенных значений x_{ji} и соответствующих им меток или интервалов времени $t_{ji}/\Delta t_{ji}$, фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений x_{ji} использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности t_{ji} - математический аппарат теории потоков событий [13].

Выбор модели потока при описании неэквидистантного временного ряда зависит от способа неравномерной дискретизации, характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели потока событий, являются следующие:

- модель должна адекватно описывать поток - совпадение основных характеристик потока и модели;
- быть по возможности простой, позволяющей аналитическое определение основных характеристик потока;
- для потоков, зависящих от характеристик случайного процесса, позволять определение характеристик потока в зависимости от характеристик процесса.

При статистических измерениях при неравномерной дискретизации случайных процессов возможны следующие случаи:

- случайная дискретизация непреднамеренная и для нее необходимо оценить увеличение методической погрешности, вызванное этой неравномерностью;
- случайная дискретизация преднамеренная с известными характеристиками потока и необходимо: разработать алгоритмы статистических измерений, определить увеличение методической погрешности, вызванной неравномерностью дискретизации;
- случайная дискретизация преднамеренная, и для нее необходимо определить требования к потоку при известных характеристиках процесса с целью обеспечения допустимых методических погрешностей измерения значений вероятностных характеристик.

Как правило, для анализа алгоритмов статистических измерений и расчета их основных параметров необходимо знание:

- закона распределения интервалов и их моментных характеристик, используемых при оценке составляющей методической погрешности, обусловленной неравномерностью дискретизации;
- закона распределения сумм интервалов, требуемого для определения числа каналов аппаратно-программных средств при измерении функциональных вероятностных характеристик, например, корреляционно-структурных;
- плотности распределения времен возвращения, используемой при статистическом анализе взаимных корреляционно-структурных характеристик;
- интервальной корреляционной функции, необходимой для усреднения результата и оценки составляющих методической погрешности;

- минимального интервала дискретизации - параметра аппаратно-программных средств, обеспечивающего допустимые значения составляющей методической погрешности, обусловленной дискретизацией;
- интенсивности потока - величины, обратной математическому ожиданию интервала дискретизации, используемой для оценки коэффициента сжатия, определения допустимого значения погрешности восстановления случайного процесса;
- коэффициента сжатия $k_{сж}$, характеризующего число существенных отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя.

Рассмотрим типовые модели неэквиливантных временных рядов, широко применяемых на практике как при описании, так и при метрологическом анализе алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквиливантных временных рядов. На практике, при описании различных видов неравномерной дискретизации, приводящей к нерегулярным временным рядам, как правило, применяют модели рекуррентных потоков Пальма [13]:

- периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений;
- периодической дискретизации с «дрожанием»;
- аддитивной случайной дискретизации;
- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений;
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

Так для периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений (р-преобразование) интервал дискретизации $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}$ определяется в соответствии с выражением

$$\Delta t_{ji} = Y_{ji} \Delta t_0, \quad (4.7)$$

где Δt_0 - интервал принудительной дискретизации;

Y - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p [13]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.8)$$

В соответствии с выражением (4.7) мгновенное значение выборки случайного процесса и соответствующая ему метка времени равны:

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ji} \left(\Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{jk} \right); \\ t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{j=1}^i Y_j. \end{cases} \quad (4.9)$$

Для периодической дискретизации с «дрожанием»

$$\begin{cases} t_{ji} = i\Delta t_0 + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (4.10)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне

$\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2} \right)$, а интервал дискретизации равен

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}. \quad (4.11)$$

Для аддитивной случайной дискретизации

$$\begin{cases} t_{j,i+1} = t_{ji} + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (4.12)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне $(0, \infty)$.

Интервал дискретизации для этой модели равен

$$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}. \quad (4.13)$$

Модель периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений является обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Delta t}(\Delta t)$, разрежены р-преобразованием [13].

Для нее:

$$\begin{cases} t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{kj} + \xi_{\sum_{k=1}^i Y_{kj}} - \xi_0; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (4.14)$$

где Y_i - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p в соответствии с выражением (4.8), а интервал дискретизации

$$\Delta t_{ji} = Y_i \Delta t_0 + \xi_{\sum_{j=1}^i Y_i} - \xi_{\sum_{j=1}^{i-1} Y_j}. \quad (4.15)$$

Модель аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений является обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой $\Theta_i = \xi_i$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Theta}(\Theta)$ разрежены р-преобразованием.

Для этой модели:

$$\begin{cases} t_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{Y_j} \xi_{k+\sum_{l=1}^{j-1} Y_l}; \\ x_i = x(t_i), \end{cases} \quad (4.16)$$

а интервал дискретизации равен

$$z_i = \sum_{i=1}^Y \Theta_i = \sum_{k=1}^{Y_i} \xi_{k+\sum_{l=1}^{i-1} Y_l}. \quad (4.17)$$

Рассмотренные модели, естественно, не являются исчерпывающими, но они перекрывают широкий класс практических задач.

Таким образом, генерирование неэквидистантных временных рядов основано на «прореживании» регулярного ($\Delta t_i = \text{const}$) временного ряда с учётом модели потока событий.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить систему моделирования (см. приложение П.23).

4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=5000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
2. Запомнить временные ряды в базе данных.
3. Для каждого временного ряда, вызванного из базы данных, с помощью алгоритма нерегулярной дискретизации сгенерировать неэквилидистантный временной ряд с заданными параметрами нерегулярной дискретизации (рассмотреть модели с р-преобразованием, «дрожанием» и аддитивной случайной дискретизацией).
4. Для каждого неэквилидистантного временного ряда с помощью алгоритма с использованием интервальной корреляционной функции определить корреляционную функцию.
5. Для заданной модели нерегулярной дискретизации определить коэффициенты сжатия (число модельных экспериментов равно 29).
6. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение коэффициента сжатия.

4.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритм моделирования неэквилидистантного временного ряда с заданными видом корреляционной функции и модели нерегулярной дискретизации.
3. Пример реализации неэквилидистантного временного ряда для объёма выборки $M=1000$.
4. Пример оценки корреляционной функции для объёма выборки $M=1000$.
5. Оценки коэффициентов сжатия, представленные в табличной форме и в виде графических зависимостей от параметра нерегулярной дискретизации (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).
6. Оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения коэффициентов сжатия, представленные в графическом виде.
7. Выводы по работе.

4.4. Контрольные вопросы

1. Назовите основные свойства потоков событий.
2. Каким образом задаются потоки случайных событий?
3. Назовите основные классы неэквилидистантных временных рядов.
4. Назовите типовые модели неэквилидистантных временных рядов.
5. Назовите основные характеристики неэквилидистантных временных рядов.
6. Что характеризует интервальная корреляционная функция?
7. Каким образом генерируются неэквилидистантные временные ряды?
8. Что характеризует коэффициент сжатия?

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для генерирования временного ряда с экспоненциальной корреляционной функцией приведен ниже (пункты 4-6 отчёта).

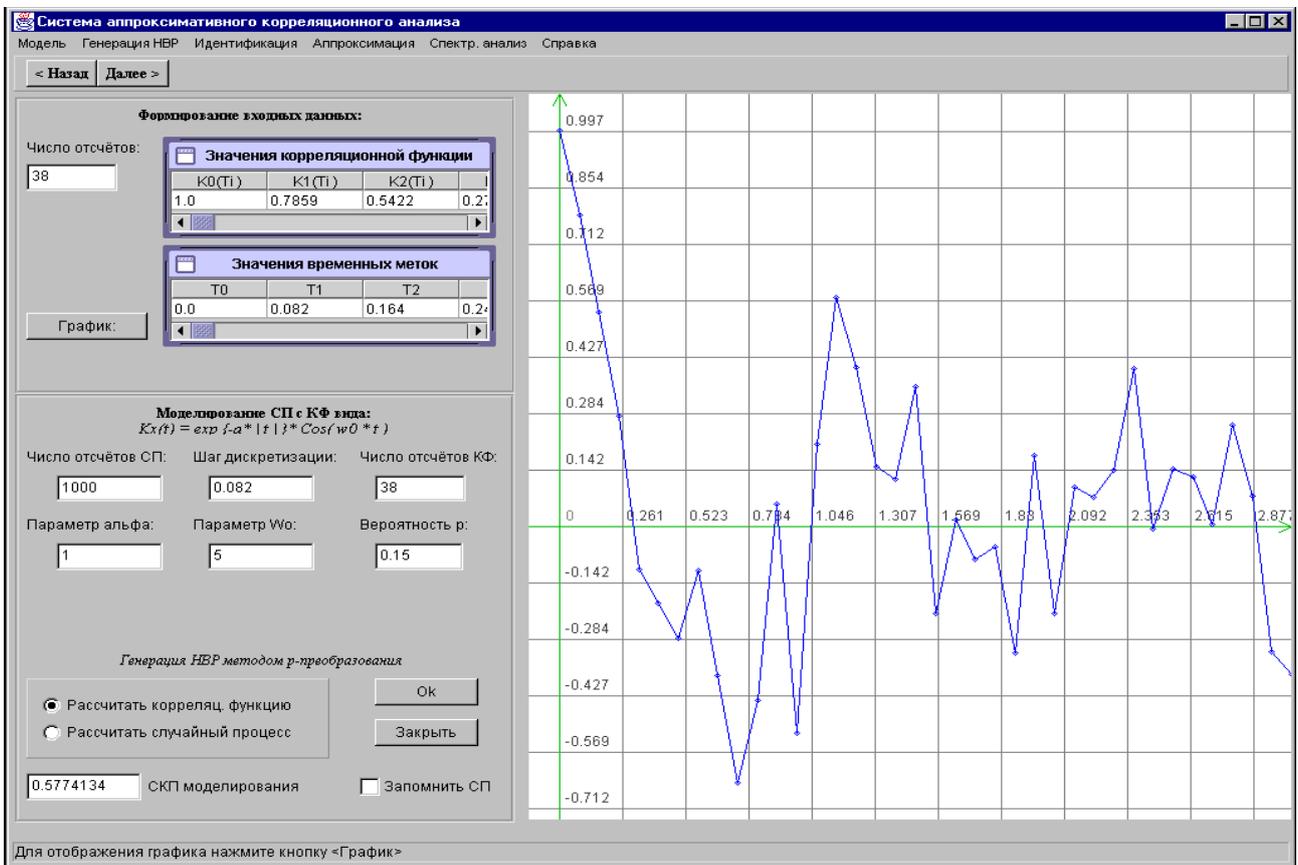
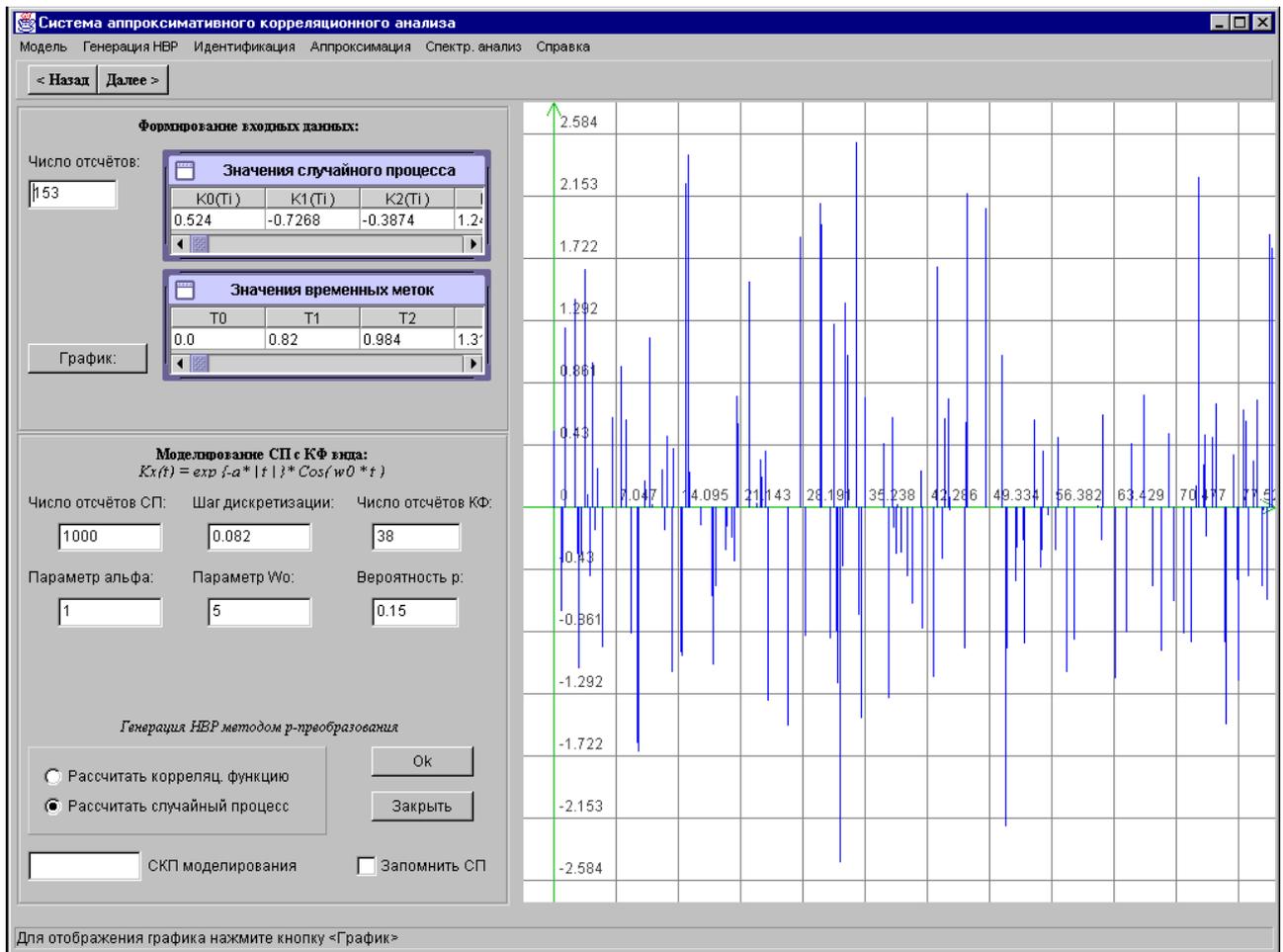


Рисунок 4.4. Результаты моделирования

Оценки коэффициента сжатия неэквидистантного временного ряда с корреляционной функцией $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, с р-преобразованием $\Delta\tau = 0,082$

Таблица 4.1

N\rp	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
1	6,7568	3,2362	2,2676	1,6393	1,3158	1,1038
2	6,4103	3,1646	2,1231	1,6835	1,3387	1,1111
3	5,9172	3,4014	2,3310	1,6667	1,3193	1,1038
4	6,8493	3,4247	2,3364	1,6807	1,3055	1,1351
5	6,4103	3,4364	2,0964	1,5798	1,3405	1,0929
6	5,8480	3,2680	2,2989	1,6474	1,3441	1,1236
7	6,8966	3,3670	2,2472	1,7123	1,3280	1,1136
8	6,7568	3,2787	2,2624	1,7241	1,3736	1,0989
9	7,3529	3,4364	2,1692	1,6447	1,3141	1,1038
10	6,8493	3,5461	2,2075	1,6474	1,3755	1,1099
11	6,2112	3,1746	2,0964	1,6420	1,3210	1,1025
12	6,4103	3,2154	2,1692	1,6722	1,3569	1,1161
13	7,6923	3,3898	2,2173	1,5898	1,3106	1,1198
14	7,2993	3,5587	2,3095	1,6000	1,3351	1,1025
15	6,7114	3,5336	2,0450	1,6000	1,3123	1,1136
16	6,4935	3,3784	2,3641	1,6779	1,3405	1,1148
17	8,1301	3,4483	2,2624	1,7182	1,2804	1,1123
18	6,7568	3,4843	2,2272	1,6529	1,3106	1,1001
19	7,2464	2,9762	2,1930	1,7182	1,2953	1,1211
20	6,5789	3,2787	2,3529	1,7271	1,3387	1,0953
21	6,5359	3,1949	2,2222	1,6584	1,3175	1,1074
22	6,9444	3,4965	2,1692	1,6949	1,3387	1,1186
23	6,2112	3,4014	2,2573	1,6722	1,3123	1,1025
24	6,8027	3,1056	2,2075	1,7271	1,3004	1,1198
25	6,4935	3,1646	2,1692	1,7153	1,3387	1,1062
26	6,2500	3,3223	2,1739	1,6611	1,3141	1,1013
27	6,6667	3,3784	2,2779	1,6447	1,3175	1,1038
28	5,8480	3,4483	2,2883	1,6556	1,3495	1,1198
29	7,9365	3,2468	2,2831	1,7007	1,3193	1,0929

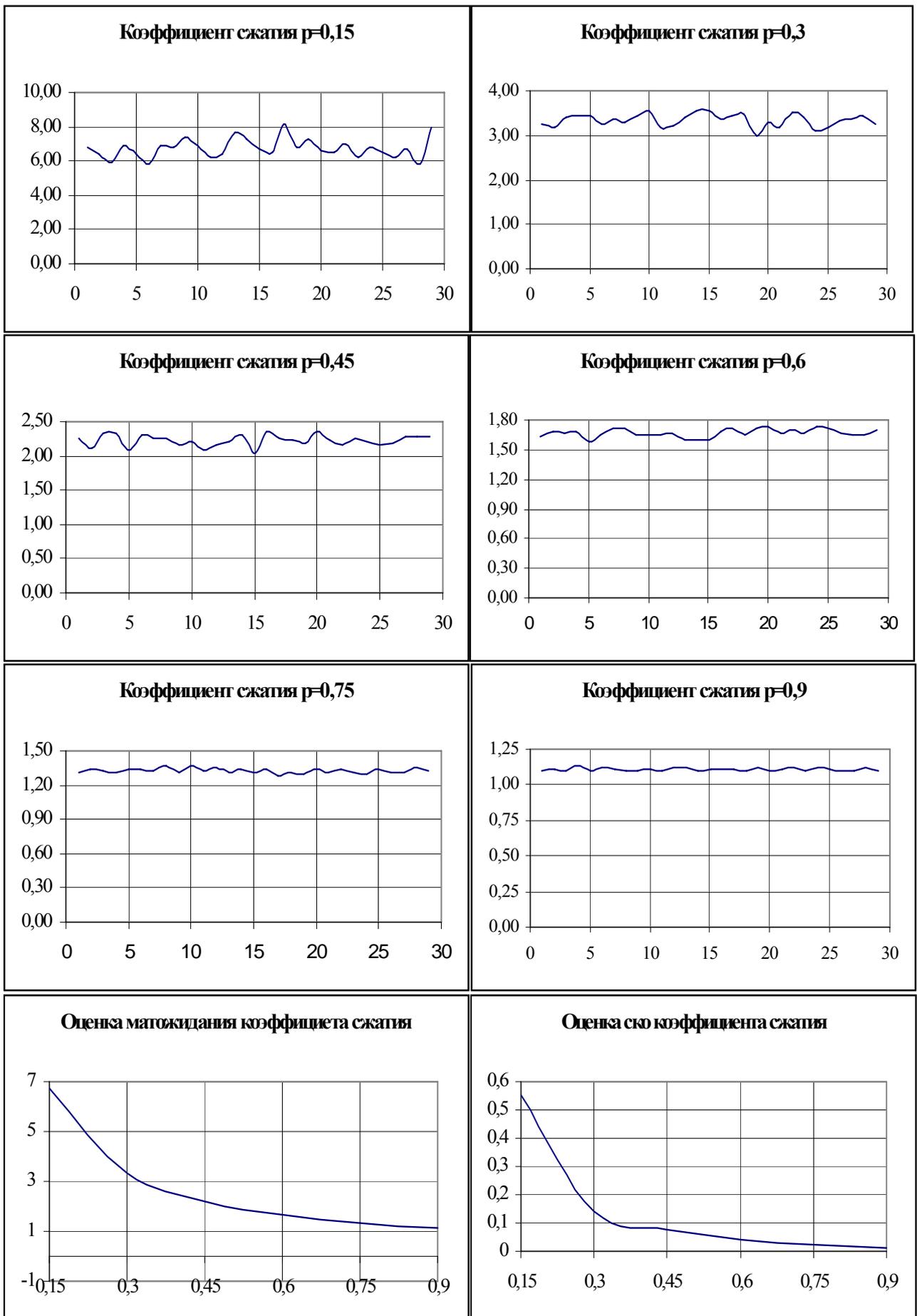


Рисунок 4.5. Результаты моделирования

5. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации законов распределения временных рядов.

5.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей законов распределения случайных величин, процессов, потоков событий.

Один из методов, применяемый для решения задачи сглаживания статистических рядов, называется методом моментов [3, 7-8]. Согласно этому методу, параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ выбираются таким образом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны статистическим характеристикам. При составлении уравнений для определения неизвестных параметров, как правило, выбирают моменты низших порядков. Общими рекомендациями являются здравый смысл и простота решения полученной системы уравнений.

Другим способом решения задачи сглаживания статистических рядов является определение параметров аналитического выражения, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \sum_{j=1}^M \left[\bar{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right]^2 = \min, \quad (5.1)$$

где M - число дифференциальных коридоров;

$\bar{f}_x(\bar{x}_j) = \bar{f}_j / \Delta_j$ - значение плотности распределения вероятностей в середине j -го дифференциального коридора \bar{x}_j ;

$f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)$ - аналитическое выражение с неизвестными параметрами.

Условиями минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M \left[\bar{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0; \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M \left[\bar{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0. \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Сложность этой системы зависит от вида аналитического выражения и числа неизвестных параметров, подлежащих определению. Как правило, решение этой системы возможно лишь приближенными методами.

Так, например, при однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона [7-8], неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_n)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_n)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}. \quad (5.3)$$

В качестве начального приближения можно выбрать значение параметра, определенное по методу моментов.

Алгоритм завершает свою работу, когда выполняется следующее условие:

$$|\beta_{n+1} - \beta_n| \leq \varepsilon, \quad (5.4)$$

где ε - погрешность вычисления параметра, задаваемая исследователем.

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить систему уравнений (5.2) для двумерного случая:

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0; \\ f_2 = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Решить эту систему можно только приближенными методами, например, методом Ньютона. Воспользовавшись формулой для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными по методу Ньютона, получим:

$$\beta_1^{n+1} = \beta_1^n - \frac{1}{\Delta'} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} f_1(\beta_1^n, \beta_2^n) - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} f_2(\beta_1^n, \beta_2^n) \right), \quad (5.6)$$

$$\beta_2^{n+1} = \beta_2^n - \frac{1}{\Delta'} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} f_2(\beta_1^n, \beta_2^n) - \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} f_1(\beta_1^n, \beta_2^n) \right), \quad (5.7)$$

где

$$\Delta' = \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1}.$$

Для вычислений необходимо знать значения частных производных по неизвестным параметрам функций f_1 и f_2 . Их выражения приведены в формулах (5.8) - (5.11).

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} -$$

$$-\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}. \quad (5.11)$$

При аппроксимации плотностей распределения вероятностей в качестве аргумента используется середина дифференциального коридора, что, в свою очередь, вносит дополнительные погрешности при анализе асимметричных законов распределения. От этого недостатка свободна аппроксимация функций распределения вероятностей.

Задача аппроксимации статистического ряда функциями распределения вероятностей ставится аналогично задаче аппроксимации плотностей распределения вероятностей:

$$\Delta = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)]^2 = \min, \quad (5.12)$$

где M - число дифференциальных коридоров;

$\epsilon_x(x_j) = \sum_{s=1}^j \epsilon_s$ - значение функции распределения вероятностей в конце j -го

дифференциального коридора x_j ;

$F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)$ - аналитическое выражение с неизвестными параметрами β_1, β_2, \dots

Условиями минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0; \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0. \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (5.13)$$

При однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона, неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_n)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_n)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}, \quad (5.14)$$

и дальше все расчеты производятся аналогично случаю с плотностями вероятностей.

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить уравнение (5.13) для двумерного случая.

Составим систему из двух уравнений для нахождения неизвестных параметров аппроксимации. Эту систему можно получить, продифференцировав выражение (5.13) по неизвестным параметрам.

$$\begin{cases} F_1 = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0; \\ F_2 = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Для решения системы (5.15) воспользуемся приближенным методом Ньютона. Способ нахождения неизвестных параметров аналогичен случаю с плотностями распределения вероятностей по формулам (5.6) и (5.7).

Для вычислений необходимо определить частные производные по неизвестным параметрам β_1, β_2 функций F_1 и F_2 :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \beta_2} &= \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \\ &\quad - \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \beta_1} &= \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \\ &\quad - \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Значения неизвестных параметров вычисляются итерационно до достижения заданной точности.

При решении разнообразных задач полезной характеристикой случайной величины является её характеристическая функция - математическое ожидание комплексной случайной величины e^{iux} , рассматриваемое как функция параметра u [3]:

$$\varphi_x(u) = M[e^{iux}]. \quad (5.20)$$

Так как $|e^{iux}| = 1$ при любых действительных u и x , то вследствие основного свойства плотности вероятности характеристическая функция при любом действительном значении u не превосходит по модулю единицы и равна единице при $u = 0$.

Характеристическая функция и плотность распределения вероятности случайной величины связаны парой взаимно обратных преобразований Фурье [3]:

$$\varphi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f_x(x) dx; \quad (5.21)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \varphi_x(u) du. \quad (5.22)$$

Таким образом, характеристическая функция случайной величины также является её полной вероятностной характеристикой.

Примеры характеристических функций для типовых законов распределения приведены в приложении П.2.

Зная характеристическую функцию, можно просто определить начальные и центральные моменты случайной величины [3]:

$$\alpha_k = \frac{1}{i^k} \varphi_x^{(k)}(0), \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (5.23)$$

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} [\exp(-ium_x) \varphi_x(u)]_{u=0}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (5.24)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов (см. приложение П.21).

5.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд, распределенный по заданному закону распределения $N=500, M=10$.
2. Построить гистограмму.
3. Определить параметры законов распределения методом моментов, аппроксимации плотностей распределения вероятностей, функций распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации.
4. Найти характеристическую функцию случайного временного ряда (для одной реализации).
5. Пункты 1-4 повторить для $N=1000, 2000, 5000$ и $M=10, M^{(0)}$ – оптимальное число дифференциальных коридоров.
6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров законов распределения от объёма выборки, числа дифференциальных коридоров.
7. Качество аппроксимации определить, воспользовавшись критерием Пирсона и Колмогорова.

5.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации законов распределения.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации законов распределения вероятностей.
4. Значения параметров законов распределения, определенные по методу моментов, аппроксимации плотностей распределения вероятностей и функций распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации, относительные погрешности оценки параметров закона распределения, для $N=500, 1000, 2000, 5000$ и $M=10, M^{(0)}$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).
5. Характеристическая функция случайного временного ряда.
6. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для экспоненциального закона распределения приведен ниже (пункты 3-4 отчёта).

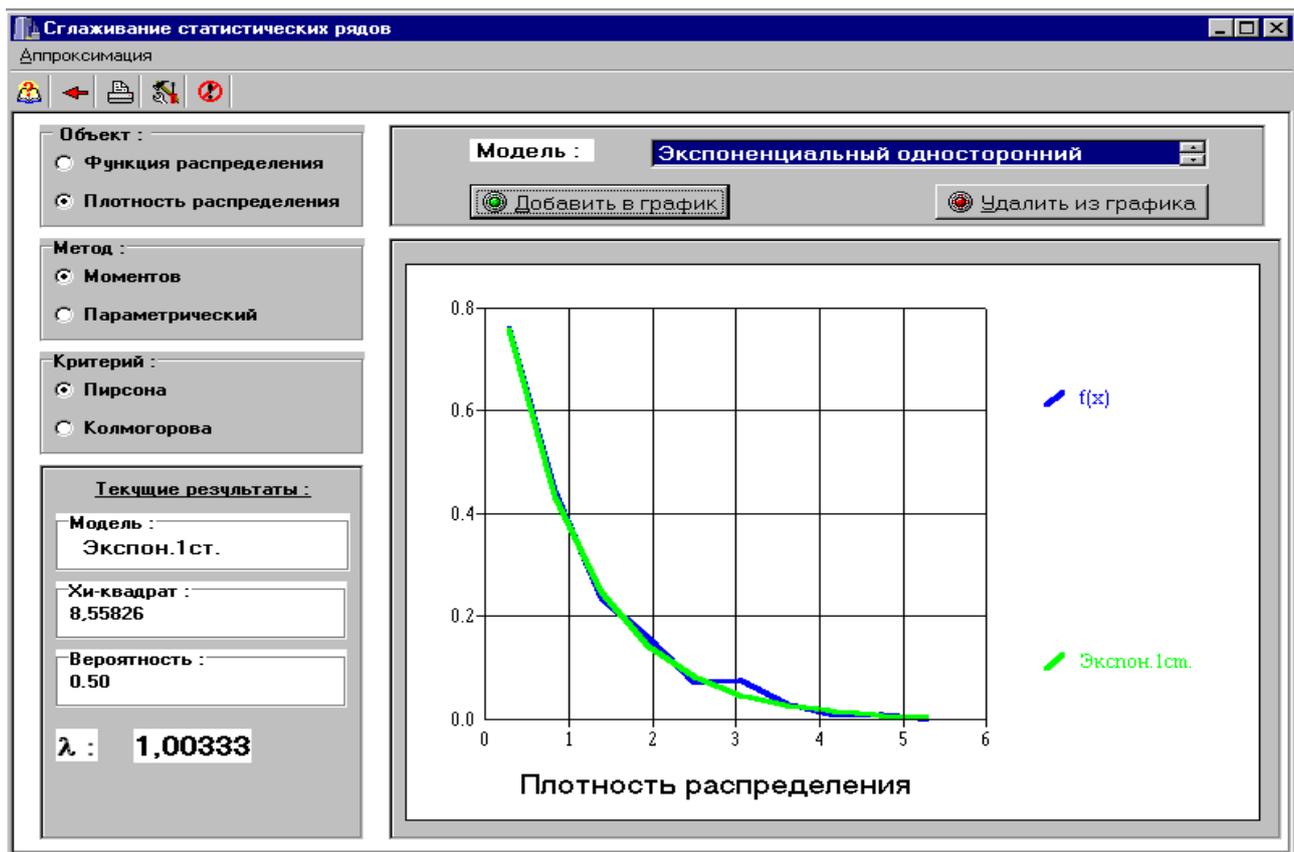


Рисунок 5.1. Примеры экранных форм аппроксимации законов распределения

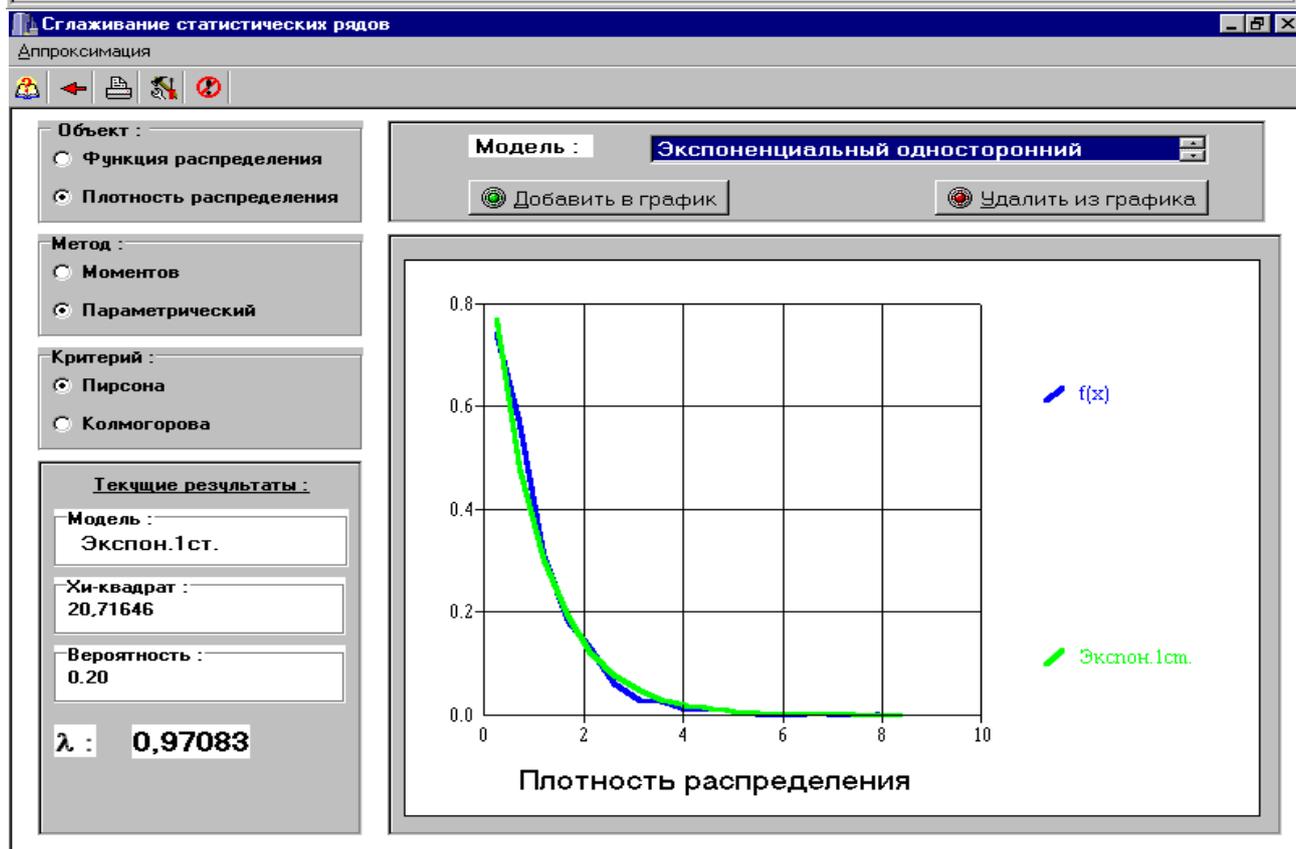
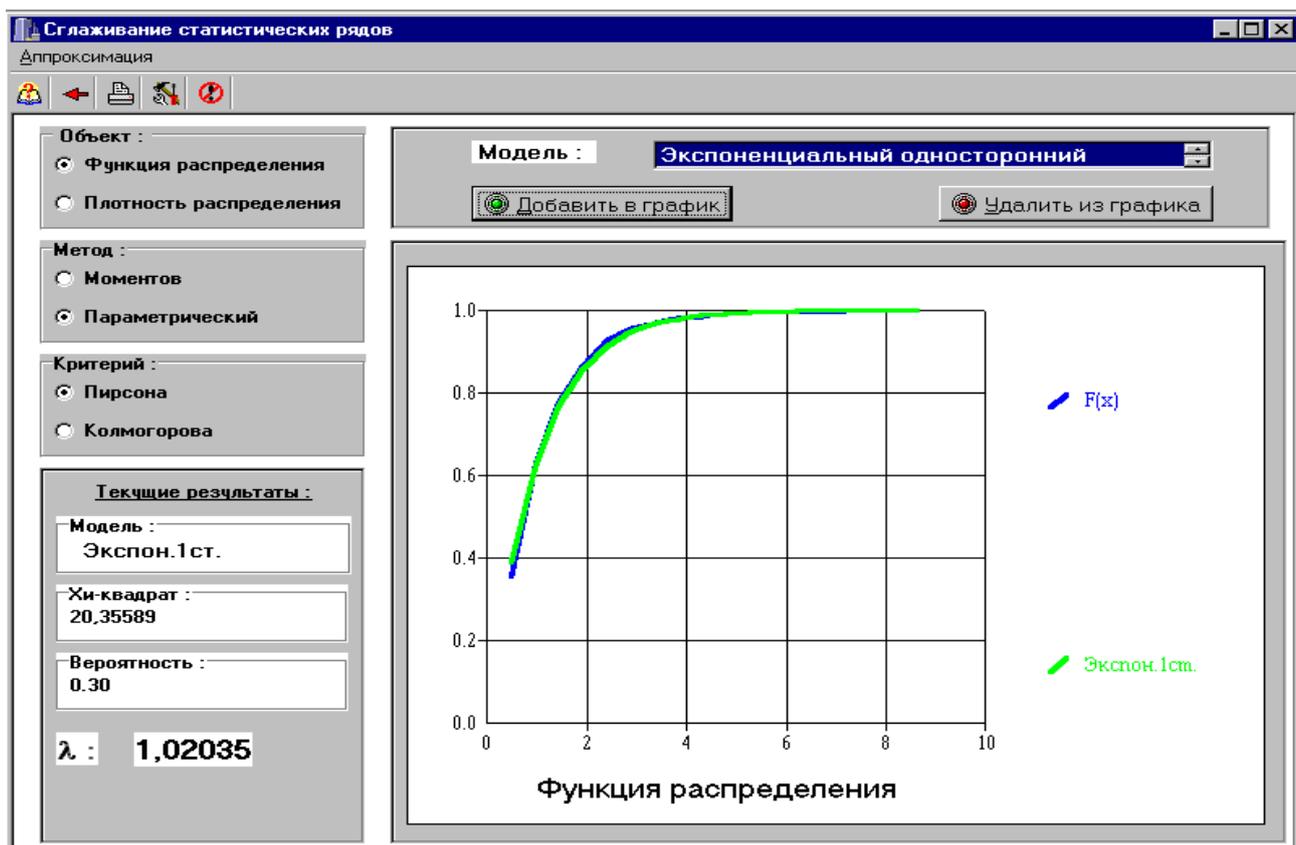


Рисунок 5.2. Примеры экранных форм аппроксимации законов распределения

Значения параметра закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=500, M=10$

Таблица 5.1

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	0,9603	5,5439	1,00579	8,51	0,9674	5,798
2	0,98	6,1867	0,9307	6,4984	0,9582	6,0585
3	0,9446	16,2528	1,0176	22,636	0,9602	17,0424
4	0,9804	1,7875	0,9737	1,8577	0,984	1,7663
5	1,0165	5,2636	1,0799	7,6052	1,0283	5,4085
6	0,9473	13,545	0,9101	12,5885	0,9189	12,6992
7	0,9549	5,7752	0,9339	5,6472	0,9522	5,7334
8	1,0333	10,256	1,0605	11,4268	1,0195	9,9176
9	0,9788	6,7865	1,0062	7,5619	0,9664	6,6783
10	0,9699	8,646	0,9677	8,5363	0,9574	8,1046
11	1,0022	13,856	1,1132	24,6434	1,0091	14,1086
12	1,0516	5,3593	1,0153	4,5777	1,0273	4,7372
13	1,0274	6,314	1,0169	6,1396	1,0183	6,1564
14	1,0496	3,8448	1,0182	3,8185	1,0314	3,735
15	0,9409	7,1225	0,9537	7,3787	0,9345	7,0582
16	1,0549	11,7544	1,1391	18,9582	1,0871	13,4777
17	0,9992	1,7917	1,0515	2,6638	1,0717	1,7661
18	0,9645	7,985	0,9191	7,3457	0,9452	7,4891
19	1,0815	11,7833	1,1122	13,5319	1,0499	10,7825
20	1,0486	9,4825	1,0185	8,8276	1,0401	9,2218
21	0,9689	9,773	1,0246	13,3076	0,9892	10,614
22	0,9844	5,1709	0,9752	5,1367	0,9816	5,1523
23	0,9728	7,0216	0,9655	6,9621	0,965	6,9599
24	1,068	12,3235	1,0462	12,1296	1,0634	12,2956
25	0,9822	6,0582	0,9514	6,1036	0,9728	5,9853
26	0,9432	4,9787	0,8908	5,9352	0,9258	5,0102
27	0,9859	5,7124	1,0979	11,5524	1,0068	5,8126
28	0,9841	12,5944	0,9567	11,6159	0,9798	12,3894
29	0,9461	9,4224	0,9359	9,112	0,9265	8,9192
		8		9		12

Выделенные значения параметров соответствуют минимальному значению χ^2 в строке, т. е. лучшему методу аппроксимации из рассмотренных. В последней строке указано количество случаев, когда данный метод аппроксимации даёт лучший результат.

Значения параметра закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=500, M=18$

Таблица 5.2

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,0127	30,0388	0,9946	28,9604	0,9965	29,0616
2	1,008	24,8421	1,0957	37,7176	1,0217	26,0049
3	0,9825	16,2121	0,9689	15,8397	0,9782	16,0742
4	1,0008	18,543	1,1115	28,725	1,0131	18,9419
5	0,95667	16,8424	0,9215	16,8512	0,9659	17,0691
6	1,0214	17,9857	1,0695	21,1378	1,0015	17,3084
7	0,9768	18,3176	1,0779	30,7334	0,9876	18,9646
8	1,0187	11,0238	1,023	11,174	1,0287	11,3927
9	1,0286	7,9664	1,0243	7,8573	1,0273	7,9298
10	1,0343	19,6174	1,1143	29,8176	1,0478	20,6982
11	1,0048	16,1095	0,9738	15,4993	0,9887	15,6505
12	0,9954	30,0012	0,9396	28,1424	0,9644	28,6237
13	0,9777	15,3788	1,0287	18,6061	0,994	16,0764
14	0,971	25,3711	0,923	25,1372	0,9535	25,0218
15	0,9796	7,0792	0,9939	7,2193	0,9823	7,0892
16	0,9894	14,4784	1,0094	15,642	0,9979	14,9114
17	1,0449	16,6996	1,0234	16,0457	1,0443	16,6733
18	1,042	14,364	0,96	16,1122	1,028	14,2795
19	0,9905	16,3258	1,1159	36,4491	1,0199	18,6467
20	0,9762	19,8329	0,9686	19,3503	0,9666	19,2287
21	1,0006	12,3535	1,0302	13,6947	1,0037	12,447
22	0,942	24,4423	0,9593	25,5634	0,9294	23,8492
23	1,0995	19,2909	1,0972	19,2077	1,1072	19,5999
24	1,0498	10,4912	1,0771	11,503	1,0515	10,533
25	0,9901	16,0817	1,0174	17,5145	0,9881	16,0096
26	1,0066	15,7954	1,0605	19,7859	1,0267	16,8713
27	1,0285	16,8928	1,0533	17,9404	1,018	16,6184
28	0,9446	10,2616	0,9222	10,2748	0,9457	10,2748
29	0,9622	24,9265	1,0032	30,1757	0,9708	25,8216
		15		7		7

Значения параметра закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=1000$, $M=10$

Таблица 5.3

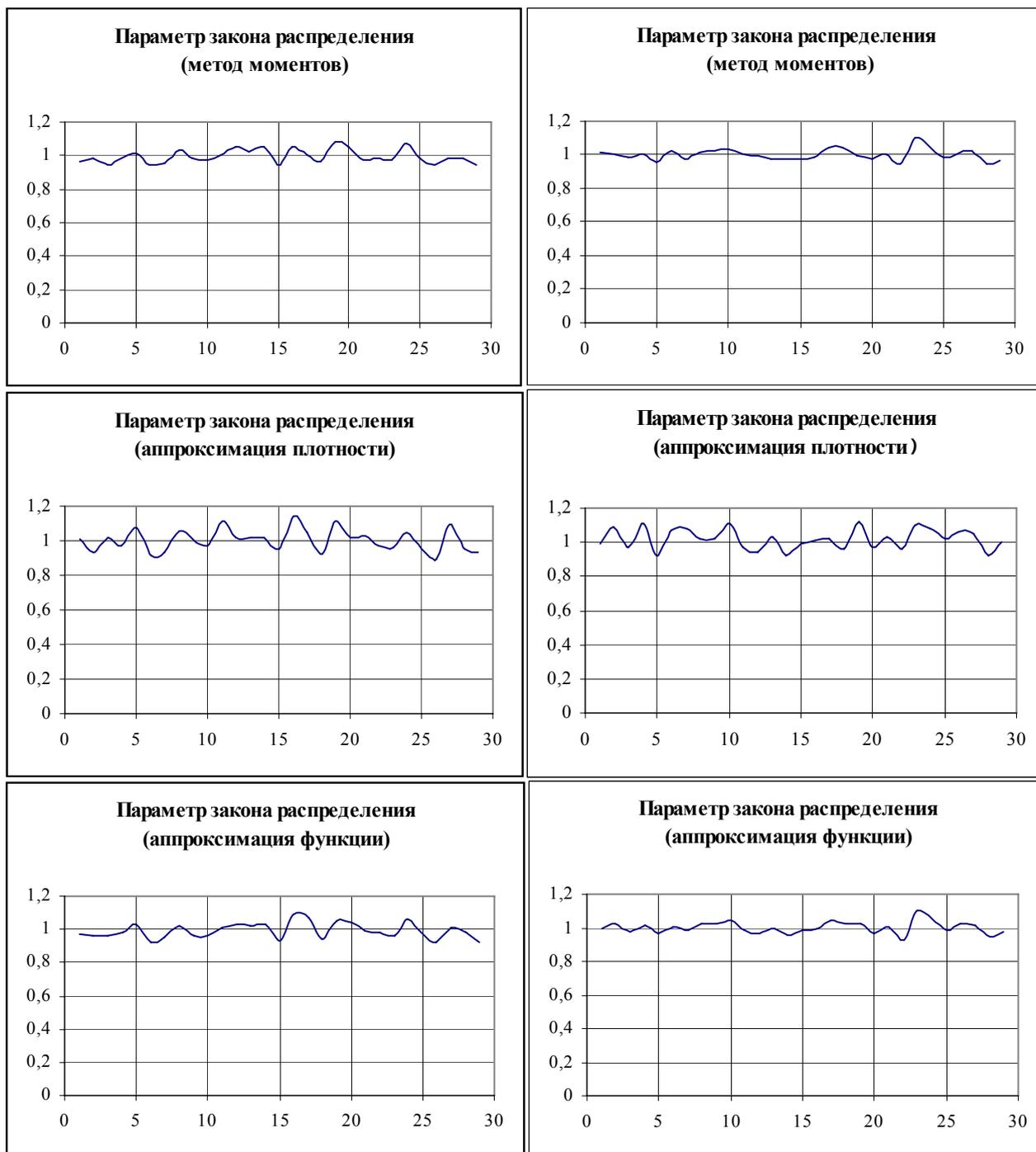
№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,026	6,0544	1,0845	10,129	1,0365	6,2926
2	0,9942	3,9715	0,9692	3,776	0,9844	3,7655
3	1,0367	5,3788	1,0187	5,4418	1,0311	5,3409
4	0,9783	5,9228	0,9466	5,1975	0,9571	5,2322
5	1,0328	14,8583	1,1192	25,5762	1,0367	15,0252
6	1,0324	8,3546	1,0342	8,3928	1,0259	8,2676
7	0,9865	6,7539	1,0404	11,4175	0,9866	6,7591
8	0,9723	12,4803	0,9668	12,3669	0,9704	12,4348
9	1,0168	3,6844	1,0006	3,7336	1,0008	3,6526
10	0,9555	6,8015	1,0026	9,3827	0,9556	6,8021
11	0,928	10,0032	0,9349	10,3591	0,9138	9,5959
12	1,0033	10,0002	1,0329	11,5942	1,0021	9,9728
13	0,9937	3,7253	1,0375	6,7555	0,9941	3,7368
14	1,0044	9,4678	1,137	30,0153	1,0364	10,7445
15	0,9926	12,7283	1,0691	26,9167	1,011	14,6097
16	0,9812	7,1325	0,9952	7,7588	0,9795	7,081
17	1,0454	7,0005	1,0698	7,5939	1,0536	7,0834
18	0,9895	2,1392	1,0056	2,7801	0,9805	2,0029
19	1,0513	5,9046	1,1117	10,1679	1,0573	6,0339
20	0,976	4,7991	0,9948	5,5362	0,9736	4,7546
21	0,9892	6,0324	0,9816	5,9528	0,9845	5,9701
22	1,0587	9,3571	1,1132	14,0838	1,0673	9,7502
23	0,9696	10,4077	0,9781	10,8449	0,9634	10,1879
24	0,9606	10,1536	1,0355	21,1182	0,9556	9,9012
25	0,9456	23,499	0,9836	30,2088	0,9521	24,348
26	1,0007	11,7813	0,9924	11,4433	0,9776	11,1553
27	1,0145	11,3965	1,0666	15,7728	1,0225	11,7088
28	0,9434	6,9877	0,9841	8,824	0,9506	7,0624
29	0,9986	8,5507	1,0588	14,8627	0,9982	8,5313
		13		3		13

Значения параметра закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=1000$, $M=18$

Таблица 5.4

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,0271	10,2578	1,0525	11,4528	1,0295	10,3173
2	0,9992	13,6004	1,0149	14,408	1,004	13,7934
3	1,0452	30,2983	0,9855	28,8668	1,0355	29,554
4	0,9948	14,2192	1,0151	15,2224	0,9978	14,3165
5	1,0082	10,4226	1,0096	10,4646	1,0065	10,3773
6	0,9304	21,0138	0,8746	20,721	0,9231	20,5856
7	0,9757	17,8272	1,0027	20,2347	0,9723	17,6399
8	0,994	14,6985	1,0198	16,283	0,9871	14,5126
9	0,9998	23,7479	0,9932	23,4965	1,0017	23,8402
10	0,9775	10,2187	1,0284	14,7148	0,9937	10,9811
11	0,9844	36,8398	1,0324	41,9356	0,9836	36,7996
12	1,0239	15,1359	1,0063	14,7952	1,0184	14,9682
13	1,0139	5,5332	0,9886	6,3762	1,0101	5,5898
14	0,9793	14,6157	0,9525	13,8815	0,9711	14,2418
15	1,0213	13,5708	1,0507	15,5194	1,0211	13,5624
16	0,9907	13,4329	1,0056	14,2469	0,9878	13,3272
17	1,0061	24,0603	1,0331	26,7577	1,0286	26,1765
18	0,9965	26,835	1,0379	31,5281	1,0048	27,454
19	0,9363	11,6612	0,921	11,7442	0,9322	11,6481
20	0,9869	18,0129	0,9773	17,6869	0,9778	17,6994
21	0,9658	15,2997	0,9232	15,0138	0,9541	14,8432
22	1,0158	10,6789	1,018	10,7887	1,014	10,6015
23	1,0234	12,6209	1,0229	12,5996	1,0242	12,6504
24	0,9881	12,1475	1,0259	15,0593	0,9898	12,2102
25	0,9814	22,5003	1,0172	25,4466	0,9851	22,6775
26	0,9787	14,3113	1,0485	21,3315	0,9823	14,4102
27	0,969	19,929	0,9594	19,7503	0,9633	19,8002
28	1,0005	19,4525	1,0674	27,9585	1,023	21,1067
29	1,0198	20,3337	0,9708	20,7165	1,0204	20,3559
		13		7		9

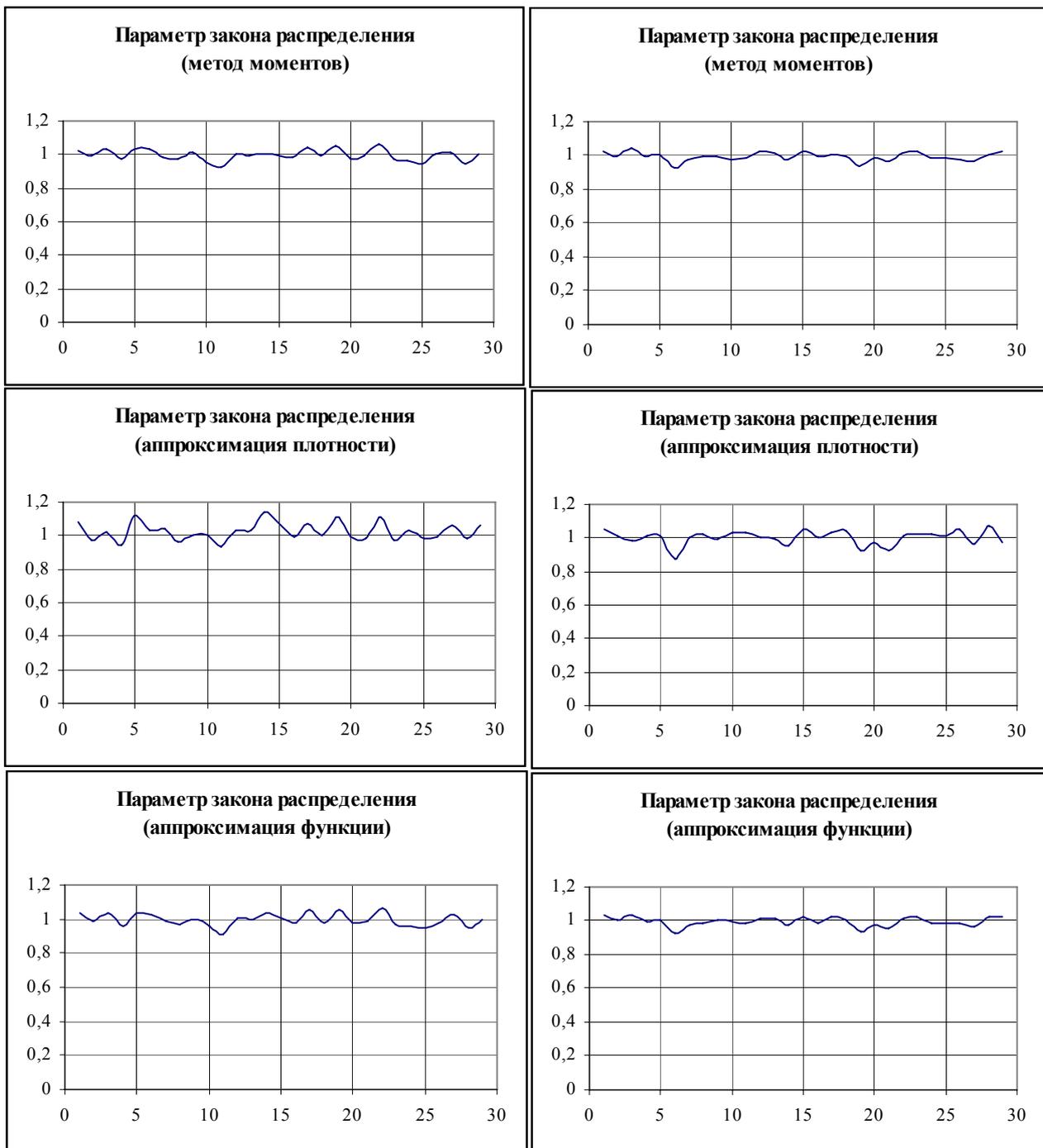
Ниже приведены результаты оценки параметра закона распределения различными аппроксимативными методами.



$N=500, M=10$

$N=500, M=18$

Рисунок 5.3. Результаты моделирования



$N=1000, M=10$

$N=1000, M=18$

Рисунок 5.4. Результаты моделирования

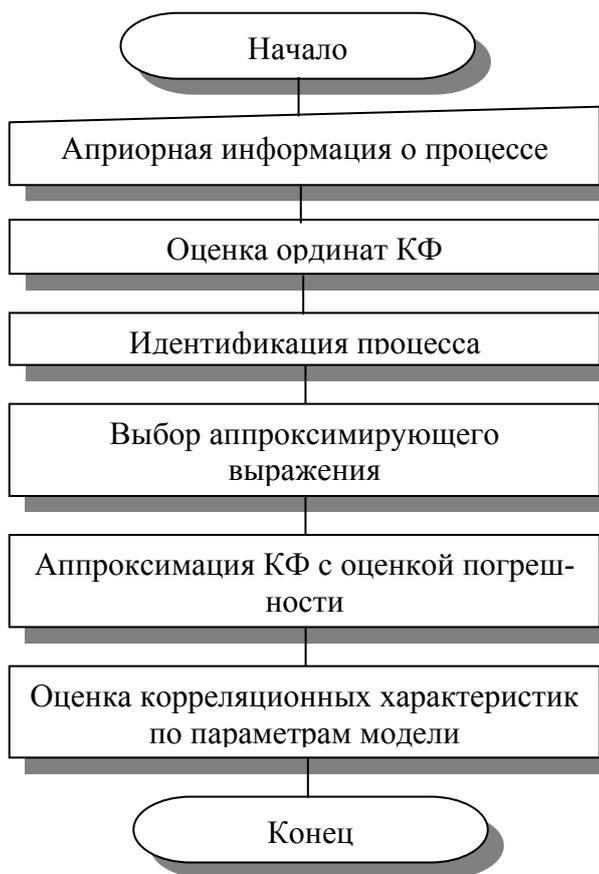
5.4. Контрольные вопросы

1. Какие численные методы применяются при аппроксимации законов распределения?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение?
3. Какой из методов аппроксимации обладает лучшей сходимостью?
4. Какой из методов аппроксимации более трудоёмкий?

6. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов.

6.1. Теоретические основы лабораторной работы



В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов.

Блок-схема алгоритма аппроксимации представлена на рис. 6.1.

С учетом того, что исходными данными, подлежащими обработке, является массив значений ординат нормированной корреляционной функции - $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0, \dots, J_{\max}}$, критерий приближения целесообразнее записать в виде:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{J_{\max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)]^2 = \min. \quad (6.1)$$

В случае, если модель содержит один параметр, задача сводится к решению одного уравнения. Найдем это уравнение. Для этого необходимо, подставив в (6.1) $\rho_a(\tau_i, \alpha)$, выполнить дифференцирование и результат приравнять нулю:

Рисунок 6.1. Алгоритм аппроксимации

$$\frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{J_{\max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)] \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (6.2)$$

Для решения полученного уравнения воспользуемся методом Ньютона [7-8]. Тогда

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left\{ R_i \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial^2 \alpha} - \left[\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 \right\} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}, \quad (6.3)$$

где $R_i = \rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)$.

Начальное приближение $\alpha_0 = \frac{\epsilon_{k \max}}{3}$ (см. таблицу 3.2). Процесс вычисления

заканчивается, когда $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \epsilon$, где ϵ - любое малое наперед заданное число.

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями.

Аналитическое выражение $\rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$ широко применяется для аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых широкополосных процессов. Параметр модели определяется в результате решения следующего уравнения [7-8]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J \max} R_i \tau_i e^{-\alpha_n \tau_i}}{\sum_{i=1}^{J \max} [\tau_i^2 e^{-2\alpha_n \tau_i} - R_i \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i}]}, \quad (6.4)$$

где $R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}$.

Следует подчеркнуть, что эта простая модель оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки максимального интервала корреляции. Подобные задачи возникают при создании автоматизированных систем сбора и обработки информации, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени. Часто эта модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик аппаратно-программных средств, так как существует большой класс динамических систем, для которых случайные процессы с экспоненциальной корреляционной функцией оказываются наилучшими с точки зрения помехозащищенности.

Аналитическое выражение $\rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ применяется для аппроксимации корреляционных функций однократно дифференцируемых широкополосных случайных процессов. Параметр модели определяется в результате решения уравнения [7-8]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J \max} R_i \alpha_n \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i}}{\sum_{i=1}^{J \max} \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i} [R_i (\alpha_n \tau_i - 1) - \alpha_n^2 \tau_i^2]}, \quad (6.5)$$

где $R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i)$.

Аналитическое выражение $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$ применяется для аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых широкополосных процессов, у которых $S_x(0) = 0$. Параметр определяется в результате решения уравнения [7-8]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J_{\max}} R_i \tau_i e^{-\alpha_n \tau_i} (\alpha_n \tau_i - 1)}{\sum_{i=1}^{J_{\max}} \left[R_i \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i} (2 - \alpha_n \tau_i) - \tau_i^2 e^{-2\alpha_n \tau_i} (\alpha_n \tau_i - 1) \right]}, \quad (6.6)$$

где $R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i)$.

Аналитическое выражение $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ применяется при аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных процессов. Параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона [7-8]:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}, \end{cases} \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i A_2 \tau_i; S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i A_3 \tau_i; S_3 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 A_2 (A_2 - R_i); S_4 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 A_3 (A_2 - R_i); \\ S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 (A_3^2 + R_i A_2). \end{aligned}$$

Начальные значения α и ω_0 выбираются следующим образом (см. таблицу 2.2):

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{3}{\tau_{k \max}}; \\ \omega_0 = \frac{\pi}{2 \tau'}, \end{cases} \quad (6.8)$$

где τ' - интервал времени, соответствующий первому пересечению $\hat{\rho}_x(\tau)$ оси абсцисс.

Процесс вычисления заканчивается при совместном выполнении условий:

$$\begin{cases} |\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \varepsilon; \\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (6.9)$$

При аппроксимации корреляционных функций дифференцируемых узкополосных процессов применяется аналитическое выражение

$$\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет вид (6.7).

Для рассматриваемого случая [7-8]

$$A_1 = e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 - \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n};$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n); \\
S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_3 (\alpha_n \tau_i + 2) / \omega_n + A_2 \tau_i) \right); \quad (6.10) \\
S_4 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n) (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n) + \right. \\
&\quad \left. + R_i (A_2 \tau_i (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n - A_3 ((\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n^2 + \tau_i^2)) \right); \\
S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n)^2 + R_i (A_2 \tau_i^2 + A_3 (\tau_i^2 + 1 / \omega_n^2) \alpha_n / \omega_n) \right).
\end{aligned}$$

При аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных случайных процессов, у которых $S_x(0) = 0$, применяют выражение

$$\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет тот же вид – (6.7). В этом случае [7-8]

$$\begin{aligned}
A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 + \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n}; \\
S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3); \\
S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_2 \tau_i + A_3 (2 - \alpha_n \tau_i / \omega_n)) \right); \quad (6.11) \\
S_4 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n) (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3) + \right. \\
&\quad \left. + R_i (A_2 \tau_i (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n - A_3 (\tau_i^2 + (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n^2)) \right); \\
S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3)^2 + R_i \left(A_3 (1 / \omega_n^2 - \tau_i^2) \alpha_n / \omega_n + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A_2 \tau_i (\tau_i - 2 \alpha_n / \omega_n^2) \right) \right).
\end{aligned}$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений аналогичны предыдущему случаю.

Следует отметить, что система уравнений с использованием метода Ньютона с аналитическим взятием первой и второй производных имеет достаточно сложный вид, обладает плохой сходимостью, решение сильно зависит от начального приближения. Одним из способов устранения ряда недостатков является применение конечно-разностного метода Ньютона [7-8].

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [7-8].

$$1. \rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (6.7), где

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i};$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} - e^{-\alpha_n \tau_i}}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} - 2e^{-\alpha_n \tau_i} + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i}}{h^2},$$

где h – любое достаточно малое приращение по α .

$$2. \rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (6.7), в котором:

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} (1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i)}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} (1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i) + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i} (1 + (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2};$$

$$3. \rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

Параметр определяется в результате решения уравнения (6.7), где:

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} (1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i)}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} (1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i) + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i} (1 - (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2}.$$

Для двухпараметрических моделей корреляционных функций параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left(R_i \frac{\partial^2 \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=\alpha_n}}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \Big|_{\omega_0=\omega_n}}{\sum_{i=0}^N \left(R_i \frac{\partial^2 \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} - \left(\frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \right)^2 \right) \Big|_{\omega_0=\omega_n}}. \end{array} \right. \quad (6.12)$$

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми двухпараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [7-8].

4. Для модели $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i;$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(\alpha n + h) \tau_i} - e^{-\alpha n \tau_i})}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(\alpha n + h) \tau_i} - 2e^{-\alpha n \tau_i} + e^{-(\alpha n - h) \tau_i})}{h^2};$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-\alpha n \tau_i} (\cos((\omega_n + k) \tau_i) - \cos \omega_n \tau_i)}{k};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-\alpha n \tau_i} (\cos((\omega_n + k) \tau_i) - 2 \cos \omega_n \tau_i + \cos((\omega_n - k) \tau_i))}{k^2},$$

где h – любое достаточно малое приращение по α ,

k – любое достаточно малое приращение по ω_0 .

5. Для модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left(e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$S_1 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_2 = e^{-(\alpha n + h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_3 = e^{-(\alpha n - h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{S_2 - S_1}{h}; \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2};$$

$$S_4 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n + k) \tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k) \tau_i) \right);$$

$$S_5 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n - k) \tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k) \tau_i) \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \approx \frac{S_4 - S_1}{k}; \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.$$

6. Для модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left(e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right); \\
S_2 &= e^{-(\alpha n + h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right); \\
S_3 &= e^{-(\alpha n - h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right); \\
\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} &\approx \frac{S_2 - S_1}{h}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2}; \\
S_4 &= e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n + k) \tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k) \tau_i) \right); \\
S_5 &= e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n - k) \tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k) \tau_i) \right); \\
\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} &\approx \frac{S_4 - S_1}{k}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.
\end{aligned}$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений определяются по формулам (6.8) и (6.9).

При аппроксимации КФ функциями заданного вида можно также использовать метод деформированного многогранника, который является одним из прямых методов многомерного поиска и выделяется высокой эффективностью и помехозащищенностью [7-8].

Метод деформируемого многогранника Нелдера и Мида легко адаптируется к особенностям оптимизируемой функции, «не замечает» отдельные шероховатости функции (вызванные ошибками вычисления), а скорость сходимости алгоритма не слишком сильно зависит от регулярности целевой функции. Очень часто этот метод оптимизации конкурирует с такими мощными методами оптимизации, как метод Ньютона.

Метод деформируемого многогранника является модификацией симплексного метода. Симплексом называют регулярный многогранник в n -мерном евклидовом пространстве. Для случая 2-х переменных симплекс представляет собой равносторонний треугольник; 3-х переменных - тетраэдр и т.д. Для n -мерного пространства симплекс всегда имеет $n+1$ вершину.

Координаты вершин регулярного симплекса можно определить с помощью матрицы размером $n \times (n+1)$:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_2 \\ 0 & r_2 & r_1 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r_2 & r_2 & \dots & r_1 \end{vmatrix}, \quad (6.13)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \left\lfloor \frac{s}{n\sqrt{2}} \right\rfloor (\sqrt{n+1} + n - 1), \\ r_2 &= \left\lfloor \frac{s}{n\sqrt{2}} \right\rfloor (\sqrt{n+1} - 1), \end{aligned} \quad (6.14)$$

s - параметр, отождествляемый с расстоянием между двумя вершинами.

Элемент r_{ij} матрицы R равен i -ой координате j -ой вершины симплекса.

Поиск минимума функции симплексным методом ведётся следующим образом:

1. В каждой вершине симплекса вычисляется значение функции $y_i = f(x_i)$.
2. Определяется вершина с наибольшим (наихудшим) значением $f(x)$.
3. Через эту вершину и центральную точку симплекса проводится прямая, на которой на некотором удалении от центра C устанавливается новая вершина (см. рис. 6.2).

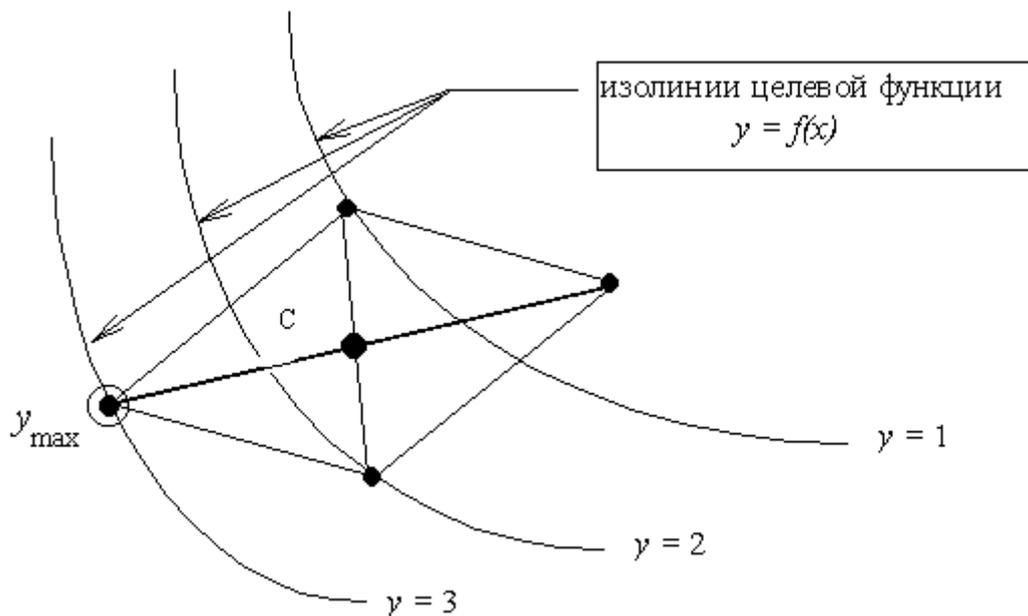


Рисунок 6.2. Геометрическая интерпретация симплексного поиска

4. Вершина с наибольшим значением $F(x)$ удаляется. Симплекс по существу «переворачивается» через грань, противоположную наихудшей вершине.

5. Далее процесс повторяется, начиная с п. 1.

Важной особенностью симплексного метода поиска является то, что для реализации каждого последующего шага итерации необходимо вычислить функцию $f(x)$ лишь в одной новой точке симплекса. Сама же оптимизация этим алгоритмом ассоциируется с процессом «кантования» симплекса вниз по поверхности функции $f(x)$ в направлении её минимума.

Регулярный метод симплексного поиска склонен к закликиванию, поэтому, Нелдер и Мид, нарушив регулярность, устранили указанный недостаток.

Обозначим X_k^A - вершину многогранника (первоначального симплекса), которая даёт максимальное значение $f(x)$ на k -ом шаге, а X_k^B - минимальную оценку функции $f(x)$. Определим вектор координат X_k^C центра многогранника по следующей формуле:

$$x_i^C = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n+1} x_i^j \right) - x_i^A \right], \quad (6.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

где i - номер координаты, j - номер вершины симплекса, k - номер шага итерации.

В методе деформируемого многогранника над многогранником выполняются операции **отражения, растяжения, сжатия и редукции**.

1. **Отражение** есть проецирование X_k^A через центр X_k^C в соответствии с соотношением:

$$X_k^0 = X_k^C + a(X_k^C - X_k^A), \quad (6.16)$$

где $a > 0$ - коэффициент отражения, X_k^0 - вектор координат новой (отражённой) вершины).

2. **Растяжение** применяется в том случае, когда отражение оказалось удачным, то есть значение функции в новой точке меньше, чем в наилучшей из вершин многогранника:

$$f(X_k^0) \leq f(X_k^B),$$

при этом вектор $X_k^0 - X_k^C$ растягивается, и получается новая точка

$$X_k^P = X_k^C + \gamma(X_k^0 - X_k^C), \quad (6.17)$$

где $\gamma > 1$ - коэффициент растяжения.

3. **Сжатие** выполняется, когда в результате отражения значение функции в точке X_k^0 оказалось больше, чем во всех вершинах многогранника, кроме вершины X_k^A , то есть:

$$f(X_k^0) < f(X_k^A);$$

$$f(X_k^0) > f(X_k^j), j \neq A,$$

тогда вектор $X_k^A - X_k^C$ сжимается так, что

$$X_k^{Cж} = X_k^C + \beta(X_k^A - X_k^C), \quad (6.18)$$

где $0 < \beta < 1$ - коэффициент сжатия.

4. **Редукция**, то есть сжатие симплекса в два раза по отношению к вершине с наименьшим значением $f(x): f(x_k^B)$.

Редукция применяется, если $f(X_k^0) > f(X_k^A)$ и выполняется по формуле:

$$X_k^j = X_k^B + 0,5(X_k^j - X_k^B), \text{ при } j=1, 2, \dots, n+1.$$

На рис. 6.3 схематично показаны перечисленные операции.

Метод деформируемого многогранника прекращает свою работу, если выполняются условия:

$$\left[\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} [f(x_k^j) - f(x_k^C)]^2 \right]^{1/2} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - малое число, определяющее ε -окрестность поиска экстремума.

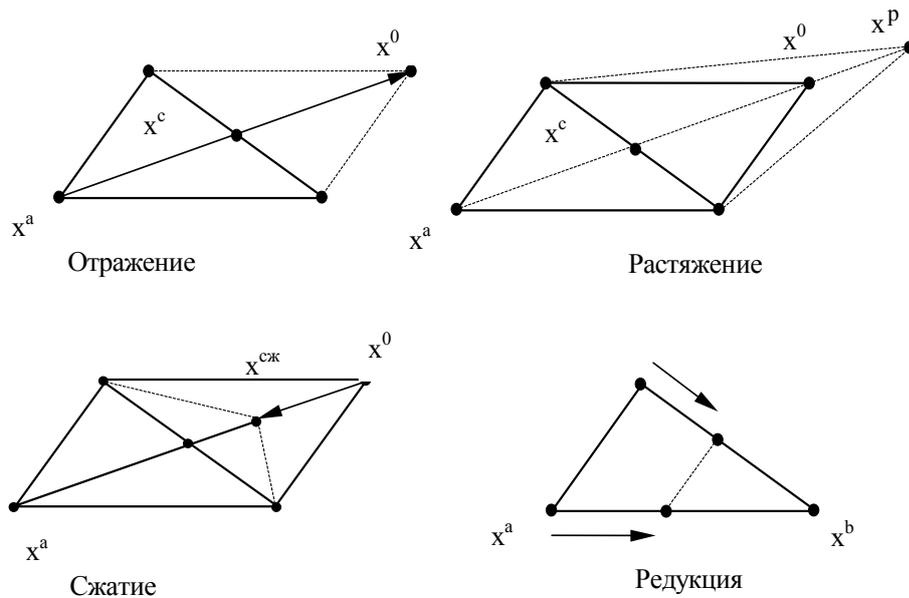


Рисунок 6.3. Основные операции метода деформированного многогранника

Рассмотрим применение метода деформированного многогранника к решению задач аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида, параметры которой удовлетворяют минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

При использовании метода деформированного многогранника задача поиска параметров, удовлетворяющих минимуму квадратичной погрешности, сводится к отысканию экстремума (минимума) следующей целевой функции:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (6.19)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – независимые переменные (входные, варьируемые параметры).

Рассмотрим примеры целевых функций, используемых для решения задачи аппроксимации КФ типовыми однопараметрическими моделями [7-8].

- $\rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \right]^2 \rightarrow \min.$$

- $\rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

- $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$4. \rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$5. \rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$6. \rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

При решении некоторых прикладных задач требуется знание аналитического выражения спектральной плотности мощности. Благодаря наличию аналитической связи между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности, вопросы их аппроксимации оказываются взаимосвязанными [7-8].

Запишем квадратичную погрешность аппроксимации спектральной плотности процесса $S_x(\omega)$ функцией заданного вида $S_a(\omega)$:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega) - S_a(\omega)]^2 d\omega. \quad (6.20)$$

Раскрыв квадратные скобки в (6.20), получим:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega - 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) S_a(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_a^2(\omega) d\omega. \quad (6.21)$$

Подставим в (6.21) значения $S_x(\omega)$ и $S_a(\omega)$, полученные из корреляционной функции при помощи преобразования Винера-Хинчина [7-8]:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \\ S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{cases} \quad (6.22)$$

Тогда

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau. \quad (6.23)$$

Применяя к внутренним интегралам обратное преобразование Винера-Хинчина и учитывая четность корреляционной функции, получим:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau)]^2 d\tau. \quad (6.24)$$

Из выражения (6.24) видно, что задача аппроксимации спектральной плотности мощности функциями заданного вида сводится к задаче аппроксимации корреляционной функции функциями вида:

$$K_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.25)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение П.23).

6.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции и со следующими параметрами - $M = \text{ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $N=12,5 M$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.
4. Задать вручную начальные приближения параметров корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции, воспользовавшись методами Ньютона, Ньютона с конечно-разностными производными и деформированного многогранника. Определить погрешности аппроксимации.
5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
6. Повторить пункты 1-5 для объемов выборки $N=k M$, где $k=25, 50, 100$ (начальное приближение определить в автоматическом режиме).
7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объема выборки N .
8. Повторить пункты 1-5 для объема выборки $N=25 M_1$, где $M_1=M/2, M/3, M/4$ (начальное приближение определить в автоматическом режиме).
9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 – числа отсчетов корреляционной функции.
10. Повторить пункты 1-5 для $N=25 M$ и $\delta = 0,02; 0,05; 0,1; 0,2$.
11. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.

6.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности.
4. Пример экранной формы построения фазового портрета.
5. Зависимости погрешности оценки параметров аналитического выражения и аппроксимации от объёма выборки N.
6. Зависимости погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 .
7. Зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.
8. Пример результатов аппроксимации (вывод параметров модели).
9. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации от объёма выборки для $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$, $\Delta\tau = 0,082$

Таблица 6.1

N	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
475	0,8881	4,9225	0,1317	0,8881	4,9225	0,1317	0,8882	4,9225	0,1317
950	0,8305	5,1102	0,1	0,8305	5,1102	0,1	0,8305	5,1102	0,1
1900	1,0322	5,3253	0,0755	1,0321	5,3254	0,0755	1,0322	5,3254	0,076
3800	0,9888	5,062	0,0422	0,9888	5,062	0,0422	0,9888	5,062	0,0422

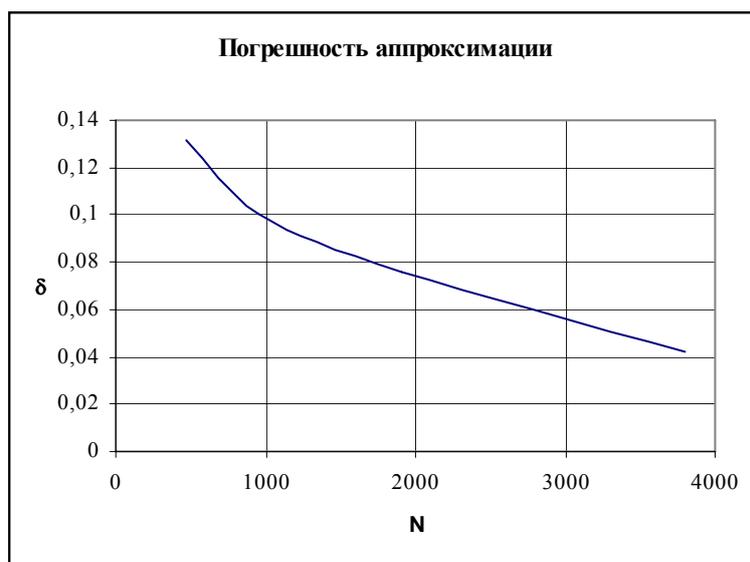


Рисунок 6.4. Зависимость погрешности аппроксимации от объёма выборки для аналитического метода Ньютона

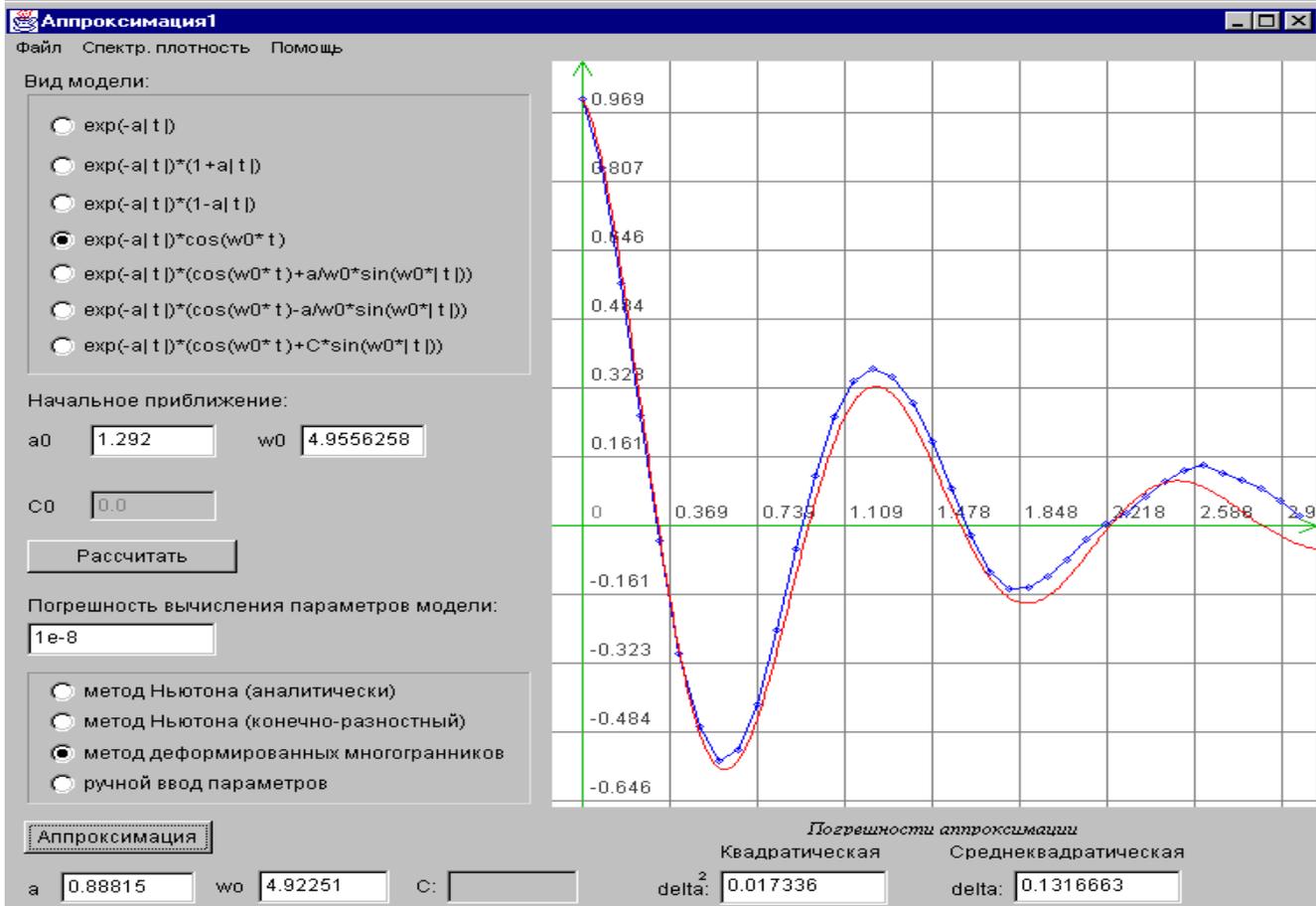
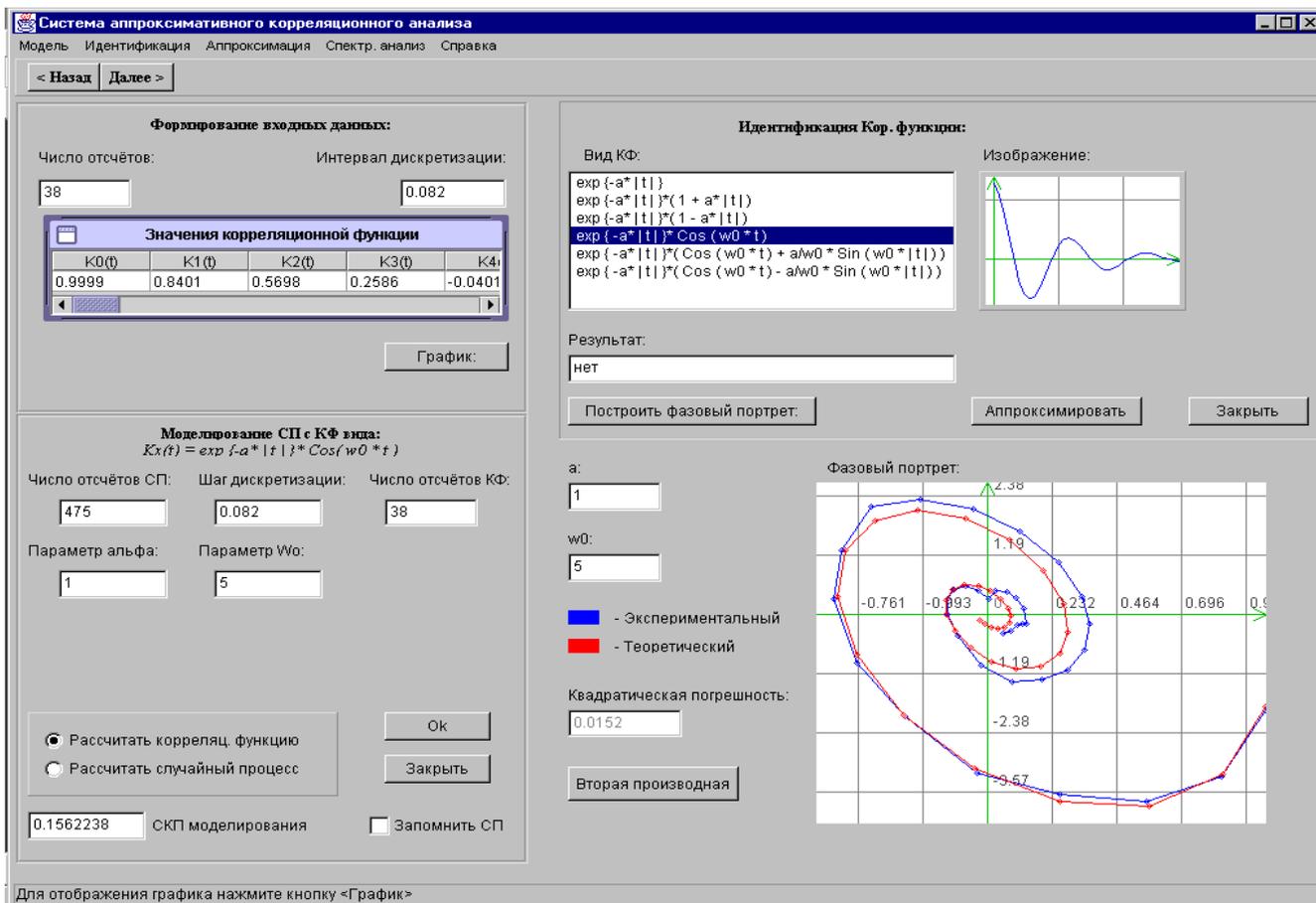


Рисунок 6.5. Пример экранных форм построения фазового портрета и аппроксимации корреляционной функции

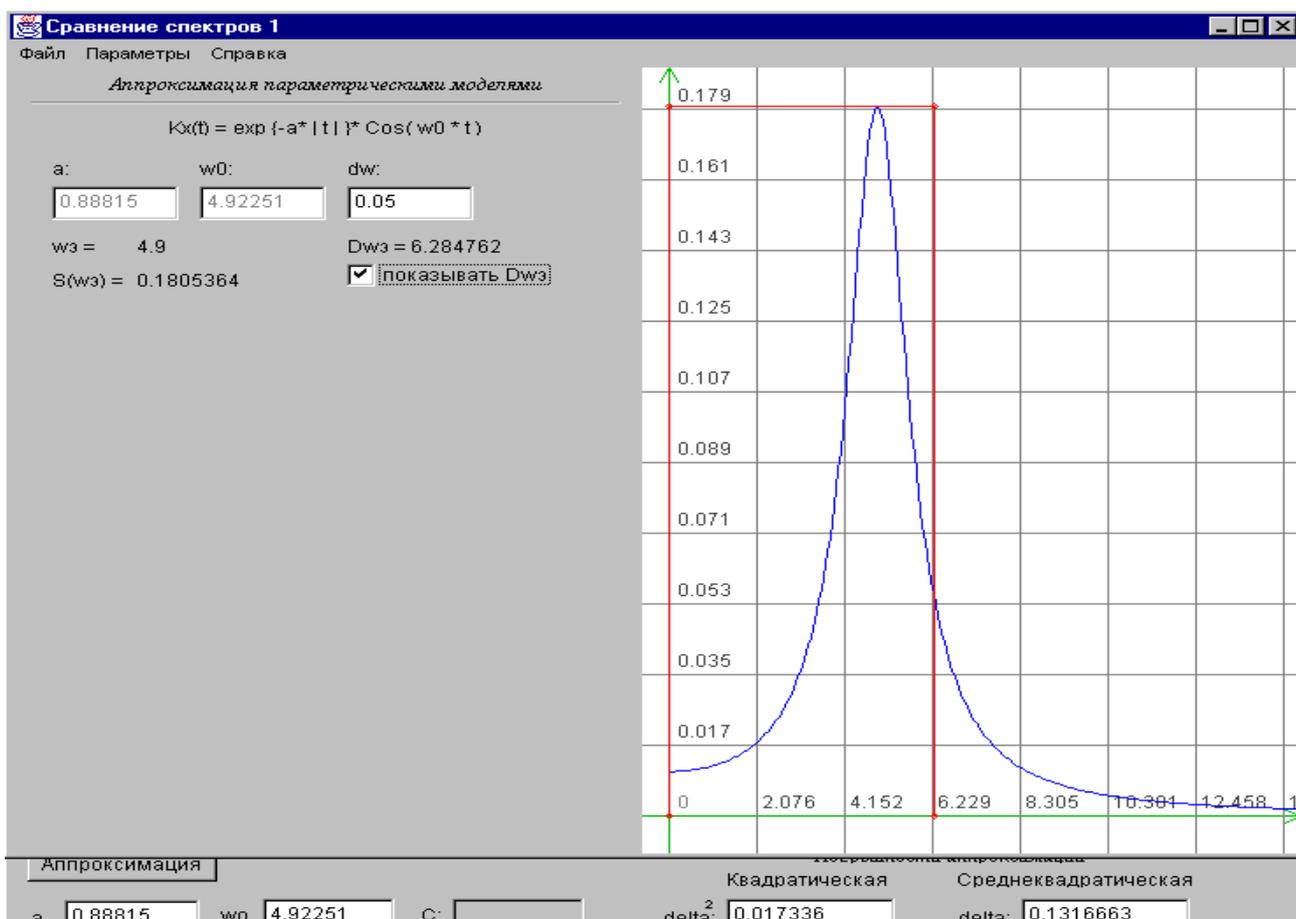


Рисунок 6.6. Пример экранной формы аппроксимации спектральной плотности мощности

Результаты аппроксимации (параметры модели)

Таблица 6.2

Номер модели (0-5)	3
Метод аппроксимации (0-2)	2
$\lambda^{(0)}$	1.4548
λ	1.0063
$\omega_0^{(0)}$	4.9341
ω_0	4.9119
Погрешность выч. параметров	1e-8

6.4. Контрольные вопросы

1. Какие численные методы применяются при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности?
2. Какой участок фазового портрета является самым информативным?
3. Как отличить фазовый портрет колебательной корреляционной функции от фазового портрета монотонной корреляционной функции?
4. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями?

5. Какой метод аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями обладает лучшей сходимостью?
6. Какой метод аппроксимации проще реализовать?

7. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями Лагерра.

7.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов в тех случаях, когда для выбора аналитической модели недостаточно априорной информации о свойствах исследуемого процесса.

В этом случае, как подсказывает практика, наиболее целесообразно применять разложение корреляционной функции в ряд по той или иной системе ортогональных функций. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [7-8]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера, согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau), \quad (7.1)$$

где β_k - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau)$ - семейство базисных функций, ортонормированных в интервале $(0, \infty)$ с весом $\mu(\tau)$.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n; \\ 1, & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (7.2)$$

Так как ряд сходится в интервале $(0, \infty)$, то коэффициенты разложения β_k в соответствии с [7-8] определяются выражением:

$$\beta_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (7.3)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Хаара, Уолша и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Одной из распространенных систем ортогональных функций, широко применяемых в аппроксимативном корреляционном анализе, являются ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением:

$$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2}. \quad (7.4)$$

Ортогональные функции Лагерра удовлетворяют следующему свойству:

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (7.5)$$

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (7.1). Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели.

Тогда для модели корреляционной функции

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha), \quad (7.6)$$

имеющей ограниченное число параметров, коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (7.7)$$

определяются формулой:

$$\beta_k = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (7.8)$$

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации, с учетом свойств ортогональных функций Лагерра, равна:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (7.9)$$

Из выражений (7.8) и (7.9) видно, что значения погрешности аппроксимации Δ и коэффициентов разложения β_k зависят от численного значения параметра α .

Как показали исследования, относительная погрешность аппроксимации

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} \quad (7.10)$$

зависит от величины этого параметра, вида корреляционной функции и её показателя колебательности μ , числа членов разложения ряда m .

Таким образом, необходимо разработать алгоритм поиска параметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации.

Предложенный в работах [7-8] метод аппаратной аппроксимации корреляционных функций позволил свести задачу разработки алгоритма оценки параметра ортогональных функций Лагерра к задаче параметрической аппроксимации корреляционных функций. В результате получим уравнение, решив которое, определим значение параметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\beta_{m+1} = 0. \quad (7.11)$$

Величина параметра α зависит от вида корреляционной функции, показателя её колебательности, а также числа членов разложения ряда. Число корней уравнения (7.11) зависит от тех же факторов и, в общем случае, равно $m+1$, и только один из них обеспечивает наименьшую погрешность аппроксимации. При приближенном решении уравнения (7.11), например, методом Ньютона, значение α и соответствующее ему значение погрешности аппроксимации будет зависеть от начального приближения α_0 .

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра является то, что её основное свойство

$$K_x(0) = D_x = \sum_{k=0}^m \beta_k, \quad (7.12)$$

как видно из выражения

$$\sum_{k=0}^m \beta_k = D_x - \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} d\omega, \quad (7.13)$$

при произвольной величине α не выполняется при конечном m . Условие (7.12) при произвольной величине α выполняется лишь при $m \rightarrow \infty$.

Для обеспечения условия (7.12) аналитическое выражение $K_x(\tau)$ можно искать в виде:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m c_k L_k(\tau, \alpha), \quad (7.14)$$

где
$$c_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k} D_x. \quad (7.15)$$

Легко проверить, что в этом случае $K_x(0) = \sum_{k=0}^m \beta_k = D_x$. Однако коэффициенты разложения c_k , определенные по формуле (7.15), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Уравнение для определения коэффициентов разложения корреляционной функции b_k

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha), \quad (7.16)$$

обеспечивающих минимум квадратической погрешности аппроксимации при дополнительном условии

$$K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k = D_x, \quad (7.17)$$

имеет вид

$$b_k = \beta_k + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1}. \quad (7.18)$$

А для определения значения параметра α , обеспечивающего минимум погрешности необходимо решить уравнение

$$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0. \quad (7.19)$$

Таким образом, при аппроксимации корреляционной функции для обеспечения минимума квадратической погрешности требуется изменением параметра α добиться равенства нулю β_{m+1} коэффициента. Значения b_0, \dots, b_m в этом случае будут оптимальными.

Рассмотренные алгоритмы (7.8), (7.11), (7.18) и (7.19) легко реализовать на ЭВМ, однако все они, как указывалось выше, не лишены существенного недостатка - в результате решения уравнений (7.11) или (7.19) в общем случае возможно определение $(m+1)$ корней, обеспечивающих локальные минимумы погрешностей аппроксимации.

Это обстоятельство накладывает определенные неудобства при выборе диапазона изменения параметра функции Лагерра.

Для однозначного решения задачи, т.е. определения единственного корня, обеспечивающего погрешность аппроксимации, близкую к минимуму-миниморуму, необходимо анализировать сигнал, пропорциональный β_0 [7-8].

Рассмотрим уравнение

$$\beta_0 - k\sigma_x^2 = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_0(\tau, \alpha) d\tau - k\sigma_x^2 = 0, \quad (7.20)$$

где $L_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau/2}$ - функция Лагерра нулевого порядка;

k - постоянная величина, которая, как видно из уравнения, меньше 2.

Для $K_{x5}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ это уравнение приведем к виду:

$$\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau/2} e^{-\lambda\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau - k = 0. \quad (7.21)$$

Разрешив уравнение относительно α , получим:

$$\alpha = 2 \frac{-\lambda(1-k) + \sqrt{\lambda^2(1-k)^2 + k(2-k)(\lambda^2 + \omega_0^2)}}{2-k}. \quad (7.22)$$

При $k=1$ выражение примет самый простой вид, а именно:

$$\alpha = 2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (7.23)$$

Решив уравнение (7.21) для корреляционных функций

$K_{x,6,7}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ при $k=1$, получим:

$$\alpha = 2 \left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right). \quad (7.24)$$

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в «дискретизации» полученных ранее уравнений, выборе численного метода для их решения, написании, отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счёта.

Проанализируем различные алгоритмы определения коэффициентов разложения ортогонального ряда и параметра функций Лагерра, которые для удобства представим в таблице 7.1.

Алгоритмы подбора параметра α

Таблица 7.1

№	Алгоритм	Преимущества	Недостатки
1	$\beta_{m+1} = 0$	Минимум погрешности	$m+1$ корней
2	$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0$	Минимум погрешности, $K_x(\tau) = \sigma_x^2$	$m+1$ корней
3	$\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$	Аналитическое решение, один корень	$\delta \neq \min$
4	$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0 \\ \beta_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на глобальный минимум погрешности	Сложность реализации, увеличивается время анализа
5	$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0 \\ b_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на минимум погрешности, $K_x(\tau) = \sigma_x^2$	Сложность реализации, увеличивается время анализа
6	$\beta_0 - \beta_1 - \sigma_x^2 = 0$	Один корень	$\delta \neq \min$
7	$\sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k - \sigma_x^2 = 0$	Близок к δ_{\min}	$m+1$ корней
8	$\alpha = 2\omega_0$	Простота определения α	$\delta \neq \min$

Сравнительный анализ алгоритмов показывает, что с точки зрения минимизации вычислительных затрат, обеспечения допустимых погрешностей аппроксимации и обеспечения лучшей сходимости (уравнение имеет только один корень) наиболее целесообразно выбрать алгоритм 3. Параметр α , определенный по этому алгоритму, находится вблизи $\alpha_{\text{опт}}$ и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным.

Однако при решении уравнения (7.20) с применением для вычисления интеграла метода прямоугольников

$$\alpha \Delta \tau \sum_{i=0}^M K_x(i \Delta \tau) e^{-i \alpha \Delta \tau / 2} - \sigma_x^2 = 0 \quad (7.25)$$

было обнаружено, что погрешности оценки параметра α могут достигать больших значений.

Значительно меньшие погрешности оценки параметра α наблюдались при применении формулы трапеций для вычисления интеграла в (7.20):

$$\alpha\Delta\tau\left\{\left[K_x(0)+K_x(M\Delta\tau)e^{-M\alpha\Delta\tau/2}\right]/2+\sum_{i=1}^{M-1}K_x(i\Delta\tau)e^{-i\alpha\Delta\tau/2}\right\}-\sigma_x^2=0. \quad (7.26)$$

Но все же расхождение между теоретическими и определенными по формуле (7.26) значениями α существенно. Более точный результат при решении уравнения дает формула Симпсона [7-8]:

$$\frac{\alpha\Delta\tau}{3}\left\{K_x(0)+K_x(2n)e^{-2n\alpha\Delta\tau/2}+2\left[K_x(2\Delta\tau)e^{-2\alpha\Delta\tau/2}+\dots+K_x[(2n-2)\Delta\tau]e^{-(2n-2)\alpha\Delta\tau/2}\right]+ \right. \\ \left. +\left[K_x(\Delta\tau)e^{-\alpha\Delta\tau/2}+\dots+K_x[(2n-1)\Delta\tau]e^{-(2n-1)\alpha\Delta\tau/2}\right]\right\}-\sigma_x^2=0, \quad (7.27)$$

где $n=J_{\max}/2$.

Методика аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра заключается в выполнении следующих этапов:

1. определяются ординаты нормированной корреляционной функции $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0,\dots,J_{\max}}$;
2. определяется параметр функций Лагерра α в результате решения уравнения (7.20);
3. определяются коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ в соответствии с выражением (7.8);
4. определяются коэффициенты разложения $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ в соответствии с выражением (7.18);
5. определяется число членов разложения ряда (7.6) m_{opt} , обеспечивающее минимальное значение погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции δ ;
6. определяются параметры аппроксимирующего выражения: α , $m = m_{\text{opt}}$, $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$, $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$, δ .

Определив параметры модели корреляционной функции β_0,\dots,β_m , α

$$K_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(-\tau, \alpha) l(-\tau), \quad (7.28)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого, подставив модель (7.28) в выражение для определения спектральной плотности мощности

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (7.29)$$

с учётом определения ортогональных функций Лагерра (7.4), получим:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{\alpha/2 + j\omega} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k + \frac{1}{\alpha/2 - j\omega} \left(\frac{j\omega + \alpha/2}{j\omega - \alpha/2} \right)^k \right]. \quad (7.30)$$

Введем обозначение $\text{tg}\varphi = \frac{2\omega}{\alpha}$. Тогда

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{1 + j\operatorname{tg}\varphi} \left(\frac{j\operatorname{tg}\varphi - 1}{j\operatorname{tg}\varphi + 1} \right)^k + \frac{1}{1 - j\operatorname{tg}\varphi} \left(\frac{j\operatorname{tg}\varphi + 1}{j\operatorname{tg}\varphi - 1} \right)^k \right]. \quad (7.31)$$

Или

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + j\sin\varphi} \left(\frac{j\sin\varphi - \cos\varphi}{j\sin\varphi + \cos\varphi} \right)^k + \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - j\sin\varphi} \left(\frac{j\sin\varphi + \cos\varphi}{j\sin\varphi - \cos\varphi} \right)^k \right]. \quad (7.32)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (7.32) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{e^{j\varphi}} \left(\frac{-e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi}} \right)^k + \frac{1}{e^{-j\varphi}} \left(\frac{e^{j\varphi}}{-e^{-j\varphi}} \right)^k \right] =$$

$$= \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \left[e^{-(2k+1)\varphi} + e^{(2k+1)\varphi} \right] = \frac{2\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (7.33)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha}$.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение П.23).

7.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции и со следующими параметрами - $M = \operatorname{ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $N=12,5 M$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Задать вручную начальное приближение параметра функции Лагерра и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции $\alpha, b_0, \dots, b_m, m$, воспользовавшись методами Симпсона, трапеций и прямоугольников. Определить погрешности аппроксимации.
4. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
5. Повторить пункты 1-4 для объёмов выборки $N=k M$, где $k=25, 50, 100$.
6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объёма выборки.
7. Повторить пункты 1-4 для объёмов выборки $N=25 M_1$, где $M_1=M/2, M/3, M/4$.
8. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 – числа отсчётов корреляционной функции.
9. Повторить пункты 1-4 для $N=25 M$ и $\delta = 0,02; 0,05; 0,1; 0,2$.
10. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.

7.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра.
4. Зависимости погрешности оценки параметра функции Лагерра и аппроксимации от объёма выборки N.
5. Зависимости погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 .
6. Зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.
7. Параметры модели, представленные в табличной форме.
8. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации от объёма выборки $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$, $\Delta\tau = 0,082$

Таблица 7.2

N	Симпсона			Трапеций			Прямоугольников		
	α	m	δ	α	m	δ	α	m	δ
475	13,8449	16	0,1348	9,7977	16	0,1533	7,0371	22	0,1279
950	14,0922	14	0,0746	9,8106	14	0,1184	6,942	20	0,1196
1900	14,1219	14	0,0873	9,804	12	0,1387	6,9276	20	0,1231
3800	14,1393	14	0,0837	9,9084	14	0,1293	7,0567	22	0,1237

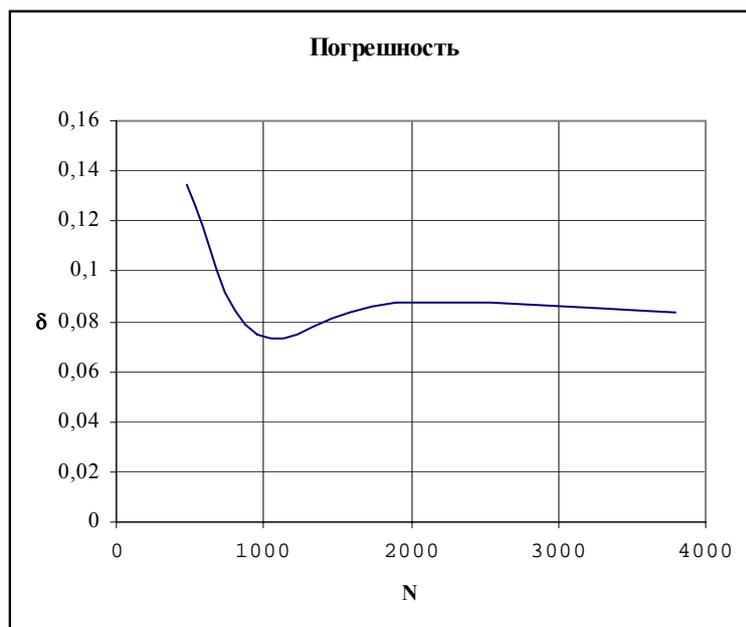


Рисунок 7.1. Зависимость погрешности аппроксимации от объёма выборки для метода Симпсона

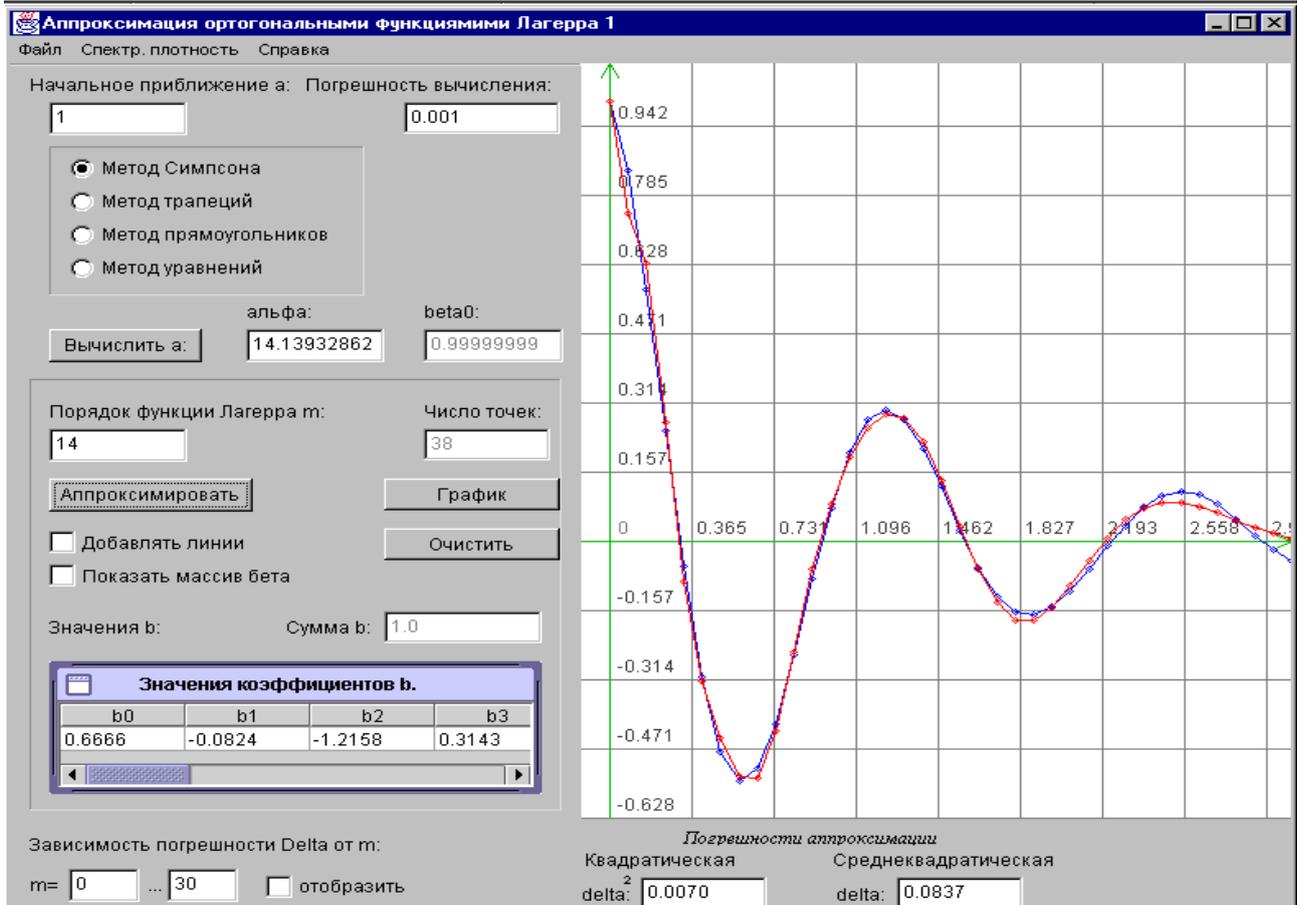
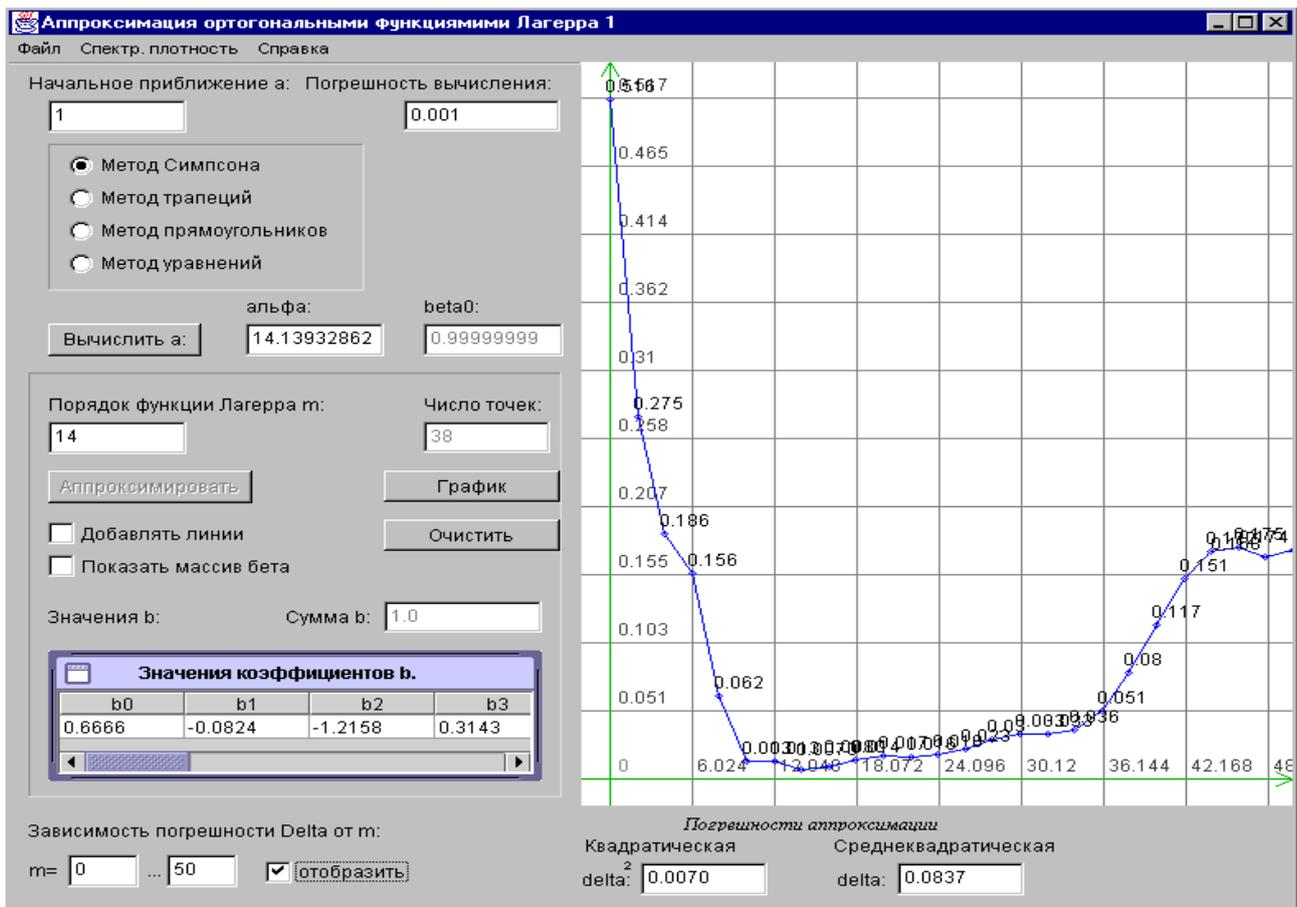


Рисунок 7.2. Экранные формы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра

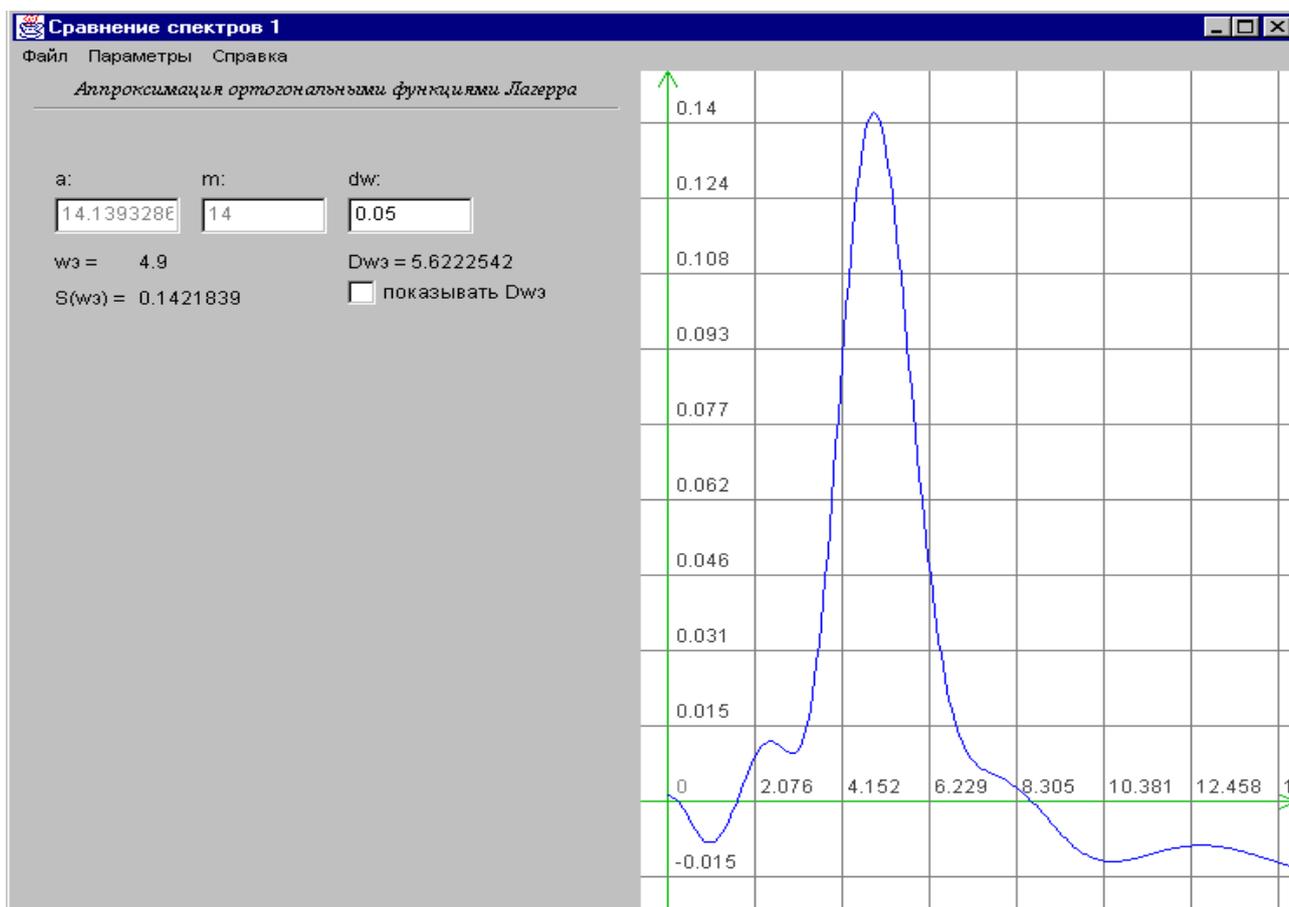


Рисунок 7.3. Экранная форма аппроксимации спектральной плотности мощности

Параметры модели корреляционной функции

Таблица 7.3

Параметры ортогональных функций Лагерра *pr1	Результаты аппроксимации
Метод интегрирования (0-2)	0
Номер модели (0-5)	3
m	16
α	13.3920
Метод выбора α	1
Погреш. вычислен. α	0.001
β_0	0.9999
β_1	0.2007
β_2	-0.7534
β_3	0.4557
β_4	0.8144
β_5	0.091
β_6	0.3913
β_7	0.7347
β_8	0.284

Продолжение таблицы 7.3

β_9	0.4083
β_{10}	0.6686
β_{11}	0.1
β_{12}	0.3703
β_{13}	0.6078
β_{14}	0.289
β_{15}	0.2403
β_{16}	0.5019

7.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры описывают ортогональное разложение корреляционной функции и спектральной плотности мощности?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение параметра ортогональных функций Лагерра?
3. Какие методы оценки параметра функций Лагерра Вы знаете?
4. Назовите самый простой метод оценки параметра функций Лагерра.
5. Почему увеличение числа членов разложения ортогонального ряда не всегда приводит к уменьшению погрешности аппроксимации?
6. В чём заключается основное «неудобство» ортогональных разложений?

8. АППРОКСИМАЦИЯ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации взаимных корреляционных функций случайных процессов.

8.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей взаимных корреляционных функций. Например, при измерении скорости движения, проката, значения «мертвого» времени и т. д. исследуемый случайный сигнал $\overset{\circ}{x}(t)$ задерживается на некоторый временной интервал τ_m (см. рис. 8.1).

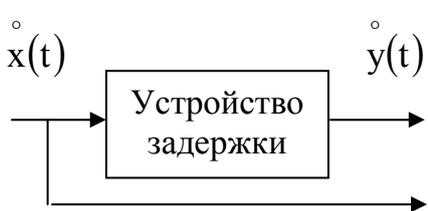


Рисунок 8.1

Выходной сигнал устройства задержки можно представить в виде $\overset{\circ}{y}(t) = \overset{\circ}{x}(t - \tau_m)$, и взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов будет равна

$$K_{xy}(\tau) = K_x(\tau - \tau_m) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau - \tau_m). \quad (8.1)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае возможна аппроксимация взаимных корреляционных функций параметрическими моделями. Для сведения задачи аппроксимации взаимной корреляционной функции к аппроксимации корреляционных функций необходимо определить значение τ_m , соответствующее максимуму взаимной корреляционной функции. После этого можно воспользоваться результатами, представленными в лабораторной работе 6.

В общем же случае необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции. Для идентификации взаимной корреляционной функции можно воспользоваться фазовыми портретами.

Для оценки взаимной спектральной плотности мощности исследуемых процессов воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, получим

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (8.2)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (8.3)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) - j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (8.4)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) + j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (8.5)$$

Воспользовавшись соотношениями (8.4)-(8.5), получим:

$$C_{xy}(\omega) = 2 \text{Re } S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega \tau \, d\tau, \quad (8.6)$$

а

$$Q_{xy}(\omega) = 2 \text{Im } S_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau)] \sin \omega \tau \, d\tau. \quad (8.7)$$

Функция $C_{xy}(\omega)$ является четной, а $Q_{xy}(\omega)$ - нечетной. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega; \quad (8.8)$$

$$K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau \, d\omega. \quad (8.9)$$

Для стационарно связанных процессов часто вводят нормированную меру взаимной когерентности, являющуюся функцией частоты [7-8]:

$$\text{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}. \quad (8.10)$$

Эта функция равна 0 для независимых процессов, 1 для линейно связанных процессов и находится в пределах от 0 до 1 во всех прочих случаях.

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Представив модель взаимной корреляционной функции в виде

$$K_{axy}(\tau) = K_{ax}(\tau - \tau_m), \quad (8.11)$$

определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ax}(\tau - \tau_m) e^{-j\omega\tau} \, d\tau = \exp(-j\omega\tau_m) S_x(\omega). \quad (8.12)$$

Из выражения (8.12) видно, что

$$\text{Re } S_{axy}(\omega) = \cos \omega \tau_m S_x(\omega), \quad (8.13)$$

а

$$\text{Im } S_{axy}(\omega) = -\sin \omega \tau_m S_x(\omega). \quad (8.14)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение П.25).

8.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданным видом корреляционной функции со следующими параметрами: $N=5000$, $\delta = 0,02$, $\tau_m = 10$.

2. Вычислить взаимные корреляционные функции.
3. Построить фазовые портреты взаимных корреляционных функций.
4. Задать вручную начальные приближения параметров взаимной корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения взаимной корреляционной функции, воспользовавшись методом Ньютона.
5. Повторить пункты 1-4 для заданной взаимной корреляционной функции и объёмов выборки $N=kM$, где $k=12,5; 25; 50; 100$.
6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объёма выборки.
7. Сгенерировать временной ряд (параметры задать самостоятельно) и определить спектральную плотность мощности.

8.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации взаимных корреляционных функций.
3. Пример экранной формы генерации случайных процессов.
4. Пример экранной формы вычисления взаимной корреляционной функции и построения фазового портрета.
5. Примеры экранных форм для аппроксимации взаимной корреляционной функции.
6. Пример экранной формы определения спектральной плотности мощности.
7. Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты.
8. Зависимости погрешности оценки параметров аналитического выражения взаимной корреляционной функции и аппроксимации от объёма выборки.
9. Зависимость погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции от M_1 – числа отсчётов корреляционной функции.
10. Зависимость погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции от значения интервала дискретизации Δt .
11. Выводы по работе.

8.4. Контрольные вопросы

1. В чём заключается специфика аппроксимации взаимных корреляционных функций по сравнению с аппроксимацией автокорреляционных функций?
2. Какие численные методы применяются при аппроксимации взаимных корреляционных функций?
3. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации взаимных корреляционных функций параметрическими моделями?
4. Как отличить фазовый портрет колебательной взаимной корреляционной функции от монотонной?

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже для $\rho_{xy}(\tau) = e^{-|\tau-\tau_m|} \cos 5(\tau - \tau_m)$, $\Delta\tau = 0,082$.

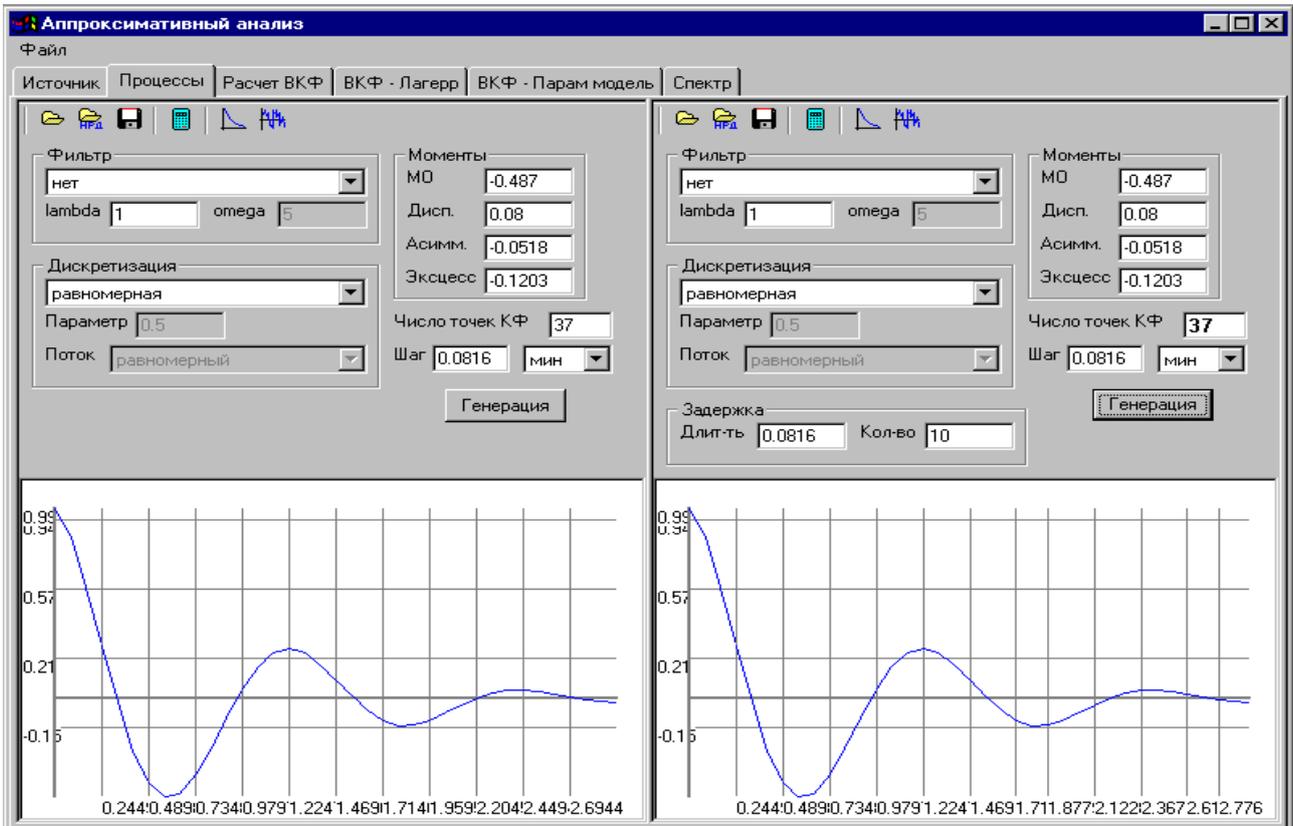


Рисунок 8.2. Экранная форма генерации и оценки характеристик случайных процессов

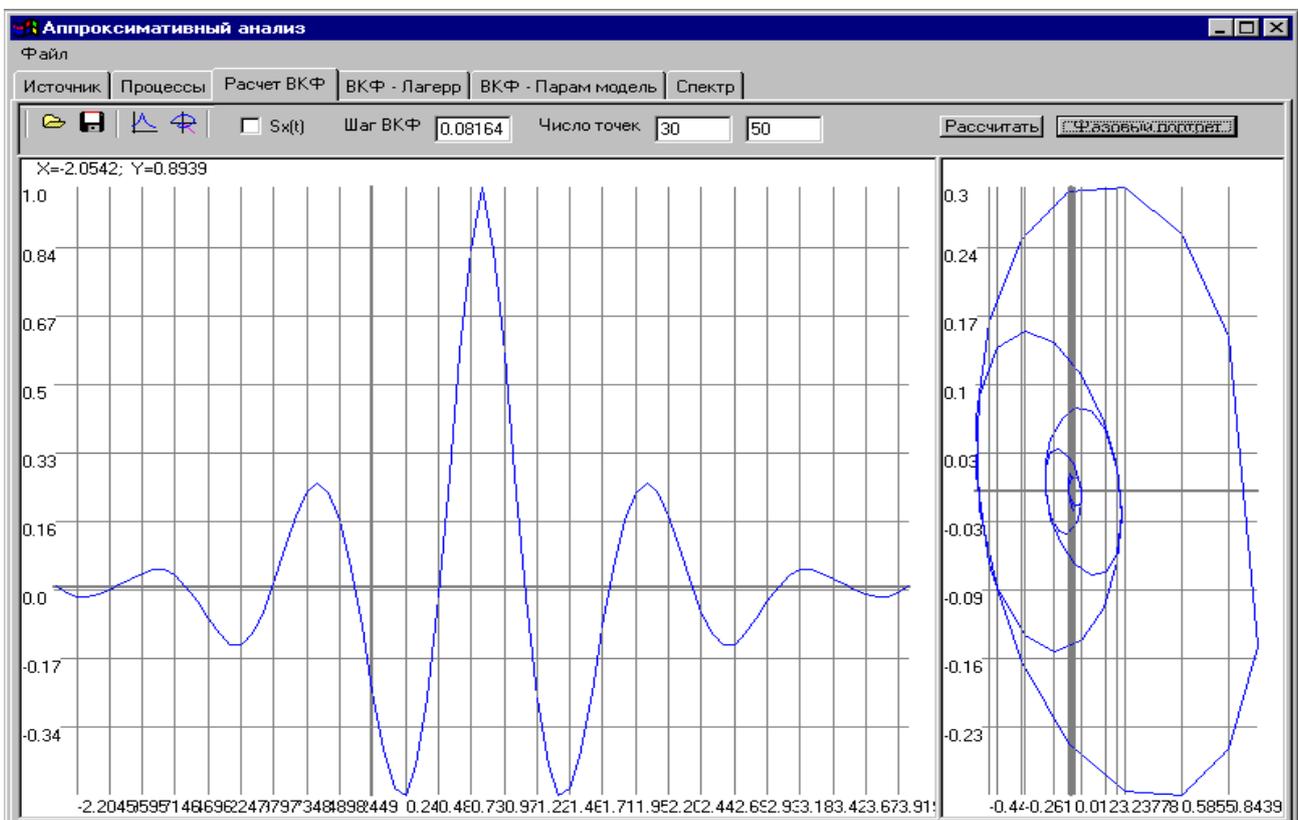


Рисунок 8.3. Экранная форма вычисления взаимной корреляционной функции и её фазового портрета

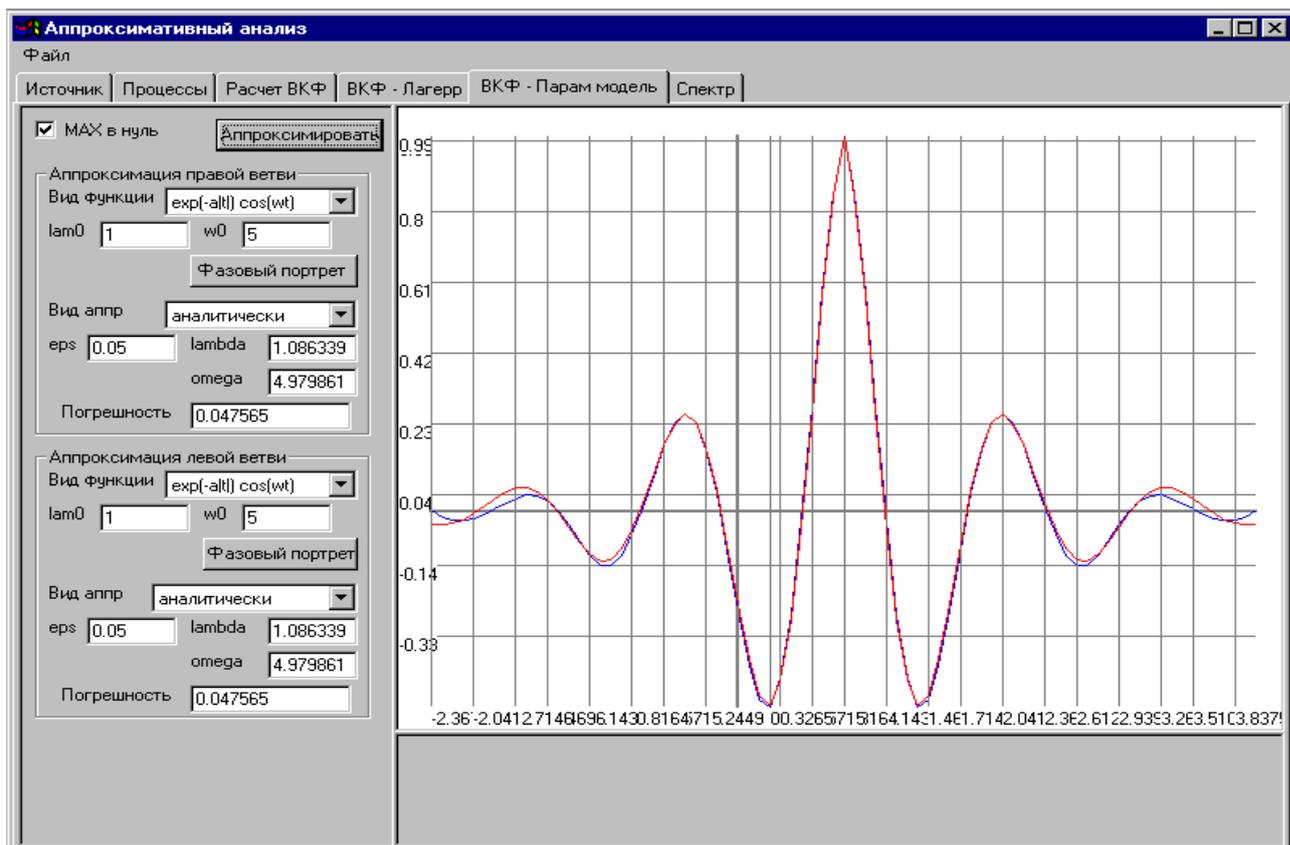


Рисунок 8.4. Экранная форма аппроксимации взаимной корреляционной функции параметрической моделью

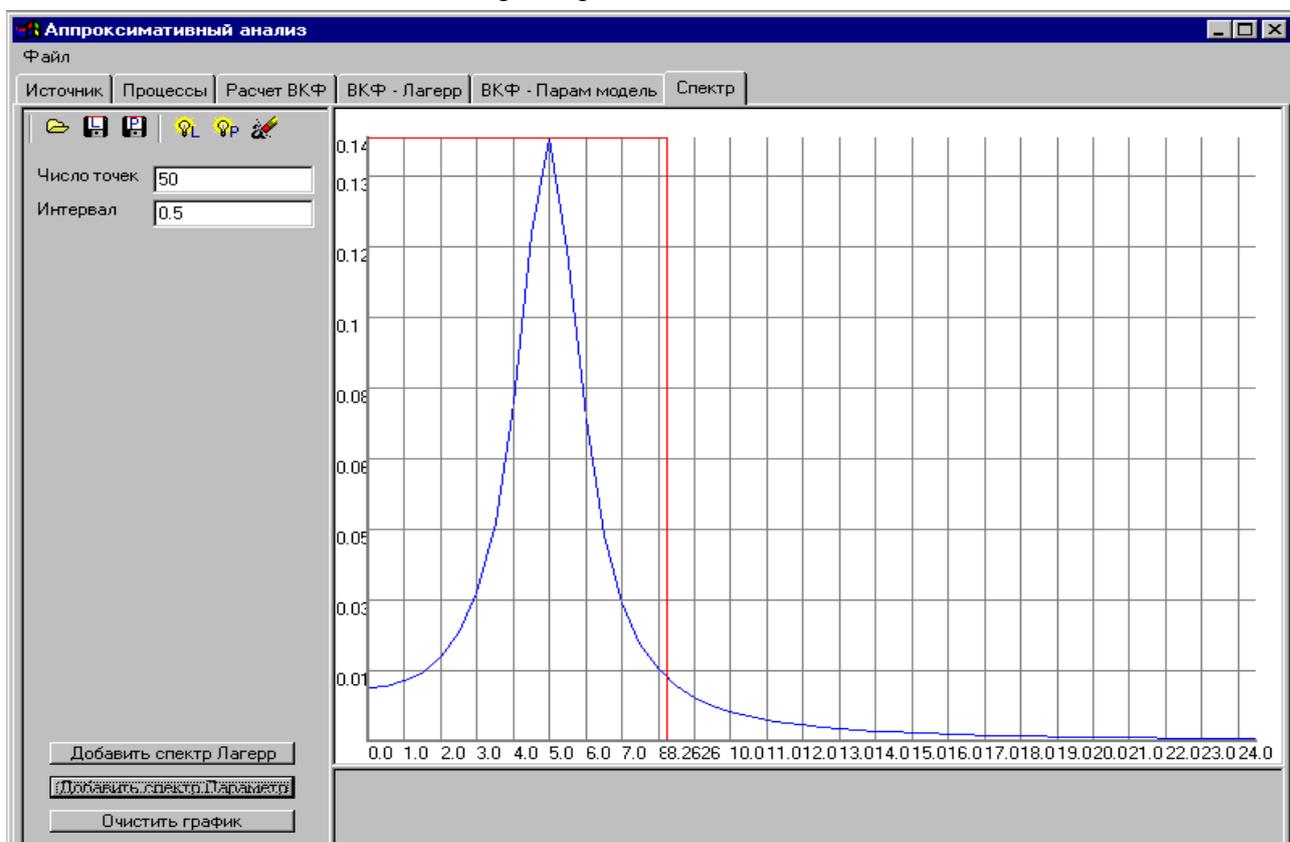


Рисунок 8.5. Экранная форма аппроксимации взаимной плотности мощности параметрической моделью

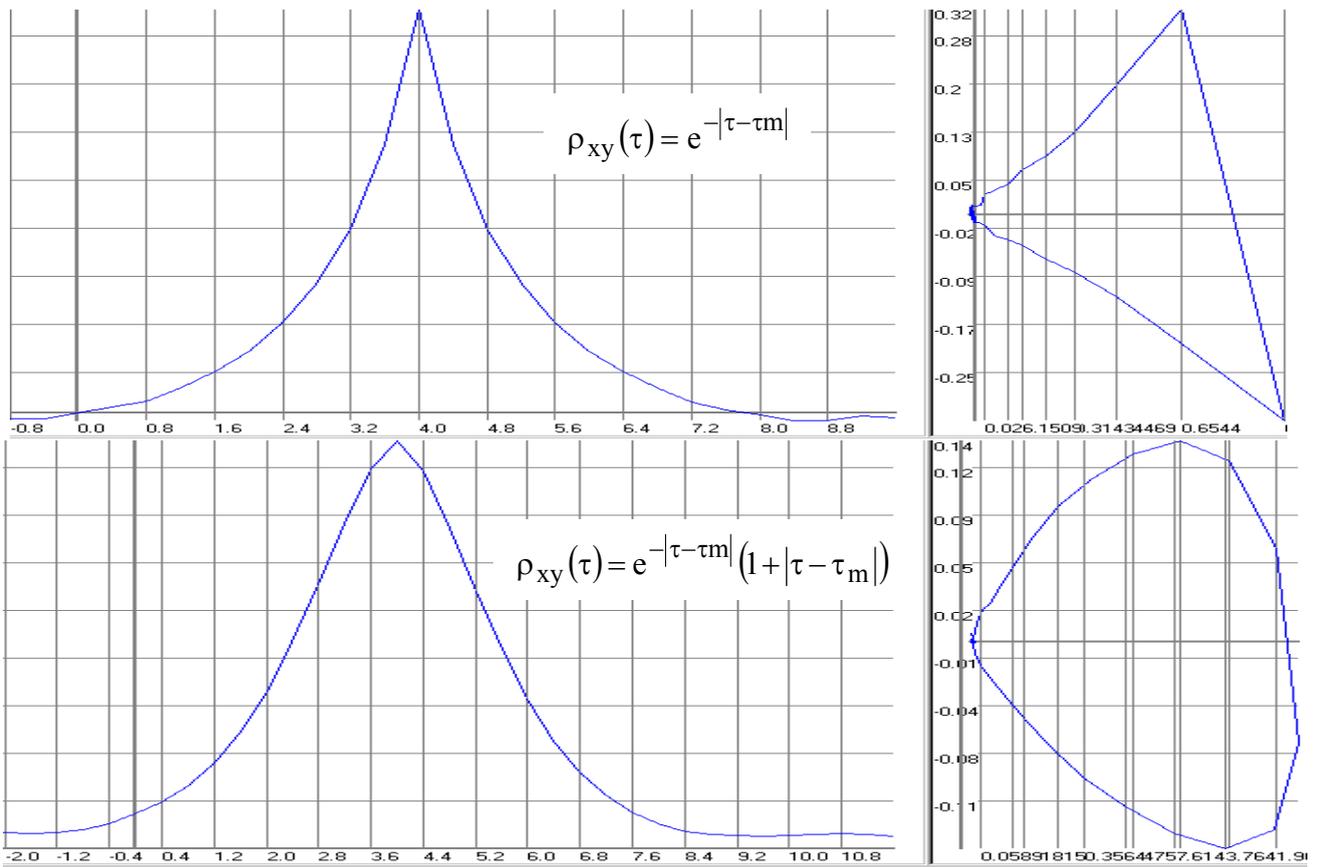


Рисунок 8.6. Взаимные корреляционные функции и их фазовые портреты

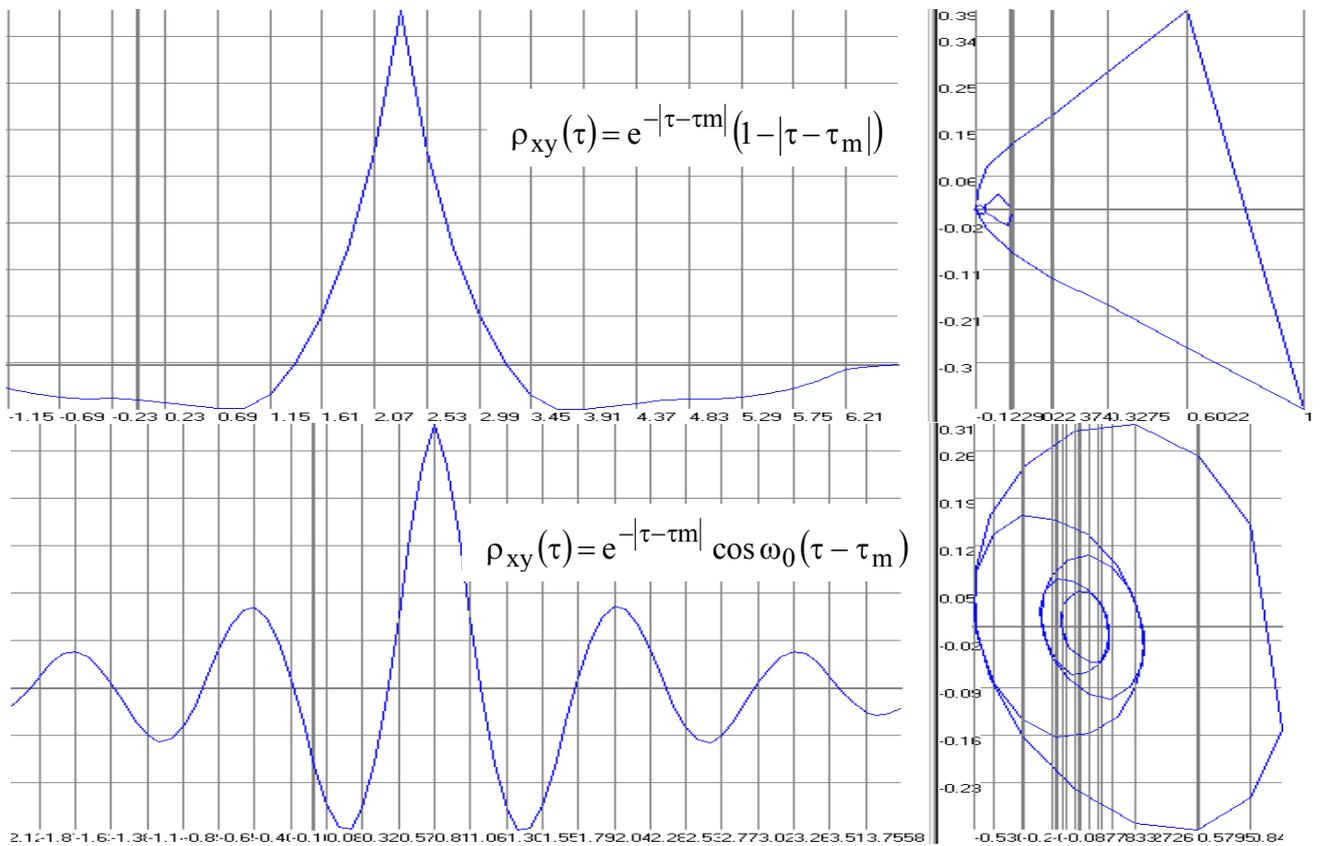
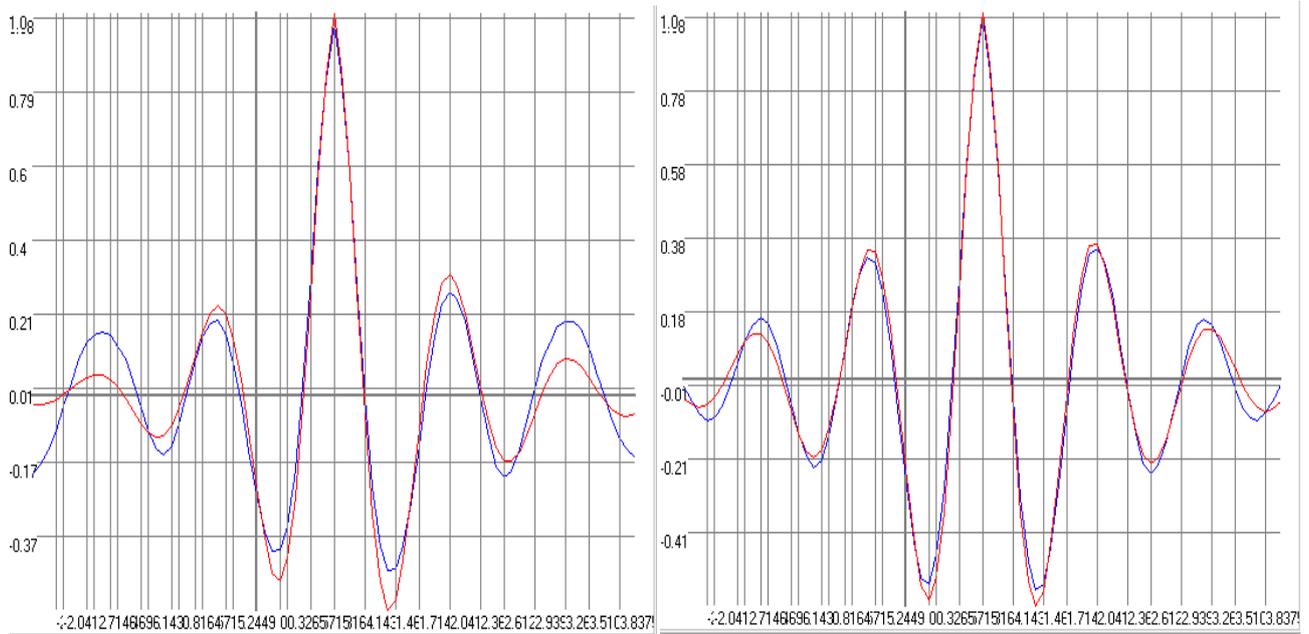


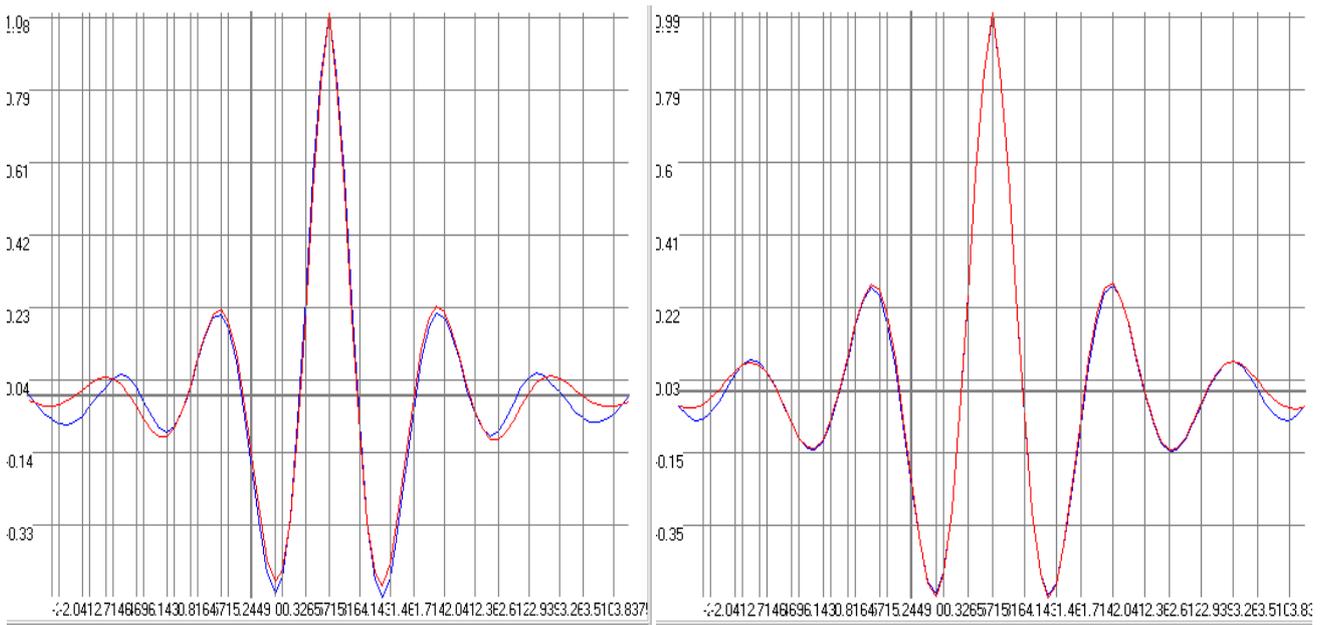
Рисунок 8.7. Взаимные корреляционные функции и их фазовые портреты



N=462

N=925

Рисунок 8.8. Результаты аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos 5\tau$



N=1850

N=3700

Рисунок 8.9. Результаты аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos 5\tau$

9. АППРОКСИМАЦИЯ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации взаимных корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями Лагерра.

9.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей взаимных корреляционных функций в том случае, когда не удастся идентифицировать модель взаимной корреляционной функции.

Полученные в подразделе 7 результаты можно обобщить на аппроксимацию взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра. При этом необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции, т. е. необходимо искать модель в виде:

$$K_{axy}(\tau) = A_{\max} \left[\sum_{k=0}^m \beta_{k,p} l(\tau) L_k(\tau, \alpha_1) + \sum_{k=0}^m \beta_{k,l} l(-\tau) L_k(-\tau, \alpha_2) \right], \quad (9.1)$$

где A_{\max} – максимальное значение $K_{axy}(\tau)$.

Исследования показали, что это будет справедливо, если максимум взаимной корреляционной функции будет находиться в нуле. В противном случае в нулевой точке будет наблюдаться выброс (см. рис. 9.1).

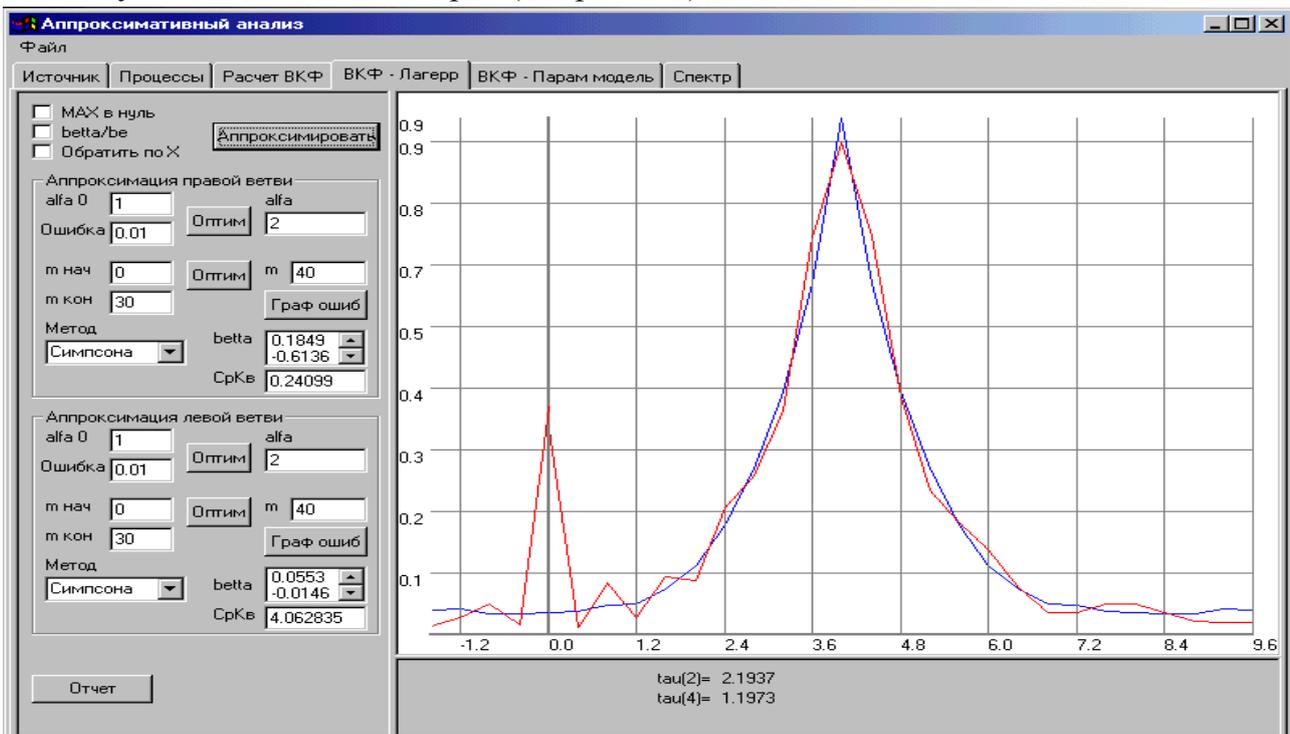


Рисунок 9.1. Результаты аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра

Из анализа результатов видно, что даже при аппроксимации простейших моделей взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра для обеспечения допустимых погрешностей необходимо определять большое число членов разложения ряда (в рассматриваемом примере $m = 40$). Кроме того, после аппроксимации необходима нормировка, так как значение модели корреляционной функции в нуле не равно 1. Эти обстоятельства без модификации модели затрудняют её применение.

Для устранения этих недостатков необходимо, в первую очередь, определить τ_m - значение аргумента, при котором $K_{axy}(\tau)$ достигает своего максимального значения, и искать модель взаимной корреляционной функции в виде:

$$K_{axy}(\tau) = A_{\max} \left[\sum_{k=0}^{m_1} \beta_{k,\Pi} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m_2} \beta_{k,\Pi} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right]. \quad (9.2)$$

После модификации модели можно воспользоваться методикой оценки параметров ортогонального ряда, представленной в лабораторной работе 7.

В этом случае аналитическое выражение взаимной спектральной плотности мощности с учётом свойств ортогональных функций Лагерра примет вид:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{A_{\max} \exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \exp[-j(2k+1)\varphi_1] + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \exp[j(2k+1)\varphi_2] \right], \quad (9.3)$$

где $\varphi_1 = \arctg \frac{2\omega}{\alpha_1}$, $\varphi_2 = \arctg \frac{2\omega}{\alpha_2}$.

С учётом (9.3), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\text{Re}S_{axy}(j\omega) = \frac{A_{\max} \cos\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \cos(2k+1)\varphi_1 + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \cos(2k+1)\varphi_2 \right] - \frac{A_{\max} \sin\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \sin(2k+1)\varphi_1 - \right. \\ \left. - \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \sin(2k+1)\varphi_2 \right]; \quad (9.4)$$

$$\text{Im}S_{axy}(j\omega) = \frac{A_{\max} \cos\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \cos(2k+1)\varphi_2 - \right. \\ \left. - \frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \cos(2k+1)\varphi_1 \right] - \frac{A_{\max} \sin\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \cos(2k+1)\varphi_1 + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\Pi} \cos(2k+1)\varphi_2 \right]. \quad (9.5)$$

С целью упрощения модели взаимной корреляционной функции, представим её в виде:

$$K_{axy}(\tau) = A_{\max} \left[\sum_{k=0}^m \beta_{k,\Pi} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha) + \sum_k \beta_{k,\Lambda} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha) \right]. \quad (9.6)$$

Тогда модель взаимной спектральной плотности мощности будет равна:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{A_{\max} \exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos \varphi}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_{k,\Pi} \exp[-j(2k+1)\varphi] + \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi_2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_{k,\Lambda} \exp[j(2k+1)\varphi] \right]. \quad (9.7)$$

С учётом (9.7), выражения для оценки вещественной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega) = \frac{A_{\max} \cos \varphi}{\alpha \pi} \left[\cos \omega \tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\Pi} + \beta_{k,\Lambda}) \cos(2k+1)\varphi - \right. \\ \left. - \sin \omega \tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\Pi} - \beta_{k,\Lambda}) \sin(2k+1)\varphi \right]; \quad (9.8)$$

$$\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) = \frac{A_{\max} \cos \varphi}{\alpha \pi} \left[\cos \omega \tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\Lambda} - \beta_{k,\Pi}) \cos(2k+1)\varphi - \right. \\ \left. - \sin \omega \tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\Pi} - \beta_{k,\Lambda}) \sin(2k+1)\varphi \right]. \quad (9.9)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение П.25).

9.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции - $M = \text{ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $N=12,5 M$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Определить оптимальные значения параметров аналитического выражения корреляционной функции $\alpha, b_0, \dots, b_m, m$, воспользовавшись методом Симпсона. Определить погрешности аппроксимации (пункты 1-3 повторить 29 раз, результаты занести в таблицу).
4. Повторить пункты 1-3 29 раз для объёмов выборки $N=k M$, где $k=25, 50, 100$, результаты занести в таблицу.
5. Проанализировать зависимость максимальной погрешности аппроксимации корреляционной функции от объёма выборки.
6. Сгенерировать временной ряд (параметры задать самостоятельно) и определить спектральную плотность мощности.

9.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритмы аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.

3. Зависимости погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра от объёма выборки N в табличной, а максимальной погрешности аппроксимации - в графической формах.

4. Примеры экранной формы для аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.

5. Примеры экранной формы определения погрешности аппроксимации.

6. Пример экранной формы определения спектральной плотности мощности.

7. Результаты аппроксимации, представленные в табличном виде.

8. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже для $\rho_{xy}(\tau) = e^{-|\tau-\tau_m|} \cos 5(\tau - \tau_m)$, $\Delta\tau = 0,082$.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации от объёма выборки N=475 (привести все таблицы)

Таблица 9.1

J	Правая ветвь			Левая ветвь		
	$\alpha_{\text{п}}$	$m_{\text{п}}$	$\delta_{\text{п}}$	$\alpha_{\text{л}}$	$m_{\text{л}}$	$\delta_{\text{л}}$
1	10,8956	21	0,0080	10,3719	21	0,0073
2	10,2529	20	0,0100	9,9948	21	0,0106
3	10,256	19	0,0050	10,0457	20	0,0057
4	10,0191	19	0,0067	9,5700	19	0,0820
5	10,9860	19	0,0080	10,7839	19	0,0080
6	10,5202	21	0,0066	10,2023	21	0,0076
7	10,3557	18	0,0039	10,0630	18	0,0045
8	10,7277	18	0,0094	10,3339	18	0,0109
9	10,2881	20	0,0154	10,0305	21	0,0126
10	11,5087	21	0,0126	11,0286	22	0,0130
11	10,3389	20	0,0101	9,9639	21	0,0136
12	10,6692	19	0,0050	10,3534	20	0,0058
13	10,7333	20	0,0066	10,3681	21	0,0068
14	10,2973	21	0,0063	10,0819	21	0,0063
15	10,4606	20	0,0055	10,2267	21	0,0056
16	11,0406	19	0,0056	10,5952	20	0,0060
17	9,5721	20	0,0056	9,2248	21	0,0060
18	10,6600	18	0,0059	10,3943	18	0,0065
19	9,9506	19	0,0049	9,6469	19	0,0050
20	10,7140	22	0,0151	10,4237	22	0,0166
21	11,0327	19	0,0074	10,7046	20	0,0067
22	10,1177	19	0,0081	9,7541	20	0,0084
23	10,8952	17	0,0150	10,3909	18	0,0103
24	10,0951	18	0,0072	9,7777	19	0,0068
25	10,9876	17	0,0053	10,5444	19	0,0059
26	9,3986	21	0,0092	9,1282	22	0,0094
27	10,1227	21	0,0071	9,8558	21	0,0062
28	9,5225	22	0,0071	9,2200	22	0,0062
29	10,1745	20	0,0066	9,8830	21	0,0068

Определить и построить графическую зависимость максимальной погрешности аппроксимации от объёма выборки.

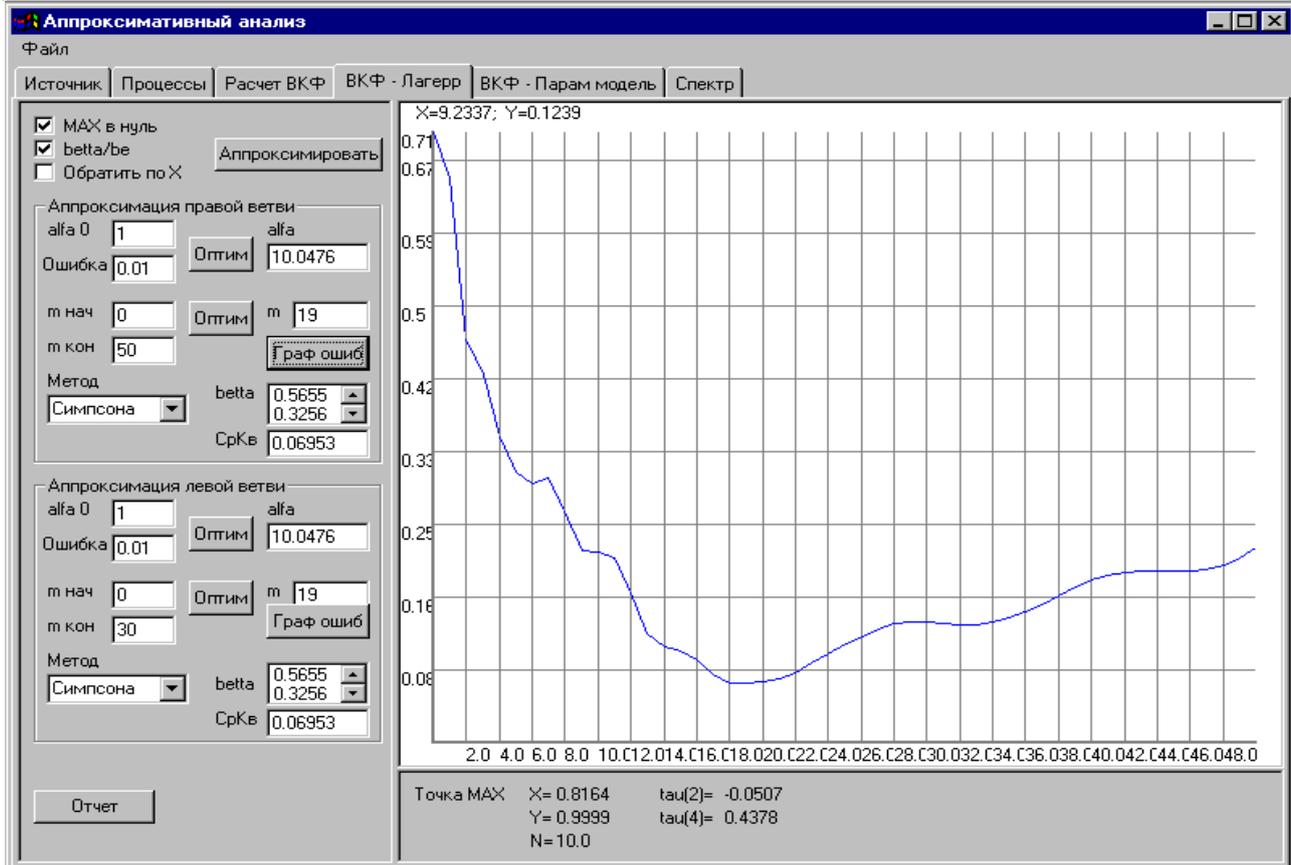
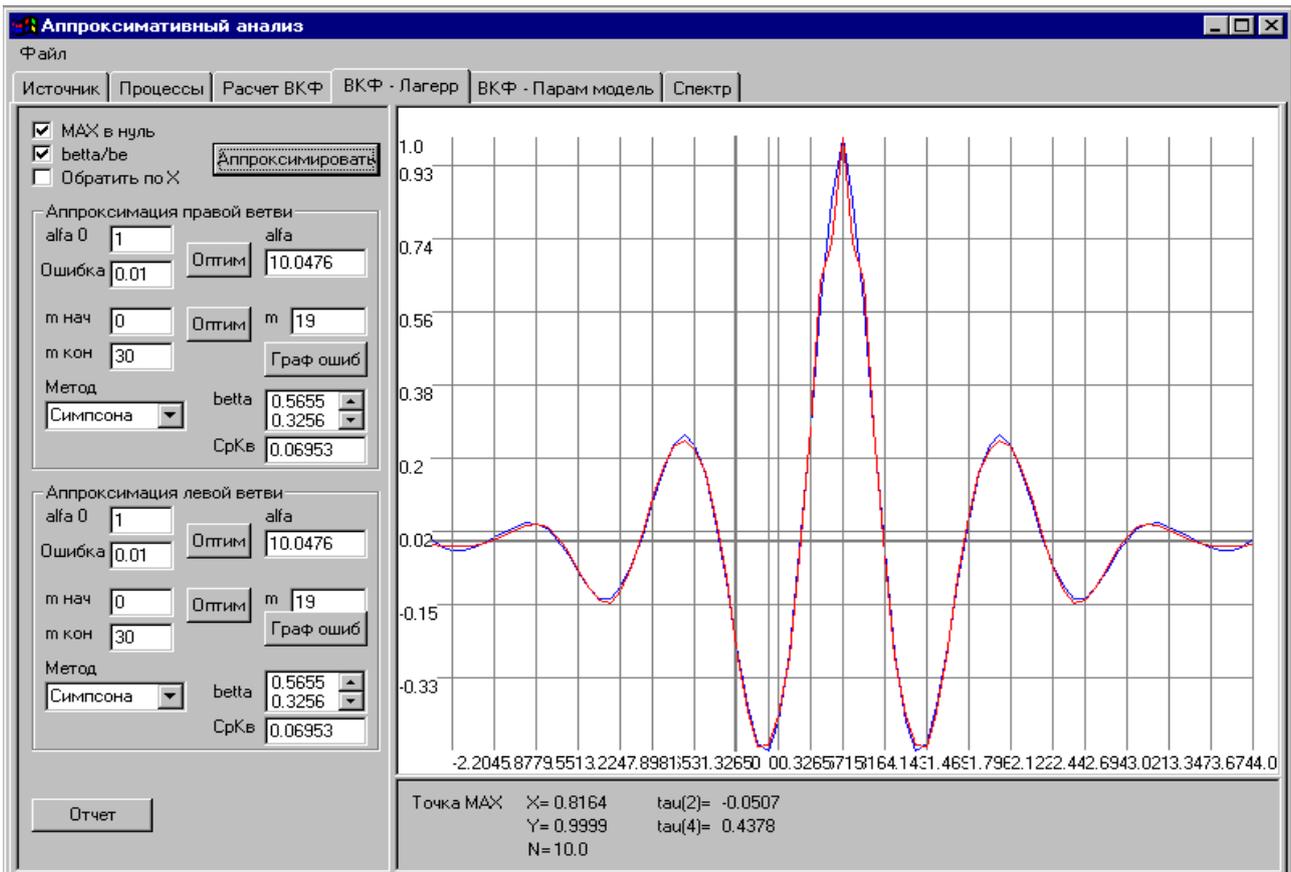


Рисунок 9.2. Экранные формы аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра и определения погрешности аппроксимации

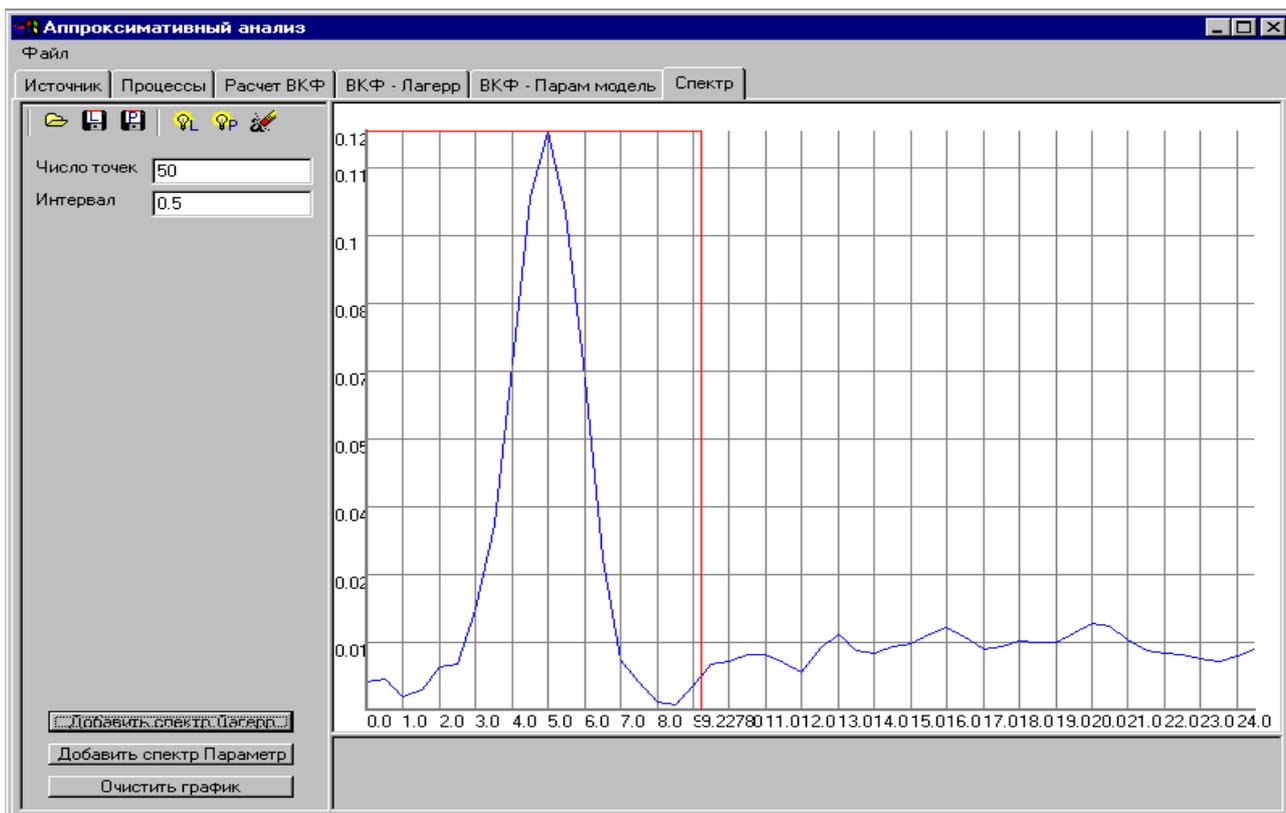


Рисунок 9.3. Экранные формы аппроксимации взаимной спектральной плотности мощности

Результаты аппроксимации представлены в таблице 9.2.

Таблица 9.2

Обозначение	Right wing:	Left wing
τ_m	5.4	
A_{max}	0.9032	
α	7.4193	8.3597
β_0	0.947425	0.936078
β_1	0.234869	0.198591
β_2	-0.031052	0.009852
β_3	-0.090514	-0.069052
β_4	-0.059027	-0.062242
β_5	-0.0017	-0.013227

9.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры описывают ортогональное разложение взаимной корреляционной функции?
2. Из каких соображений выбираются значения параметров ортогональных функций Лагерра?
3. Почему увеличение числа членов разложения ортогонального ряда не всегда приводит к уменьшению погрешности аппроксимации?

10. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов параметрическими моделями.

10.1. Теоретические основы лабораторной работы

При решении самых разнообразных научно-технических задач исследователю приходится сталкиваться с ситуациями, когда исследуемый процесс $X(t)$ представлен **неэквидистантным временным рядом**

$$\left[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}, \quad (10.1)$$

где $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}$.

Заметим, что индекс i в этом случае характеризует лишь место отсчёта или метки времени в массивах, где хранятся входные данные, а не характеризует время наступления события. Примеры реализаций неэквидистантных временных рядов приведены на рис. 10.1.

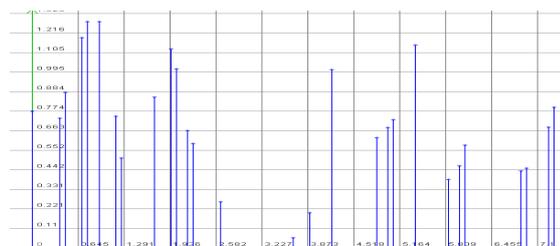
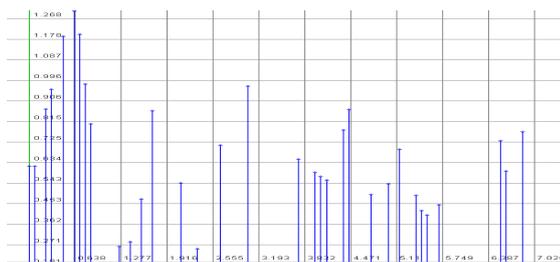
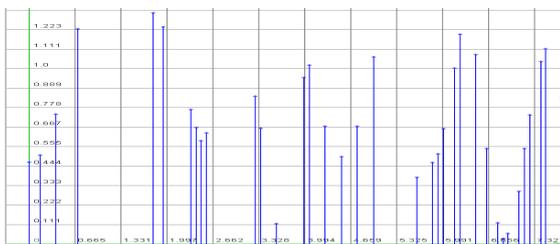


Рисунок 10.1. Примеры реализаций неэквидистантных временных рядов

классических алгоритмов:

В соответствии с общей теорией статистических измерений выражение для оценки вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов примет вид [13]:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g \left\{ \left[x_{ji}(t_{ji}) \right]_{j=1, 2, \dots, N}^{i=1, 2, \dots, M_j} \right\}, \quad (10.2)$$

где $\hat{\Theta}$ - оценка измеряемой вероятностной характеристики;

S_d - оператор усреднения;

d - параметр усреднения (M_j - объём выборки j -ой реализации, совокупность реализаций N или объём выборки j -ой реализации и совокупность реализаций $M_j N$);

g - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики $\hat{\Theta}$;

$x_{ji}(t_{ji})$ - j -ая реализация случайного процесса.

Отсюда видны основные отличия алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов от

1. x_{ji}, t_{ji} и M_j являются случайными величинами;
2. необходимо определить вид функционального преобразования $g[]$, учитывающий специфику представления входных данных x_{ji}, t_{ji} и M_j ;
3. необходимо определить вид оператора усреднения S_d .

При оценке корреляционных функций неэквилидистантных временных рядов, аргументом которых являются t, t' или τ , необходимо учитывать нерегулярность временного ряда, так как $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}$. В этом случае применение классических алгоритмов корреляционного анализа без восстановления пропущенных отсчётов невозможно - получится неверный результат.

Предположим, что в результате эксперимента получена совокупность центрированных неэквилидистантных временных рядов (в противном случае ряды необходимо предварительно центрировать):

$$\left[\begin{array}{c} \circ \\ x_{ji}(t_{ji}) \end{array} \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j} . \quad (10.3)$$

Отметим, что длительность j -реализации ряда

$$T_j = \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji} . \quad (10.4)$$

Восстановив пропущенные отсчёты по какому-либо алгоритму восстановления (пока неважно по какому), получим регулярный временной ряд с интервалом дискретизации $\Delta \tau$ между отсчётами:

$$\left[\begin{array}{c} \circ \\ x_{jn}^{(M)} \end{array} \right]_{j=1, \dots, N}^{n=1, \dots, M^*j} , \quad (10.5)$$

где $\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)}[(n-1)\Delta\tau]$ - модельное значение регулярного временного ряда;

$$M_j^* = \text{ent} \left[\frac{T_j}{\Delta \tau} \right] - \text{объём выборки } j\text{-ой реализации восстановленного ряда.}$$

В каждом j -ом ряду случайным образом будут расположены и существенные, и модельные отсчеты, причём, в ряде случаев модельные и существенные значения будут совпадать - $\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)}[(n-1)\Delta\tau] = \overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$.

Пусть требуется найти **j -текущую** оценку корреляционной функции стационарного неэквилидистантного временного ряда с учетом восстановления пропущенных отсчётов. В этом случае при оценке корреляционной функции возможны четыре варианта произведений существенных и модельных отсчётов. Для однозначности введем индикатор состояния $\delta_{jn,k}$, который в зависимости от выполнения некоторых условий принимает одно из двух значений: 0 или 1. Тогда

$$\mathbb{E}_{x_j}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \right] = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \delta_{jn,1} + \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \delta_{jn,2} + \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \delta_{jn,3} + \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \delta_{jn,4} \right], \quad (10.6)$$

$$\text{где } \delta_{jn,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta_{jn,2} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta_{jn,3} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta_{jn,4} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)}. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

В том случае, когда восстановление пропущенных отсчётов невозможно или алгоритм восстановления неизвестен, необходимо обрабатывать только существенные отсчёты неэквидистантного временного ряда. Тогда $\delta_{jn,1} = 1$, а $\delta_{jn,2} = \delta_{jn,3} = \delta_{jn,4} = 0$, и корреляционная функция будет определяться выражением:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \right]. \quad (10.7)$$

Полученное выражение, из-за случайного характера расположения существенных отсчетов в восстановленном ряду, не позволяет синтезировать алгоритм для оценки корреляционной функции, так как значение индекса n не определяет датирование отсчётов неэквидистантного временного ряда. Напомним, что в неэквидистантном временном ряду значение второго индекса i не определяет время прихода существенного отсчёта, а определяет лишь его место в массивах данных, подлежащих обработке.

Заметим, что значение индикатора состояния $\delta_{jn,1} = 1$ только в том случае, когда на временном интервале $J\Delta\tau$ находятся два существенных отсчёта неэквидистантного временного ряда $\overset{\circ}{x}_{j_i}(t_{j_i}) = \overset{\circ}{x}_{jn}$ и $\overset{\circ}{x}_{j_{i+s}}(t_{j_{i+s}}) = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}$, где s - целая случайная величина, характеризующая количество пропущенных существенных отсчётов. Значение случайной величины s при оценке корреляционной функции находится в диапазоне $(0, L \leq J_{\max})$, при этом равенство соблюдается только для регулярного потока.

Таким образом, необходимо ввести новый индикатор состояния, который бы однозначно определял отсчёт $\overset{\circ}{x}_{j_{i+s}}(t_{j_{i+s}})$, отстоящий от отсчёта $\overset{\circ}{x}_{j_i}(t_{j_i})$ на временном интервале $J\Delta\tau$. Так как в общем случае t_{j_i} являются действительными, а не целыми числами, определим индикатор состояния с использованием оператора выделения целой части $\text{ent}[\]$ в виде:

$$\delta_{j_{i+s}} = \begin{cases} 1, & \text{ent} \left[\frac{t_{j_{i+s}} - t_{j_i}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (10.8)$$

Выражение для определения отсчёта ряда с учётом (10.8) и фильтрующего свойства индикатора состояния (аналогичного фильтрующему свойству δ -функции) примет вид:

$$\overset{\circ}{x}_{j,i}(t_{j_i} + J\Delta\tau) = \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}. \quad (10.9)$$

С учётом (10.9) выражение (10.7) представим в виде:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{j_i} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]. \quad (10.10)$$

Заметим, что количество произведений существенных отсчётов в выражении (10.10) будет равно сумме индикаторов состояния:

$$d = \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} \leq M_j \leq M_j^*. \quad (10.11)$$

Это значение d используется для усреднения при получении оценок корреляционных функций. С учетом выражений (10.2) и (10.11) выражение (10.10) запишется в виде:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (10.12)$$

Разделив числитель и знаменатель в (10.12) на M_j , окончательно получим:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = \frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (10.13)$$

Выражение

$$\mathbb{E}_{x_j}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} \quad (10.14)$$

является **j -текущей оценкой интервальной корреляционной функции** и характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале $J\Delta\tau$ [13].

Отсюда видно, что выражение (10.12) отличается от классического алгоритма **j -текущей** оценки корреляционной функции

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = \frac{1}{M-J} \sum_{i=1}^{M-J} \overset{\circ}{x}_{j_i} \overset{\circ}{x}_{j,i+J}. \quad (10.15)$$

1. видом функционального преобразования $g \left[\overset{\circ}{x}_{j_i} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]$, учитываю-

щего специфику представления входных данных $\overset{\circ}{x}_{j_i}$, t_{j_i} , L и $\Delta\tau$;

2. видом оператора усреднения $S_d = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} L}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$ и значением d ;

3. переходом алгоритма в **новый класс – класс косвенных алгоритмов** оценивания корреляционных функций.

Таким образом, j -текущая оценка корреляционной функции зависит от интервальной корреляционной функции потока отсчетов неэквидистантного временного ряда. Назовем этот алгоритм **алгоритмом с использованием интервальной корреляционной функции (АИИКФ)**, а метод - **косвенным методом измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции**.

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации Δt $M_j = M$ и, как видно из выражения (10.8),

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = J; \\ 0, & \text{если } s \neq J. \end{cases} \quad (10.16)$$

Из выражения (10.11) следует, что $d = M - J$ и

$$\mathfrak{E}_{x_j}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} = 1. \quad (10.17)$$

Подставив выражение (10.16) в выражение (10.12), окончательно получим:

$$\mathfrak{K}_{x_j}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}. \quad (10.18)$$

Отметим, что выражение (10.18) является **частным случаем** выражения (10.12) или (10.13) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм j -текущей оценки корреляционной функции**.

При синтезе аппаратных, аппаратно-программных средств j -текущей оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда или интервальной корреляционной функции потока отсчетов целесообразно использовать выражение (10.12). При теоретических же исследованиях, особенно при анализе погрешностей оценивания, - выражение (10.13), так как оно в явном виде содержит интервальную корреляционную функцию, что позволяет использовать при решении ряда задач математический аппарат, разработанный для анализа результатов косвенных измерений [13].

На основе выражения (10.12) возможен синтез алгоритмов для оценивания различных корреляционно-структурных функций, в том числе, и взаимных корреляционных. Следует заметить, что необходимо оценивать две ветви взаимных корреляционных функций. При оценке правой ветви $\overset{\circ}{x}_{j,i+s} = \overset{\circ}{y}_{j,i+s}$, а левой - $\overset{\circ}{x}_{ji} = \overset{\circ}{y}_{ji}$.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (10.12) к виду:

$$\mathfrak{G}_{x_j}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{g}_1[x_{ji}] \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{g}_2[x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}]}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}, \quad (10.19)$$

где $g_1[\]$ и $g_2[\]$ - функциональные преобразования x_{j_i} и x_{j_i+s} соответственно. Отметим, что в некоторых случаях функциональные преобразования могут совпадать.

Специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов заключается в следующем:

1. пропуски наблюдений, «дрожание» приводят к увеличению дисперсии оценки ординат корреляционной функции, особенно при небольшой выборке;
2. увеличение дисперсии оценки ординат корреляционной функции затрудняет её идентификацию по фазовым портретам;
3. при небольшой выборке теряет смысл понятие погрешности приближения, так как корреляционная функция оценивается с большой погрешностью;
4. минимальное значение погрешности аппроксимации позволяет убедиться, что выбрана лучшая модель из рассматриваемого класса моделей.

Таким образом, исходной информацией для решения задачи аппроксимации является корреляционная функция неэквидистантного временного ряда, алгоритм оценивания которой при усреднении по времени с использованием интервальной корреляции определяется выражением (10.12).

Оценка параметров аналитического выражения возможна различными методами: Ньютона, Ньютона с конечно-разностными производными и деформированного многогранника и т. д. [13].

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение П.23).

10.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать неэквидистантный временной ряд с заданными видом корреляционной функции и моделью нерегулярной дискретизации со следующими параметрами - $M = \text{ent}[\tau_{k_{\max}} / \Delta\tau]$, $N=1000$, $\delta = 0,02$.

2. Вычислить корреляционную функцию.

3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.

4. Задать вручную начальные приближения параметров корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции, воспользовавшись методами Ньютона, Ньютона с конечно-разностными производными и деформированного многогранника. Определить погрешности аппроксимации.

5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.

6. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=5000$, задав начальные значения параметров в автоматическом режиме (остальные параметры остаются без изменения).

7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации.

8. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=1000$, $J_{\max} = J_{\max} / 2$, где J_{\max} - число отсчётов корреляционной функции.

9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции при заданном J_{\max} от значения параметра нерегулярной дискретизации.

10.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций.
3. Пример экранной формы построения фазового портрета.
4. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности.
5. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.
6. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации корреляционной функции от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.
7. Выводы по работе.

10.4. Контрольные вопросы

1. Назовите методы оценки корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.
2. Можно ли идентифицировать модель корреляционной функции неэквидистантного временного ряда по фазовому портрету?
3. Как образом производится идентификация модели корреляционной функции неэквидистантного временного ряда?
4. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда параметрическими моделями?
5. В чём заключается специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда параметрическими моделями?
6. Каким образом производится аппроксимация спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов?

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$, $\Delta\tau = 0,082$ сек приведен ниже.

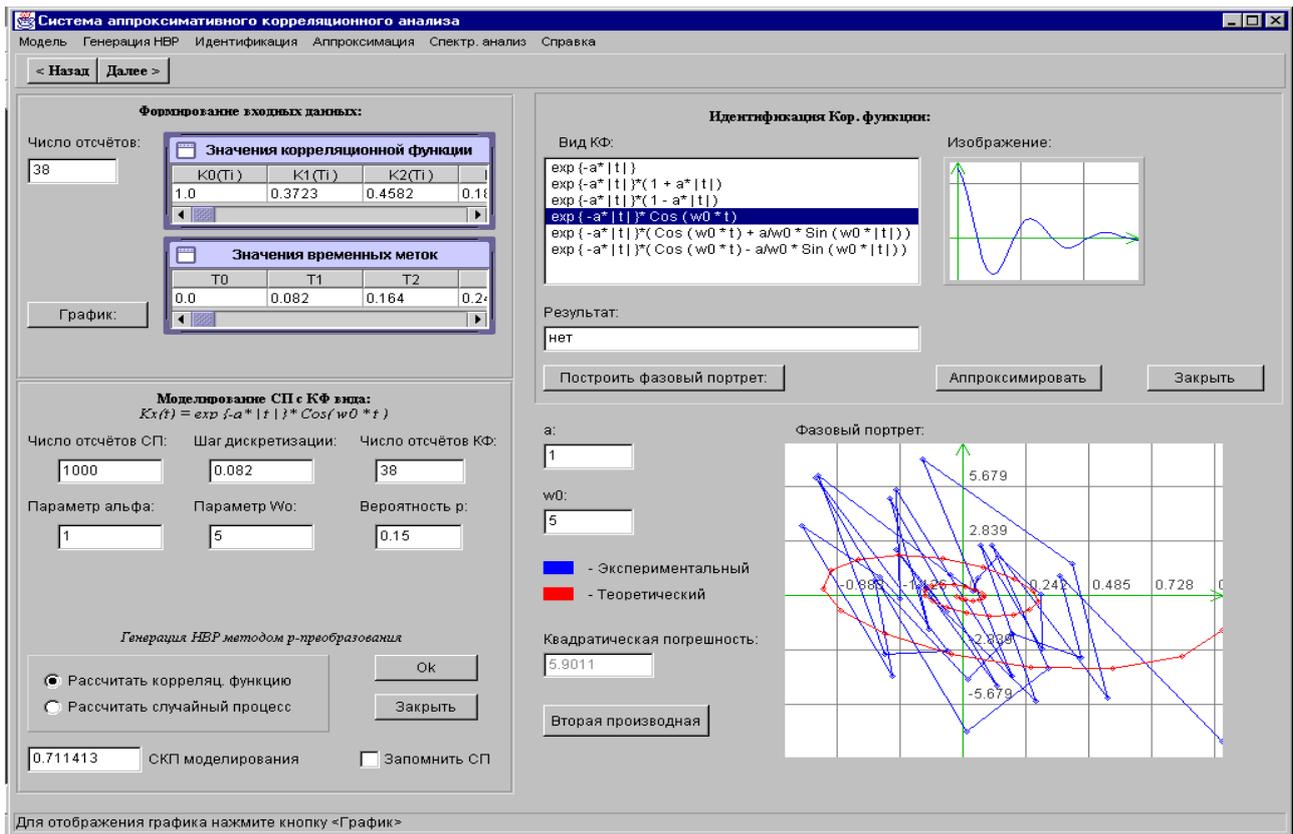


Рисунок 10.1. Фазовый портрет корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta_0 \tau$, $N=1000, p=0,15$

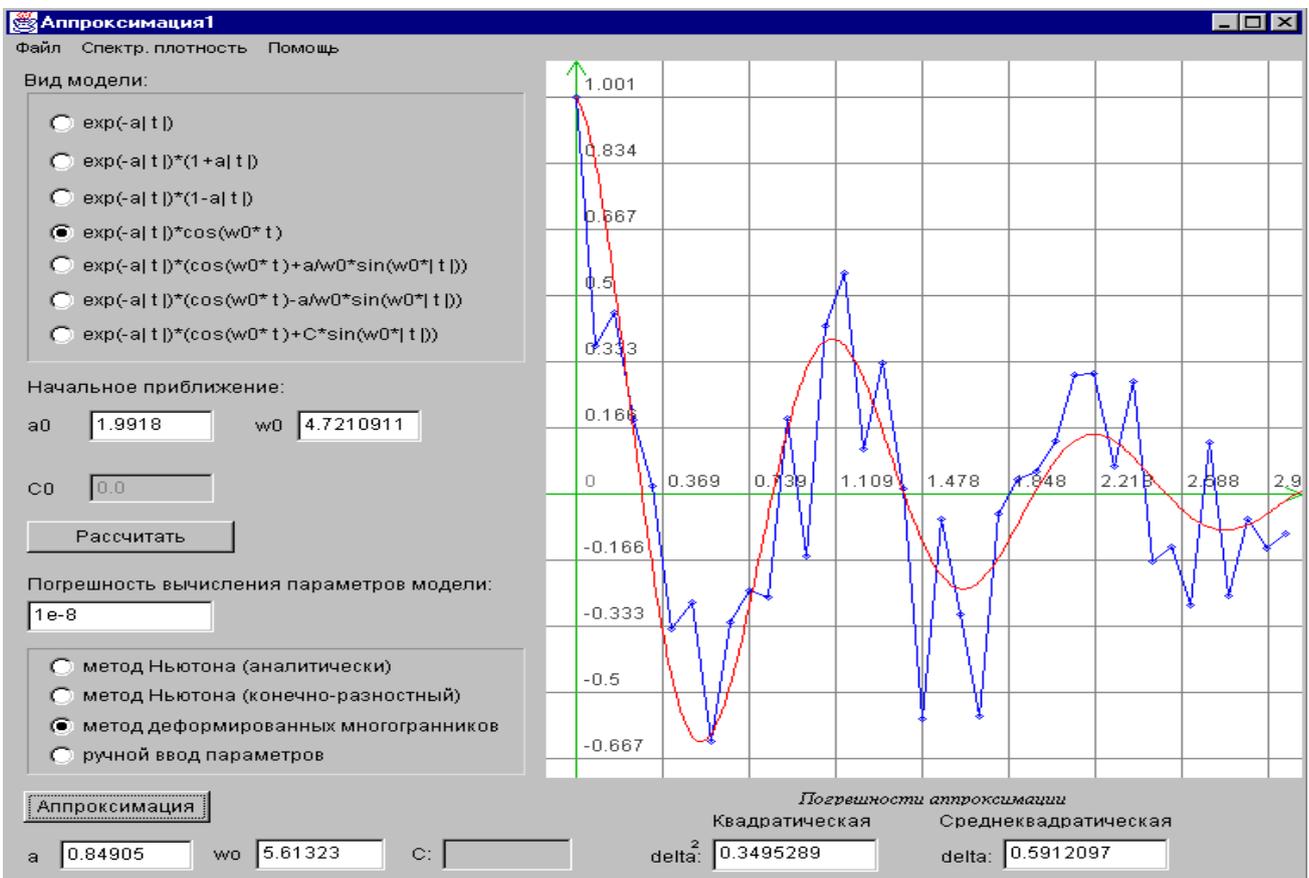


Рисунок 10.2. Результаты аппроксимации $N=1000, p=0,15, J_{\max}=38$

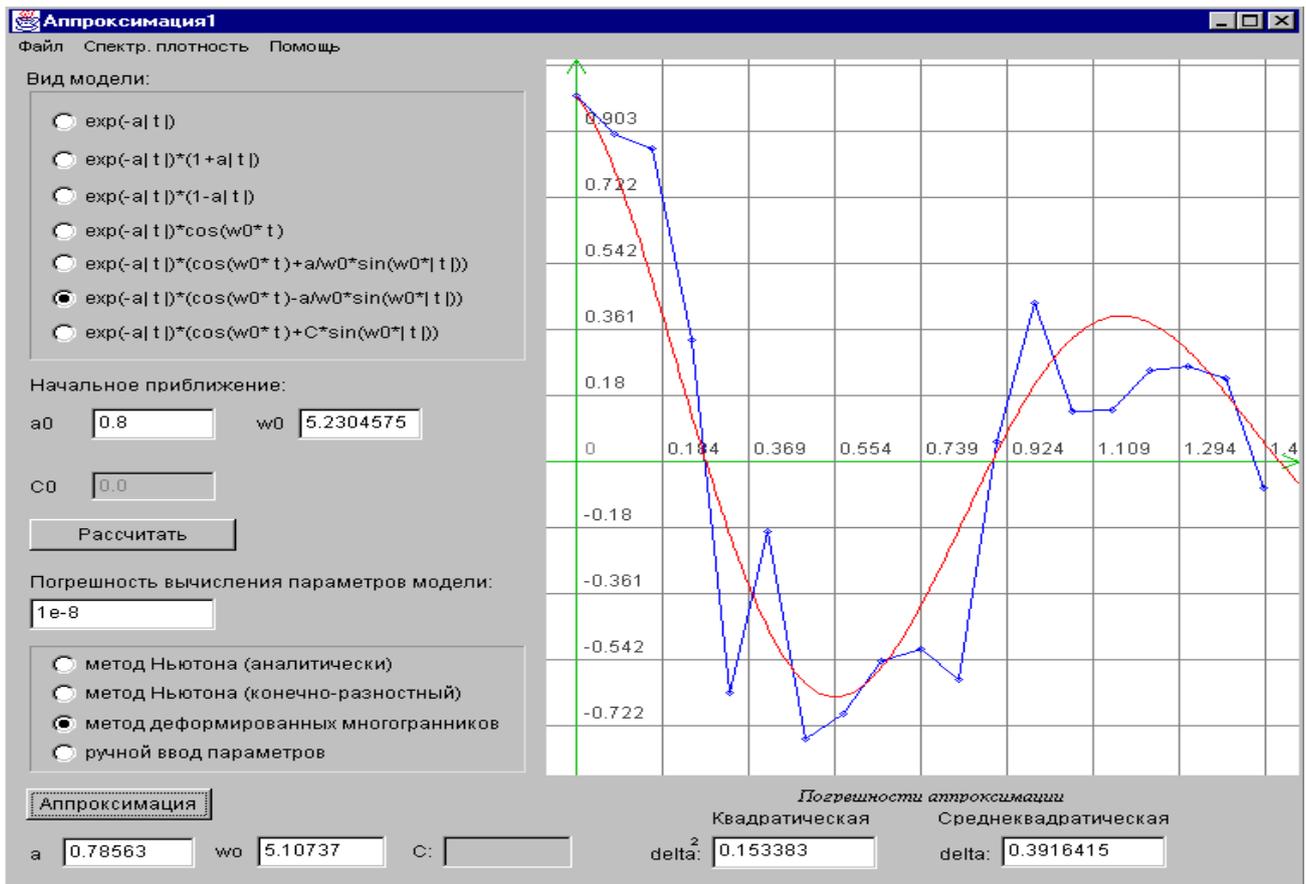


Рисунок 10.3. Результаты аппроксимации $N=1000$, $\rho=0,15$, $J_{\max}=19$

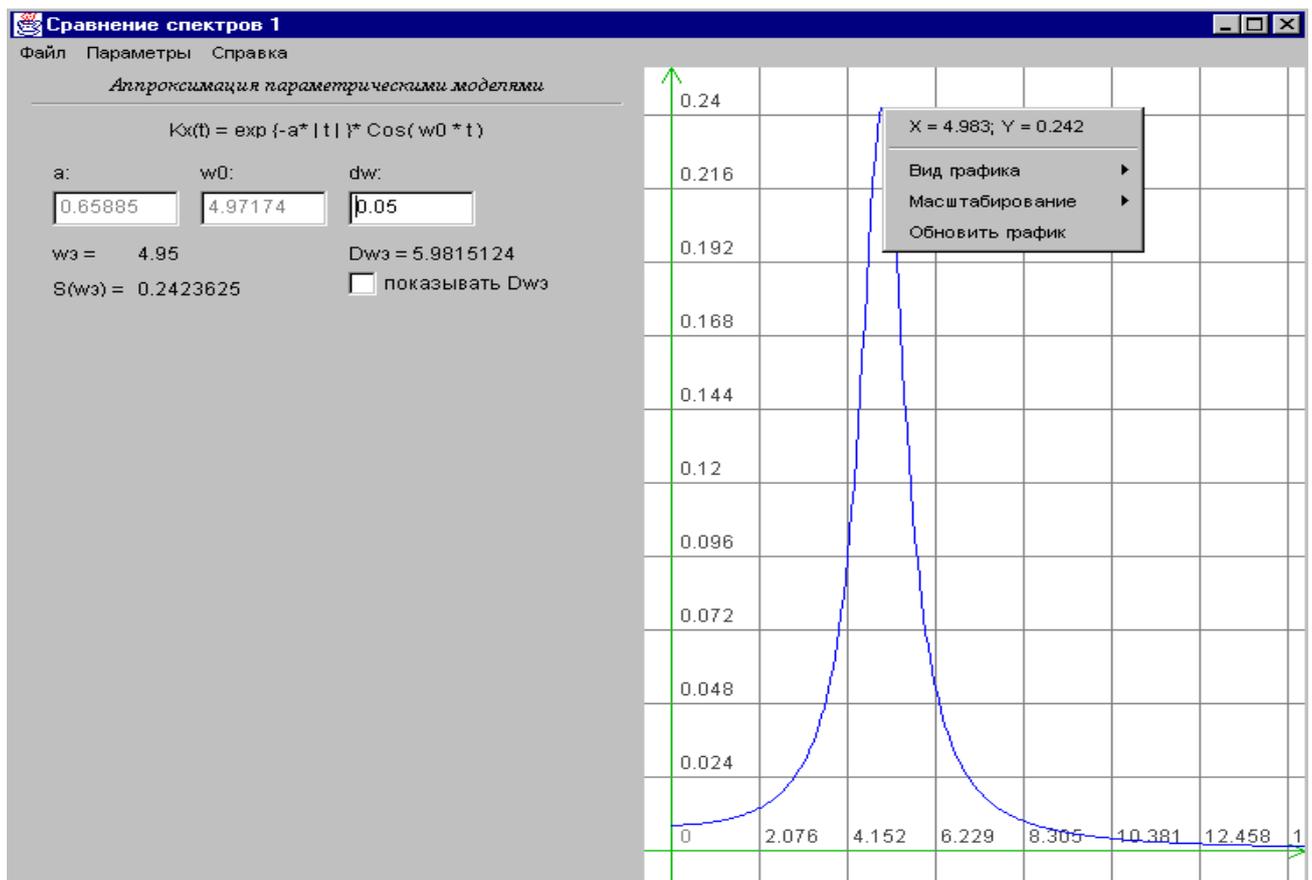


Рисунок 10.4. Спектральная плотность мощности неэквидистантного временного ряда $\mu = 5$

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta_0 \tau$ различными колебательными моделями $N=1000, M=38$

Таблица 10.1

p	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
0,15	0,7497	4,656	0,5566	0,7527	4,7883	0,5646	0,74	4,5918	0,5612
0,3	0,953	5,3336	0,2162	0,96	5,5258	0,2314	0,9398	5,2408	0,2524
0,45	0,9488	5,0682	0,1901	0,9521	5,275	0,1953	0,9386	4,9658	0,2387
0,6	0,7603	4,8694	0,1285	0,7551	4,9992	0,1841	0,7545	4,8048	0,1457
0,75	0,7481	5,0549	0,0559	0,7511	5,1787	0,0783	0,7389	4,995	0,1376
0,9	0,8951	5,1822	0,1384	0,8897	5,3533	0,137	0,8882	5,0968	0,2068

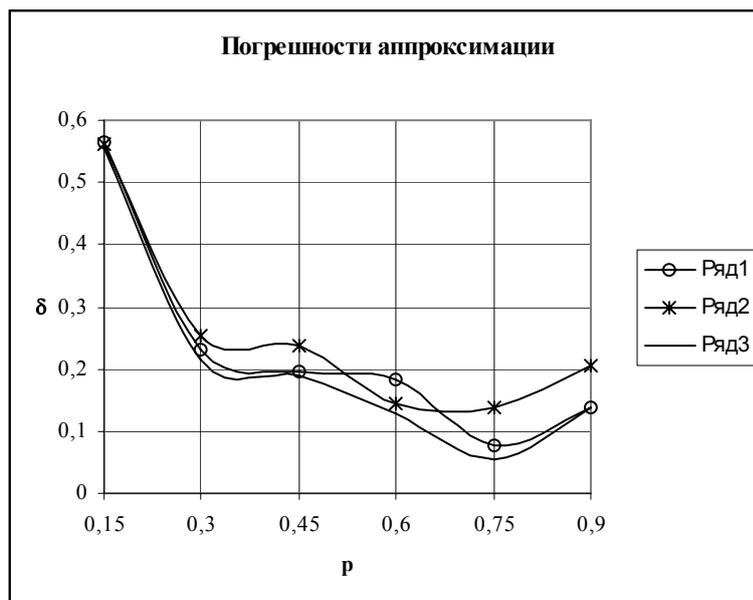


Рисунок 10.5. Зависимость погрешности аппроксимации от значения параметра p-преобразования

На рисунке 10.5 ряд 1 соответствует нормированной корреляционной функции $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, ряд 2 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$, ряд 3 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta_0 \tau$ различными колебательными моделями $N=5000, J_{\max}=38$

Таблица 10.2

p	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
0,15	0,9216	5,1423	0,266	0,914	5,3079	0,2573	0,912	5,0614	0,3199
0,3	0,871	4,8448	0,1338	0,8744	5,0102	0,1739	0,8581	4,7653	0,1836
0,45	0,8781	4,8542	0,0825	0,8775	5,016	0,1245	0,8662	4,7759	0,165
0,6	0,9561	5,132	0,0441	0,9549	5,3198	0,1197	0,9447	5,0402	0,1362
0,75	1,042	5,1247	0,05	1,042	5,3374	0,115	1,0269	5,0221	0,1624
0,9	0,9416	5,0552	0,0568	0,9417	5,2322	0,1177	0,9283	4,9701	0,1524

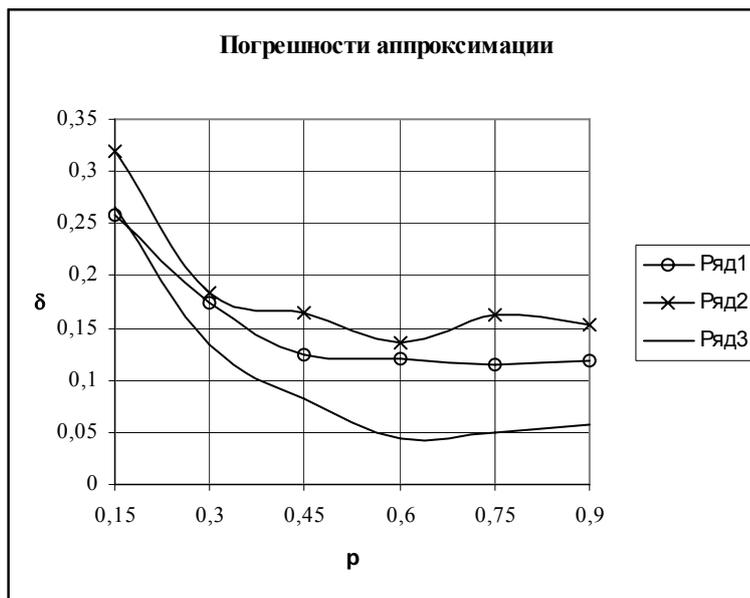


Рисунок 10.6. Зависимость погрешности аппроксимации от значения параметра p-преобразования

На рисунке 10.6 ряд 1 соответствует нормированной корреляционной функции $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, ряд 2 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$, ряд 3 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta_0 \tau$ различными колебательными моделями $N=1000, J_{\max}=110$

Таблица 10.3

p	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
0,15	0,7957	5,2124	0,3802	0,7909	5,4186	0,3828	0,7856	5,1074	0,3916
0,3	1,3591	5,0029	0,1514	1,3751	5,4569	0,2156	1,3265	4,77	0,1955
0,45	0,8242	4,6374	0,1376	0,8099	4,8729	0,2013	0,8126	4,5158	0,1309
0,6	1,1761	4,94	0,0881	1,1671	5,288	0,1472	1,1512	4,7633	0,1769
0,75	1,046	5,0577	0,0482	1,0387	5,3396	0,0923	1,0236	4,9177	0,162
0,9	1,0679	5,0044	0,0559	1,0601	5,2993	0,138	1,0461	4,8559	0,1352

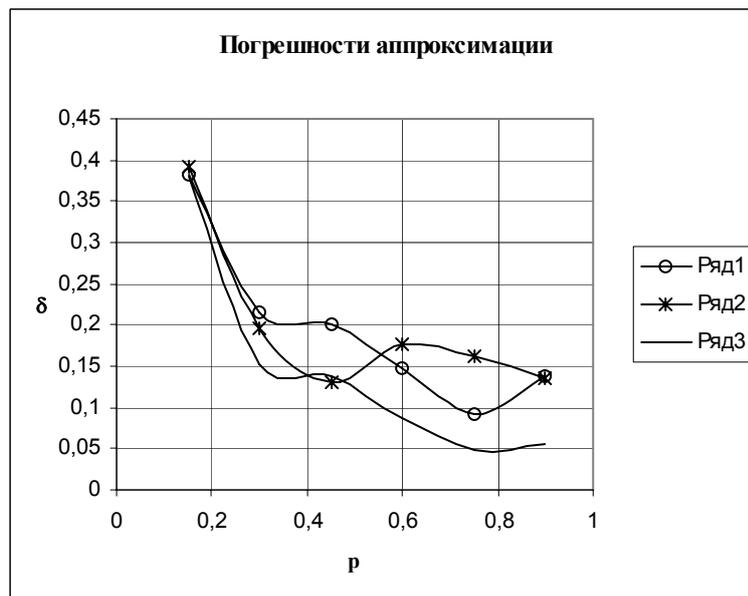


Рисунок 10.7. Зависимость погрешности аппроксимации от значения параметра p -преобразования

На рисунке 10.7 ряд 1 соответствует нормированной корреляционной функции $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, ряд 2 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$, ряд 3 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$.

11. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра.

11.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей корреляционных функций и спектральных плотностей неэквидистантных временных рядов, когда априори неизвестен вид модели корреляционной функции или погрешность аппроксимации не устраивает исследователя.

Теоретическое обоснование метода описано в лабораторной работе 7, а специфика аппроксимации корреляционно-спектральных характеристик неэквидистантных временных рядов – в лабораторной работе 10.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение П.23).

11.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать неэквидистантный временной ряд с заданными видом корреляционной функции и моделью нерегулярной дискретизации со следующими параметрами - $J_{\max} = \text{ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $N=1000$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.
4. Определить оптимальные значения параметров аналитического выражения корреляционной функции $\alpha, b_0, \dots, b_m, m$, воспользовавшись методами Симпсона. Определить погрешности аппроксимации.
5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
6. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=5000$ (остальные параметры остаются без изменения).
7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации.
8. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=1000$, $J_{\max1} = J_{\max} / 2$.
9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции при заданном $J_{\max1}$ от значения параметра нерегулярной дискретизации.

11.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.
3. Пример экранной формы построения фазового портрета.
4. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра.
5. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.
6. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже для $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$.

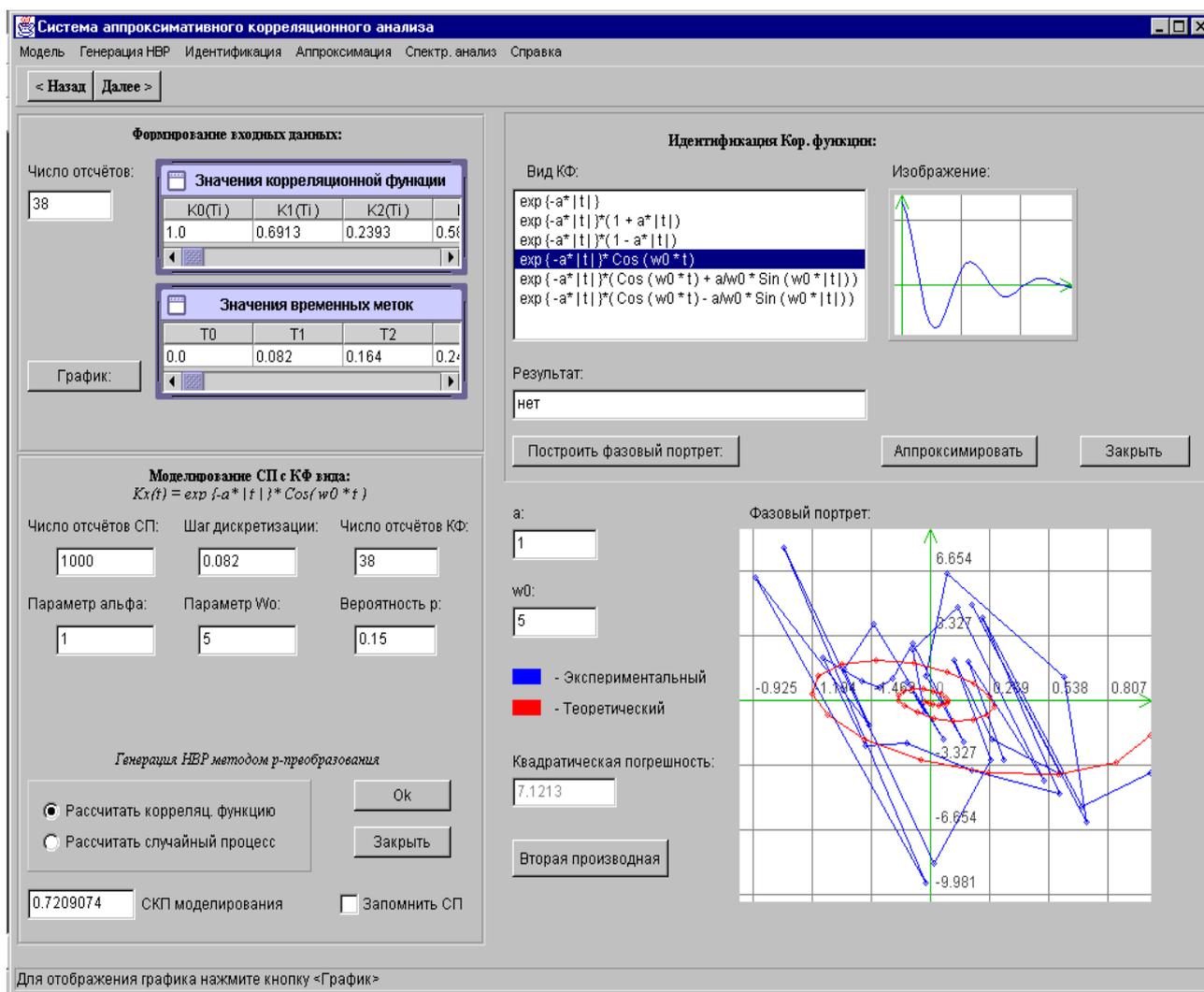


Рисунок 11.1. Экранная форма фазового портрета корреляционной функции неэквидистантного временного ряда $N=1000$, $p=0,15$

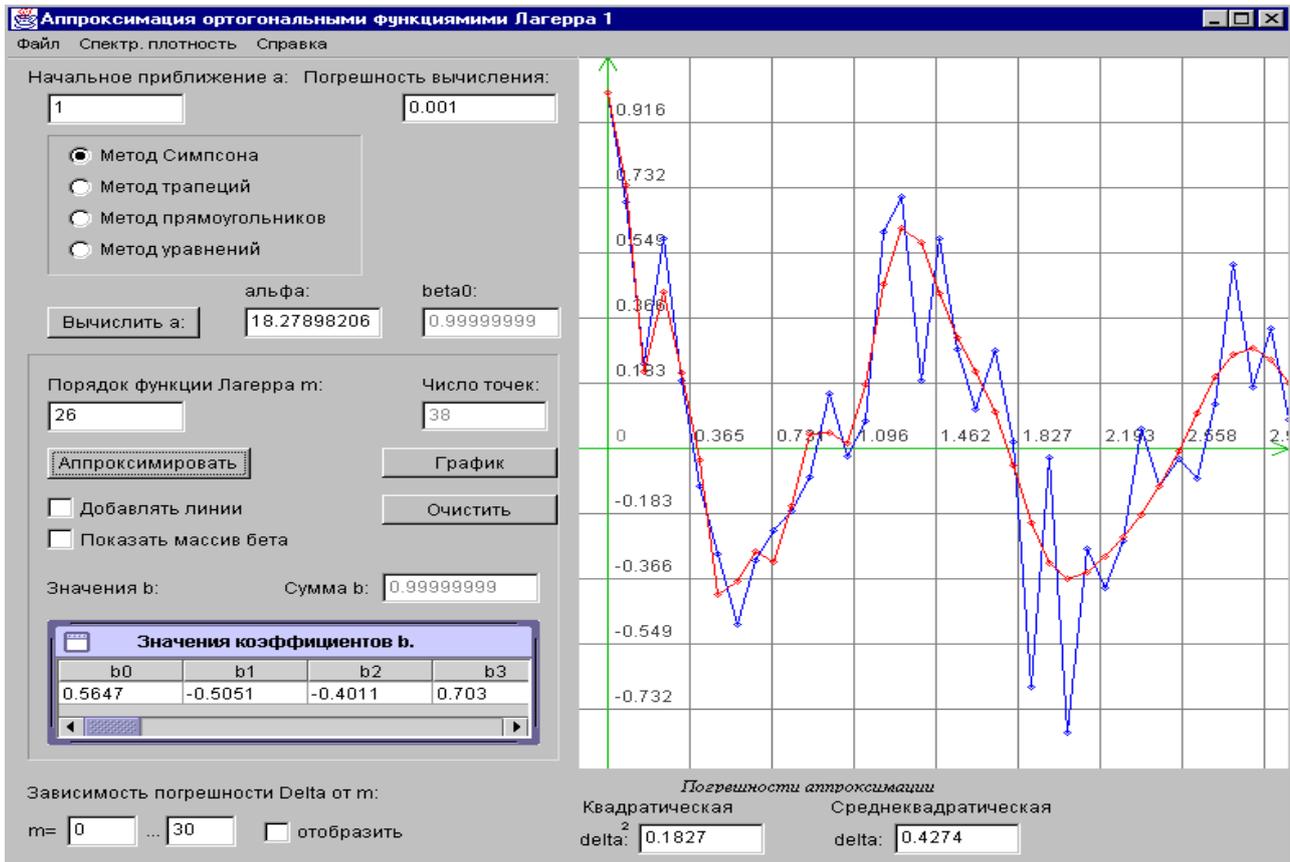


Рисунок 11.2. Экранная форма аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра $N=1000$, $\rho=0,15$

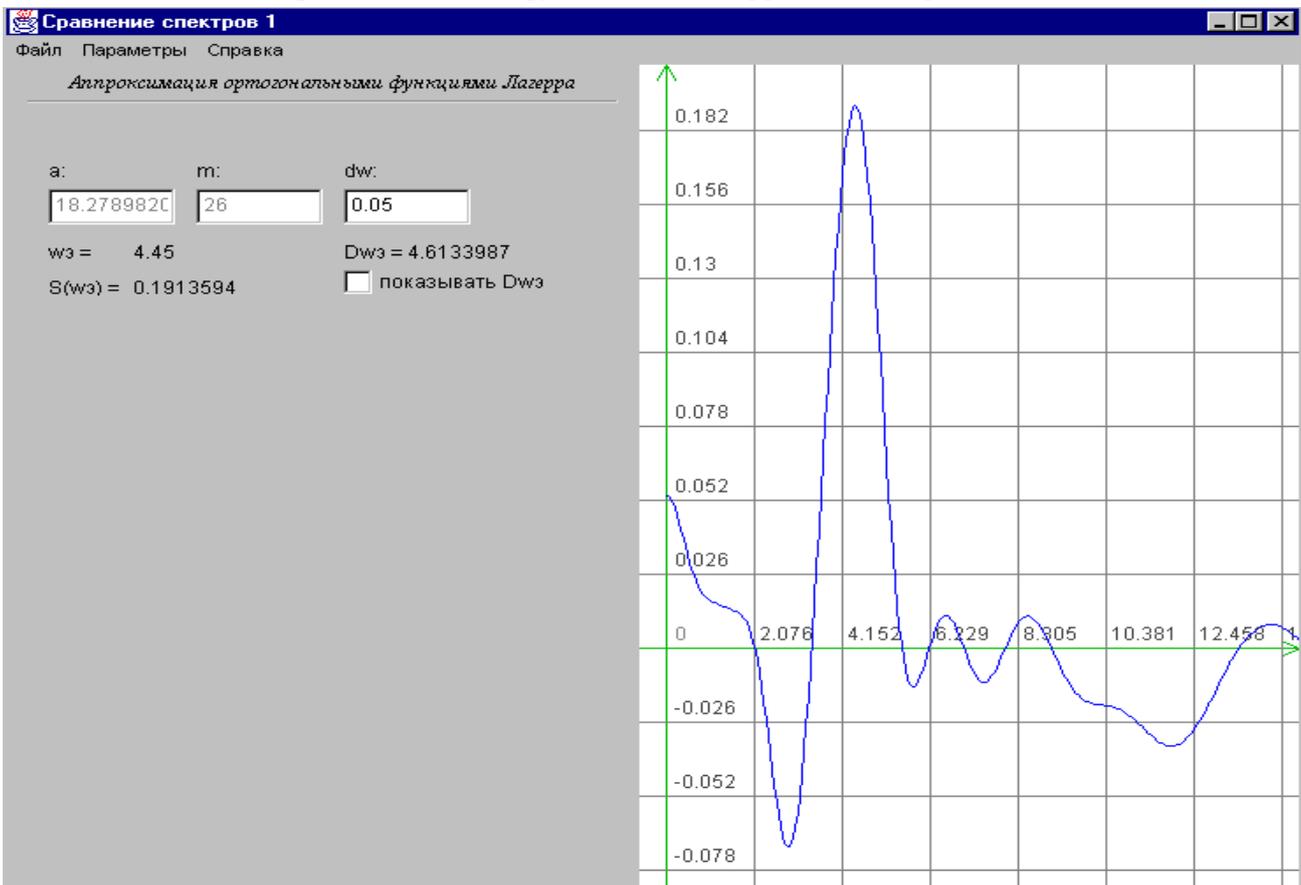


Рисунок 11.3. Экранная форма аппроксимации спектральной плотности ортогональными функциями Лагерра $N=1000$, $\rho=0,15$

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$

Таблица 11.1

p	N=1000, Jmax=38			N=5000, Jmax=38			N=1000, Jmax =19		
	α	m	δ	α	m	δ	α	m	δ
0,15	21,4748	24	0,4861	21,4748	18	0,2256	18,7769	14	0,2273
0,3	12,0806	16	0,1783	13,7151	14	0,132	14,8735	14	0,1978
0,45	13,4674	14	0,1296	13,6259	14	0,0923	13,3098	14	0,0716
0,6	13,8032	24	0,137	13,9906	14	0,076	14,3205	16	0,111
0,75	13,7007	14	0,085	13,9279	14	0,0726	14,7539	14	0,1186
0,9	13,0102	14	0,0712	14,2312	14	0,073	14,0854	14	0,0764

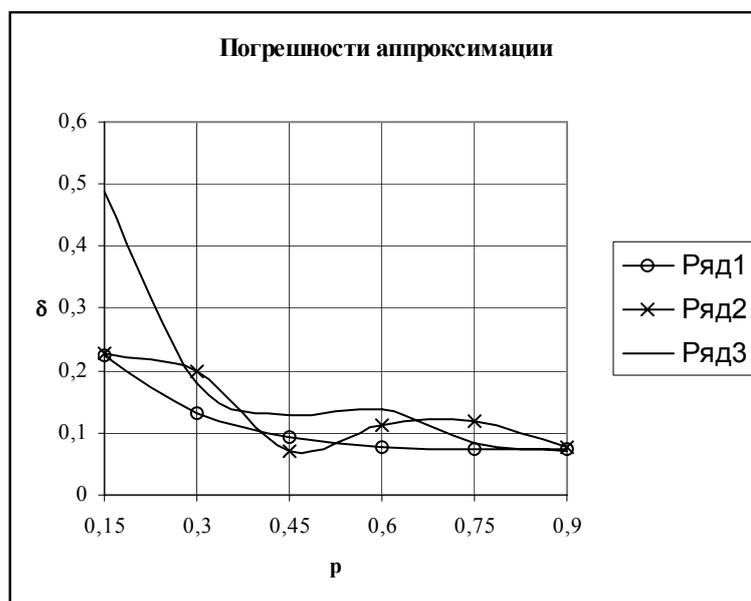


Рисунок 11.4. Погрешности аппроксимации

На рис. 11.4 ряд 1 соответствует следующим параметрам: $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$ N=5000, Jmax=38, ряд 2 – N=1000, Jmax=19, ряд 3 – N=1000, Jmax=38.

11.4. Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется аппроксимация корреляционных функций неэквилидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение параметра α при аппроксимации корреляционных функций неэквилидистантного временного ряда ортогональными функциями Лагерра?
3. В чём заключается специфика аппроксимации корреляционных функций неэквилидистантного временного ряда ортогональными функциями Лагерра?

12. АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в оценке обобщенных корреляционно-спектральных характеристик с использованием параметрических моделей.

12.1. Теоретические основы лабораторной работы

Оценка обобщенных корреляционных характеристик

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся:

- показатель колебательности, равный числу пересечения «нуля» корреляционной функции и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;
- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

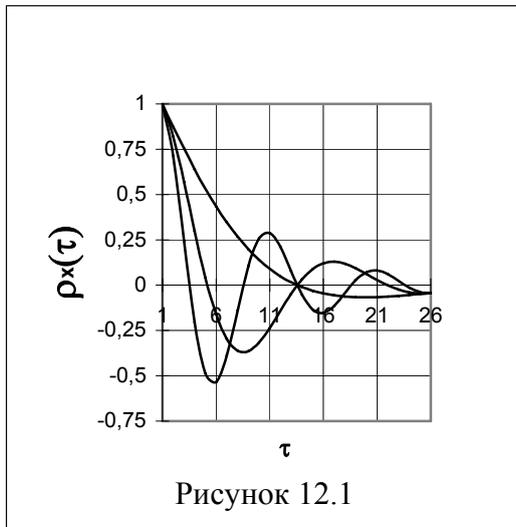
Учитывая важность обобщенных корреляционных характеристик в прикладном анализе случайных процессов, рассмотрим их более подробно.

Оценка показателя колебательности

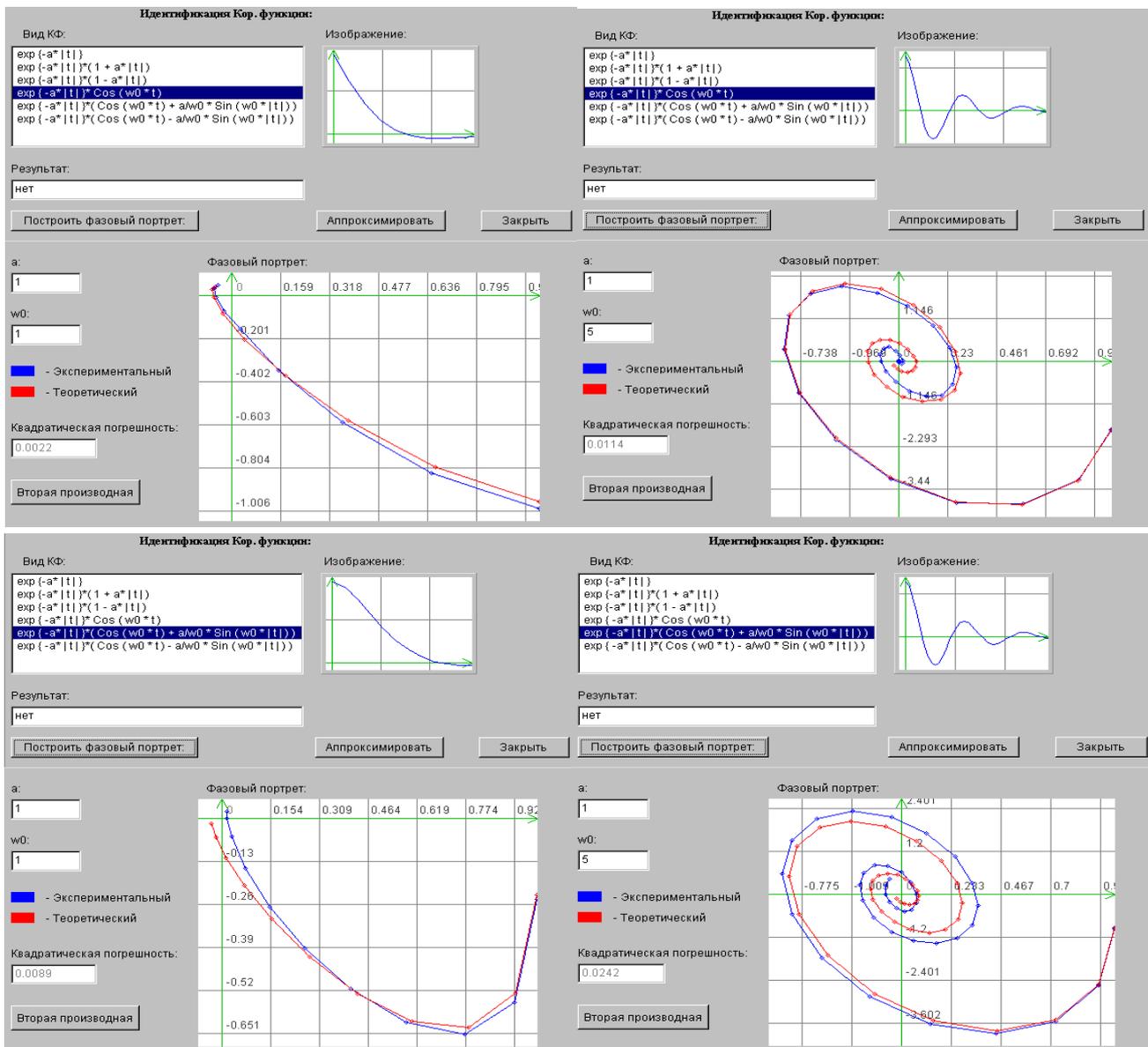
Рассмотрим колебательную модель корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$. Введем безразмерную величину $\mu = \omega_0 / \alpha$, равную отношению частоты колебания корреляционной функции к показателю затухания и характеризующую число пересечений корреляционной функцией «нуля». Эта характеристика называется **показателем колебательности** корреляционной функции. На рис. 12.1 представлены три нормированные корреляционные функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, имеющие показатели колебательности 1, 3, 5 соответственно.

Введенный показатель колебательности оказывается очень полезной характеристикой и при исследовании других колебательных моделей корреляционных функ-

ций. Показатель колебательности, в общем случае, равен числу пересечения корреляционной функции оси τ на максимальном интервале корреляции.



Учитывая, что «хвост» корреляционной функции оценивается с большей погрешностью, показатель колебательности целесообразнее определять по фазовым портретам. На рис. 12.2 приведены примеры оценки показателя колебательности для колебательных моделей корреляционных функций. Он равен числу пересечения фазового портрета оси τ . Заметим, что для стационарных эргодических процессов $\rho_x(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, фазовый портрет заканчивается в точке с координатами $(0,0)$.



Показатель колебательности входит в аналитические выражения для определения минимального количества ординат корреляционной функции случайных процессов (см. таблицу 4.1), используется при идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции, анализе методических погрешностей оценивания вероятностных характеристик и т.д.

Оценка интервала корреляции

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл - **длительность существования корреляционной функции.**

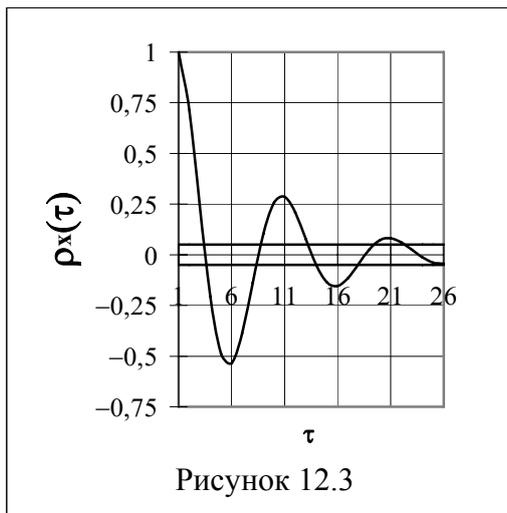


Рисунок 12.3

Максимальный интервал корреляции $\tau_k^{(1)} = \tau_{kmax}$ определяется в результате решения уравнения [1]:

$$|\rho(\tau \geq \tau_{kmax})| \leq \Delta. \quad (12.1)$$

Т.е. под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями Δ и $-\Delta$, после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора $[-\Delta, \Delta]$. На рис. 12.3 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ при $\alpha=1, \omega_0=5, \Delta=0,05$.

Выражения для оценки максимального интервала корреляции приведены в таблице 3.2.

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной корреляционной функцией [13]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (12.2)$$

Отметим, что для некоторого класса процессов $\tau_k^{(2)} = 0$, что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает $\tau_{kmax} > 0$.

Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции $\tau_k^{(2)}$ целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau; \quad (12.3)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (12.4)$$

Анализ выражений (12.3) и (12.4) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение $\tau_k^{(4)}$. Поэтому, несмотря на то, что $\tau_k^{(4)}$ дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем $\tau_k^{(3)}$. Значения интервалов корреляции $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ для типовых моделей корреляционных функций приведены в приложении П.16.

Графические зависимости интервала корреляции $\tau_k^{(4)}$ для различных колебательных моделей приведены на рис. 12.4 (ряд 1 – модель 5, ряд 2 – модель 6, ряд 3 – модель 7).

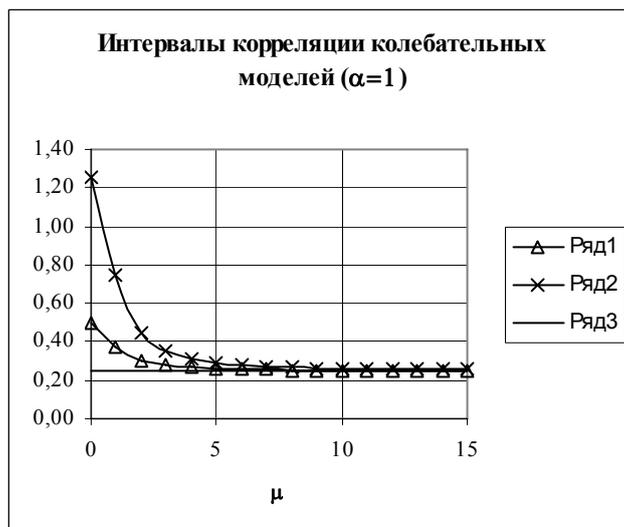


Рисунок 12.4

Из рисунка 12.4 видно, что отличие интервалов корреляции для различных колебательных моделей наблюдается лишь при малых значениях показателя колебательности $\mu < 3$.

В качестве оценки интервалов корреляции предлагается использовать интервалы корреляции экспоненциальной функции $\rho_a(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$, аппроксимирующей нормированную корреляционную функцию по минимуму квадратической погрешности аппроксимации [13].

При этом,

$$\hat{\tau}_x^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha) d\tau \approx 1/\alpha; \quad (12.5)$$

$$\hat{\tau}_x^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_a^2(\tau, \alpha) d\tau \approx 1/2\alpha; \quad (12.6)$$

$$\hat{\tau}_{k\max} \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (12.7)$$

Исследования показали, что предложенный способ оценки интервала корреляции наиболее целесообразно применять при исследовании широкополосных процессов ($\mu < 3$), спектральная плотность мощности которых обладает следующим свойством $S_x(0) \neq 0$ [13].

Оценка моментов корреляционных функций

Моменты корреляционных функций вводятся по аналогии с моментами законов распределения и используются при решении различных прикладных задач. Определим начальный момент k-го порядка в виде:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau. \quad (12.8)$$

Значение моментов для типовых моделей корреляционных функций приведены в приложении П.17.

Графические зависимости моментов корреляционных функций 1-3 порядков для различных колебательных моделей приведены на рис. 12.5 (ряд 1 – модель 5, ряд 2 – модель 6, ряд 3 – модель 7).

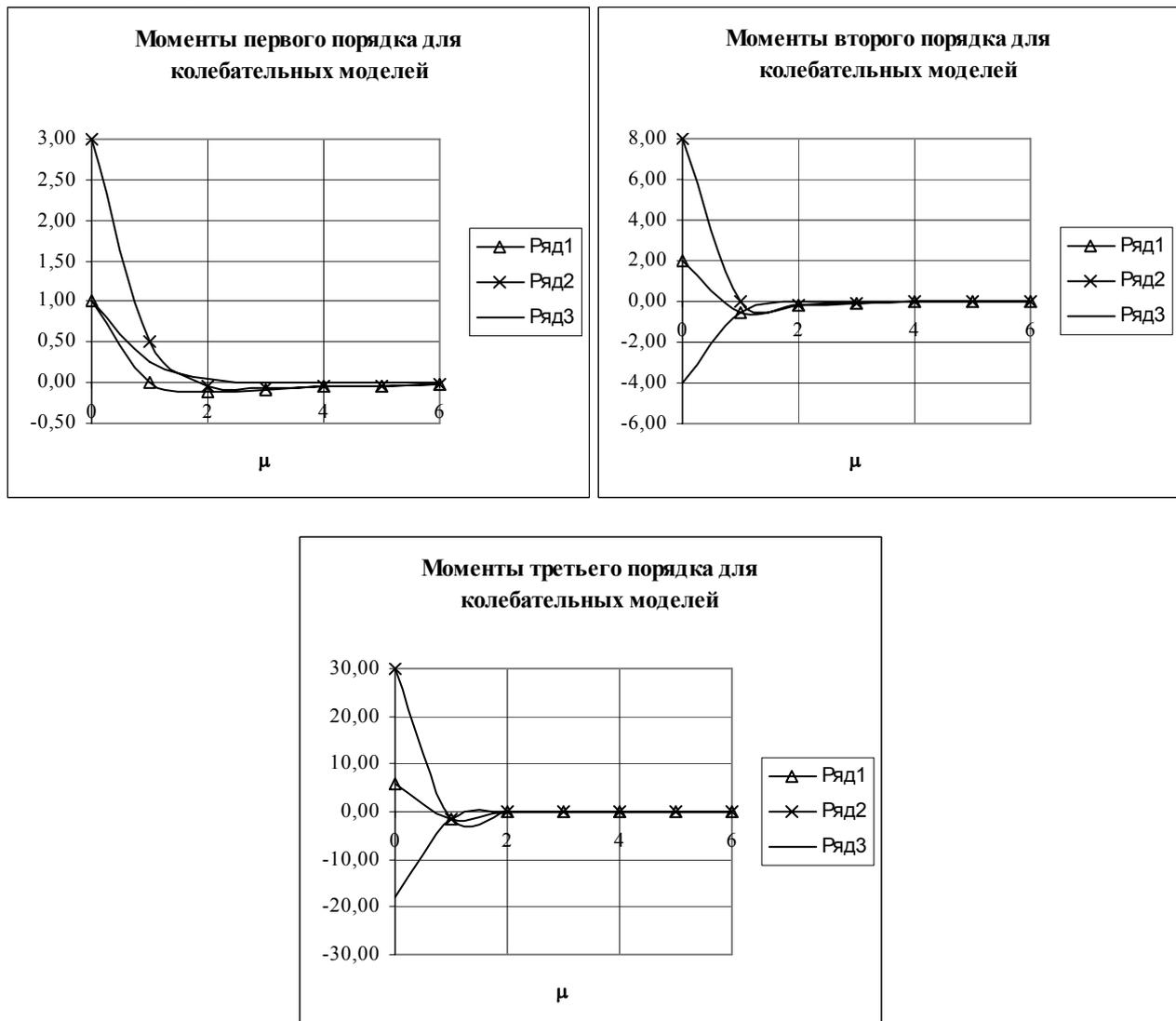


Рисунок 12.5

Из рисунка 12.5 видно, что отличие моментов корреляционных функций для различных колебательных моделей наблюдается лишь при малых значениях показателя колебательности $\mu < 2$.

Знание моментов позволяет решать задачи идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции и ввести ещё одно определение длительности существования корреляционной функции [13]:

$$\tau_k^{(5)} = \mu_1 / \mu_0. \quad (12.9)$$

Оценка обобщенных характеристик взаимной корреляционной функции

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{k \max xy}$; (12.10)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$; (12.11)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$; (12.12)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$; (12.13)

- моменты корреляционных функций $\mu_{kxy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \rho_{xy}(\tau) d\tau$, (12.14)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик и т.д.

Если в качестве модели взаимной корреляционной функции выбрать модель

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x^2 \rho_a(\tau - \tau_m), \quad (12.15)$$

где τ_m - значение аргумента корреляционной функции, соответствующее её максимуму, то значения интервалов корреляции равны удвоенному значению результатов, представленных в приложении П.16.

Оценка обобщенных спектральных характеристик

К обобщенным спектральным характеристикам, широко применяемым в приложениях, относятся: эквивалентная ширина спектра мощности, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности, значение максимума и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет определить полосу частот, где сосредоточена основная мощность процесса. Эта характеристика называется **эквивалентной шириной спектра мощности случайного процесса** - $\Delta\omega_3$. Существуют различные способы определения $\Delta\omega_3$, приведенные, например, в [13].

Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 12.6 а)), $\Delta\omega_3$ определяют в виде:

$$\Delta\omega_3 = \frac{\sigma_x^2}{2 S_x(\omega)_{\max}}. \quad (12.16)$$

Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности ω_3 (рис. 12.6 б)), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

$$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \Delta\omega_3 / 2. \quad (12.17)$$

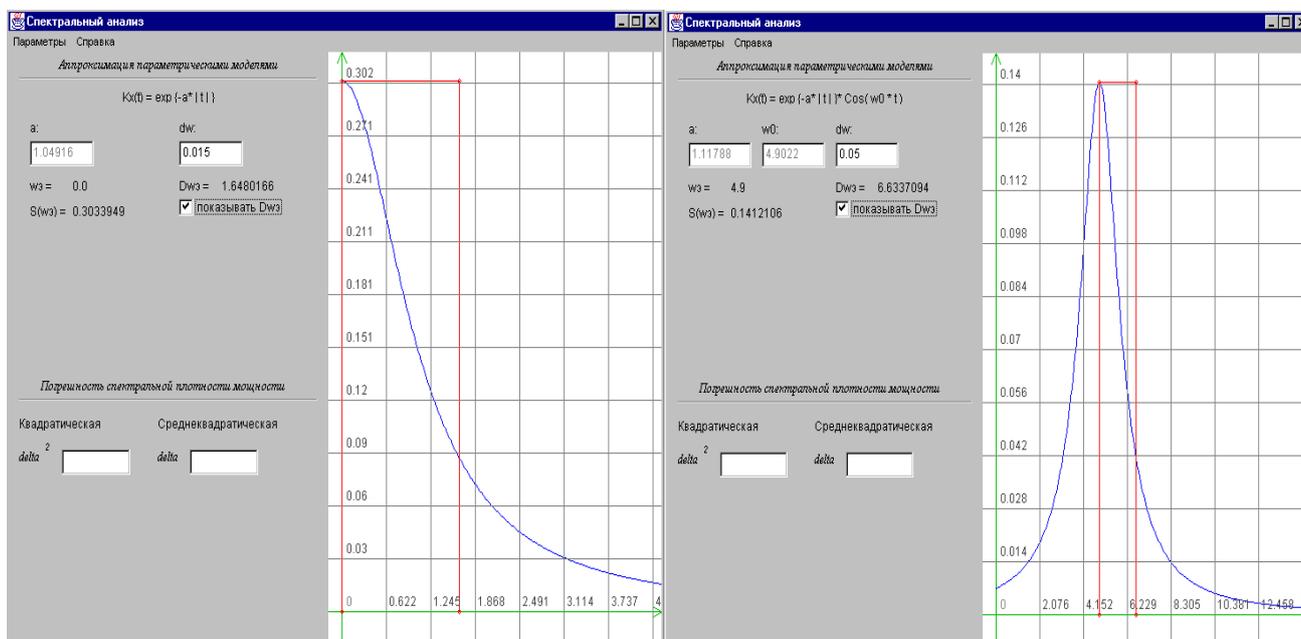
Понятие эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса позволяет разбить случайные процессы на два класса: узкополосные и широкополосные.

Узкополосным случайным процессом называется процесс, основная мощность которого сосредоточена вблизи какой-либо частоты ω_0 . Условие узкополосности записывается в виде: $\Delta\omega_3 / 2 \ll \omega_0$.

Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются **широкополосными**.

К узкополосным процессам относятся процессы, имеющие колебательную корреляционную функцию с показателем колебательности $\mu > 5$ (см. приложение П.16, модели 5-7).

К широкополосным процессам относятся все модели, представленные в приложении П.16, причем, для моделей 5-7 $\mu < 5$.



а) широкополосного процесса

б) узкополосного процесса

Рисунок 12.6. Эквивалентная ширина спектра мощности

В приложении П.20 приведены выражения эквивалентной ширины спектра мощности случайных процессов для типовых моделей.

Воспользовавшись понятием $\Delta\omega_3$, можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы, без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. Дисперсия выходного сигнала линейной динамической системы равна:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq 2S_x(\omega)_{\max} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\sigma_x^2 \Delta\omega_c}{\Delta\omega_3} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (12.18)$$

где $\Delta\omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)|_{\max}^2}$ - полоса пропускания линейной динамической системы.

Из выражения (12.18) видно, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса.

Исследования показали, что

$$\begin{cases} \Delta\omega_c \tau_k^{(2)} = \pi/2; \\ \Delta\omega_c \tau_{и}^{(2)} = \pi/2, \end{cases} \quad (12.19)$$

где $\tau_{и}^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} h(\tau) d\tau}{h(\tau)_{\max}}$ - длительность импульсной характеристики линейной динамической системы.

Эти выражения называются **соотношениями неопределённости** для сигнала и для системы.

Воспользовавшись соотношениями неопределённости, выражение (12.19) преобразуем к виду:

$$D_y \leq \sigma_x^2 |W(j\omega)|_{\max}^2 \frac{\tau_k^{(2)}}{\tau_{и}^{(2)}}. \quad (12.20)$$

Отсюда видно, что дисперсия выходного процесса линейной динамической системы, независимо от вида спектральной плотности мощности, не превышает величины, пропорциональной отношению интервала корреляции к длительности импульсной характеристики.

Таким образом, возможна оценка сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы с использованием обобщенных характеристик, определенных как во временной, так и в частотных областях. Это обстоятельство значительно упрощает теоретические исследования и позволяет определить требования к системе, гарантирующие обеспечение допустимых погрешностей.

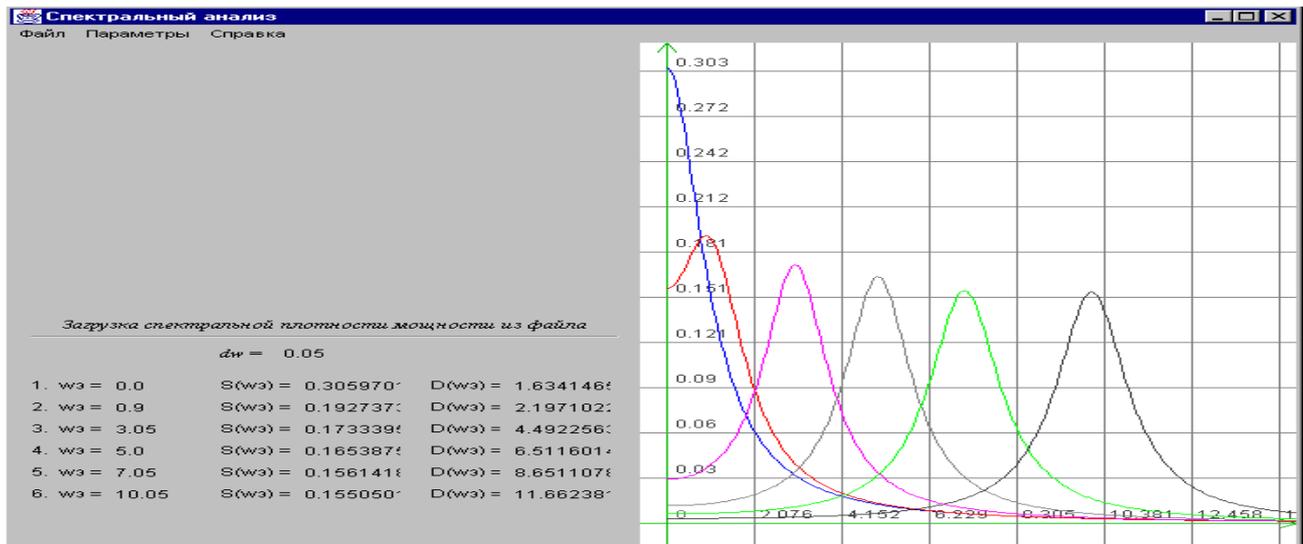
В [14] приведено еще одно соотношение неопределенности, используемое в приложениях:

$$\tau_k^{(4)} \frac{\Delta\omega_3^2}{\Delta\omega_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2}, \quad (12.21)$$

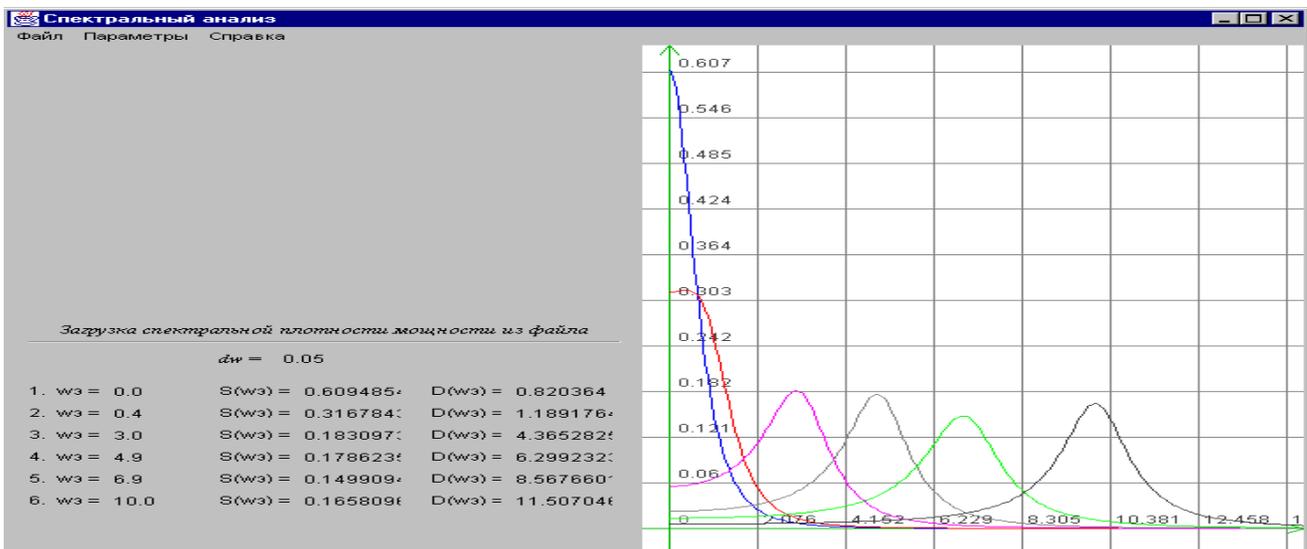
где

$$\Delta\omega_2 = \frac{\int_0^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega}{S_x^2(\omega)_{\max}}.$$

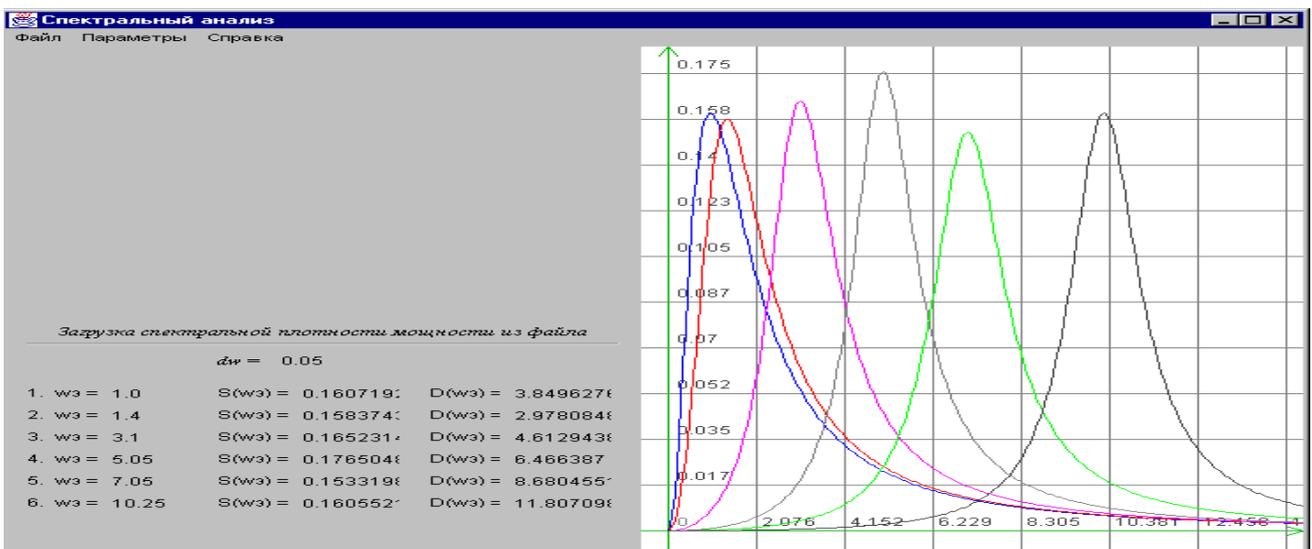
Спектральные плотности мощности колебательных моделей представлены на рис. 12.6 и 12.7.



$$a) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \cos \omega_0 \tau, \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$b) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$b) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$

Рисунок 12.7. Спектральные плотности мощности колебательных моделей

При решении ряда прикладных задач возникает необходимость оценки частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности ω_3 . Её можно определить в результате решения уравнения:

$$S'_x(\omega) = 0. \quad (12.21)$$

Результаты решения этого уравнения и $S_x(\omega_3)$, в виду громоздкости таблицы, представлены в приложении П.20.

12.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание у преподавателя.
2. Определить теоретические (ожидаемые) значения интервалов корреляции. Результаты занести в таблицу.
3. Сгенерировать ПСП с заданным (монотонным) видом корреляционной функции для $N=5000$, $\delta = 0,02$.
4. Оценить корреляционную функцию.
5. Найти параметры аппроксимирующего выражения корреляционной функции и среднеквадратическую погрешность аппроксимации.
6. По найденным параметрам аппроксимирующего выражения определить интервалы корреляции, эквивалентную ширину спектра мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности. Результаты занести в таблицу.
7. Пункты 3-6 повторить 29 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение оценки найденных параметров. Найти погрешность от смещенности и статистическую погрешность оценки корреляционно-спектральных характеристик.
8. Пункты 1-7 повторить для заданной колебательной модели.
9. Привести экранные формы аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями.
10. Сделать выводы.

12.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Теоретические значения корреляционно-спектральных характеристик.
3. Результаты моделирования и расчёта корреляционно-спектральных характеристик, представленные в табличной форме.
4. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра.
5. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже.

1. Сгенерировать ПСП с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, $N=5000$, $\delta = 0,02$, $\alpha = 1$.
Для этого случая интервал дискретизации равен $\Delta\tau = 0,4$, $J_{\max} = 13$.

Оценить интервалы корреляции и эквивалентную ширину спектра мощности

ПСП, а также погрешность от смещенности $\gamma_{см} = \frac{M[\hat{\Theta}] - \Theta}{\Theta}$ и статистическую по-

грешность $\gamma_{ст} = \frac{\sigma[\hat{\Theta}]}{\Theta}$.

Теоретические значения корреляционно-спектральных характеристик приведены в таблице 12.1.

Таблица 12.1

$\tau_{k \max}$	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$	$\Delta\omega_3$
$4,75/\alpha$	$2/\alpha$	$5/4\alpha$	$\pi\alpha/4$
4,75	2	1,25	0,7854

Результаты вычислительного эксперимента

Таблица 12.2

N	α	δ	$\tau_{k \max}$	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$	$\Delta\omega_3$
1	1,0015	0,0098	4,7429	1,9970	1,2481	0,7866
2	0,8838	0,048	5,3745	2,2630	1,4143	0,6941
3	1,0045	0,0318	4,7287	1,9910	1,2444	0,7889
4	1,015	0,0235	4,6798	1,9704	1,2315	0,7972
5	1,0301	0,0085	4,6112	1,9416	1,2135	0,8090
6	1,0249	0,0213	4,6346	1,9514	1,2196	0,8050
7	1,0012	0,0104	4,7443	1,9976	1,2485	0,7863
8	0,9668	0,0187	4,9131	2,0687	1,2929	0,7593
9	1,1277	0,0814	4,2121	1,7735	1,1085	0,8857
10	1,0558	0,047	4,4990	1,8943	1,1839	0,8292
11	1,0349	0,0161	4,5898	1,9326	1,2078	0,8128
12	1,1139	0,0114	4,2643	1,7955	1,1222	0,8749
13	1,0258	0,0098	4,6305	1,9497	1,2186	0,8057
14	1,0549	0,0313	4,5028	1,8959	1,1849	0,8285
15	1,0753	0,0207	4,4174	1,8599	1,1625	0,8445
16	0,9952	0,0269	4,7729	2,0096	1,2560	0,7816
17	0,978	0,0258	4,8569	2,0450	1,2781	0,7681
18	1,0583	0,0146	4,4883	1,8898	1,1811	0,8312
19	1,0596	0,0117	4,4828	1,8875	1,1797	0,8322
20	0,9715	0,0196	4,8893	2,0587	1,2867	0,7630
21	1,0575	0,0192	4,4917	1,8913	1,1820	0,8306
22	1,007	0,0056	4,7170	1,9861	1,2413	0,7909
23	1,0261	0,009	4,6292	1,9491	1,2182	0,8059
24	0,9116	0,0219	5,2106	2,1939	1,3712	0,7160
25	0,9647	0,0086	4,9238	2,0732	1,2957	0,7577
26	1,0685	0,0154	4,4455	1,8718	1,1699	0,8392
27	1,0448	0,0157	4,5463	1,9142	1,1964	0,8206
28	1,0525	0,0454	4,5131	1,9002	1,1876	0,8266
29	0,9881	0,009	4,8072	2,0241	1,2651	0,7761

Продолжение таблицы 12.2

Мат. ожидан.	1,0207	0,0220	4,6662	1,9647	1,2279	0,8016
Дисперсия	0,0028	0,0003	0,0622	0,0106	0,0042	0,0017
Ско	0,0528	0,0163	0,2493	0,1032	0,0645	0,0407
Теор. значен.	1,0000		4,75	2	1,25	0,7854
$\gamma_{см}$	0,0207		-0,0176	-0,0176	-0,0176	0,0207
$\gamma_{ст}$	0,0528		0,0525	0,0516	0,0516	0,0518

2. Сгенерировать ПСП с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$, $N=5000$,

$\delta = 0,02$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 5$.

Интервал дискретизации для этого случая равен $\Delta\tau = 0,078$, $J_{max} = 38$.

Оценить интервалы корреляции и эквивалентную ширину спектра мощности ПСП, а также погрешность от смещенности и статистическую погрешность.

Теоретические значения корреляционно-спектральных характеристик приведены в таблице 12.3.

Таблица 12.3

τ_{kmax}	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$	ω_3	$\Delta\omega_3$
$3/\alpha$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	
3	0,0769	0,2885	4,8990	6,4698

Результаты вычислительного эксперимента

Таблица 12.4

N	α	ω_0	δ	τ_{kmax}	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$	ω_3	$\Delta\omega_3$
1	1,0992	4,9705	0,0467	2,7293	0,0065	0,2699	4,85	6,496
2	0,9907	4,8986	0,0456	3,0282	0,0010	0,2920	4,8	6,2951
3	1,0491	4,9672	0,0422	2,8596	0,0031	0,2790	4,85	6,4276
4	1,0678	4,8833	0,0541	2,8095	0,0072	0,2769	4,75	6,3508
5	1,0912	5,1028	0,0944	2,7493	0,0018	0,2692	5	6,6391
6	1,0072	4,9383	0,0237	2,9786	0,0010	0,2879	4,85	6,3689
7	1,0112	4,9708	0,0579	2,9668	0,0003	0,2865	4,85	6,376
8	1,1479	4,8813	0,0265	2,6135	0,0130	0,2634	4,75	6,4586
9	0,9708	4,8903	0,0486	3,0902	-0,0002	0,2966	4,8	6,267
10	0,9136	4,9752	0,079	3,2837	-0,0069	0,3093	4,9	6,2883
11	1,1423	5,1123	0,0701	2,6263	0,0050	0,2605	5	6,709
12	1,0159	5,0705	0,0775	2,9530	-0,0023	0,2841	4,95	6,4842
13	0,9796	4,9994	0,0252	3,0625	-0,0028	0,2930	4,9	6,3819
14	0,95	4,9274	0,0596	3,1579	-0,0028	0,3009	4,85	6,2887
15	1,1268	4,9901	0,084	2,6624	0,0078	0,2649	4,85	6,5341
16	0,9753	4,9676	0,0334	3,0760	-0,0022	0,2944	4,85	6,3251
17	0,9547	4,908	0,0487	3,1423	-0,0019	0,3001	4,8	6,2449
18	0,9709	4,9259	0,0318	3,0899	-0,0013	0,2960	4,85	6,3181
19	1,0489	5,0216	0,0531	2,8601	0,0014	0,2782	4,9	6,4787
20	1,0321	4,9858	0,0324	2,9067	0,0013	0,2820	4,9	6,4545

21	1	5,0968	0,0676	3,0000	-0,0042	0,2871	5	6,5126
22	1,0262	5,0002	0,025	2,9234	0,0005	0,2830	4,9	6,4468
23	1,0725	5,0114	0,0485	2,7972	0,0034	0,2739	4,9	6,511
24	1,01	5,112	0,0219	2,9703	-0,0039	0,2847	5	6,5269
25	1,0299	5,0105	0,0767	2,9129	0,0004	0,2821	4,9	6,4521
26	1,0418	5,1153	0,0363	2,8796	-0,0018	0,2782	5	6,5713
27	1,0507	5,0948	0,036	2,8552	-0,0006	0,2768	5	6,5831
28	0,7376	4,9728	0,0337	4,0672	-0,0199	0,3681	4,9	6,0336
29	0,9721	4,9528	0,0612	3,0861	-0,0020	0,2953	4,85	6,3203
Мат. ожидан.	1,0168	4,9915	0,0497	2,9703	0,0783	0,2867	4,8862	6,4188
Дисперсия	0,0062	0,0054	0,0004	0,0711	0,0028	0,0004	0,0055	0,0191
Ско	0,0787	0,0735	0,0200	0,2666	0,0057	0,0197	0,0742	0,1382
Теор. значен.	1,0000	5,0000		3	0,0769	0,2885	4,8990	6,4698
γ_{CM}	0,0168	-0,0017		-0,0099	0,0186	-0,0063	-0,0026	-0,0079
γ_{CT}	0,0787	0,0147		0,0889	0,0741	0,0685	0,0151	0,0214

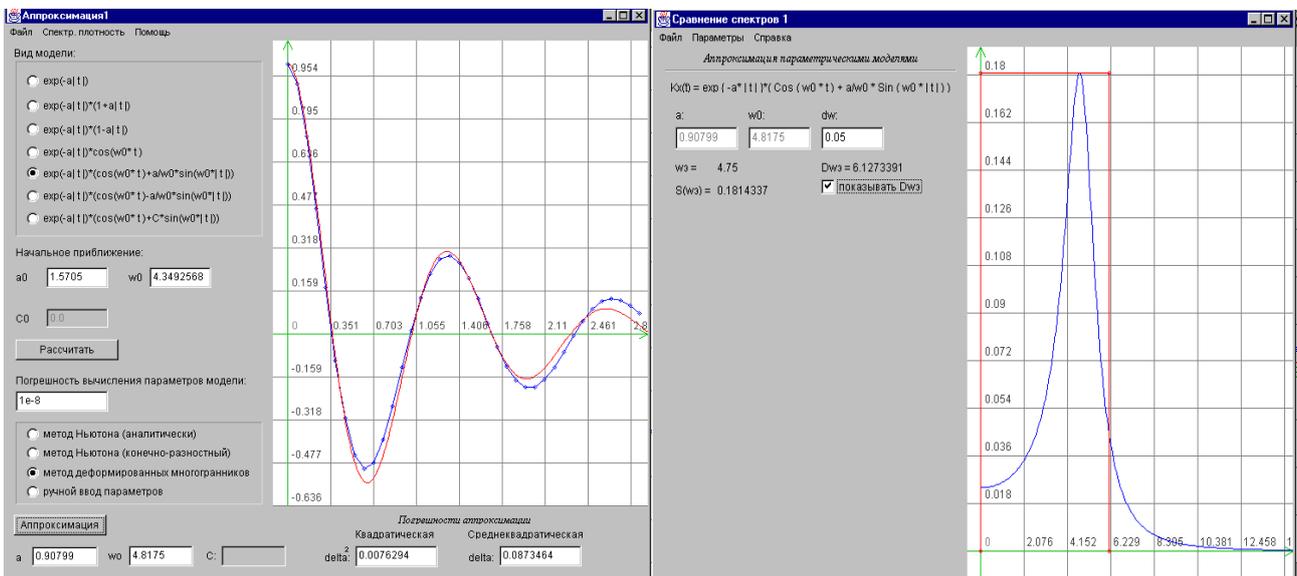


Рисунок 12.8. Примеры экранных форм

12.4. Контрольные вопросы

1. Какие характеристики относятся к обобщенным корреляционным характеристикам?
2. Какие характеристики относятся к обобщенным спектральным характеристикам?
3. В чём заключается физический смысл интервалов корреляции?
4. В чём заключается физический смысл показателя колебательности?
5. Назовите методы определения эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса.
6. Какие процессы относятся к широкополосным случайным процессам?
7. Какие процессы относятся к узкополосным случайным процессам?
8. В чём заключается специфика определения эквивалентной ширины спектра мощности узкополосного процесса?

13. АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в оценке обобщенных корреляционно-спектральных характеристик с использованием ортогональных функций Лагерра.

13.1. Теоретические основы лабораторной работы

Определив параметры модели корреляционной функции в виде

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha), \quad (13.1)$$

и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти их аналитические выражения, содержащие только параметры модели.

Так выражение для оценки $\tau_k^{(2)}$ примет вид:

$$\epsilon_k^{(2)} \approx \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^{\infty} L_k(\tau) d\tau. \quad (13.2)$$

Выполнив все необходимые преобразования, с учётом свойств ортогональных функций Лагерра, получим выражение для оценки интервала корреляции:

$$\epsilon_k^{(2)} \approx \frac{2}{\alpha \sigma_x^2} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k. \quad (13.3)$$

Конечное число членов разложения ряда (13.1) m приводит к погрешности от смещенности в определении интервала корреляции, которую оценим в соответствии с выражением:

$$\gamma_{см} = \frac{\epsilon_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}. \quad (13.4)$$

Рассмотрим пример определения интервала корреляции для корреляционной функции $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|}$:

$$\epsilon_k^{(2)} = \frac{1 - \left(\frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda}\right)^{m+1}}{\lambda}. \quad (13.5)$$

Отсюда погрешность от смещенности равна:

$$\gamma_{см} = -\left(\frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda}\right)^{m+1}. \quad (13.6)$$

Анализ полученного выражения показывает, что погрешность от смещенности зависит от числа членов разложения ряда m , величины параметра α . При произвольной величине параметра α погрешность от смещенности может принимать достаточно большие значения. Рассмотрим два алгоритма определения параметра α :

$\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$ и $\beta_{m+1} = 0$. Решения этих двух уравнений совпадают: $\alpha = 2\lambda = \frac{2}{\tau_k^{(2)}}$. Под-

ставив полученное решение в (13.6), увидим, что погрешность от смещенности равна нулю.

Однако в общем случае, погрешность от смещенности имеет место. Так, для корреляционной функции $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau|)$ и параметра α , определенного в результате уравнения $\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$,

$$\gamma_{см} = -\frac{(m-1)}{2(\sqrt{2}+1)^{m+1}} (-1)^m. \quad (13.7)$$

Отсюда видно, что погрешность от смещенности равна нулю, если $m=1$ или $m \rightarrow \infty$.

Решение задачи для колебательной модели корреляционной функции: $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, - показывает, что выражения для оценки погрешности от смещенности различны для четных $m=2n$ и нечетных $m=2n+1$ и, кроме того, зависят от показателя колебательности μ . Так для $m=2n$

$$\gamma_{см} = (-1)^{n+1} \mu \left(\frac{\mu}{1 + \sqrt{1 + \mu^2}} \right)^{2n+1}, \quad (13.8)$$

а для $m=2n+1$

$$\gamma_{см} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\mu}{1 + \sqrt{1 + \mu^2}} \right)^{2n+1}. \quad (13.9)$$

Анализ погрешности от смещенности показывает, что для повышения точности оценки интервала корреляции целесообразнее выбирать нечетное число членов разложения ряда.

Аналогичные выводы можно сделать, проанализировав погрешности от смещенности оценки интервалов корреляции других колебательных моделей корреляционных функций.

Таким образом, при оценке интервала корреляции по алгоритму (13.3) для обеспечения допустимых погрешностей от смещенности необходимо выбирать величину параметра функции Лагерра либо в соответствии с алгоритмом $\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$, либо $\beta_{m+1} = 0$. При анализе же корреляционных функций с большим показателем колебательности с точки зрения уменьшения этой погрешности необходимо выбирать нечетное число членов разложения ряда (13.1).

Воспользовавшись выражением для определения погрешности аппроксимации корреляционной функции рядом (13.1)

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, \quad (13.10)$$

можно с абсолютной погрешностью $\frac{\Delta}{\sigma_x^4}$ в качестве оценки интервала корреляции принять выражение:

$$\epsilon_k^{(4)} \approx \frac{1}{\alpha \sigma_x^4} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (13.11)$$

Эта оценка будет тем точнее, чем меньше квадратическая погрешность аппроксимации корреляционной функции моделью вида (13.1). Заметим, что анализ этой погрешности и рекомендации по выбору оптимальных значений параметров модели представлен в разделе 3 [1].

При аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра можно показать [1], что момент n-го порядка равен

$$\mu_n = \varphi_n(\alpha) \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{nk} \beta_k. \quad (13.12)$$

Рекомендации по выбору параметров модели α , m и β_k аналогичны рекомендациям при определении интервала корреляции $\hat{\tau}_k^{(2)}$. Выражения для первых четырёх моментов представлены в таблице 13.1.

Таблица 13.1

μ_n	$\varphi_n(\alpha)$	c_{nk}
μ_0	$2/\alpha$	1
μ_1	$4/\alpha^2$	$1+2k$
μ_2	$16\alpha^3$	$1+2k+2k^2$
μ_3	$32/\alpha^4$	$3+8k+6k^2+4k^3$

При аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра моделью

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,\pi} 1(\tau) L_k(\tau, \alpha_1) + \sum_k^{m2} \beta_{k,\lambda} 1(-\tau) L_k(-\tau, \alpha_2) \quad (13.13)$$

выражения для определения интервалов корреляции примут вид:

$$\hat{\tau}_{kxy}^{(2)} \approx \frac{2}{\alpha_1 \sigma_x^2} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} + \frac{2}{\alpha_2 \sigma_x^2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda}; \quad (13.14)$$

$$\epsilon_{kxy}^{(4)} \approx \frac{1}{\alpha_1 \sigma_x^4} \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,\pi}^2 + \frac{1}{\alpha_2 \sigma_x^4} \sum_{k=0}^{m2} \beta_{k,\lambda}^2. \quad (13.15)$$

Выражения для оценки моментов взаимных корреляционных функций при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра примут вид:

$$\mu_{nxy} = \varphi_n(\alpha_1) \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k c_{nk} \beta_{k,\pi} + \varphi_n(\alpha_2) \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k c_{nk} \beta_{k,\lambda}. \quad (13.16)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение П.25).

13.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание у преподавателя.
2. Определить теоретические (ожидаемые) значения интервалов корреляции. Результаты занести в таблицу.
3. Сгенерировать процесс с заданным видом корреляционной функции $N = 5000, \delta = 0,02$.
4. Установить задержку сигнала во второй экранной форме равной нулю.
5. Оценить корреляционную функцию.
6. Найти параметры аппроксимирующего выражения корреляционной функции в ортогональном базисе Лагерра и среднеквадратическую погрешность аппроксимации.
7. По найденным параметрам аппроксимирующего выражения определить интервалы корреляции $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$. (Определенные значения интервалов корреляции для автокорреляционной функции необходимо разделить на 2). Результаты занести в таблицу.
8. Пункты 3-7 повторить 29 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение оценки найденных параметров. Найти погрешность от смещенности и статистическую погрешность оценки параметров.
9. Пункты 3-8 повторить для заданной взаимной корреляционной функции.
10. Сделать выводы.

13.3. Содержание отчёта

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже.

1. Сгенерировать ПСП с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, $N=5000, \delta = 0,02, \alpha = 1$.

Для этого случая интервал дискретизации равен $\Delta\tau = 0,4, J_{\max} = 13$.

Теоретические значения интервалов корреляции приведены в таблице 13.2.

Таблица 13.2

$\tau_{k \max}$	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$	$\Delta\omega_3$
$4,75 / \alpha$	$2 / \alpha$	$5 / 4\alpha$	$\pi\alpha / 4$
4,75	2	1,25	0,7854

Результаты вычислительного эксперимента

Таблица 13.3

N	α	m	δ	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	8,5489	25	0,0754	0,0103	0,2795
2	8,4114	25	0,0773	0,0240	0,2689
3	8,4253	25	0,0758	0,0168	0,2515
4	8,2071	24	0,0794	0,0421	0,2351
5	8,4646	24	0,0736	0,0224	0,2686
6	8,23	24	0,0773	0,0461	0,2369
7	8,4141	24	0,0788	0,0533	0,2627
8	8,4589	25	0,0784	0,0202	0,2753
9	8,3944	24	0,0738	0,0242	0,2632
10	8,5059	24	0,0761	0,0454	0,2514
11	8,1544	26	0,0755	0,0450	0,2557
12	8,3423	24	0,0755	0,0243	0,2515
13	8,3812	25	0,0755	0,0243	0,2515
14	8,3887	24	0,0734	0,0310	0,2732
15	8,3168	25	0,0772	0,0244	0,2326
16	8,1962	25	0,0743	0,0588	0,2907
17	7,9339	26	0,0786	0,0597	0,2252
18	8,3964	24	0,0754	0,0075	0,2561
19	8,5213	23	0,0773	0,0381	0,2459
20	8,4043	25	0,0761	0,0290	0,2631
21	8,2854	25	0,0755	0,0040	0,2513
22	8,3188	24	0,0789	0,0203	0,2485
23	8,4267	24	0,0734	0,0573	0,2680
24	8,3468	25	0,0835	-0,0056	0,2608
25	8,3904	24	0,0748	0,0409	0,2571
26	8,1377	25	0,0720	0,0596	0,2826
27	8,1008	26	0,0754	0,0584	0,2558
28	8,3209	25	0,0769	0,0197	0,2388
29	8,5598	24	0,0743	0,0188	0,2955
Мат. ожидан.	8,3443	24,5862	0,0762	0,0317	0,2585
Дисперсия	0,0206	0,5369	0,0000	0,0003	0,0003
Ско	0,1434	0,7328	0,0023	0,0182	0,0169
Теор. знач.	8,3923			0,0769	0,2885
$\gamma_{см}$	-0,0057			-0,9588	-0,1040
$\gamma_{ст}$	0,0172			0,5740	0,0654

13.4. Контрольные вопросы

1. В чём заключается специфика оценки корреляционных характеристик взаимных корреляционных функций?
2. От каких параметров модели зависит погрешность оценки корреляционных характеристик?
3. Какой интервал корреляции целесообразно определять для колебательных моделей корреляционных функций?

14. АППРОКСИМАТИВНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Цель работы: приобретение практических навыков при проведении корреляционно-спектрального анализа экспериментальных данных с использованием параметрических моделей и ортогональных функций Лагерра.

14.1. Теоретические основы лабораторной работы

При решении самых разнообразных научно-исследовательских и инженерных задач исследователю приходится находить аналитические модели корреляционных функций и спектральных плотностей мощности. Специфика корреляционно-спектрального анализа в этом случае заключается в том, что исследователь априори не знает аналитический вид анализируемых функций, и его необходимо определить. Т.е. предварительно необходимо решить задачу идентификации. В случае авто корреляционного анализа можно условно выделить два случая:

1. вид аналитической модели можно определить с помощью фазового портрета;
2. вид аналитической модели с помощью фазового портрета определить невозможно.

В первом случае необходимо определить параметры выбранной модели, удовлетворяющей минимуму погрешности аппроксимации (см. лабораторную работу 6).

Во втором – либо определить параметры близких по виду моделей и выбрать ту, которая аппроксимирует корреляционную функцию с наименьшей погрешностью, либо определить параметры модели в виде ряда по ортогональной системе функций, например Лагерра (см. лаб. работу 7).

В случае анализа взаимных корреляционных функций из-за большого разнообразия взаимных корреляционных функций задача выбора аналитической модели затруднена. В этом случае наиболее часто модель представляют в виде ортогонального ряда.

Рассмотрим в качестве примера задачу определения параметров модели при обработке результатов физического эксперимента (см. рис.14.1). По внешнему виду экспериментальные данные похожи на график взаимной корреляционной функции.

В общем виде представим модель в виде:

$$K_{axy}(\tau) = K_{хуп}(\tau - \tau_m)l(\tau - \tau_m) + K_{хул}(\tau_m - \tau)l(\tau_m - \tau). \quad (14.1)$$

Заметим, что правая и левая ветви могут иметь разные модели.

Фазовый портрет правой ветви представлен на рис.14.2.

Отсюда видно, что фазовый портрет по виду похож на фазовый портрет модели:

$$K_{ax}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau| + \lambda^2 \tau^2 / 3). \quad (14.2)$$

Приведем результаты аппроксимации в графическом виде (см. рис. 14.3).

Параметры аппроксимирующих выражений других результатов эксперимента представлены в таблице 14.1.

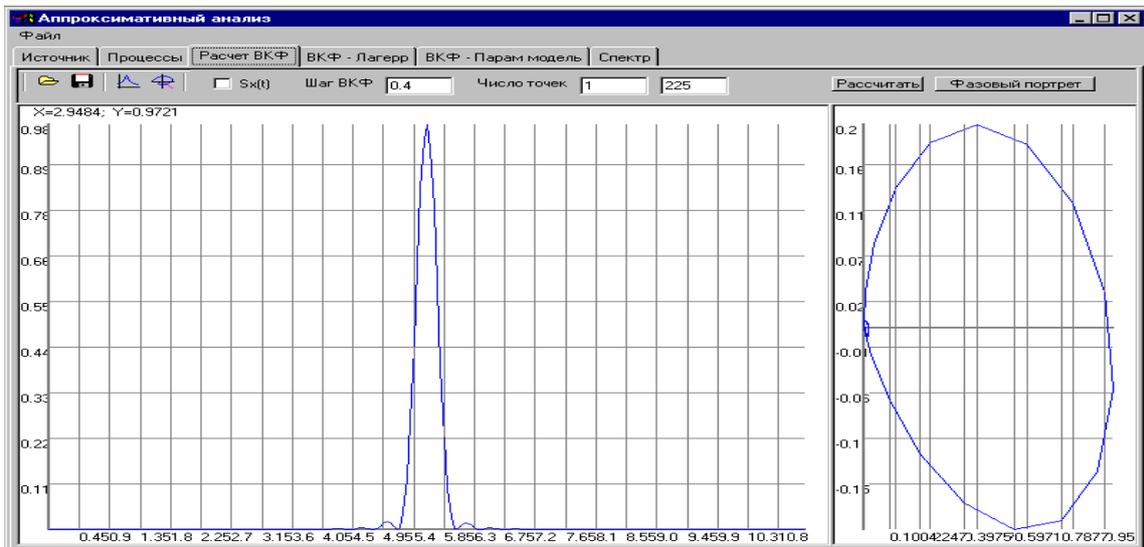


Рисунок 14.1. Пример результата физического эксперимента

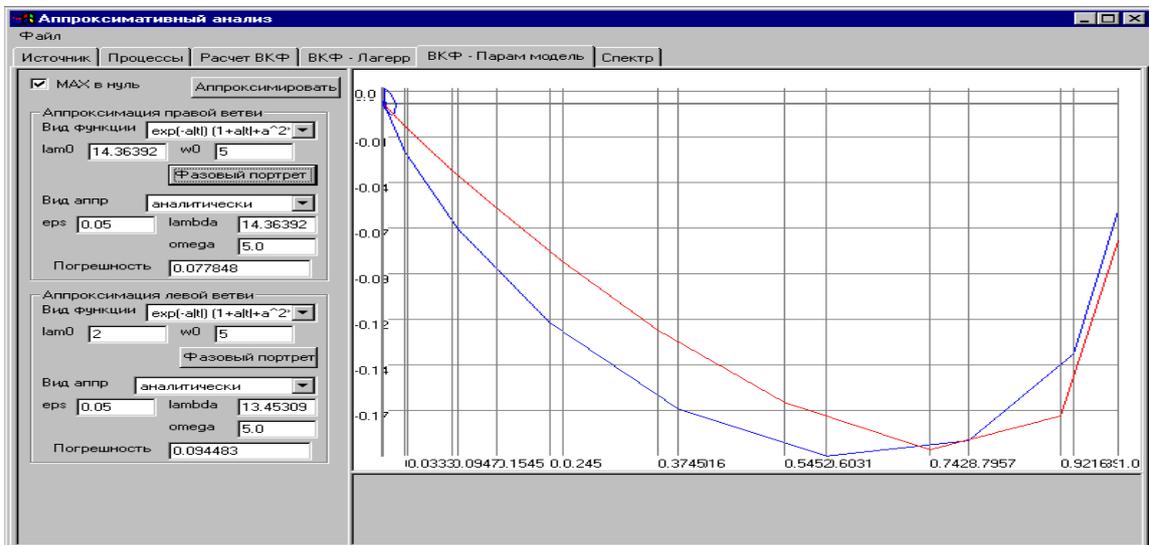


Рисунок 14.2. Пример фазового портрета результатов эксперимента

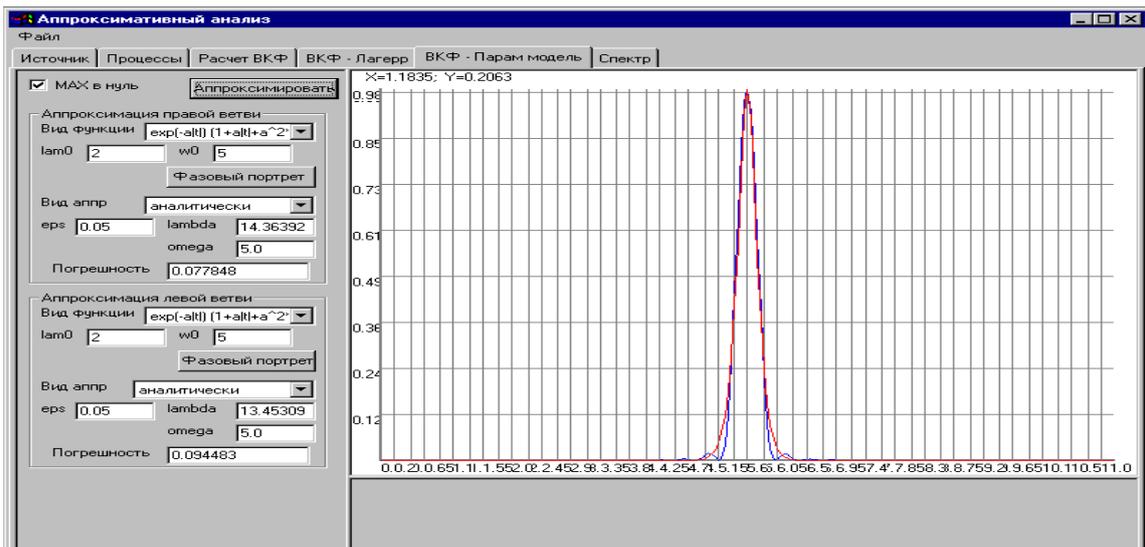


Рисунок 14.3. Результаты аппроксимации экспериментальных данных параметрической моделью $K_{ax}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)$

Результаты аппроксимации параметрической моделью

Таблица 14.1

№	τ_m	λ_{Π}	δ_{Π}	λ_{Λ}	δ_{Λ}
1	5,589	14,3639	0,0778	13,4531	0,0945
2	5,5452	13,8021	0,0816	13,9678	0,0906
3	5,5013	9,7881	0,1010	11,3558	0,0732

Для сравнения приведем результаты аппроксимации экспериментальных данных ортогональными функциями Лагерра в виде

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,\Pi} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} \beta_{k,\Lambda} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_2). \quad (14.3)$$

Результаты аппроксимации ортогональными функциями Лагерра

Таблица 14.2

№	1	2	3
	Right wing:	Right wing:	Right wing:
alfa	8.3996	8.0258	5.5671
$\beta_{0,\Pi}$	0.937512	0.941132	0.971798
$\beta_{1,\Pi}$	0.21951	0.230349	0.25904
$\beta_{2,\Pi}$	-0.02667	-0.028351	3.9E-5
$\beta_{3,\Pi}$	-0.082581	-0.088087	-0.096864
$\beta_{4,\Pi}$	-0.047771	-0.055044	-0.088227
$\beta_{5,\Pi}$			-0.045785
δ	0,1067	0,0736	0,0736
	Left wing	Left wing	Left wing
alfa	7.7262	8.0694	6.6729
$\beta_{0,\Lambda}$	0.944121	0.939779	0.96052
$\beta_{1,\Lambda}$	0.239929	0.226224	0.195527
$\beta_{2,\Lambda}$	-0.01759	-0.01615	0.005582
$\beta_{3,\Lambda}$	-0.088543	-0.083896	-0.085819
$\beta_{4,\Lambda}$	-0.066621	-0.061202	-0.05997
$\beta_{5,\Lambda}$	-0.011296	-0.004754	-0.01584
δ	0,1042	0,0828	0,0828
τ_m	5.6	5.55	5.5
$K_{axy}(\tau_m)$	0.989983	0.985157	0.387291
m	112	111	110
$\tau_{kxy}^{(2)}$	0.359231	0.357948	0.519078
$\tau_{kxy}^{(4)}$	0.205226	0.204884	0.297812

Пример результатов аппроксимации ортогональными функциями Лагерра представлен на рис.14.4.

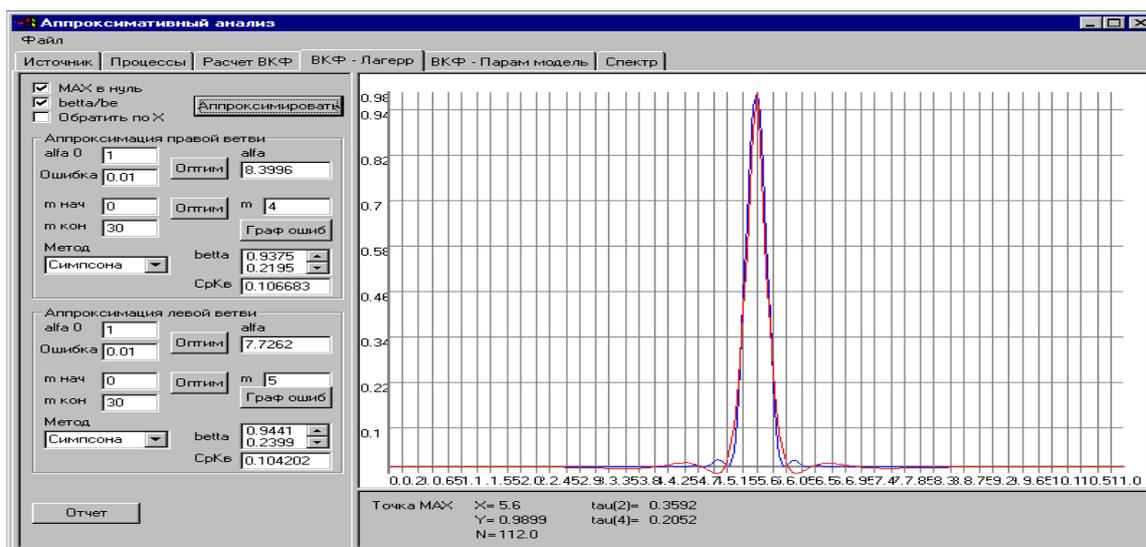


Рисунок 14.4. Результаты аппроксимации экспериментальных данных ортогональными функциями Лагерра

Из анализа результатов видно, что представленные экспериментальные данные лучше (в смысле квадратической погрешности) аппроксимируются параметрической моделью

$$K_{axy}(\tau) = K_{хуп}(\tau - \tau_m)l(\tau - \tau_m) + K_{хул}(\tau_m - \tau)l(\tau_m - \tau), \quad (14.4)$$

где

$$K_{хуп}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau - \tau_m|} \left(1 + \lambda|\tau - \tau_m| + \lambda^2(\tau - \tau_m)^2 / 3\right); \quad (14.5)$$

$$K_{хул}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau_m - \tau|} \left(1 + \lambda|\tau_m - \tau| + \lambda^2(\tau_m - \tau)^2 / 3\right), \quad (14.6)$$

параметры которой представлены в таблице 14.1.

Рассмотрим пример обработки данных эпизодических наблюдений на международной станции ВУ-5, расположенной в Борнхольмском бассейне, для анализа характерных особенностей годовой цикличности временных рядов поверхностной температуры воды, солёности, плотности и содержания кислорода [13].

Поверхностный горизонт был выбран потому, что именно в верхнем слое наиболее ярко прослеживается годовая ритмика, обусловленная солнечной радиацией для температуры воды, процессами ледотаяния и годовой ритмикой стока рек для солёности, а следовательно и для плотности, и тепловым режимом вод для кислорода.

В качестве исходных данных использованы все имеющиеся наблюдения, выполненные в период с 1909 по 1983 г.г. и опубликованные в различных литературных источниках, каталогах и рейсовых отчётах (см. таблицу 14.3).

Объём выборки и время измерения гидрологических параметров станции ВУ-5

Таблица 14.3

Глубина	0	10	20	40	50	60	70	80	90	Время измерения
O ₂	340	308	319	284	327	329	295	337	349	07.04.25 05.12.83
t ⁰ С	464	419	427	430	441	423	401	433	423	01.04.09 05.12.83

Продолжение таблицы 14.3

S	464	410	419	426	459	431	398	432	419	01.04.09 05.12.83
σ	257	240	253	261	264	263	241	262	243	01.04.09 27.09.83

Данные наблюдений сформированы по следующему принципу. В информационный массив включены все эпизодические наблюдения, дополненные выборкой из данных многосуточных станций. Из многосуточных наблюдений бралось только по одному наблюдению в каждые сутки, например, в срок, когда выполняется полный комплекс гидрологических и гидрохимических наблюдений. Если в течение суток наблюдения проводились дважды по разным судам, то использовались оба наблюдения. Так как время наблюдений внутри суток не различалось, все наблюдения были отнесены к середине суток.

Таким образом, для исследования годовой ритмики гидрологических и гидрохимических параметров в качестве основного интервала дискретности были выбраны 1 сутки, что могло бы дать 365 наблюдений в год при условии ежесуточных наблюдений всем научно-исследовательским флотом прибалтийских стран, что, естественно, нереально.

В соответствии с изложенным принципом формирования временных рядов к расчёту было принято 464 значения по температуре (t^0 C) и солёности (S), 340 – по кислороду (O_2) и 257 – по плотности (σ). Некоторое различие в количестве значений температуры, солёности и плотности связано с тем, что обычно в литературных источниках приводятся только первые две характеристики, а плотность, как их функция, рассчитывается по специальным таблицам. Мы не стали приводить недостающие расчёты, так как предлагаемая методика предназначена для расчёта вероятностных характеристик с неравномерной дискретностью.

Как правило, выводы о характере годовой ритмики гидрологических элементов по данным эпизодических наблюдений на сети станций открытого моря исследователь проводит по оценкам математического ожидания и дисперсии годового хода. Для этой цели ансамбль значений элементов сводится на годовой период, образуя «облако» точек, по которому тем или иным методом проводится кривая математического ожидания. Аналогично образуется «облако» квадратов значений, по которому вычисляется дисперсия годового хода.

Анализ видов графиков годового хода математического ожидания температуры и кислорода, опубликованных в различных источниках, свидетельствует о наличии ярко выраженной годовой ритмики, поэтому оценки среднего образа этих элементов, вычисленные различными авторами, близки между собой. Для плотности воды полной ясности о характере годовой ритмики из-за многофакторности механизма формирования годового хода и методических погрешностей расчёта вероятностных характеристик этого элемента нет. Так, встречающиеся в научной литературе оценки характеристик годового хода плотности воды рассчитываются, исходя из среднемесячных значений температуры и солёности, что даёт искаженное представление о режиме этого элемента. Существенные расхождения в оценках математического ожидания отмечается и в солёности. Здесь точки зрения на наличие годовой ритмики в колебаниях этого элемента порой принципиально отличаются. Следует отметить, что все вышесказанное относится к открытой части Балтийского моря. В прибрежной зоне

моря, где влияние режимобразующих факторов прослеживается четко, оценки среднего образа гидрологических и гидрохимических элементов достаточно однотипны.

Наиболее показательными характеристиками, свидетельствующими о наличии годовой ритмики в изменениях исследуемых элементов, является корреляционная функция $K_x(\tau)$ и спектральная плотность мощности $S_x(\tau)$. С учётом нерегулярности входных данных оценка корреляционной функции определялась с использованием интервальной корреляционной функции в соответствии с выражением (10.12), а спектральная плотность мощности – в соответствии с выражением (6.22) после аппроксимации корреляционной функции параметрической моделью.

Так как процесс идентификации корреляционных функций затруднен, в таблице 14.4 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций t^0 C, σ и O_2 различными колебательными моделями.

Результаты аппроксимации

Таблица 14.4

	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
t^0 C	$9 \cdot 10^{-4}$	0,0159	0,2522	$9,3 \cdot 10^{-4}$	0,0160	0,2335	$8,7 \cdot 10^{-4}$	0,0158	0,2743
σ	0,0030	0,0159	0,4638	0,0035	0,0165	0,4252	0,0029	0,0157	0,5323
O_2	0,0011	0,0155	0,3132	0,0012	0,0157	0,2871	0,0011	0,0154	0,3427

Анализ результатов, представленных в таблице 14.4, показывает, что:

1. как и следовало ожидать, погрешности аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями принимают большие значения, что объясняется малым объёмом выборки и непредсказуемым характером дискретизации;

2. погрешности аппроксимации принимают меньшие значения для t^0 C ($M=464$), большие - для O_2 ($M=341$) и самые большие – для σ ($M=257$);

3. несмотря на небольшой объём выборки, разброс параметров α и ω_0 у разных моделей небольшой, особенно у частоты колебания ω_0 , что объясняется большим значением показателя колебательности μ (см. таблицу 14.5);

4. из рассмотренных моделей корреляционных функций с точки зрения минимизации квадратической погрешности аппроксимации наиболее целесообразно выбирать модель в виде $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$;

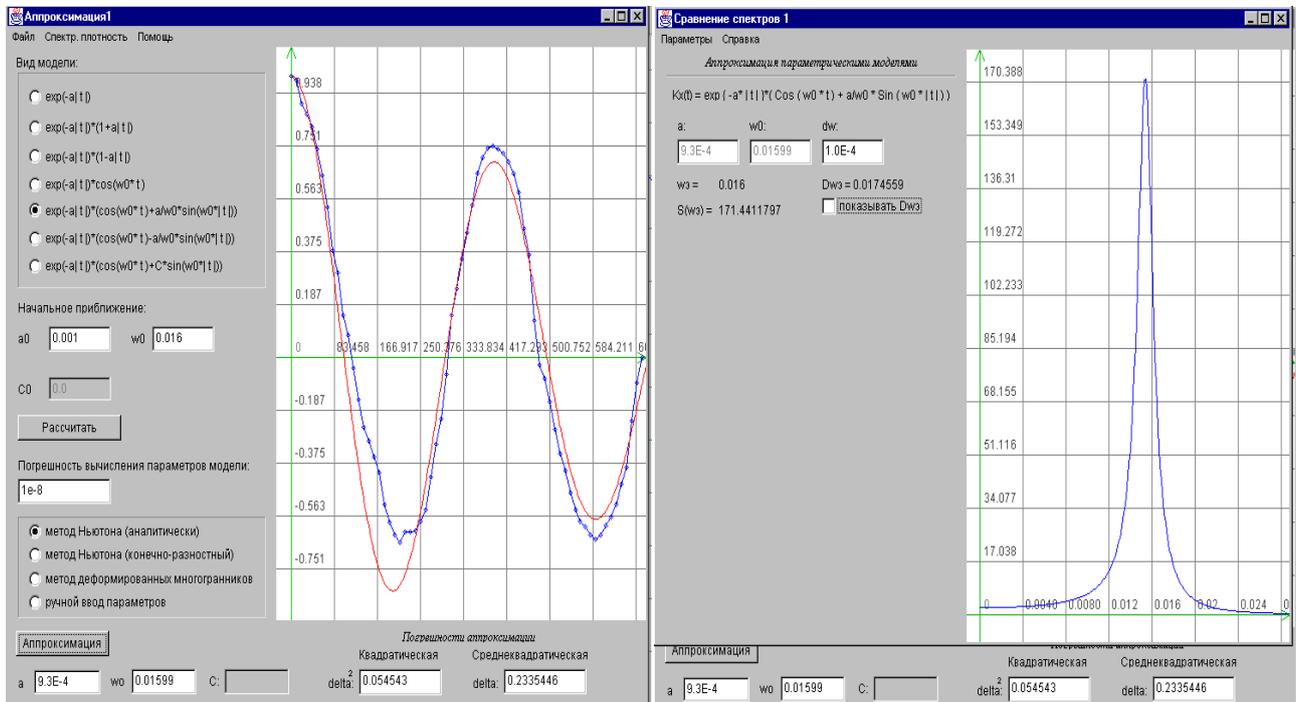
5. для рассмотренных гидрологических параметров характерна сезонная изменчивость (КФ имеет колебательный характер, т.е. присутствует косинусоидальная составляющая).

Значения показателя колебательности для гидрологических параметров

Таблица 14.5

	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$
t^0 C	17,667	17,194	18,161
σ	5,233	5,232	5,422
O_2	13,946	13,494	14,538

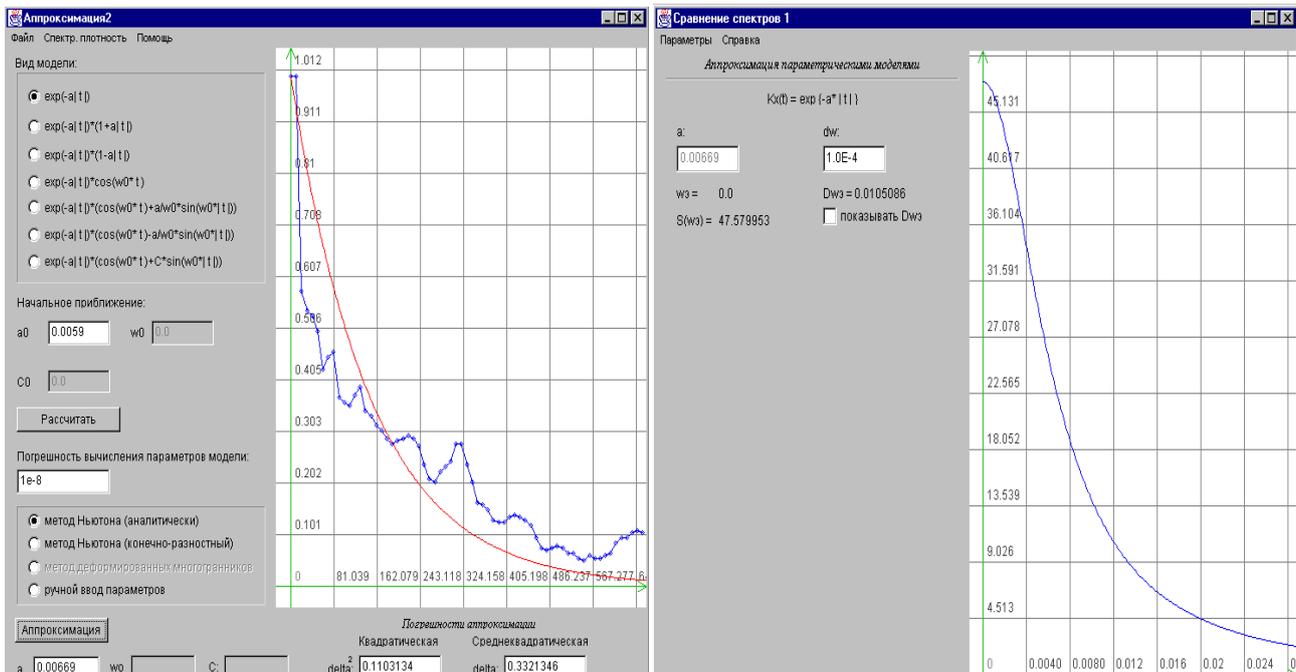
На рис. 14.5-14.8 приведены результаты аппроксимации нормированных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности температуры плотности воды и содержания кислорода моделью вида $e^{-\alpha|\tau|} (\cos\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|)$ и солёности - $e^{-\alpha|\tau|}$.



а) Корреляционная функция t^0 С

б) Спектральная плотность мощности t^0 С

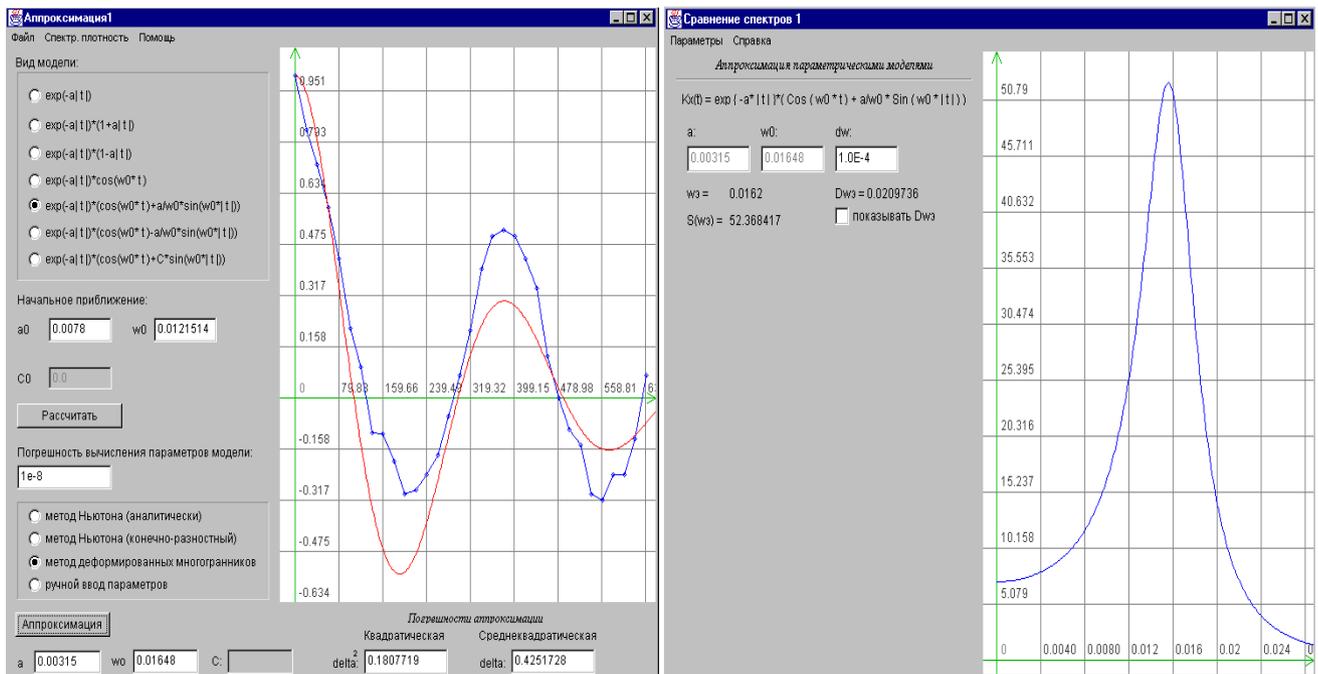
Рисунок 14.5. Результаты обработки временного ряда t^0 С



а) Корреляционная функция S

б) Спектральная плотность мощности S

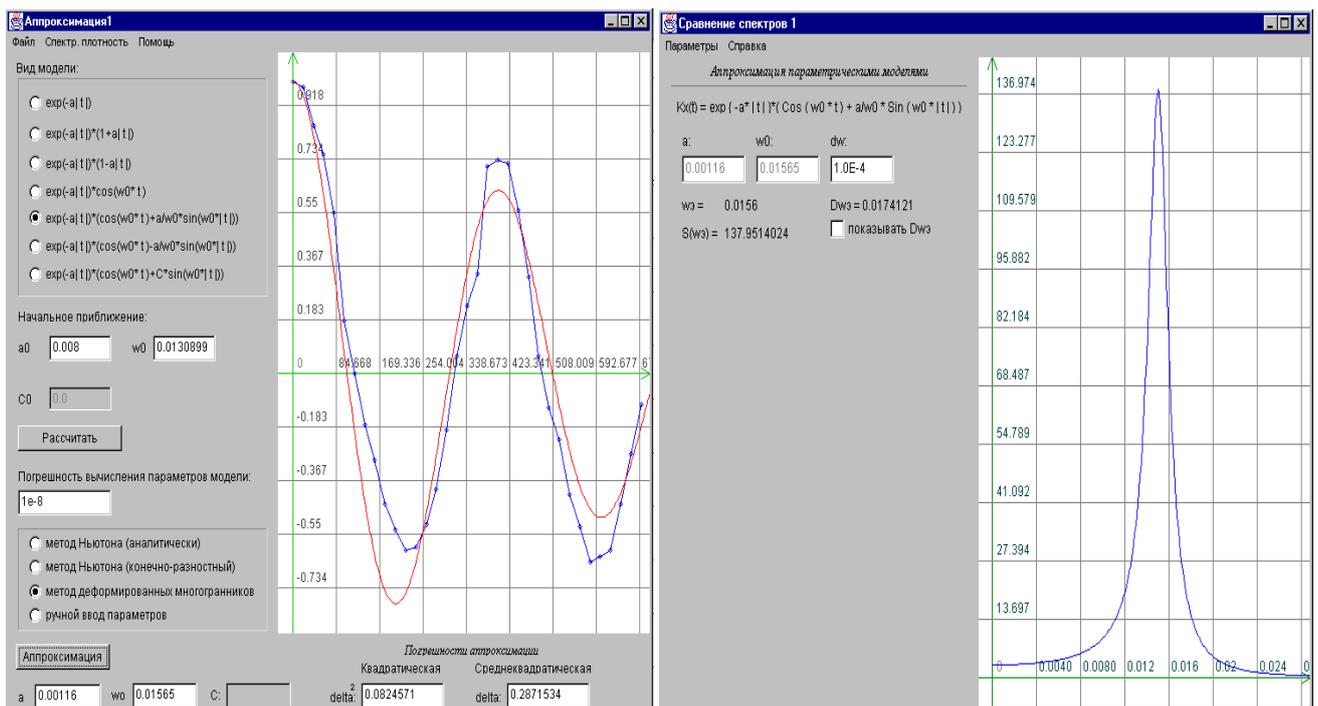
Рисунок 14.6. Результаты обработки временного ряда солёности



а) Корреляционная функция σ

б) Спектральная плотность мощности σ

Рисунок 14.7. Результаты обработки временного ряда плотности



а) Корреляционная функция O_2

б) Спектральная плотность мощности O_2

Рисунок 14.8. Результаты обработки временного ряда содержания кислорода

Из представленных на рис. 14.5-14.8 графиков (особенно для спектральных плотностей мощности) видно, что для температуры воды и содержания кислорода достаточно ярко выражен годовой период. Спектры температуры и содержания кислорода имеют острый пик на частоте годового периода ($T=1$ год), который свидетельствует о принадлежности этих процессов к классу периодически коррелирован-

ных и необходимости применения к исследованию этих элементов методов анализа периодически коррелированных случайных процессов ПКСП анализа [1].

Корреляционная функция солёности затухает без ярко выраженных биений с периодом 1 год, а спектр не имеет всплеска на частоте $\omega = 2\pi/1$ год. Если аппроксимировать корреляционную функцию солёности воды затухающей экспонентой $e^{-\alpha|\tau|}$, то $\alpha = 0,007$. Т.е. для солёности воды нет периодичности, называемой годовым ходом, но тем не менее масштаб изменчивости, равный одному году, существует. Такой вид корреляционной функции свидетельствует о перемодулированности годовой ритмики. Отсутствие пика на спектре солёности подтверждает интерпретацию о том, что изменчивость с годовым масштабом существует, но процесс нельзя отнести к классу периодически коррелированных. Поэтому применение методов ПКСП анализа к солёности воды в открытых районах Балтийского моря, удаленных от влияния режимобразующих факторов, имеющих годовую ритмику, не дадут физически правильной информации.

Относительно плотности морской воды следует отметить, что корреляционная функция и спектральная плотность мощности занимают промежуточное положение между температурой и солёностью (показатель колебательности равен $\mu = 5,232$) с наличием периода коррелированности $T=1$ год. Это связано с тем, что на формирование изменчивости плотности в поверхностном слое оказывает влияние температура воды, для которой характерна годовая ритмика.

Вместе с тем, географическое положение анализируемой станции ВУ-5 указывает и на влияние подтока солёных североморских вод, что и накладывает свой отпечаток на характер этих функций.

Рассматриваемую задачу можно решить, воспользовавшись аппроксимацией корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра. На рис. 14.9 представлены результаты аппроксимации корреляционных функций и спектральной плотности ортогональными функциями Лагерра.

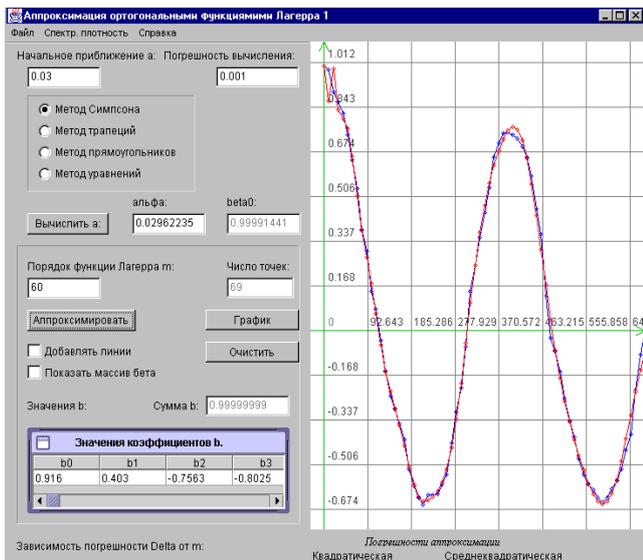
Анализ результатов показывает, что:

1. погрешность аппроксимации корреляционной функции меньше у ортогонального разложения;
2. ширина спектра меньше у параметрической модели;
3. частоты, соответствующие максимуму спектральной плотности мощности, практически совпадают (см. таблицу 14.6).

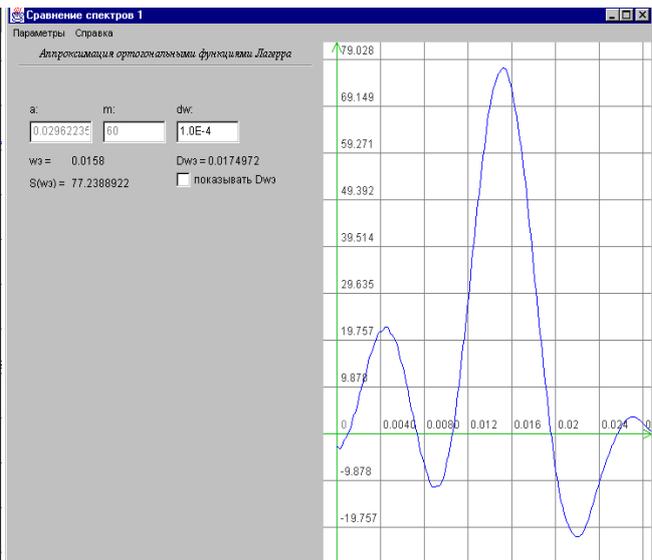
Экстремальные частоты спектральной плотности мощности

Таблица 14.6

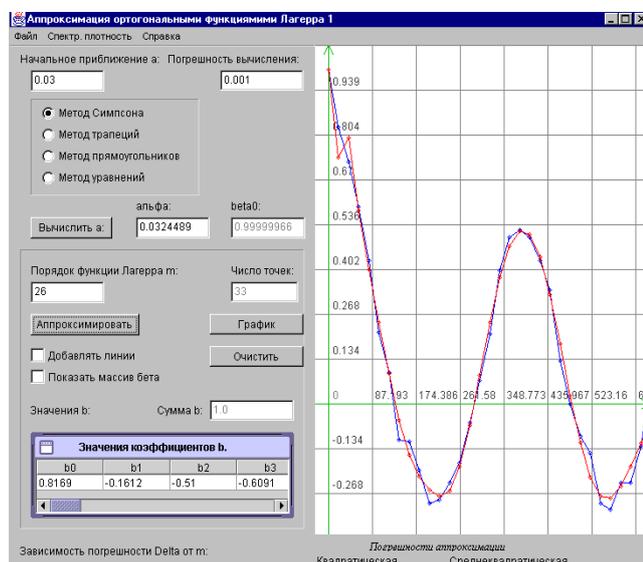
$\rho_x(\tau)$	$e^{-\alpha \tau }(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$		$\sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau)$	
	ω_3	δ	ω_3	δ
t^0 C	0,0160	0,2522	0,0157	0,0600
σ	0,0162	0,4638	0,0158	0,1082
O_2	0,0156	0,3132	0,0154	0,0984



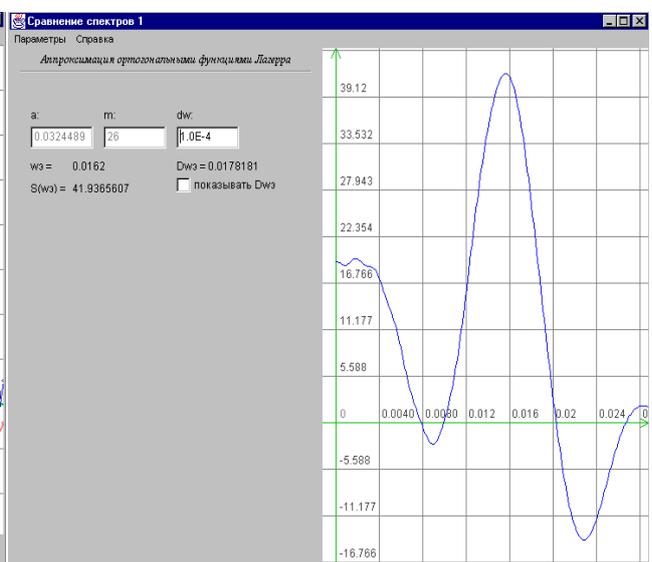
а) Корреляционная функция $t^0 C$



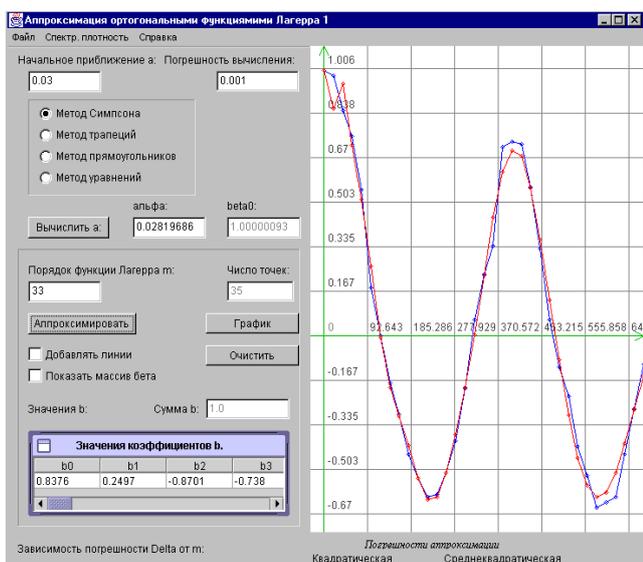
б) Спектральная плотность мощности $t^0 C$



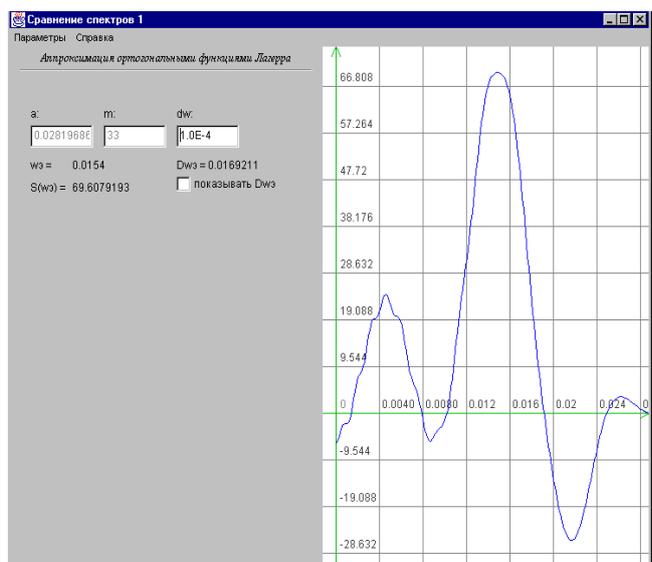
в) Корреляционная функция σ



г) Спектральная плотность мощности σ



д) Корреляционная функция O_2



е) Спектральная плотность мощности O_2

Рисунок 14.9. Результаты обработки временных рядов

14.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание у преподавателя.
2. Выберите тип автоматизированной системы, с помощью которой можно решить поставленную задачу.
3. Введите исходные данные и решите задачу идентификации корреляционной функции.
4. Найдите параметры параметрической модели, ортогонального разложения и среднеквадратической погрешности аппроксимации.
5. Сделайте вывод о целесообразном виде модели.

14.3. Содержание отчёта

1. Корреляционная функция, подлежащая обработке.
2. Результаты аппроксимации корреляционной функции в виде параметрических моделей, представленные графически.
3. Результаты аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра, представленные в графическом и табличном видах.
4. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже. Найти аналитическую модель функции, представленной на рис. 14.10.

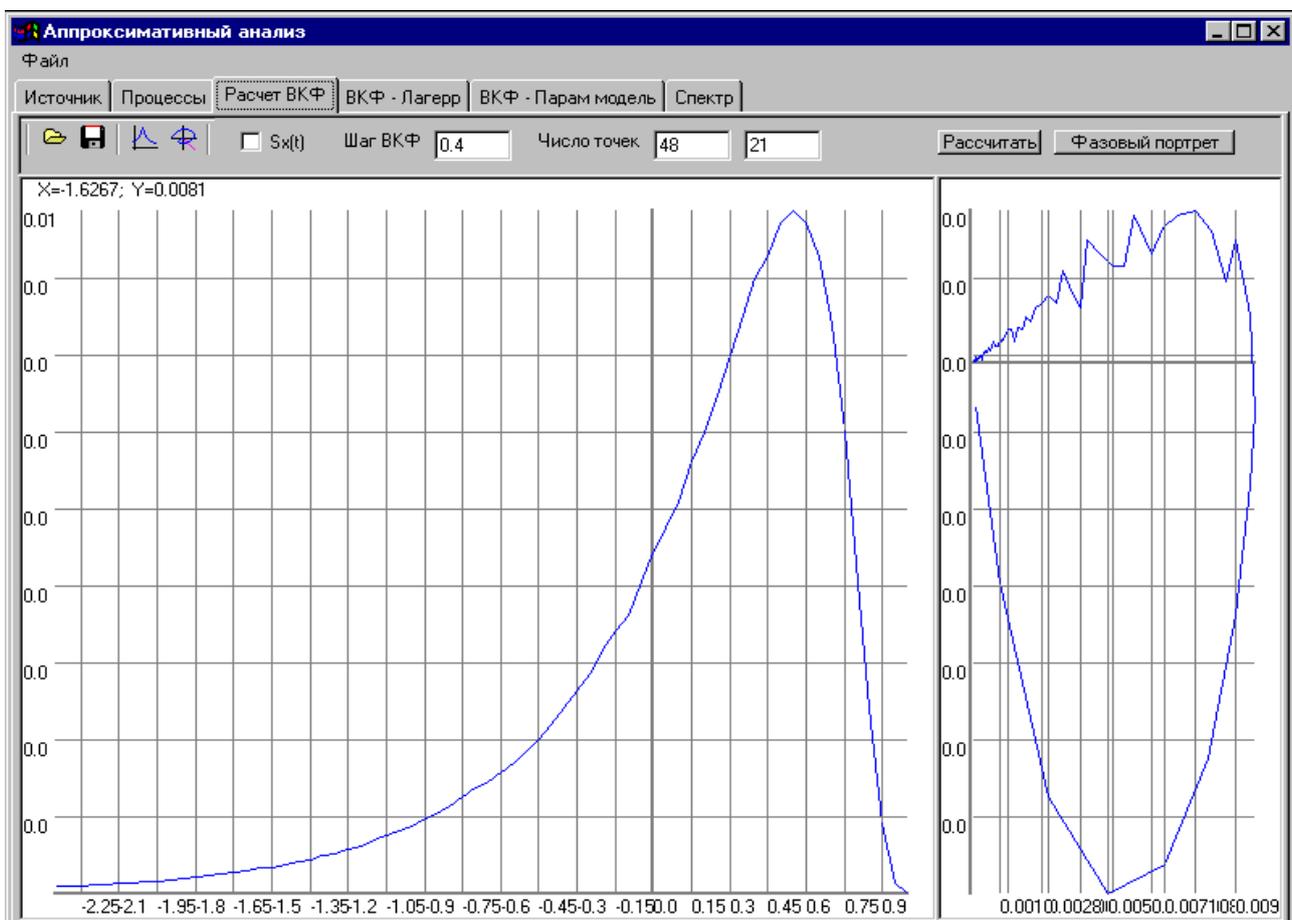


Рисунок 14.10. Корреляционная функция, полученная в результате экспериментальных исследований

Результаты аппроксимации заданной функции параметрической моделью:

$$K_{axy}(\tau) = K_{хуп}(\tau - \tau_m)l(\tau - \tau_m) + K_{хул}(\tau_m - \tau)l(\tau_m - \tau), \quad (14.7)$$

где

$$K_{хуп}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau - \tau_m|} \left(1 + \lambda|\tau - \tau_m| + \lambda^2(\tau - \tau_m)^2 / 3\right), \quad (14.8)$$

$$K_{хул}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau_m - \tau|} \left(1 + \lambda|\tau_m - \tau| + \lambda^2(\tau_m - \tau)^2 / 3\right), \quad (14.9)$$

представлены на рис. 14.11, а ортогональным рядом (14.3) – в таблице 14.7 и на рис.14.12.

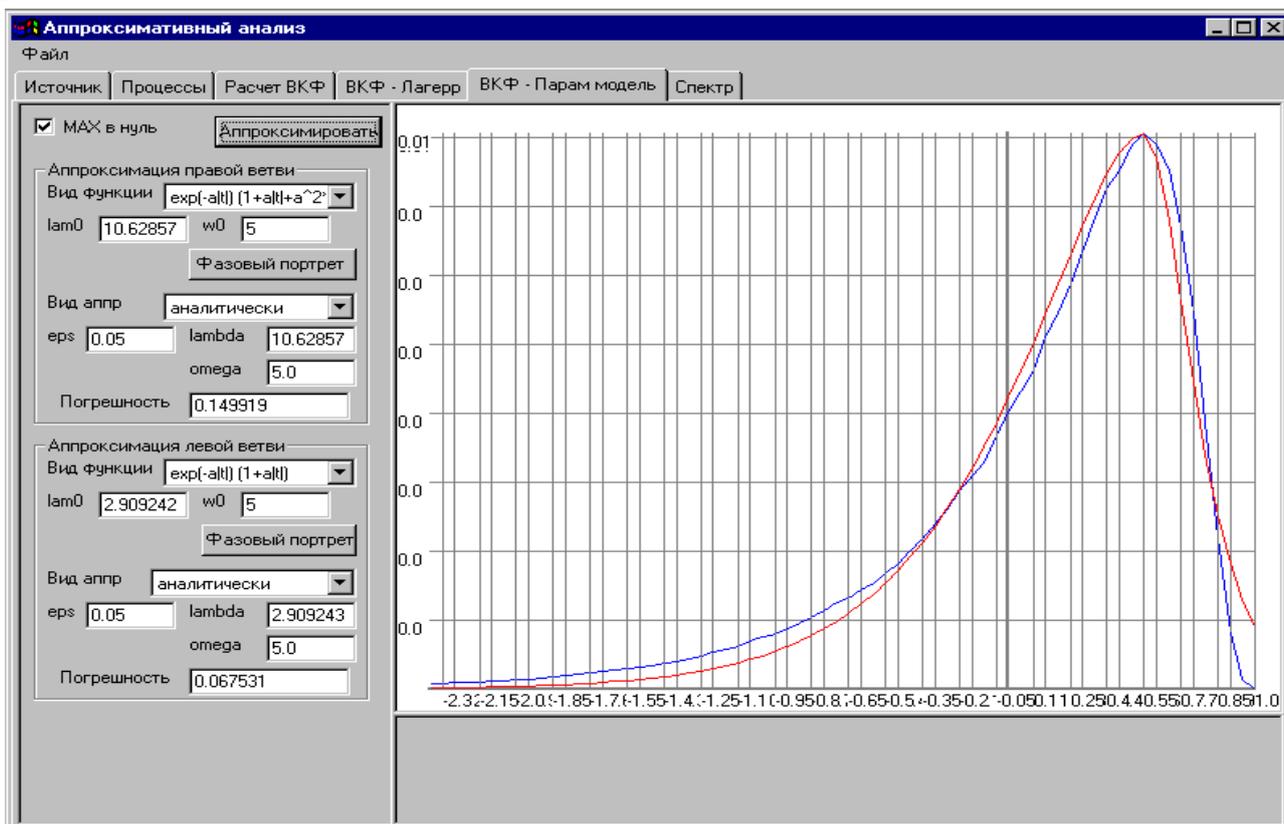


Рисунок 14.11. Результаты аппроксимации параметрическими моделями

Таблица 14.7

Обозначения	Right wing:	Left wing
alfa	6.0735	2.5139
$\beta_{0,i}$	0.9649	0.9891
$\beta_{1,i}$	0.2936	0.0994
$\beta_{2,i}$	-0.0148	-0.0230
$\beta_{3,i}$	-0.1175	-0.0236
$\beta_{4,i}$	-0.1140	-0.0193
$\beta_{5,i}$	-0.0642	-0.0150
$\beta_{6,i}$	-0.0023	-0.0076
$\beta_{7,i}$	0.0543	
δ	0.1025	0.0189

Остальные параметры модели: $\tau_m = 0,55$, $\tau_k^{(2)} = 0,9187$, $\tau_k^{(4)} = 0,5332$.

Результаты обработки показывают, что для данного случая наиболее целесообразно выбрать модель в виде ортогонального ряда.

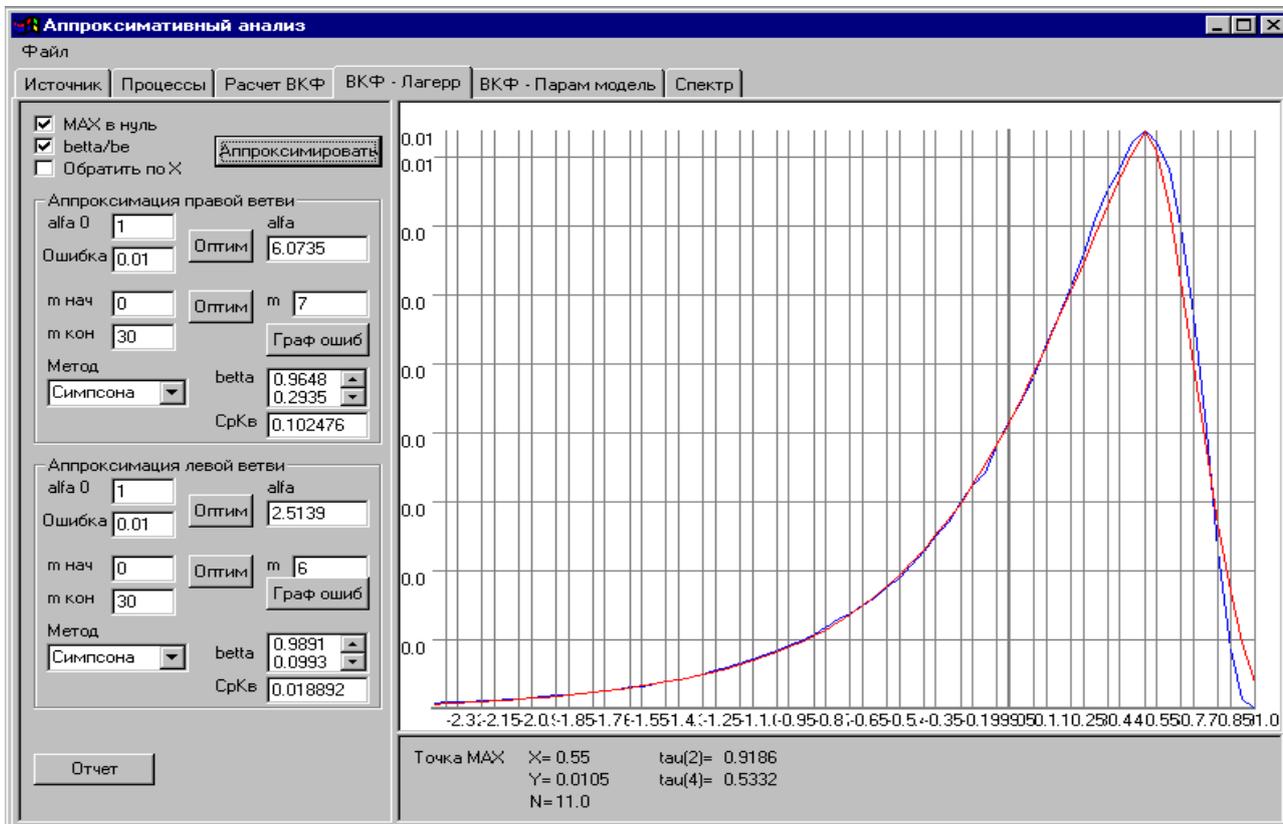


Рисунок 14.12. Результаты аппроксимации ортогональными функциями Лагерра

14.4. Контрольные вопросы

1. В чём заключается специфика оценки параметров модели взаимных корреляционных функций?
2. В чём заключается специфика оценки параметров модели корреляционных функций неэквидистантных временных рядов?
3. Из каких соображений выбирается модель корреляционной функции?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом лабораторном практикуме рассмотрены вопросы:

1. описания и моделирования случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками, а также проверки качества моделирования с использованием фазовых портретов;

2. аппроксимативного анализа базовых функциональных вероятностных характеристик временных рядов:

- функций и плотностей распределения вероятностей;
- корреляционных функций;
- спектральных плотностей мощности, -

параметрическими моделями и ортогональными функциями Лагерра, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

3. аппроксимативного анализа базовых функциональных вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов параметрическими моделями и ортогональными функциями Лагерра.

Все лабораторные работы выполняются с помощью четырёх разработанных автоматизированных информационных систем для моделирования и аппроксимативного анализа вероятностных характеристик временных рядов, включая неэквидистантные.

Учитывая разнообразие случайных процессов, естественно, работу в этой области нельзя считать решенной в полной мере. Однако автор полагает, что предлагаемый базовый вариант лабораторных работ предоставляет возможность для обучения научных сотрудников, аспирантов и студентов методам имитационного моделирования и обработки случайных процессов. Кроме этого, разработанные автоматизированные системы могут применяться для решения разнообразных задач науки и техники методом имитационного моделирования, а так же обработки результатов экспериментальных исследований объектов различной природы. Т.е. предлагаемые системы можно использовать в качестве вспомогательных систем при выполнении лабораторных работ по другим курсам, например связанным с испытаниями объектов авиационно-космической техники.

Отметим, что предлагаемый перечень лабораторных работ отражает лишь опыт и точку зрения автора и может быть существенно расширен как по номенклатуре работ, так и по количеству пунктов исследований в каждой работе. Тем не менее, тридцатилетний опыт преподавания и научно-исследовательской работы позволяет мне рекомендовать в качестве **обязательного варианта лабораторные работы № 1, 3, 5-7**. Аппроксимация взаимных корреляционно-спектральных характеристик (лабораторные работы № 8-9) базируется на аппроксимации авто корреляционно-спектральных характеристик и легче воспринимается студентами, если выполнены лабораторные работы № 6-7.

Вопросы, связанные с моделированием и анализом вероятностными характеристиками неэквидистантных временных рядов (лабораторные работы № 4, 10-11), как правило, выходят за рамки обычных университетских курсов и представляют интерес для специалистов, занимающихся разработкой адаптивных систем сбора обработки информации, обработкой данных с пропусками наблюдений самого разнообразного характера.

Лабораторные работы 12–13, посвященные аппроксимативному анализу обобщенных корреляционно-спектральных характеристик с использованием параметриче-

ских моделей и ортогональных функций Лагерра, позволяют лучше понять особенности аппроксимативного подхода при решении разнообразных прикладных задач.

Лабораторная работа 14 позволяет ознакомиться с методикой аппроксимативного подхода при обработке экспериментальных данных, полученных в ходе выполнения того или иного физического эксперимента. В этом случае априори не известны аналитические модели данных, и их предварительно необходимо определить.

Результаты моделирования и обработки данных могут быть запомнены в соответствующих базах данных, что позволяет объединить ряд лабораторных работ, например:

- первую работу - с пятой;
- третью – с шестой и седьмой;
- четвертую – с десятой и одиннадцатой.

В этом случае один исследователь генерирует временные ряды с заданными вероятностными характеристиками, запоминает и передает их другому исследователю, который осуществляет первичную и вторичную обработку и определяет их аналитические модели. Затем полученные в первом и втором случае результаты сравниваются и обсуждаются в ходе дискуссии между собой двумя исследователями, что позволяет сделать более точные выводы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Автоматизированные системы научных исследований /Прохоров С.А., Фурсов В.А., Кривошеев А.О., и др.: НПЦ «Авиатор», Самара, 1995. - 137 с.
2. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа/Прохоров С.А., Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Шевченко Д.В.//Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – С. 142-156.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 576 с.
4. Козлов А.Н. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 94 с.
5. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74//Минприбор. – 1974. – 76 с.
6. Перспективные средства вычислительной техники и автоматизации для создания интеллектуальных АСНИ /Прохоров С.А., Дерябкин В.П., Кривошеев А.О. и др.: НПЦ «Авиатор». Самара, 1994. - 99 с.
7. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. - 380 с., ил.
8. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. - 329 с., ил.
9. Прохоров С.А., Дегтярева О.А. Подсистема генерирования псевдослучайных последовательностей автоматизированной системы аппроксимативного анализа законов распределения//Вестник СГАУ. Серия: актуальные проблемы радиоэлектроники. – Самара, СГАУ, 2001. – С. 100-110.
10. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Автоматизированная информационная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик// Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – С. 135-141.
11. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. - 209 с., ил.
12. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. - 191 с., ил.
13. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001.- 375 с., ил.
1. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. - М.: Сов. радио, 1968. - 256 с.
14. Учеватов С.В. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000. - 69 с.
15. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений.-2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982. - 256 с.

Типовые законы распределения

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{x-a}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	0; 0;	$(b-a)^4/80;$ -1,2;	$a = \alpha_1 - \sqrt{3\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{3\mu_2};$	
2	Симпсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/24$	0; 0;	$(b-a)^4/240;$ -0,6;	$a = \alpha_1 - \sqrt{6\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{6\mu_2};$	
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & (-a < x < a), \\ 1, & (a < x < \infty), \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	0	$a^2/2$	0; 0;	$3a^4/8;$ -1,5;	$a = \sqrt{2\mu_2}$	
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$			$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-\mu}{a} + \frac{1}{2}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$		
	Начальных и центральных моментов не существует, так как соответствующие интегралы расходятся					

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$			$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, & (-\infty < x < \mu), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, & (\mu < x < \infty), \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	μ	$2/\lambda^2$	$6/\lambda^3;$ $\approx 2,1;$	$24/\lambda^4;$ $3;$	$\mu = \alpha_1;$ $\lambda = \sqrt{2/\mu_2};$	
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); & \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0), \\ 1 - \exp(-\beta x^\alpha), & (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$		
	$\Gamma(1+1/\alpha)\beta^{-1/\alpha}$	$[\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma^2(1+1/\alpha)] \times \beta^{-2/\alpha}$	$[\Gamma(1+3/\alpha) - 3\Gamma(1+1/\alpha) \times \Gamma(1+2/\alpha) + 2\Gamma^3(1+1/\alpha)] \times \beta^{-3/\alpha};$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$	$[\Gamma(1+4/\alpha) - 4\Gamma(1+3/\alpha) \times \Gamma(1+1/\alpha) + 6\Gamma(1+2/\alpha) \times \Gamma^2(1+1/\alpha) - 3\Gamma^4(1+1/\alpha)] \times \beta^{-4/\alpha};$ $\mu_4 / \mu_2^2 - 3;$		
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1,25\sigma$	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2 \approx 0,43\sigma^2$	$\frac{(\pi-3)\sqrt{\pi}}{2} \times \sigma^3\sqrt{2};$ $\approx 0,63;$	$\frac{32-3\pi^2}{4}\sigma^4;$ $\approx -0,3;$	$\sigma \approx 0,8\alpha_1$	
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3;$ $2;$	$9/\alpha^4;$ $6;$	$\alpha = 1/\alpha_1$	

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$			$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	0	$\frac{\pi^2}{12a^2}$	0; 0;	$\frac{7\pi^4}{240a^4};$ 4,2;	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\mu_2}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$			$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	a	σ^2	0; 0;	$3\sigma^4;$ 0;	$a = \alpha_1;$ $\sigma = \sqrt{\mu_2};$
11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right), x > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^x \exp\left(-t^2/2\sigma^2\right) dt, x > 0 \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\approx 0,8\sigma$	$\approx 0,36\sigma^2$	$\approx 0,22\sigma^3;$ $\approx 1;$	$\approx 0,54\sigma^4;$ $\approx 0,85;$	$\sigma = 1,25\alpha_1$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 (n = 1, 2, \dots)$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \frac{\Gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	λ/α	λ/α^2	$2\lambda/\alpha^3;$ $2/\sqrt{\lambda};$	$3\lambda(\lambda+2)/\alpha^4;$ $6/\lambda;$	$\alpha = \alpha_1/\mu_2;$ $\lambda = \alpha_1^2/\mu_2;$

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$
13	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}} \right]; \\ 0 (0 \leq x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, (0 \leq x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	$\frac{\sigma \sqrt{2\pi} (n-1)!!}{2^{n/2} \Gamma(n/2)};$ $\frac{\sigma \sqrt{2\pi} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma(n/2)};$ $(n = 2k)$ $(n = 2k + 1)$	$\sigma^2 \left[n - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$	$\sigma_3 \sqrt{2} \left[(1-2n) \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 4 \frac{\Gamma^3\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{n}{2}\right)} \right];$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$
14	Усечённый нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{B(x) - B(x_1)}{B(x_2) - B(x_1)}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$
	α_1	μ_2	
	$a + E\sigma;$ $D(x) = \frac{x-a}{\sigma}; C(x) = \exp\left(-\frac{D^2(x)}{2}\right);$ $E = \frac{C(x_1) - C(x_2)}{B(x_2) - B(x_1)};$		$\sigma^2 \left\{ 1 - E^2 - \frac{A}{\sqrt{2\pi}} [D(x_2)C(x_2) - D(x_1)C(x_1)] \right\}$

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
15	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x} (\beta x)^k}{k!}, \\ (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	α/β	α/β^2	$2\alpha/\beta^3;$ $2/\sqrt{\alpha};$	$3\alpha(\alpha+2)/\beta^4;$ $6/\alpha;$	$\alpha = \alpha_1^2 / \mu_2;$ $\beta = \alpha_1 / \mu_2;$	
16	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma\left(\alpha+1; \frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$2(\alpha+1)\beta^3;$ $\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}};$	$3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4$ $\frac{6}{\alpha+1};$	$\alpha = \frac{\alpha_1^2}{\mu_2} - 1;$ $\beta = \frac{\mu_2}{\alpha_1};$	
17	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma(m+1, x)}{\Gamma(m+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$m+1$	$m+1$	$2(m+1);$ $\frac{2}{\sqrt{m+1}};$	$3(m+3)(m+1);$ $\frac{6}{m+1};$	$m = \alpha_1 - 1$	
18	Максвелла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{4}{\sqrt{\pi} (2\sigma^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$\approx 1,6\sigma$	$\approx 1,73\sigma^2$	$\approx 0,15\sigma^3;$ $\approx 0,07;$	$\approx 13,5\sigma^4;$ $\approx 1,55;$	$\sigma \approx 0,625\alpha_1$	

Характеристические функции

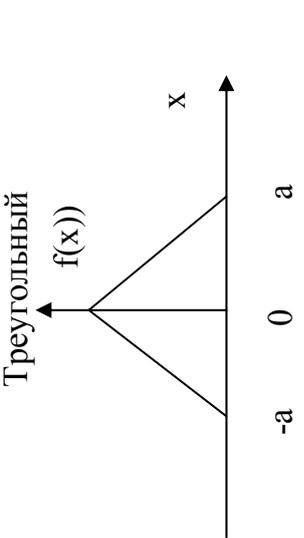
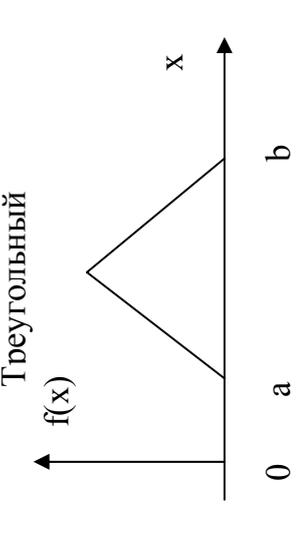
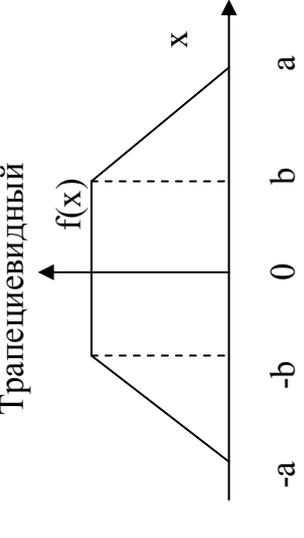
№	Название закона	$f_x(x)$	$\varphi_x(u)$
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$
2	Симпсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	$-\frac{4}{u^2(b-a)^2} (e^{iub/2} - e^{iua/2})$
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{e^{iux}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$	$\exp[iu\mu - a u]$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$	$\frac{\exp(iu\mu)}{1+u^2/\lambda^2}$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^2}{k!} \beta^{-k/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$1 - \frac{u\sigma}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} (u\sigma\sqrt{2})^{2k+2} + i \frac{u\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \exp(-u^2\sigma^2/2)$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{i\pi}{2a \operatorname{sh} \frac{u\pi}{2a}}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\exp(iua - u^2\sigma^2/2)$

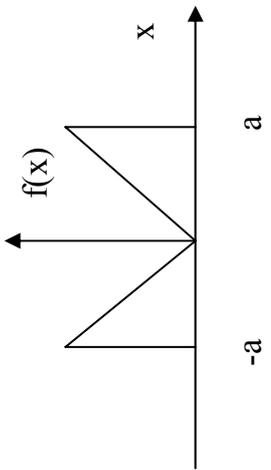
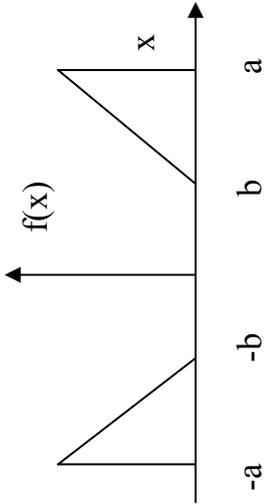
11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp(-x^2 / 2\sigma^2), x > 0 \end{cases}$	$\exp(u^2\sigma^2 / 2) \times$ $\times \left[1 + \Phi\left(\frac{i u \sigma}{\sqrt{2}}\right) \right];$ $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(1 - i u / \alpha)^\lambda}$
13	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\left(1 - \frac{i u}{\beta}\right)^{-\alpha}$
14	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - i u \beta)^{\alpha+1}}$
15	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - i u)^{m+1}}$

Обратные функции законов распределения

Закон распределения	Обратная функция
Арксинуса	$\begin{cases} x = -a, y = 0; \\ x = -a \sin \pi(y - 1/2), (0 < y < 1); \\ x = a, y = 1; \end{cases}$
Коши	$x = \mu + a \operatorname{tg} \pi(y - 1/2);$
Лапласа	$\begin{cases} x = \mu + \frac{1}{\lambda} \ln(2y), (0 < y < \frac{1}{2}); \\ x = \mu - \frac{1}{\lambda} \ln(2(1 - y)), [\frac{1}{2} < y < 1); \end{cases}$
Вейбулла	$x = \exp\left(\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{1 - y}\right)\right);$
Рэля	$\begin{cases} x = 0, y = 0; \\ x = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - y)}, (0 < y < 1); \end{cases}$
Экспоненциальный односторонний	$\begin{cases} x = 0, y = 0; \\ x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y), (0 < y < 1); \end{cases}$
$\operatorname{sech}^2 ax$	$x = \frac{1}{a} \operatorname{arcth}(2y - 1);$

Функции распределения вероятностей и их обратные функции

№	Наименование	Функция распределения $y = F(x)$	Обратная функция $x = F^{-1}(y)$
1	<p>Треугольный</p> 	$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \left(\frac{x+a}{a} \right)^2, & -a < x < 0; \\ y = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a-x}{a} \right)^2, & 0 < x < a; \end{cases}$	$\begin{cases} x = -a + 2a\sqrt{y/2}, & 0 < y < 1/2; \\ x = a - 2a\sqrt{(1-y)/2}, & 1/2 < y < 1; \end{cases}$
2	<p>Треугольный</p> 	$\begin{cases} y = 2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2, & a < x < (a+b)/2; \\ y = 1 - 2 \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2, & (a+b)/2 < x < b; \end{cases}$	$\begin{cases} x = a + (b-a)\sqrt{y/2}, & 0 < y < 1/2; \\ x = b - (b-a)\sqrt{(1-y)/2}, & 0 < y < 1/2; \end{cases}$
3	<p>Трапециевидный</p> 	$\begin{cases} y = \frac{(x+a)^2}{2(a^2-b^2)}, & -a < x < -b; \\ y = \frac{a+b+2x}{2(a+b)}, & -b < x < b; \\ y = \frac{a^2-2b^2+2ax-x^2}{2(a^2-b^2)}, & b < x < a; \end{cases}$	$\begin{cases} x = -a + \sqrt{2y(a^2-b^2)}, & 0 < y < \frac{a-b}{2(a+b)}; \\ x = \frac{(a+b)(2y-1)}{2(a+b)}, & \frac{a-b}{2(a+b)} < y < \frac{a+3b}{2(a+b)}; \\ x = a - \sqrt{2(a^2-b^2)(1-y)}, & \frac{a+3b}{2(a+b)} < y < 1; \end{cases}$

№	Наименование	Функция распределения $y = F(x)$	Обратная функция $x = F^{-1}(y)$
4	<p>Антимодальный I</p> 	$\begin{cases} y = -\frac{(x^2 - a^2)}{2a^2}, & -a < x < 0; \\ y = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2a^2}, & 0 < x < a; \end{cases}$	$\begin{cases} x = -a\sqrt{1-2y}; & 0 < y < 1/2; \\ x = a\sqrt{(2y-1)}; & 1/2 < y < 1; \end{cases}$
5	<p>Антимодальный II</p> 	$\begin{cases} y = -\frac{(2bx + 2ab + x^2 - a^2)}{2(a-b)^2}, & -a < x < -b; \\ y = \frac{1}{2}, & -b < x < b; \\ y = \frac{1}{2} + \frac{(x-b)^2}{2(a-b)^2}, & b < x < a; \end{cases}$	$\begin{cases} x = -b - (a-b)\sqrt{1-2y}; & 0 < y < 1/2; \\ x = b + (a-b)\sqrt{2y-1}; & 1/2 < y < 1; \end{cases}$

Приложение 5

Характеристики типовых законов распределения (Рд=0,999)

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
1	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}}$	$6,8\sigma_x$
2	Односторонний нормальный	$\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2}}$	$3,4\sigma_x$
3	Усечённый нормальный	$\frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$ $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{[B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma_x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}}$	$(x_2 - x_1)\sigma_x$
4	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^3} \left[(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} + (x+a)e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$ X_3 определяется из уравнения $(x^2 + a^2 - \sigma_x^2) \operatorname{ch} \frac{ax}{\sigma_x} - 2ax \operatorname{sh} \frac{ax}{\sigma_x} = 0$;	$3,15\sigma_x$

Продолжение приложения 5

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
5	Логарифмический нормальный	$\frac{1}{x\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$-\frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}x^2} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}} (\sigma_x^2 + \ln x - a)$ $x = e^{a-1,5\sigma_x^2 \mp \sqrt{0,25\sigma_x^4 + 1}}$	$e^{3,085\sigma_x + a}$
6	Экспоненциальный	$\alpha e^{-\alpha x}$	α^2	$\frac{6,9078}{\alpha}$
7	Пирсона	$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \lambda = \frac{n}{2}, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{\alpha^2\sqrt{\lambda-1}(\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda)} e^{-(\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})}$	$\frac{4}{\alpha}$
8	Гамма-распределение	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, \alpha > -1, \beta > 0$	$\frac{\sqrt{\alpha(\alpha-\sqrt{\alpha})^{\alpha-1}}}{\beta^2\Gamma(\alpha+1)} e^{-(\alpha-\sqrt{\alpha})}$	9,5β
9	Максвелла	$\frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{4,1357\sigma_x}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} e^{-0,2192}$	4,1σ _x
10	Распределение модуля многомерного вектора	$\frac{2x^{n-1}}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{[\sigma_x\sqrt{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}]^{n-2}}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} \frac{1}{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})} \times e^{-\frac{[\sqrt{8n-7}-1]}{2}}$	3,8σ _x

Продолжение приложения 5

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
11	«m- распределение» (Накагами)	$\frac{2m^m x^{2m-1}}{\Gamma(m) \sigma_x^{2m}} e^{-\frac{mx^2}{\sigma_x^2}}, m \geq 1/2$	$m = 1/2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-1/2}}{\sigma_x^2}$ $m = 1, \frac{6}{\sigma_x^2} e^{-3/2}$	$\frac{2,33\sigma_x}{\sqrt{m}}$
12	Показательно- степенной	$\frac{x^m}{m!} e^{-x}$	$\sqrt{m} \frac{(m - \sqrt{m})^{m+1}}{m!} e^{-(m - \sqrt{m})}$	
13	Эрланга	$\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} e^{-\beta x}, \alpha = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{\beta^2 \sqrt{\alpha - 1} (\alpha - 1 - \sqrt{\alpha - 1})^{\alpha-2}}{(\alpha - 1)!} e^{-(\alpha - 1 - \sqrt{\alpha - 1})}$	
14	Гиперэкспоненциаль- ный	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n e^{-\lambda_n x}$	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n^2$	

Таблица χ^2 распределения

r\p	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10
1	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60
3	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25
4	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78
5	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24
6	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64
7	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02
8	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36
9	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68
10	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99
11	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28
12	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55
13	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81
14	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,10
15	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,30
16	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,50	23,50
17	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,60	24,80
18	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,80	26,00

Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова

$\delta \backslash N$	500	1000	2000	5000	8000	10000
0,0025	0,0559	0,0790	0,1118	0,1767	0,2236	0,25
0,005	0,1118	0,1581	0,2236	0,3535	0,4472	0,5
0,01	0,2236	0,3162	0,4472	0,7071	0,8944	1
0,02	0,4472	0,6324	0,8944	1,4142	1,7889	2
0,03	0,6708	0,9486	1,3416	2,1213	2,6833	3
0,04	0,8972	1,2648	1,7888	2,8284	3,5777	4
0,05	1,1208	1,5810	2,2360	3,5355	4,4721	5

Приложение 8

Производные для однопараметрических плотностей распределения вероятностей

Закон распределения	$f(x, \beta_1)$	$\frac{\partial f(x, \beta_1)}{\partial \beta_1}$	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1)}{\partial \beta_1^2}$
$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{ch}^{-2} a \bar{x}_j$	$\frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-2}(a \bar{x}_j) - a \bar{x}_j \operatorname{ch}^{-3}(a \bar{x}_j) \operatorname{sh}(a \bar{x}_j)$	$-\operatorname{ch}^{-3}(a \bar{x}_j) \operatorname{sh}(a \bar{x}_j)(1 + \bar{x}_j) +$ $+ a \bar{x}_j^2 \operatorname{ch}^{-2}(a \bar{x}_j)(3 \operatorname{ch}^{-2}(a \bar{x}_j) \operatorname{sh}^2(a \bar{x}_j) - 1)$
Арксинуса	$\frac{1}{\pi} \left(a^2 - \bar{x}_j^2 \right)^{-1/2}$	$-\frac{a}{\pi} \left(a^2 - \bar{x}_j^2 \right)^{-3/2}$	$\frac{3a^2}{\pi} \left(a^2 - \bar{x}_j^2 \right)^{-5/2} - \frac{1}{\pi} \left(a^2 - \bar{x}_j^2 \right)^{-3/2}$
Рэлея	$\frac{\bar{x}_j}{\sigma^2} e^{-\frac{\bar{x}_j^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\bar{x}_j^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{\bar{x}_j}{\sigma^2} - \frac{2\bar{x}_j}{\sigma^3} \right)$	$e^{-\frac{\bar{x}_j^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{\bar{x}_j^5}{\sigma^8} - \frac{7\bar{x}_j^3}{\sigma^6} + \frac{6\bar{x}_j}{\sigma^4} \right)$
Экспоненциальный	$\alpha e^{-\alpha \bar{x}_j}$	$e^{-\alpha \bar{x}_j} [1 - \alpha \bar{x}_j]$	$-\bar{x}_j e^{-\alpha \bar{x}_j} [2 - \alpha \bar{x}_j]$

Приложение 9

Производные для двухпараметрических плотностей распределения вероятностей

Закон распределения	$\frac{\partial f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}$	$\frac{\partial f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}$	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2}$
Симпсона	$\frac{-4}{(b-a)^2} + 8 \frac{(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{8(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^3}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$	$8 \frac{(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{4}{(b-a)^2} - \frac{8(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^3}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$	$\frac{-16(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3} + \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$
Лапласа	$\frac{1}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (1 - \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x > \mu)$ $\frac{1}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (1 + \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x < \mu)$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)}$ $(x > \mu)$ $-\frac{\lambda^2}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)}$ $(x < \mu)$	$-\frac{1}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (\bar{x}_j - \mu) (2 - \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x > \mu)$ $\frac{1}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (\bar{x}_j - \mu) (2 + \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x < \mu)$
Вейбулла	$\beta \bar{x}_j^{\alpha-1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (1 + \alpha \ln \bar{x}_j - \alpha \beta \bar{x}_j^\alpha \ln \bar{x}_j)$	$\bar{x}_j^{\alpha-1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (1 - \beta \bar{x}_j^\alpha)$	$\beta \bar{x}_j^{\alpha-1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} \ln \bar{x}_j (1 - \beta \bar{x}_j^\alpha - \alpha \beta \bar{x}_j^{\alpha-1} \ln \bar{x}_j) +$ $+ \beta \bar{x}_j^{\alpha-1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} \ln \bar{x}_j (1 - \beta \bar{x}_j^\alpha) (1 + \alpha \ln \bar{x}_j - \alpha \beta \bar{x}_j^\alpha \ln \bar{x}_j)$

Закон распределения	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2}$	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \beta_2}$	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \beta_1}$
Симпсона	$\frac{24 (\bar{x}_j - a)}{(b - a)^4}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{-16}{(b-a)^3} + \frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$	$\frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$	$\frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$
Лапласа	$\frac{\lambda^3}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)}$ $(x > \mu)$ $\frac{\lambda^3}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)}$ $(x < \mu)$	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (2 - \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x > \mu)$ $-\frac{\lambda}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (2 + \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x < \mu)$	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (2 - \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x > \mu)$ $-\frac{\lambda}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (2 + \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x < \mu)$
Вейбулла	$-\alpha \bar{x}_j^{2\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (2 - \beta \bar{x}_j^\alpha)$	$\beta \bar{x}_j^{\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (-\alpha \bar{x}_j^{\alpha - 1} \ln \bar{x}_j) + (1 + \alpha \ln \bar{x}_j - \alpha \beta \bar{x}_j^\alpha \ln \bar{x}_j)$ $(\bar{x}_j^{\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} - \beta \bar{x}_j^{2\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha})$	$\bar{x}_j^{\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (-\beta \bar{x}_j^{\alpha - 1} \ln \bar{x}_j) + (1 - \beta \bar{x}_j^\alpha)$ $(\bar{x}_j^{\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (1 + \alpha \ln \bar{x}_j - \alpha \beta \bar{x}_j^\alpha \ln \bar{x}_j))$

Приложение 10

Производные для однопараметрических функций распределения вероятностей

Закон распределения	$F(x, \beta_1)$	$\frac{\partial F(x, \beta_1)}{\partial \beta_1}$	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1)}{\partial \beta_1^2}$
$\text{sech}^2 x$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{th}(ax_j)$	$\frac{x_j}{2} \text{ch}^{-2}(ax_j)$	$-\frac{x_j^2}{\text{ch}^3(ax_j)}$
Арксинуса	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x_j}{a}$	$\frac{x_j}{\pi \sqrt{(a^2 - x_j^2)^2}}$	$\frac{x_j}{2\pi \sqrt{(a^2 - x_j^2)^3}}$
Рэлея	$1 - e^{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}}$	$-\frac{x_j}{\sigma^2} e^{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{3x_j^2}{\sigma^4} - \frac{x_j^4}{\sigma^6} \right)$
Экспоненциальный	$1 - e^{-\alpha x_j}$	$x_j e^{-\alpha x_j}$	$x_j^2 e^{-\alpha x_j}$

Производные для двухпараметрических функций распределения

Закон распределения	$\frac{\partial F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}$	$\frac{\partial F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}$	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2}$
Симпсона	$\frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3} - \frac{4(x_j - a)}{(b - a)^2}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $-\frac{4(b - x_j)^2}{(b - a)^3}$ $(\frac{a + b}{2} < x < b)$	$-\frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $\frac{4}{(b - a)^2} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}$ $(\frac{a + b}{2} < x < b)$	$\frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4} - \frac{16(x_j - a)}{(b - a)^3} + \frac{4}{(b - a)^2}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $\frac{24(b - x_j)^2}{(b - a)^4}$ $(\frac{a + b}{2} < x < b)$
Лапласа	$\frac{1}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)}(x_j - \mu)$ $(x > \mu)$ $\frac{1}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)}(x_j - \mu)$ $(x < \mu)$	$-\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)}$ $(x > \mu)$ $-\frac{\lambda}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)}$ $(x < \mu)$	$-\frac{1}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)}(x_j - \mu)^2$ $(x > \mu)$ $\frac{1}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)}(x_j - \mu)^2$ $(x < \mu)$
Вейбулла	$\beta x_j^\alpha e^{-\beta x_j^\alpha} \ln x_j$	$x_j^\alpha e^{-\beta x_j^\alpha}$	$\beta x_j^\alpha e^{-\beta x_j^\alpha} \ln^2 x_j (1 - \beta x_j^\alpha)$

Закон распределения	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2}$	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \beta_2}$	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \beta_1}$
Симпсона	$\frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}$ $\left(a < x < \frac{a + b}{2}\right)$ $\frac{16(b - x_j)^2}{(b - a)^3} - \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{4}{(b - a)^2}$ $\left(\frac{a + b}{2} < x < b\right)$	$\frac{8(x_j - a)}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}$ $\left(a < x < \frac{a + b}{2}\right)$ $\frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}$ $\left(\frac{a + b}{2} < x < b\right)$	$\frac{8(x_j - a)}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}$ $\left(a < x < \frac{a + b}{2}\right)$ $\frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}$ $\left(\frac{a + b}{2} < x < b\right)$
Лапласа	$-\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)}$ $(x > \mu)$ $\frac{\lambda^2}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)}$ $(x < \mu)$	$\frac{1}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)} (\lambda(x_j - \mu) - 1)$ $(x > \mu)$ $-\frac{1}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)} (1 + \lambda(x_j - \mu))$ $(x < \mu)$	$\frac{1}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)} (\lambda(x_j - \mu) - 1)$ $(x > \mu)$ $-\frac{1}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)} (1 + \lambda(x_j - \mu))$ $(x < \mu)$

Приложение 12
Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации

$K_x(\tau)$	$h(\tau)$	К
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$k\alpha e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$k\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$k\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{3\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} - \alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{k\alpha \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$k\alpha e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$

Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации

Вид модели	Моделирующий алгоритм	Параметры алгоритма
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$Y_n = a_0 X_n + b_1 Y_{n-1}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; a_0 = \sqrt{1 - p^2}; b_1 = p$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p^3 (1 + \gamma) - p(1 - \gamma); \alpha_1 = 1 - 4p^2 \gamma - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})} / 2; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0; \alpha_1 = 1 - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})} / 2; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})} / 2;$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 + 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})} / 2;$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$

Параметрические модели корреляционных функций

На рис. П.14.1 графики соответствуют (сверху вниз): $\rho_{x4}(\tau)$ (ряд 1), $\rho_{x2}(\tau)$ (ряд 2), $\rho_{x1}(\tau)$ (ряд 3), $\rho_{x3}(\tau)$ (ряд 4).

На рис. П.14.2 и далее верхняя кривая соответствует модели $\rho_{6x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$, средняя - $\rho_{5x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, нижняя - $\rho_{7x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$.

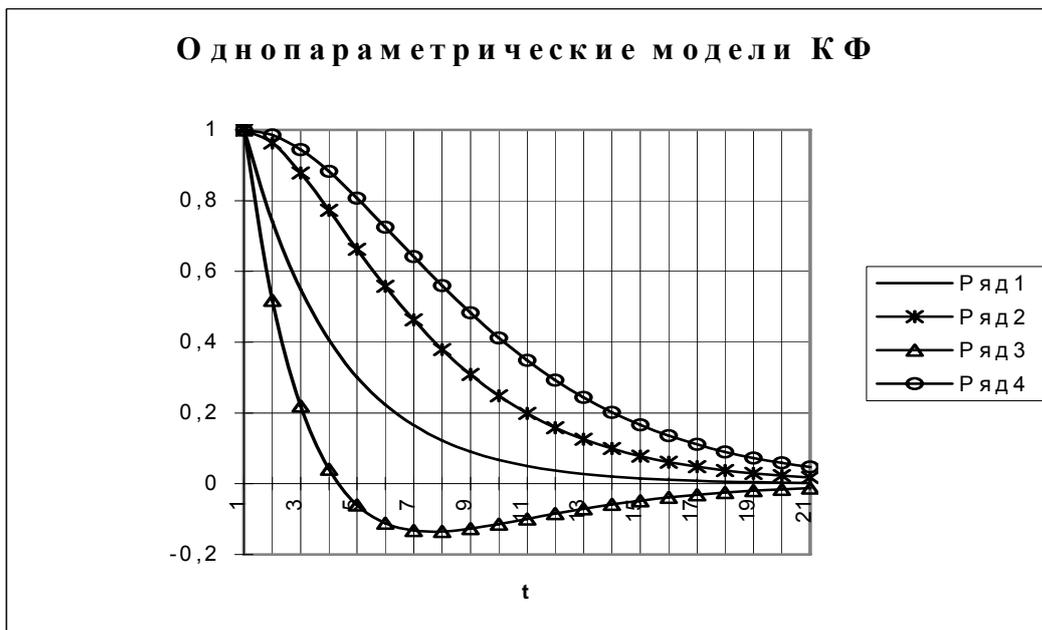


Рисунок П.14.1

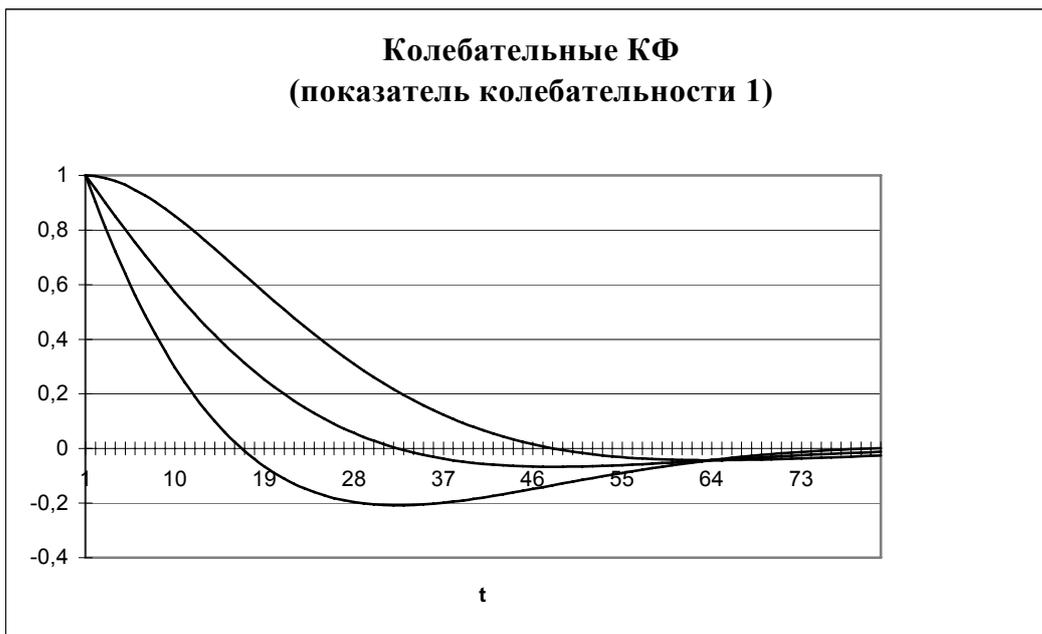


Рисунок П.14.2



Рисунок П.14.3

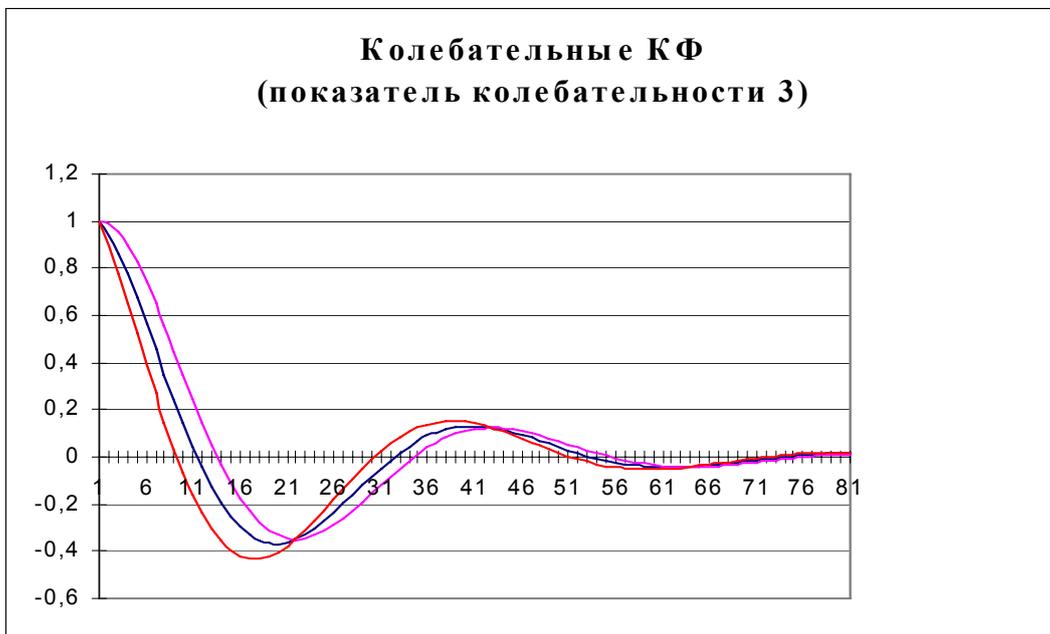


Рисунок П.14.4

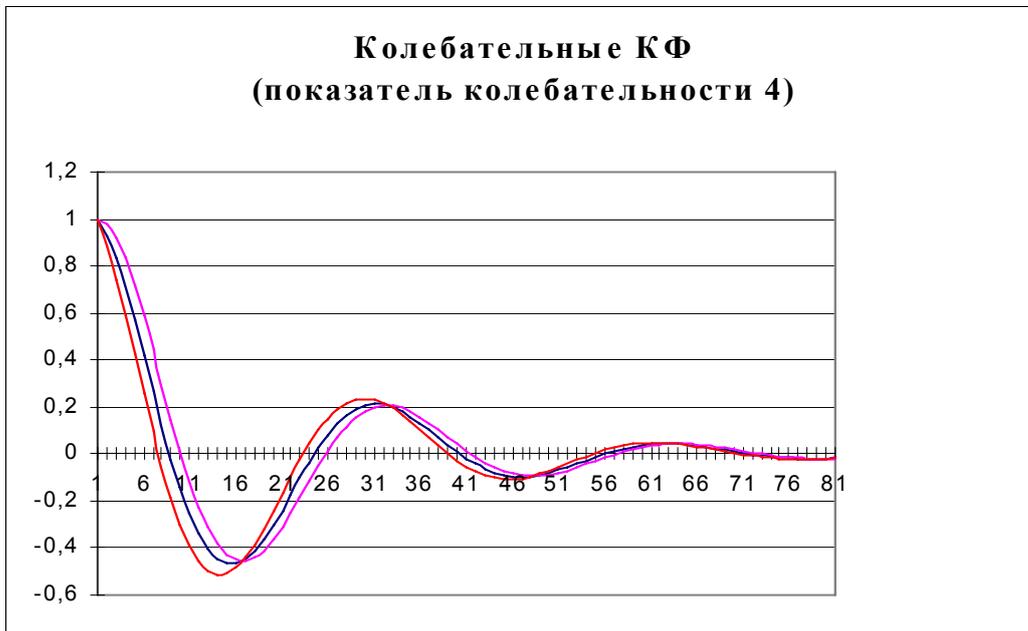


Рисунок П.14.5



Рисунок П.14.6

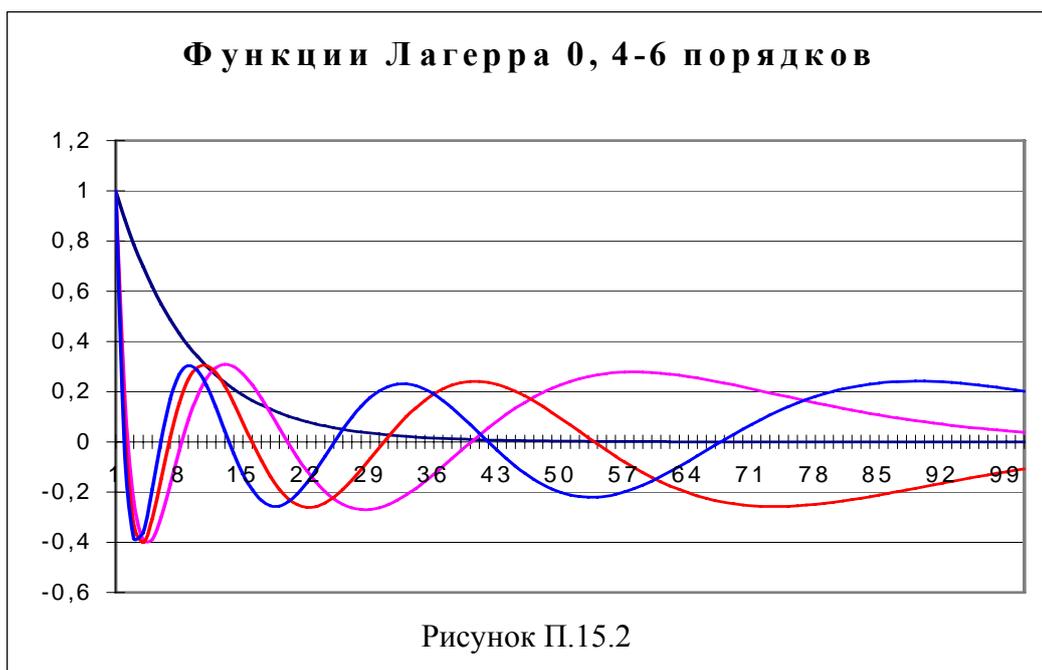
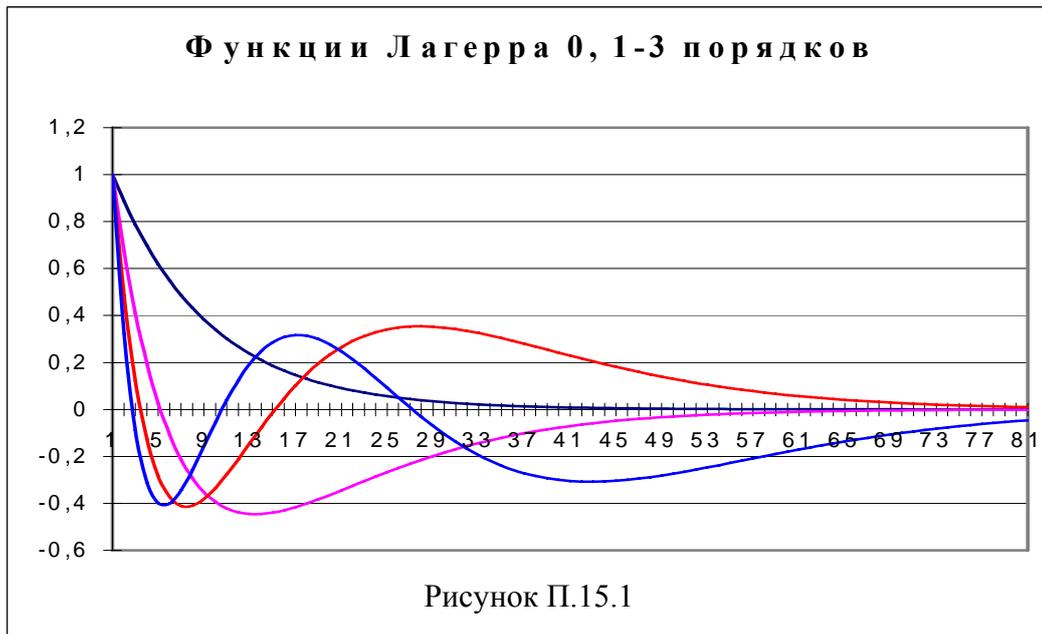
Ортогональные функции Лагерра

Ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением

$$L_k(\tau) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2},$$

удовлетворяют следующему свойству: $\int_0^{\infty} L_k(\tau) L_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{при } k = n. \end{cases}$

Вид первых 6 ортогональных функций Лагерра приведен ниже.



Приложение 16

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

№	Наименование	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha$	$1/2\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	$2/\alpha$	$5/4\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	0	$1/4\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)$	$8/3\alpha$	$7/4\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	0	$\frac{1}{4\alpha}$

Приложение 17

Моменты для типовых моделей корреляционных функций

№	Наименование	μ_1	μ_2	μ_3
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3$	$6/\alpha^4$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	$3/\alpha^2$	$8/\alpha^3$	$30/\alpha^4$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	$-1/\alpha^2$	$-4/\alpha^3$	$-18/\alpha^4$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)$	$5/\alpha^2$	$16/\alpha^3$	$70/\alpha^4$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{2(\alpha^3 - 3\alpha\omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6\frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{3\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{8\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6\frac{5\alpha^4 - 10\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-\frac{4\alpha}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-6\frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2\omega_0^2 - \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$

Количество ординат корреляционной функции и интервалы дискретизации

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	Δt	$\delta = 0,02$		$\delta = 0,05$	
		Δt	Jmax	Δt	Jmax
$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	9	$\frac{0,632}{\alpha}$	6
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	13	$\frac{0,632}{\alpha}$	9
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	$\frac{\sqrt{8\delta/3}}{\alpha}$	$\frac{0,23}{\alpha}$	19	$\frac{0,365}{\alpha}$	13
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	$\frac{\sqrt{24\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,693}{\alpha}$	10	$\frac{1,095}{\alpha}$	7
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{ \mu^2 - 1 }}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{ \mu^2 - 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,4}{ \mu^2 - 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{ \mu^2 + 1 }}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{ \mu^2 + 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,4}{ \mu^2 + 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$

Спектральные плотности мощности

$K_X(\tau)$	$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3})$	$\frac{\sigma_X^2 8\alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + C \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + C\omega_0(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

Обобщенные спектральные характеристики

№	$K_x(\tau)$	ω_0	$S_x(\omega_0)$
1	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	0	$\frac{\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	0	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{2\sigma_x^2}{9\pi\alpha}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	0	$\frac{8\sigma_x^2}{3\pi\alpha}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\sqrt{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - (\omega_0^2 + \alpha^2)}$	$\frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2 + \omega_0^2 + \omega_0^2}{\left[\alpha^2 + (\omega_0 - \omega_0)^2 \right]^2} \left[\alpha^2 + (\omega_0 + \omega_0)^2 \right] \right\}$
6	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \omega_0^2}{\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \omega_0^2}{\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}$

Продолжение приложения 20

№	$\Delta\omega'_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega_3)}$	$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \frac{\Delta\omega'_3}{2}$
1	$\frac{\pi\alpha}{2}$	$\frac{\pi\alpha}{2}$
2	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
3	$\frac{9\pi\alpha}{4}$	$\frac{\alpha(2\sqrt{2}+9\pi)}{4}$
4	$\frac{3\pi\alpha}{16}$	$\frac{3\pi\alpha}{16}$
5	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{2\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$	$\omega_3 + \frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$
6	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов

АИС состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [4, 7-8, 15]. Для удобства использования в учебном процессе в систему включен блок генерирования случайных процессов с заданными законами распределения вероятностей.

Технические требования, предъявляемые к системе, состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

Описание подсистем

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. П.21.1. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных (см. рис. П.21.2):

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

Блок получения статистических данных делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из N отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

Блок оценки статистических характеристик состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности

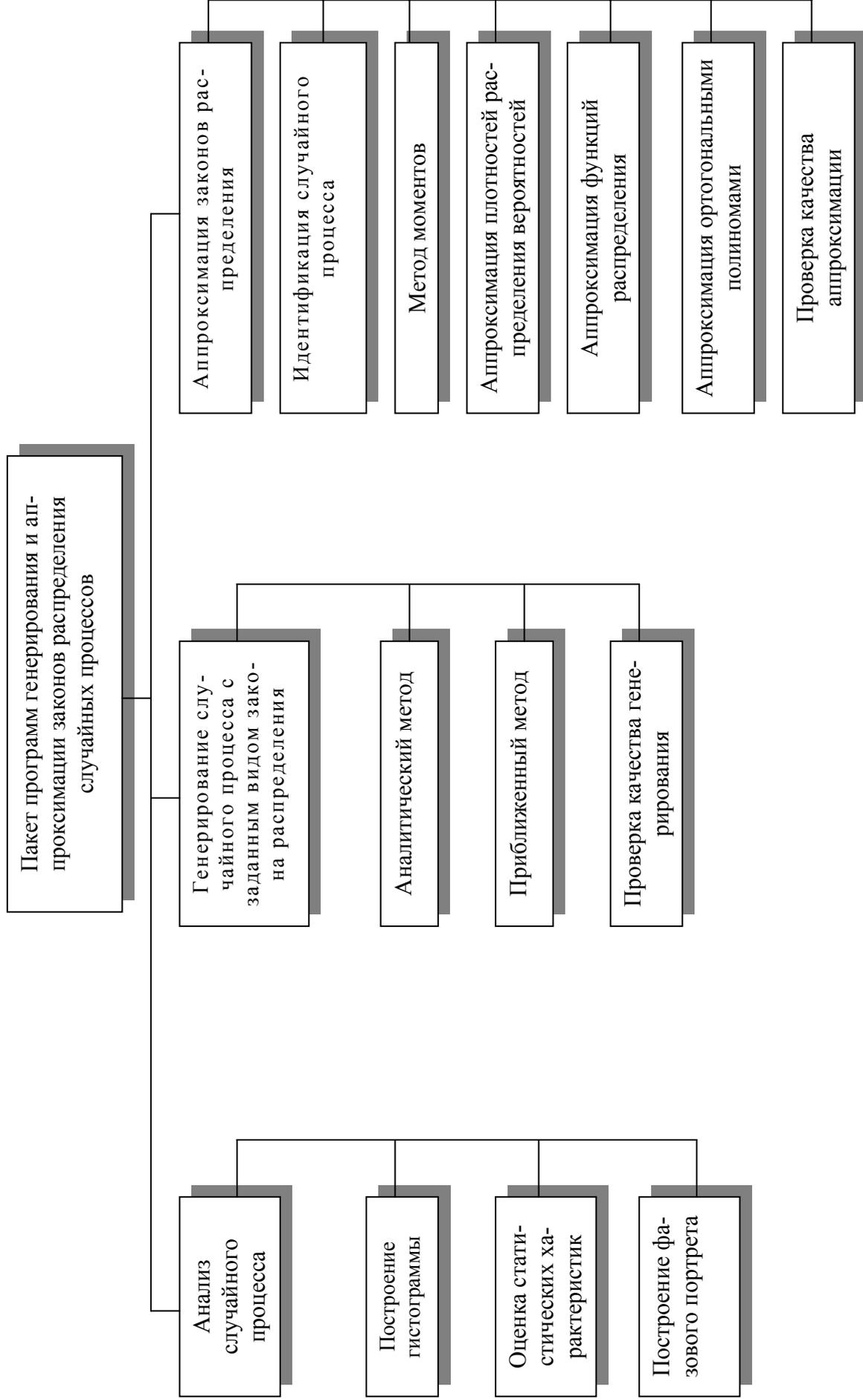


Рисунок П.21.1. Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов

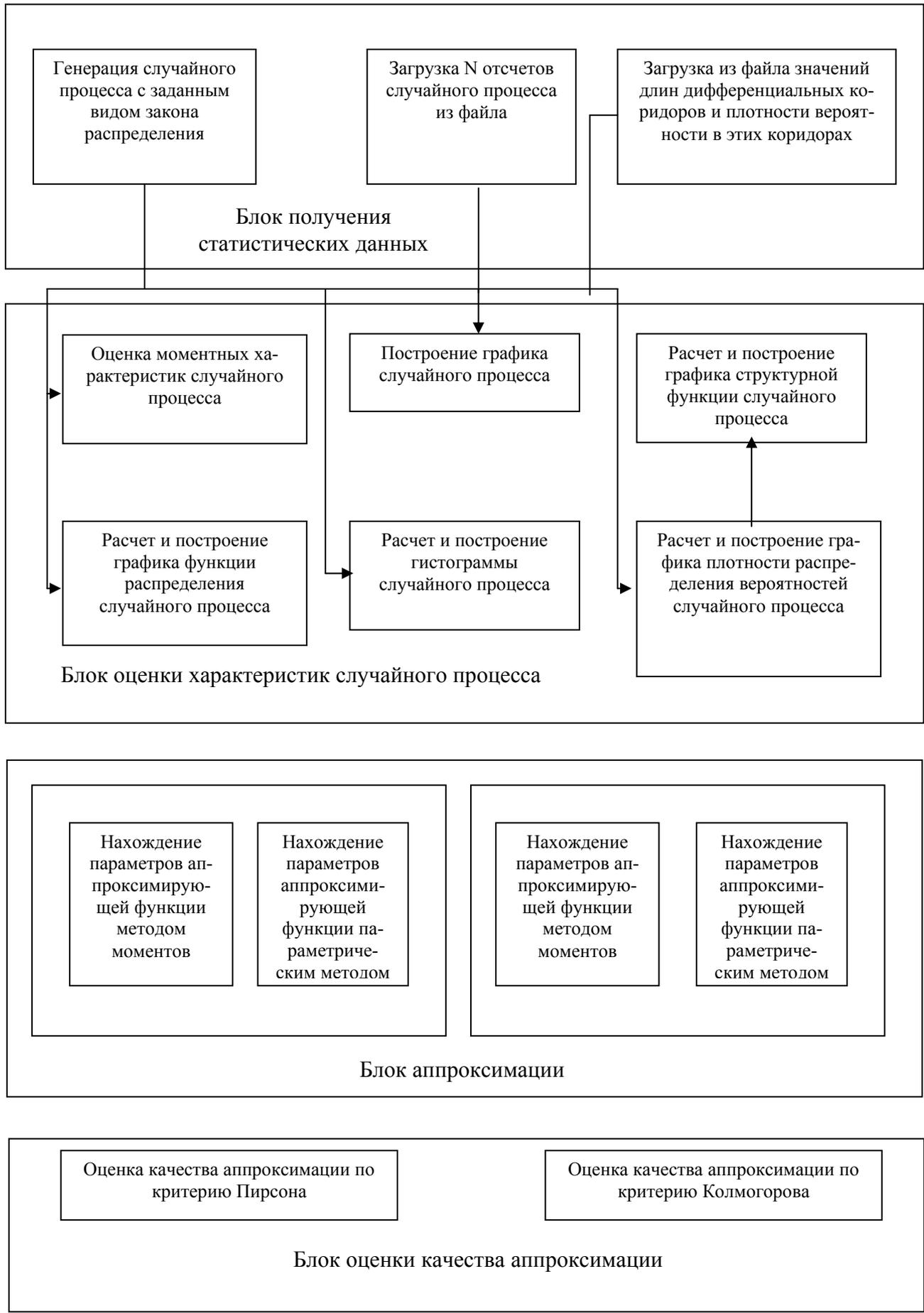


Рисунок П.21.2. Блоки пакета прикладных программ и их взаимодействие

распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.

Данные в этот блок попадают из блока получения статистических данных. В первом и втором случае на основе отсчетов случайного процесса рисуется график процесса, определяются частоты попадания в дифференциальные коридоры, и формируется гистограмма, оцениваются числовые характеристики случайного процесса. Данные о частотах попадания в дифференциальные коридоры передаются в блоки формирования функции распределения и плотности распределения вероятности. Значения плотности распределения вероятности передаются в блок формирования фазового портрета случайного процесса.

Блок аппроксимации состоит из четырех частей: аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения по методу моментов, аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения параметрическим методом.

В блок аппроксимации передаются из блока получения статистических данных число дифференциальных коридоров и номер закона распределения, а из блока оценки статистических характеристик - значения плотности распределения вероятностей и значения функции распределения, значения математического ожидания и дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия используется в методе моментов, значение плотности вероятности и функции распределения используется в параметрическом методе.

Используя переданные значения и выбранный для аппроксимации закон распределения, в данном блоке вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующего закона.

Блок оценки качества аппроксимации состоит из двух частей:

- оценки по критерию Пирсона;
- оценки по критерию Колмогорова.

В блок оценки качества аппроксимации передаются:

- из блока получения статистических данных - значения частот попадания в дифференциальные коридоры, число отсчетов случайного процесса, число дифференциальных коридоров;
- из блока оценки статистических характеристик - значения функции распределения;
- из блока аппроксимации - значения неизвестных параметров аппроксимирующего закона распределения.

Благодаря такому блочному построению структуры программы можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Трудоемкость таких изменений будет определяться только сложностью программной реализации самих изменений, а не перестройкой структуры системы.

Описание интерфейса системы

Основу интерфейса системы составляют две основные экранные формы, с которыми работает пользователь:

- экранная форма задания случайного процесса и оценивания его характеристик;
- экранная форма аппроксимации случайных процессов и оценки качества аппроксимации.

Первая форма, показанная на рис. П.21.3, представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы:

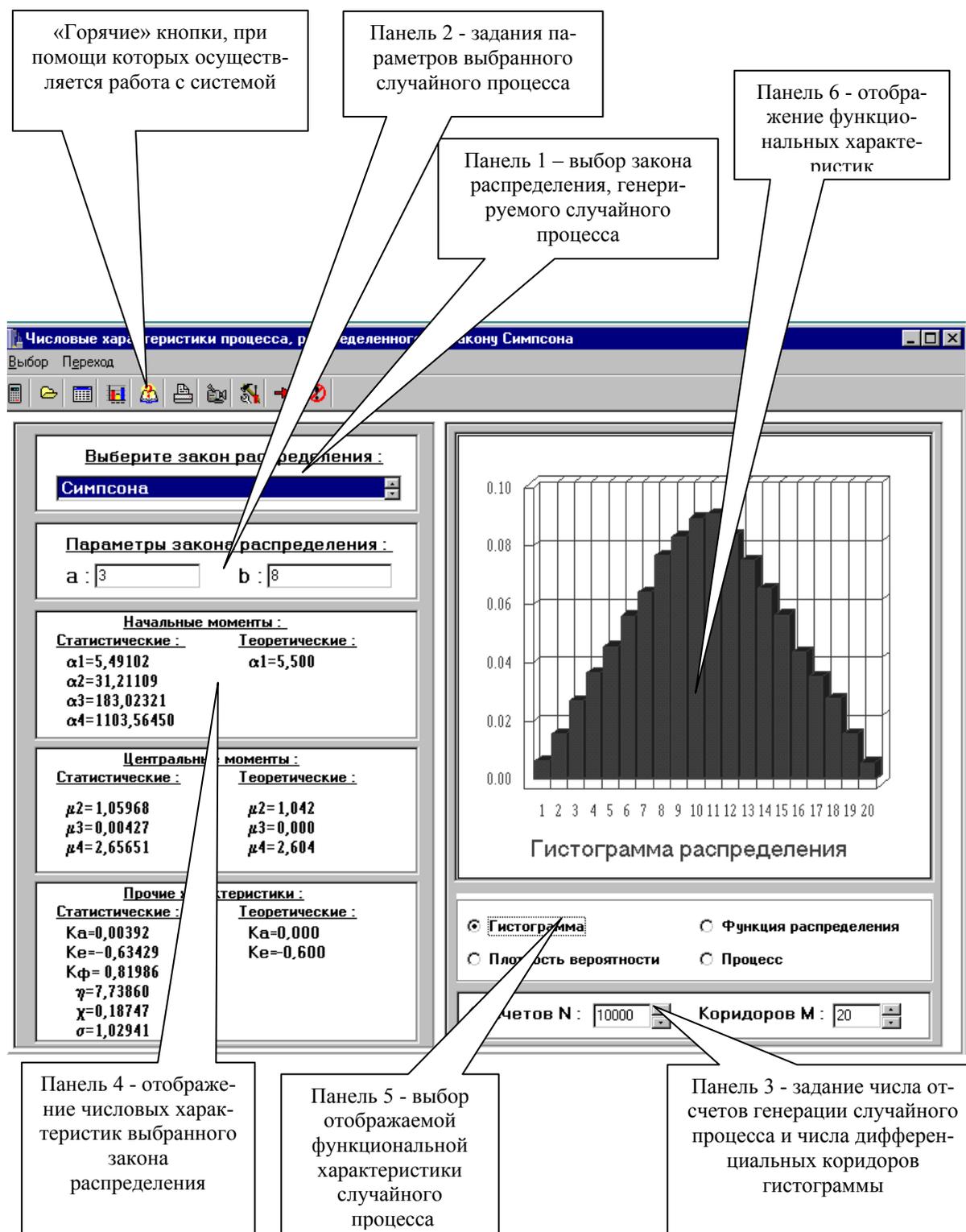


Рисунок П.21.3. Интерфейс экранной формы генерирования и оценки статистических характеристик случайного процесса

На главной форме присутствуют следующие элементы:

- панель «горячих» клавиш, с помощью которой осуществляется управление работой системы;
- панель 1 – выбор закона распределения для генерации процесса, в случае его программного задания;
- панель 2 появляется после выбора закона распределения и позволяет задать значение одного или (в зависимости от закона) двух параметров данного закона распределения;
- панель 3 позволяет указать число отсчетов программно-генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного с заданным видом закона распределения случайного процесса;
- панель 5 позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

На рис. П.21.4 более подробно показана панель «горячих» кнопок. Она состоит из следующих кнопок:

- расчетов – генерирует случайный процесс с заданным видом закона распределения и параметром;
- загрузки из файла – требует указать файл и вызывает для работы экранную форму приема статистических данных, эта экранная форма показана на рис. П.21.5;
- отображения расчетов – считает и отображает числовые характеристики случайного процесса;
- отображения функциональных характеристик – рассчитывает и показывает на панели 6 выбранную на панели 5 функциональную характеристику случайного процесса;
- справки – вызывает справочную систему, содержащую основные сведения об основных видах законов распределения;
- печати – позволяет вызвать стандартный диалог печати под Windows;
- настройки принтера – вызывается стандартное окно настройки параметров принтера;
- перехода к экранной форме структурной функции – при нажатии вызывается экранная форма, отображающая структурную функцию случайного процесса, экранная форма структурной функции показана на рис. П.21.7;
- перехода к экранной форме аппроксимации случайного процесса;
- выхода из программы.

На рис. П.21.5 показана экранная форма загрузки данных из файла.

На панели 1 выбирается вид данных: отсчеты случайного процесса или частоты попадания в дифференциальные коридоры. В том случае, если выбраны отсчеты на панели 2, задается их число. В случае выбора частот на панели 3 следует указать число дифференциальных коридоров, а также минимальную и максимальную границу диапазона.

После этого, по нажатию кнопки 1, происходит чтение данных из указанного перед этим файла.

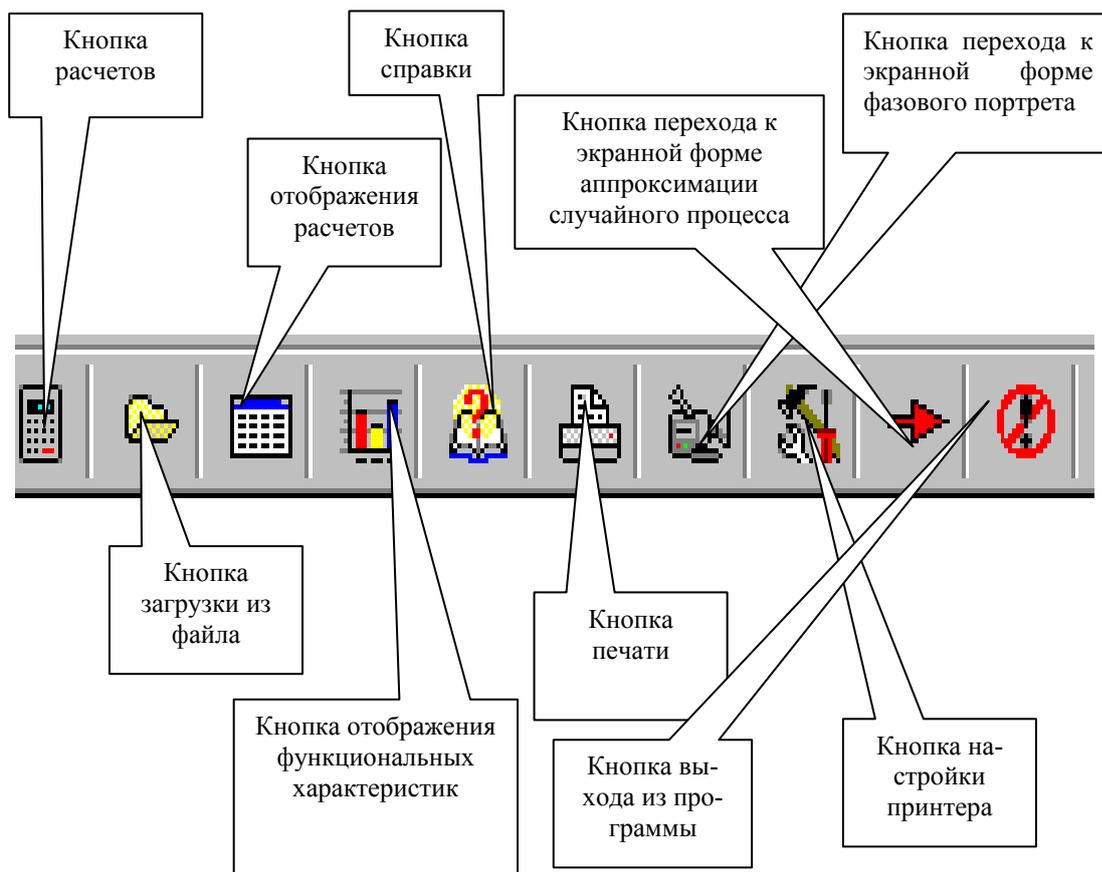


Рисунок П.21.4. Панель «горячих» кнопок

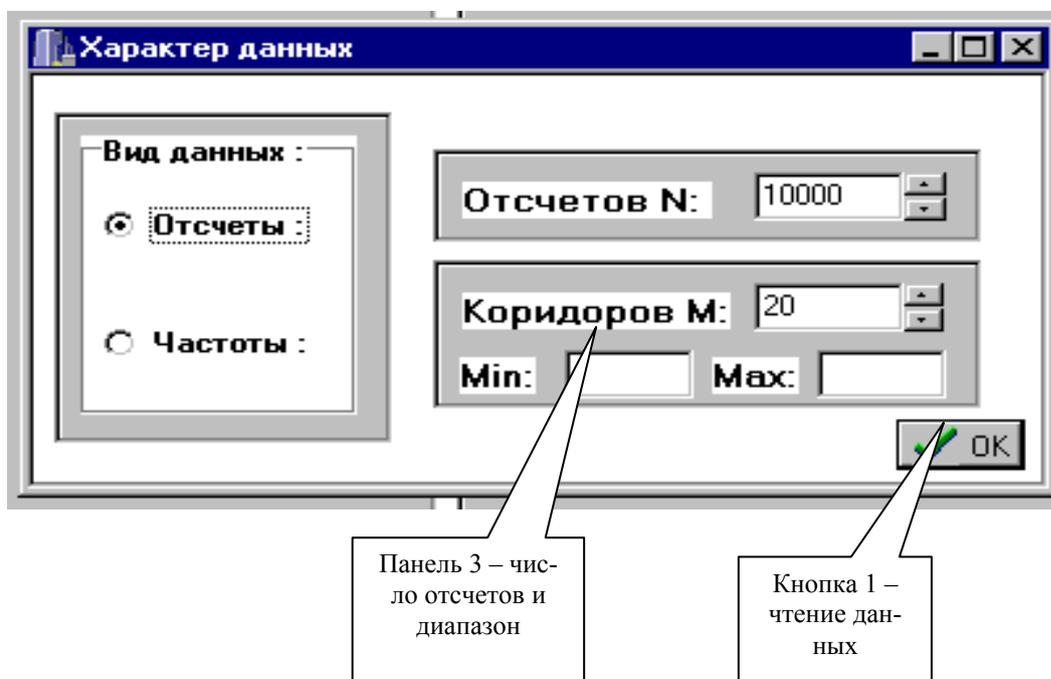


Рисунок П.21.5. Экранная форма загрузки данных из файла

На рис. П.21.7 показана экранная форма отображения графика случайного процесса. Она появляется на экране после выбора кнопки с названием «Процесс» на панели 5 основной экранной формы. На экранной форме отображения графика присут-

ствуют панель «горячих» кнопок, панель отображения графика и панель задания числа отсчетов. На панели «горячих» кнопок (рис. П.21.6) четыре кнопки: настройки принтера, печати формы, возвращения на основную экранную форму и отображения графика, которая перерисовывает график после изменения числа отображаемых отсчетов случайного процесса. Число отсчетов задается на панели 2. На панели 3 отображается график случайного процесса.

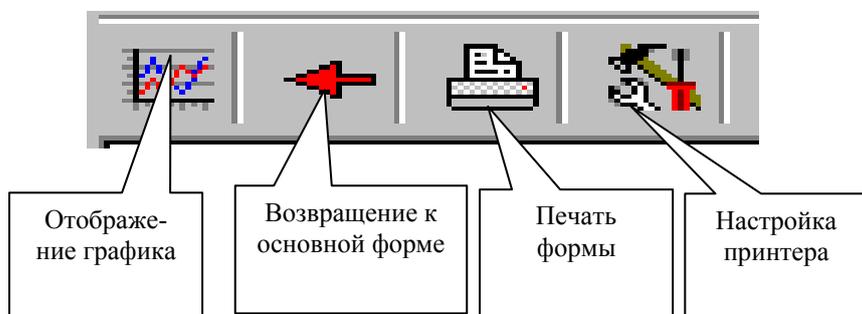


Рисунок П.21.6. Панель «горячих» кнопок экранной формы отображения случайного процесса

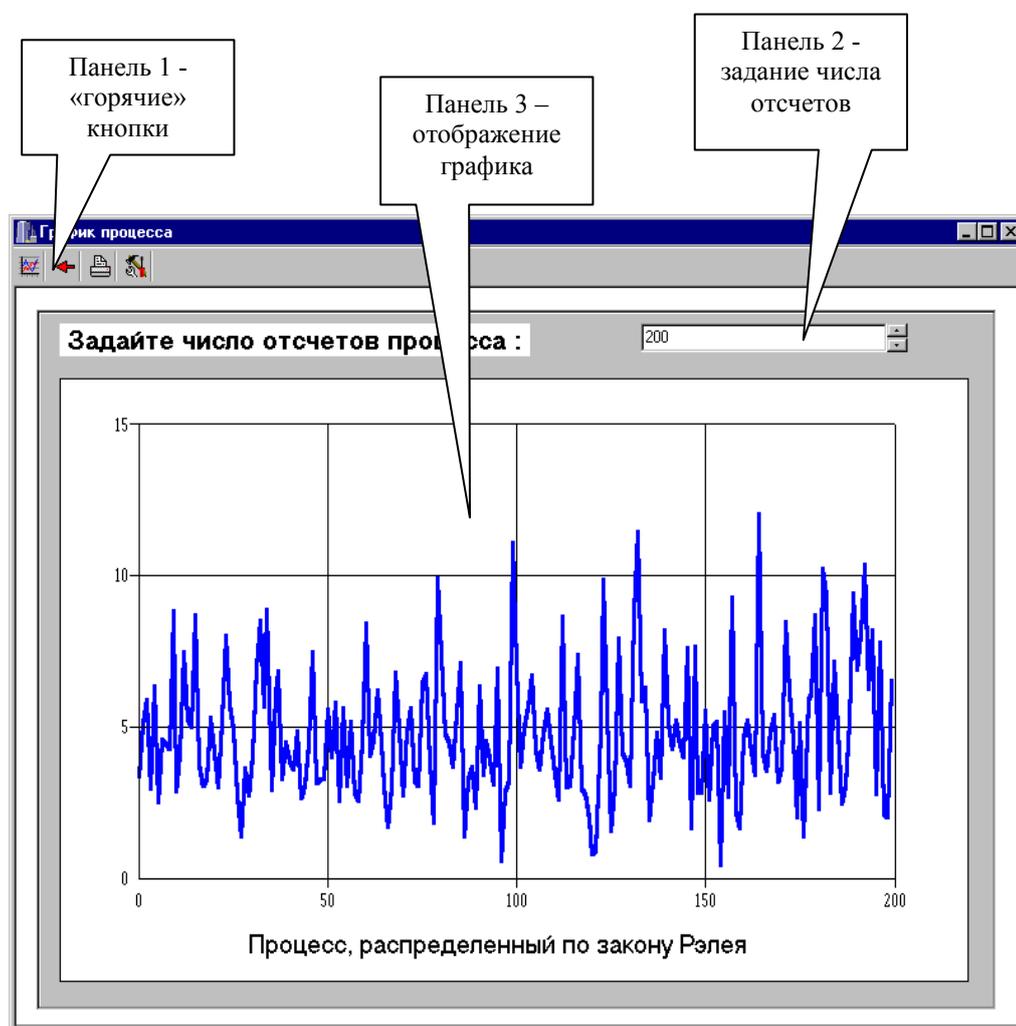


Рисунок П.21.7. Экранная форма отображения случайного процесса

На рис. П.21.8 показана экранная форма расчета и отображения структурной функции. На этой форме присутствуют панель «горячих» кнопок и панель отображения графика структурной функции. На панели «горячих» кнопок есть три кнопки: по-

строения структурной функции, возвращения на основную экранную форму и вызова справки.

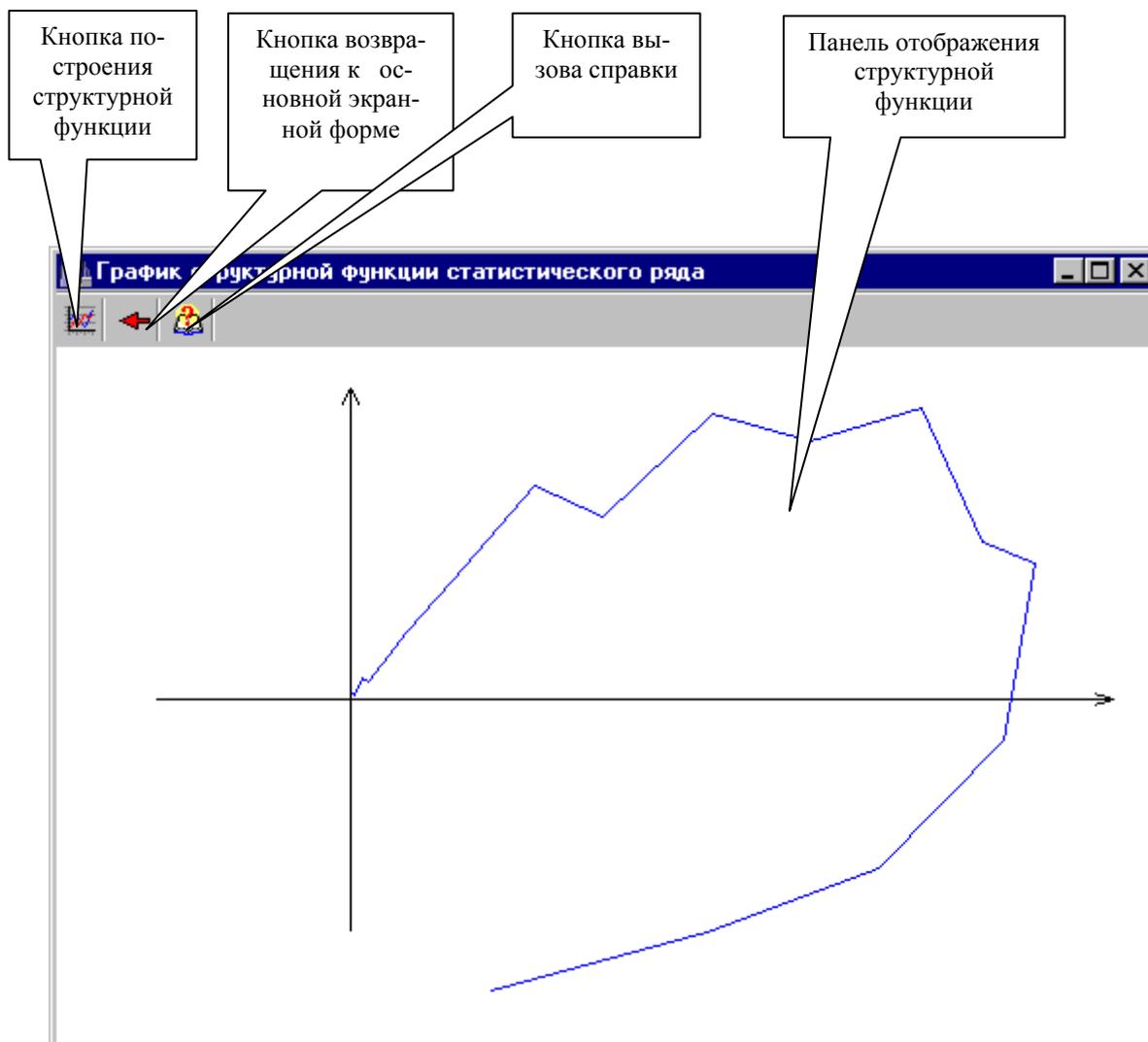


Рисунок П.21.8. Экранная форма расчета и отображения структурной функции случайного процесса

Вторая экранная форма предназначена для реализации блока аппроксимации. Сама форма, показанная на рис. П.21.9, представляет собой панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы. На рис. П.21.10-П.21.12 представлены укрупненные изображения используемых инструментов.

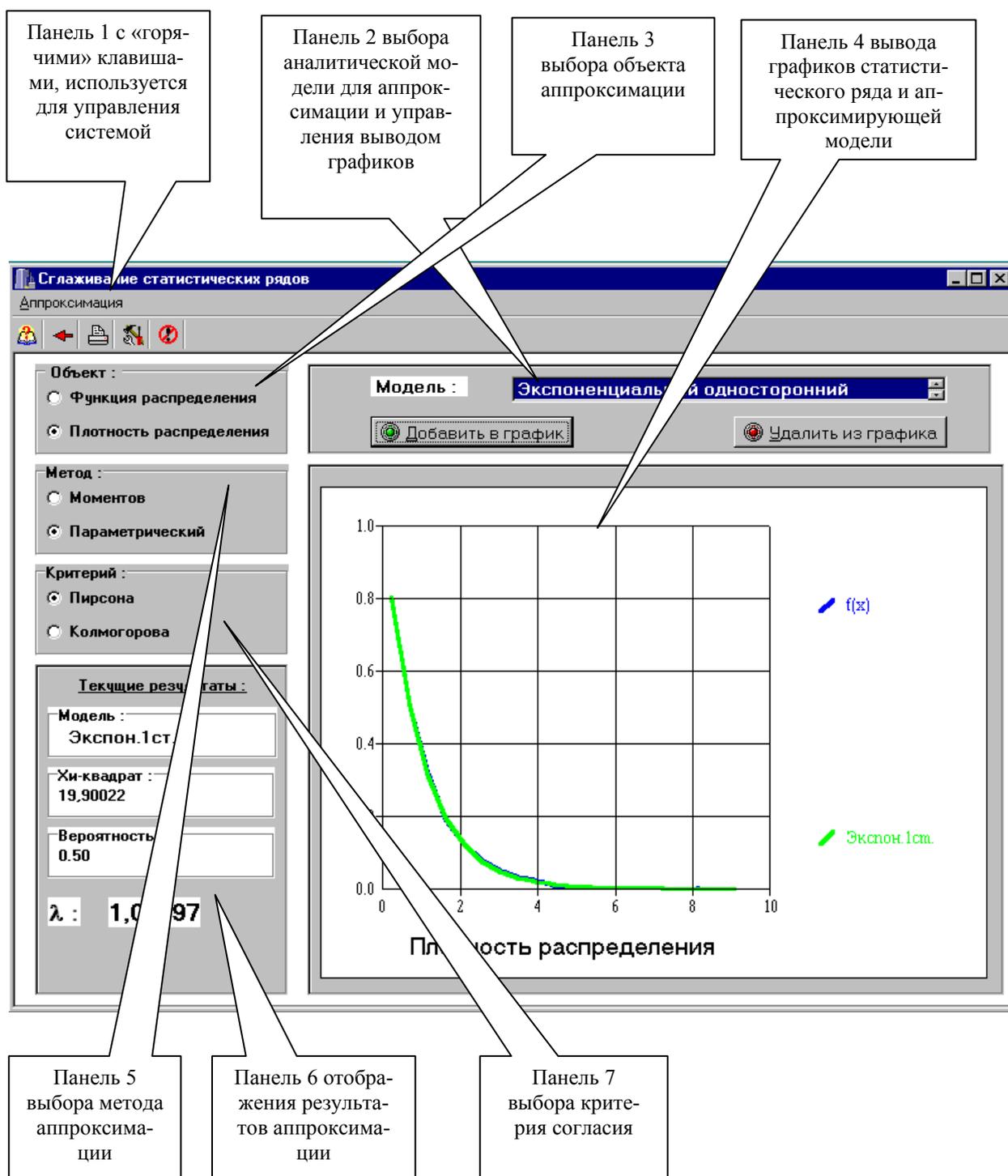


Рисунок П.21.9. Общий вид формы блока аппроксимации

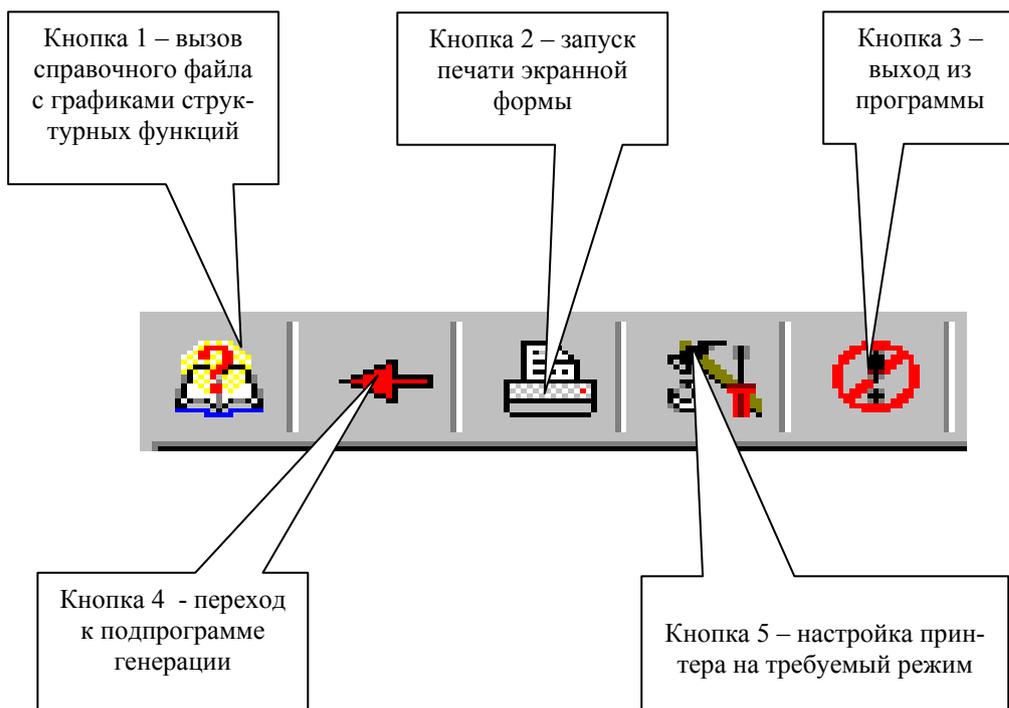


Рисунок П.21.10. Панель инструментов

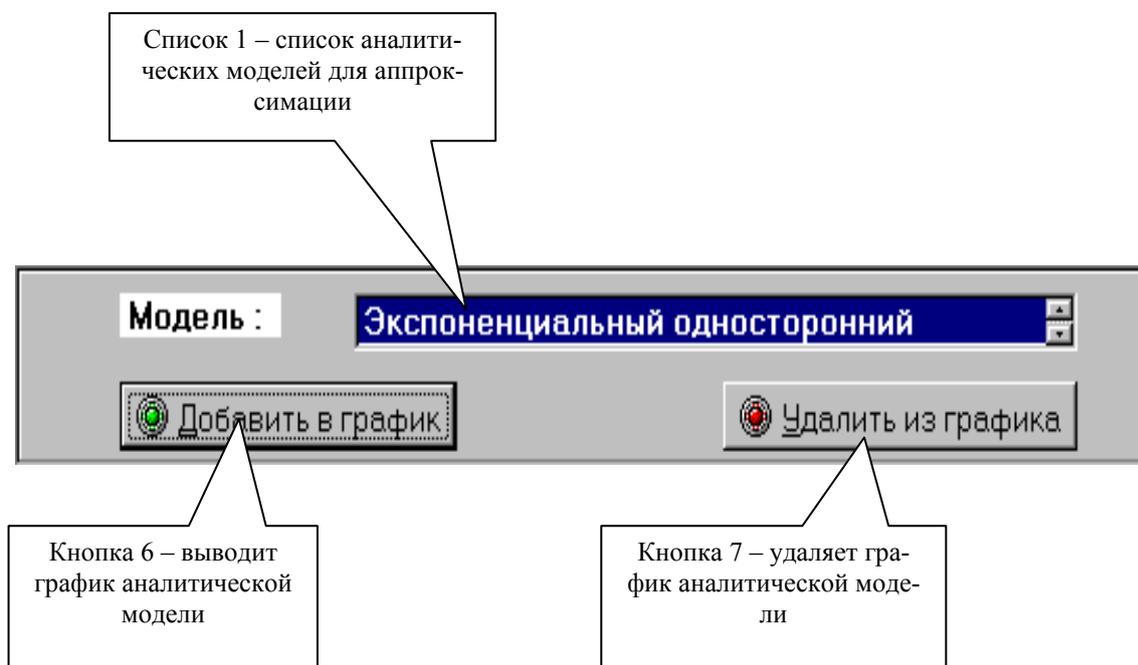


Рисунок П.21.11. Панель выбора аналитической модели

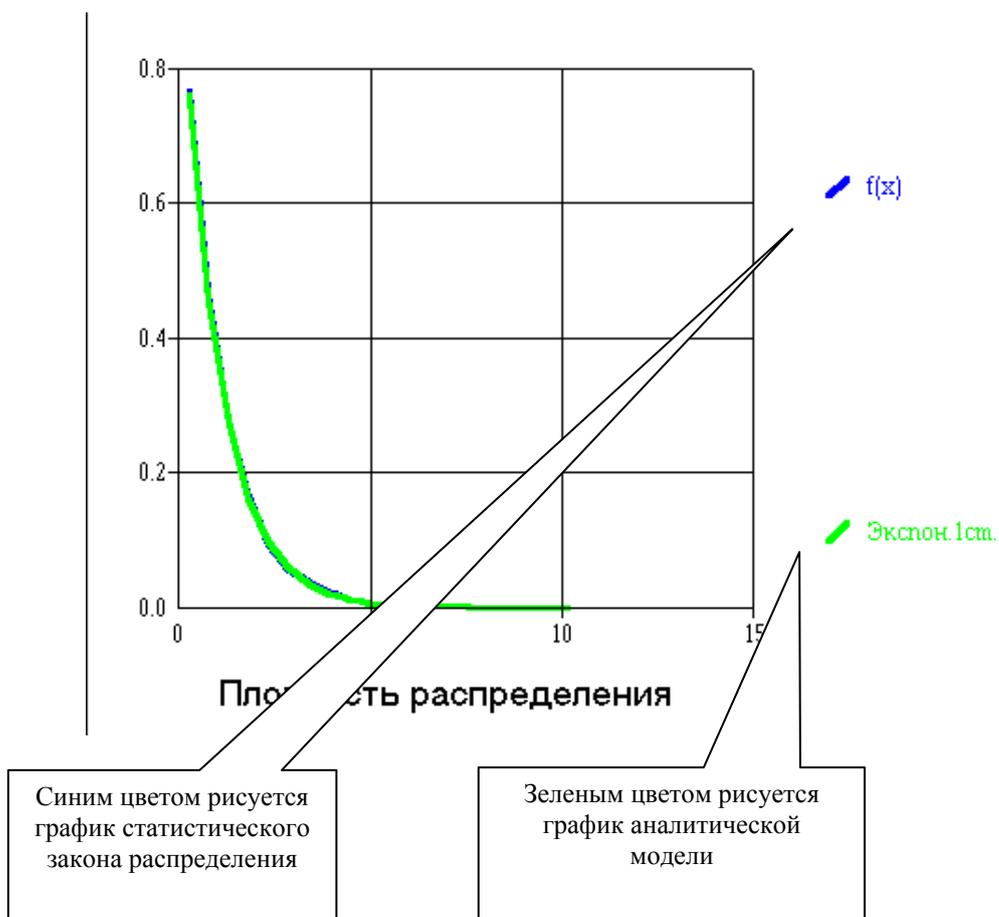
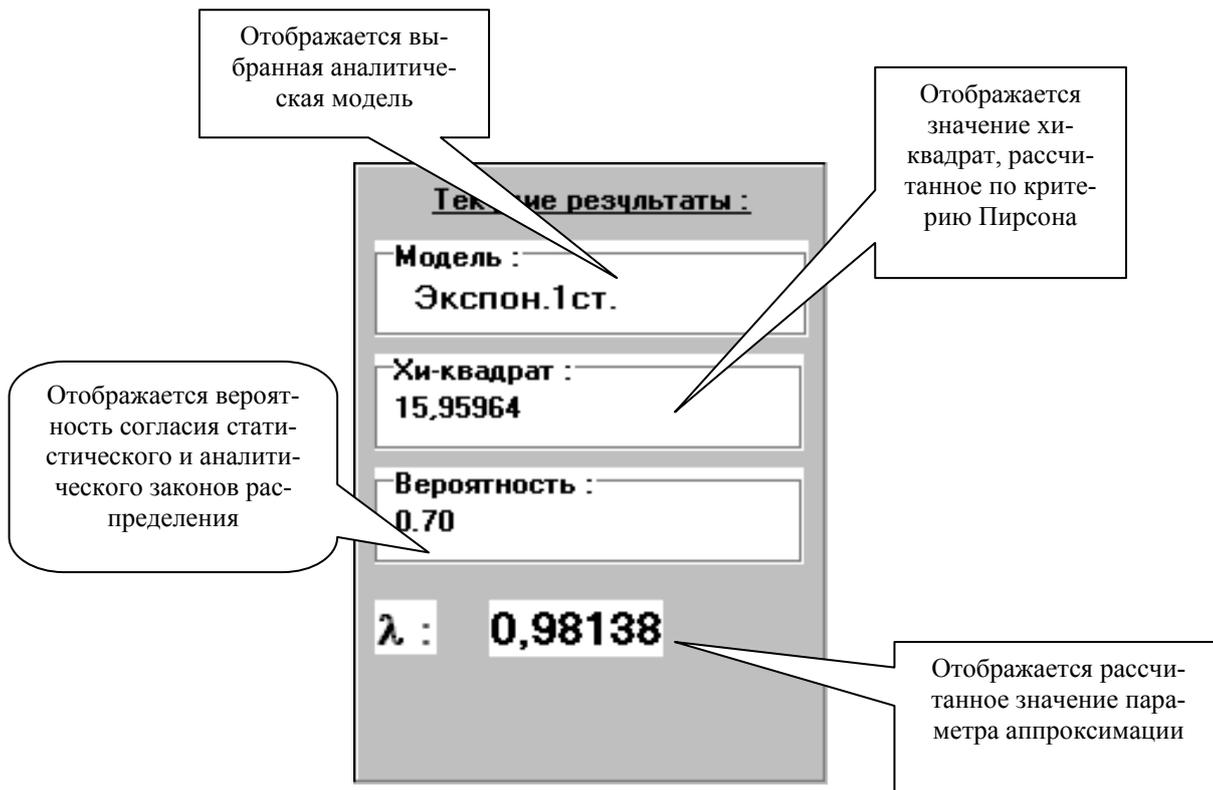


Рисунок П.21.12. Панели вывода результатов

Порядок работы с системой

После загрузки основной экранной формы следует решить, будет ли проведена генерация процесса в самой системе, или будут загружены данные извне. В первом случае на панели 1 основной экранной формы следует выбрать закон распределения из списка законов, с которым будет сгенерирован данный процесс (см. рис. П.21.3). На экранной форме появится панель 2, на которой, в зависимости от закона, следует задать значения одного или двух параметров. На панели 3 нужно задать значения числа отсчетов генерируемого процесса и числа дифференциальных коридоров. После нажатия на кнопку расчетов панели «горячих» кнопок основной экранной формы будет произведен расчет N отсчетов процесса.

Для экспорта данных в программу следует нажать кнопку загрузки из файла на основной экранной форме. Пользователю будет предложено указать загружаемый файл в стандартном диалоговом окне Windows. После указания файла появится экранная форма загрузки данных из файла, в которой следует указать тип передаваемых данных.

На первом этапе задаются данные процесса. На втором этапе оцениваются различные характеристики этого процесса. При нажатии на кнопку отображения расчетов на экране появляются числовые характеристики случайного процесса. На панели 5 нажатием кнопки можно выбрать график одной из трех функциональных характеристик или график самого процесса.

При нажатии на кнопку отображения фазового портрета, загружается экранная форма, позволяющая рассчитать и построить график (см. рис. П.21.8).

В начале работы с экранной формой аппроксимации случайного процесса пользователь уже должен иметь гипотезу о виде закона распределения исследуемого процесса. Этот гипотетический закон распределения выбирается из общего списка законов распределения на панели 2 (см. рис. П.21.9).

После чего, на панели 3 следует выбрать ту функциональную характеристику случайного процесса, по которой будет проводиться аппроксимация: функцию распределения или плотность распределения вероятностей. Выбранная функциональная характеристика графически отображается на панели 4.

На панели 5 выбирается метод нахождения неизвестных параметров теоретического закона распределения:

- метод моментов;
- параметрический метод.

Указав на панели 7 метод оценки качества аппроксимации, следует нажать кнопку 6 на панели 2. По нажатию этой кнопки происходит нахождение неизвестных параметров теоретического закона распределения, и результаты отображаются на панелях 4 и 6.

На панели 4 рисуется выбранная функциональная характеристика теоретического закона распределения, а на панели 6 показывается рассчитанное значение χ^2 (критерий Пирсона) или λ (критерий Колмогорова) и значение вероятности того, что расхождение между статистическим и теоретическим законами распределения можно объяснить случайными причинами.

Если вычисленное значение вероятности не удовлетворяет пользователя, то, нажав кнопку 7, он может убрать график функциональной характеристики теоретического закона распределения с панели 4 и повторить результаты расчёта.

Для примера на рис. П.21.13 приведены результаты определения параметров распределения закона Вейбулла.

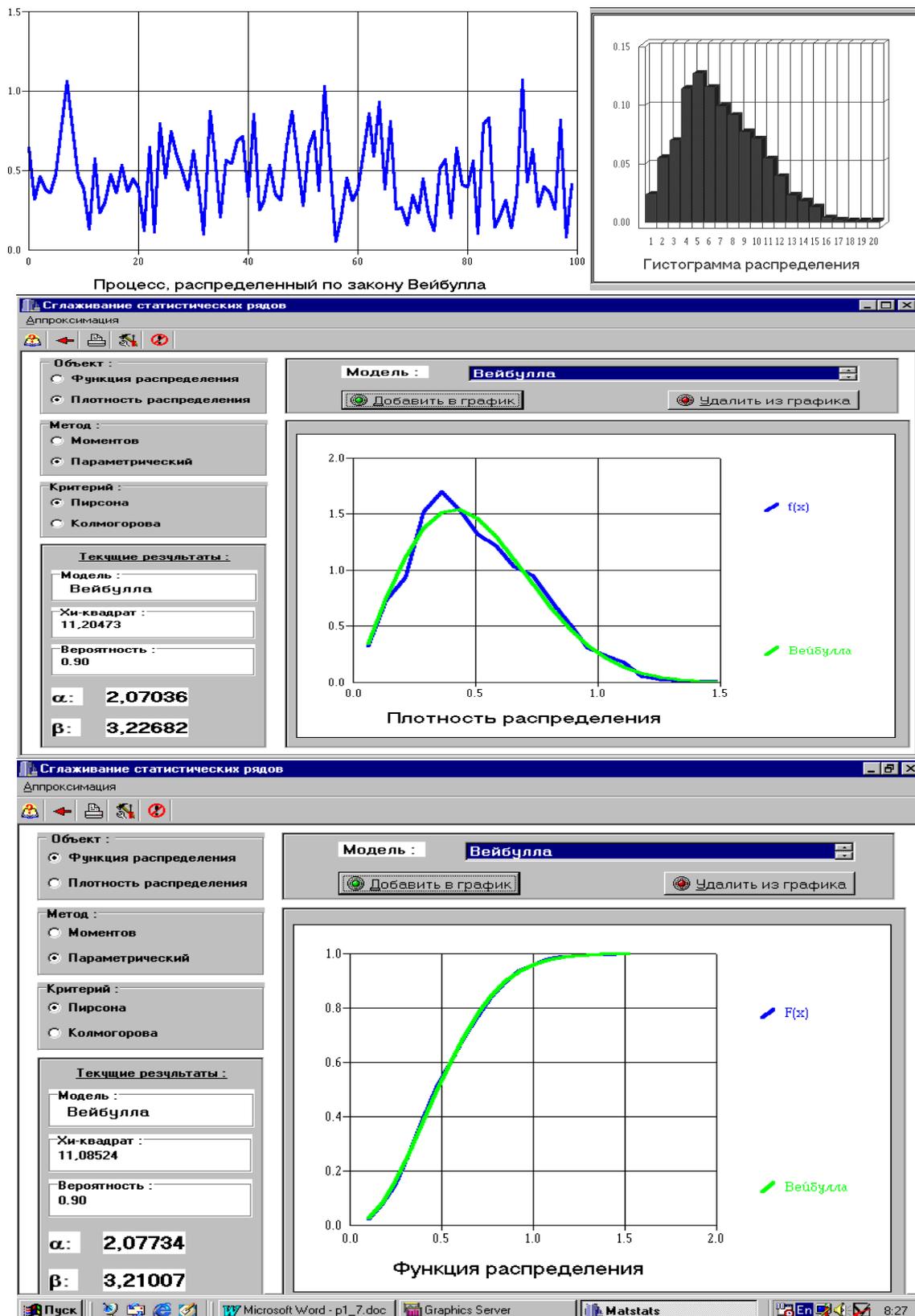


Рисунок П.21.13. Результаты определения параметров закона распределения Вейбулла

**Подсистема генерирования псевдослучайных последовательностей
автоматизированной системы аппроксимативного анализа
законов распределения**

Подсистема генерирования ПСП с заданным законом распределения состоит из трех частей [9]:

- генерирования ПСП методом обратной функции;
- методом линейной интерполяции обратной функции;
- учебного варианта генерирования.

Отметим, что данные могут генерироваться как в самой подсистеме, так и вводиться извне.

Данные, получаемые в первой подсистеме, передаются на вход подсистемы первичной статистической обработки, а также на вход подсистемы аппроксимации [7-8]. В обоих случаях передается объем выборки N и массив отсчетов ПСП.

Подсистема первичной статистической обработки включает в себя:

- оценку числовых статистических характеристик;
- построение гистограммы;
- построение плотности распределения вероятностей;
- построение функции распределения.

В данную подсистему передается число отсчетов N , массив отсчетов ПСП, число дифференциальных коридоров M . В ходе работы данной подсистемы производится оценка следующих числовых характеристик:

- математического ожидания;
- дисперсии;
- центральных моментов третьего и четвертого порядков;
- коэффициентов асимметрии и эксцесса.

Выходными данными для подсистемы являются число дифференциальных коридоров, минимальное и максимальное значение отсчетов и массив вероятностей попадания отсчетов в коридоры. Эти данные попадают на вход подсистемы аппроксимации.

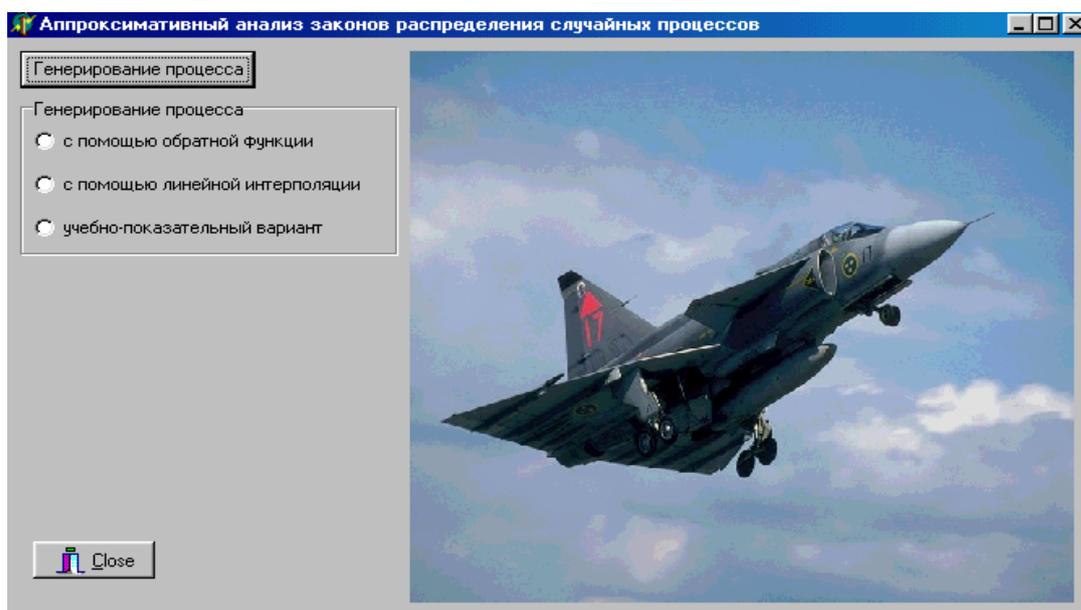


Рисунок П.22.1. Главная экранная форма

При запуске программы на экране появляется экранная форма, изображенная на рисунке П.22.1. С нее осуществляется переход к генерированию процесса. Возможны три варианта перехода: к генерированию процесса методом обратной функции, приближенным методом линейной интерполяции и к учебно-показательному варианту генерирования.

Форма 1, реализующая генерирование процесса методом инверсного преобразования (с помощью обратной функции), показана на рисунке П.22.2. Она представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, меню и клавиши, позволяющее реализовывать различные функции системы.

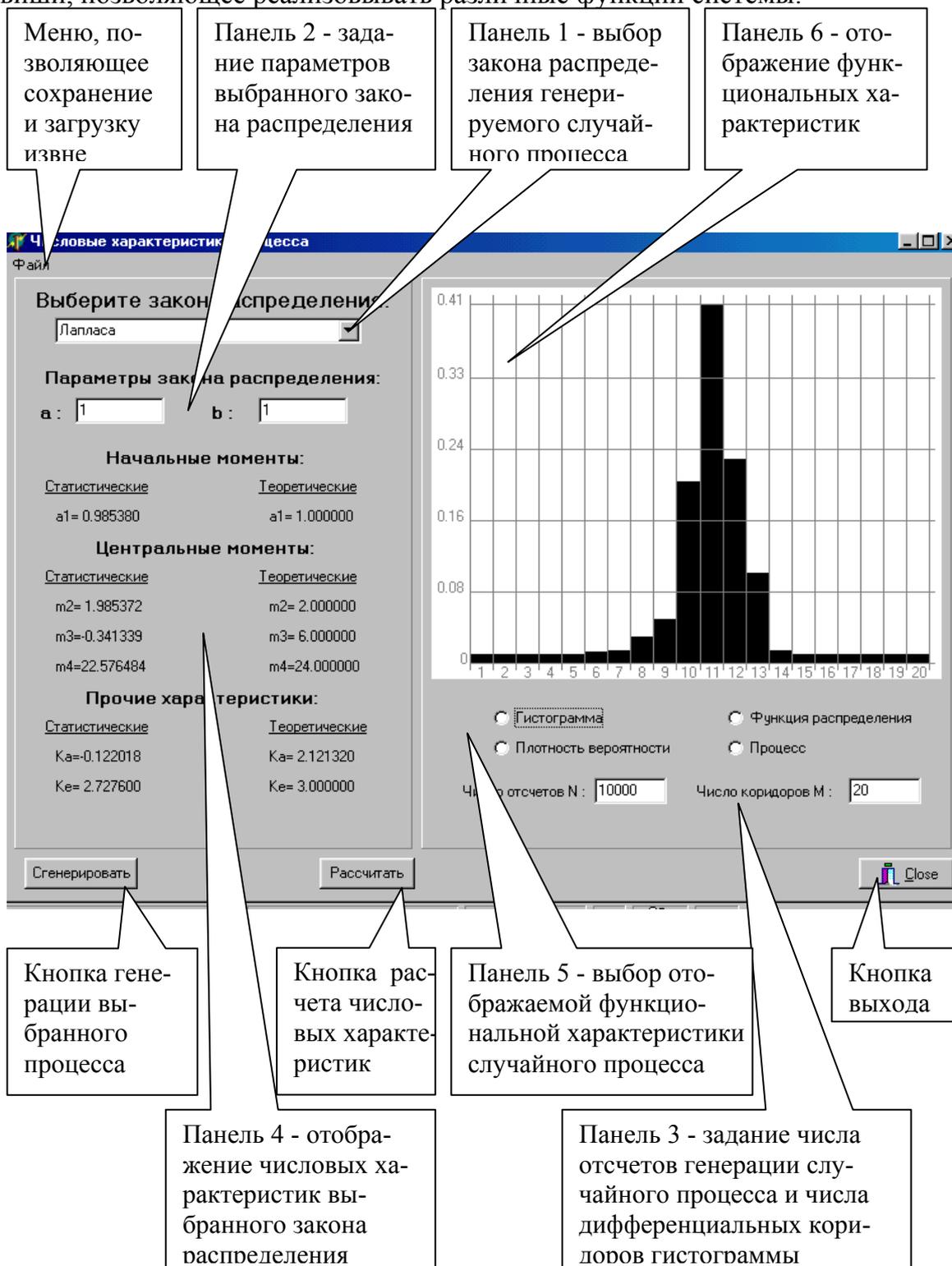


Рисунок П.22.2. Интерфейс экранной формы 1

На форме 1 присутствуют следующие элементы:

- меню, с помощью которого возможно сохранение и загрузка информации в системе;
- панель 1 - выбор закона распределения; в случае программного задания выбранный закон распределения будет использоваться для генерации процесса;
- панель 2 - позволяет задать значение одного или двух (в зависимости от закона) параметров данного закона распределения;
- панель 3 - позволяет указать число отсчетов программно генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 - служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного процесса с заданным законом распределения;
- панель 5 - позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 - отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

Форма 2, реализующая генерирование процесса приближенным методом (с помощью линейной интерполяции функции распределения), показана на рисунке П.22.3.

Форма 3, реализующая учебно-показательный вариант генерирования случайного процесса, показана на рисунке П.22.4.

На форме 2 присутствуют следующие элементы:

- меню, с помощью которого возможно сохранение и загрузка информации в системе;
- панель 1 - выбор закона распределения; в случае программного задания выбранный закон распределения будет использоваться для генерации процесса;
- панель 2 - позволяет задать значение одного или двух (в зависимости от закона) параметров данного закона распределения а также допустимую погрешность интерполяции функции распределения;
- панель 3 - отображает координаты рассчитанных узловых точек линейно интерполируемой функции распределения;
- панель 4 - служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного процесса с заданным законом распределения;
- панель 5 - позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 - позволяет указать число отсчетов программно генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 7 - отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

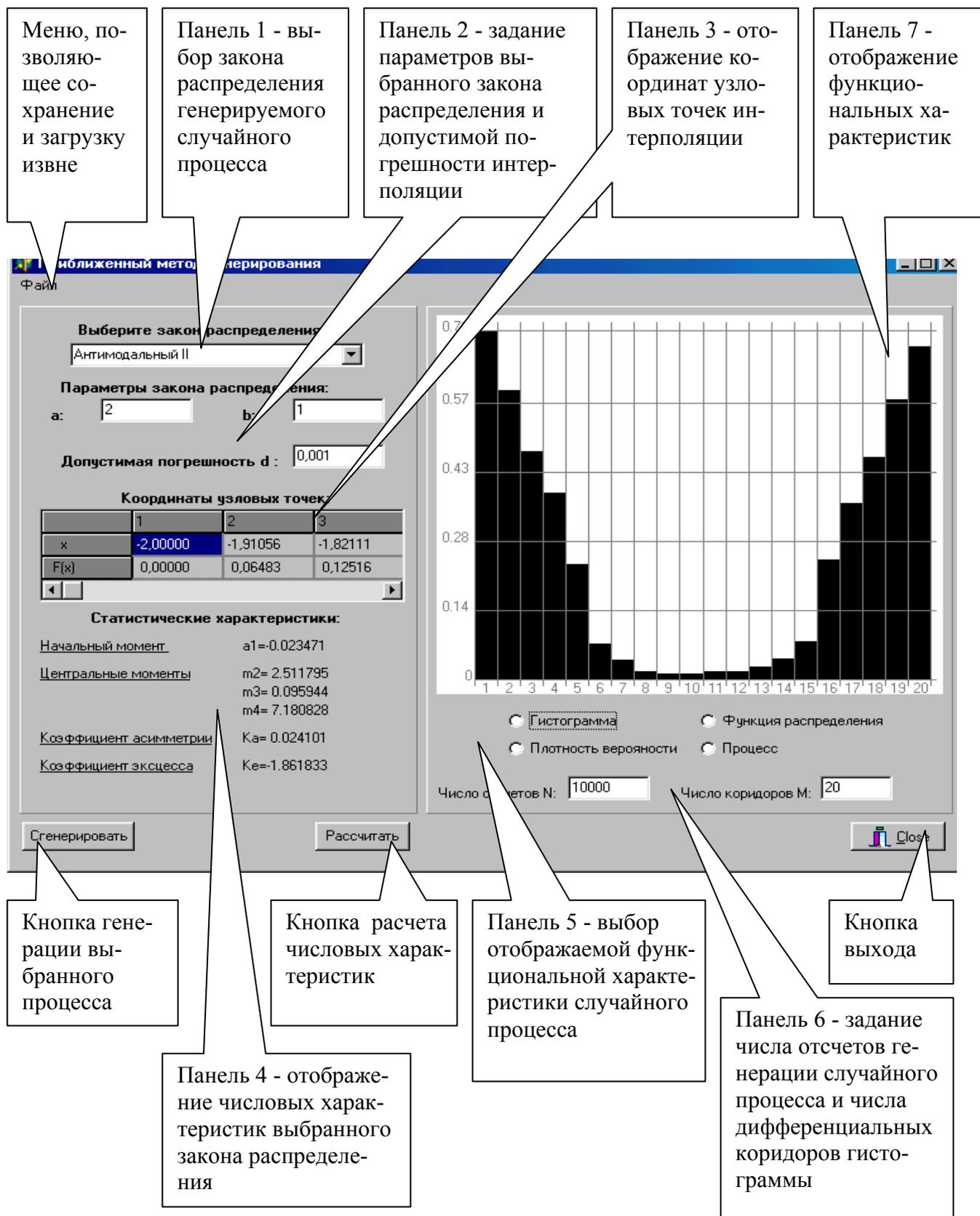


Рисунок П.22.3. Интерфейс экранной формы 2 генерирования методом линейной интерполяции и оценки статистических характеристик случайного процесса

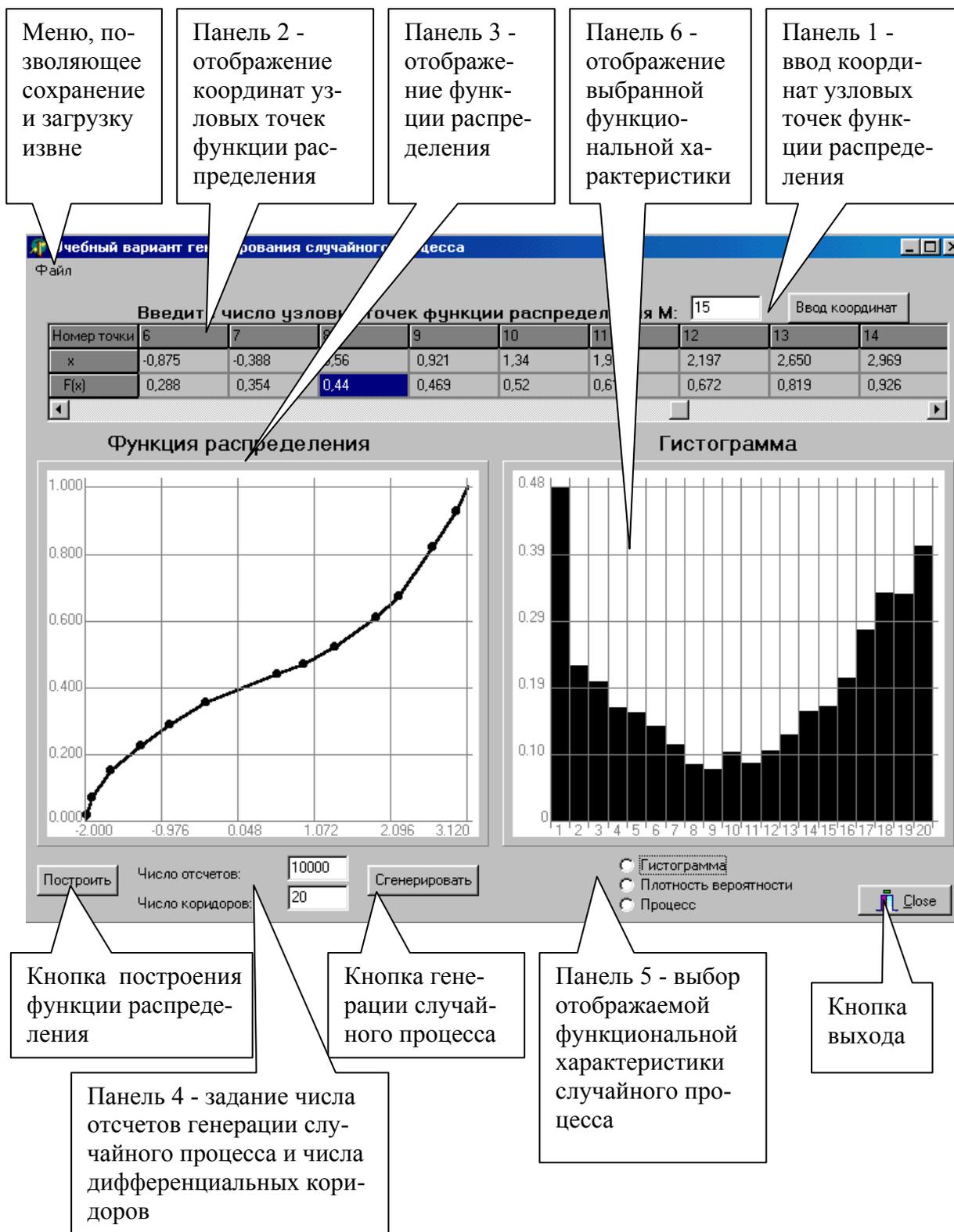


Рисунок П.22.4. Интерфейс экранной формы 3 - учебно-показательный вариант генерирования случайного процесса

На форме 3 присутствуют следующие элементы:

- меню, с помощью которого возможно сохранение и загрузка информации в системе;
- панель 1 – осуществляет ввод количества координат узловых точек функции распределения;
- панель 2 - отображает координаты узловых точек функции распределения;
- панель 3 - отображает функцию распределения и позволяет пользователю её редактирование;
- панель 4 - позволяет указать число отсчетов программно генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 5 - позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 - отображает выбранную функциональную характеристику.

На рисунке 6 подробно показано меню формы 1 и формы 2. Оно состоит из следующих пунктов:

- выход - выход из формы 2 и возвращение к основной форме;
- сохранить - сохранение выбранной характеристики:
 - ✓ гистограммы;
 - ✓ плотности распределения;
 - ✓ функции распределения;
 - ✓ отсчетов процесса;
- открыть - загрузка из файлов выбранной характеристики.

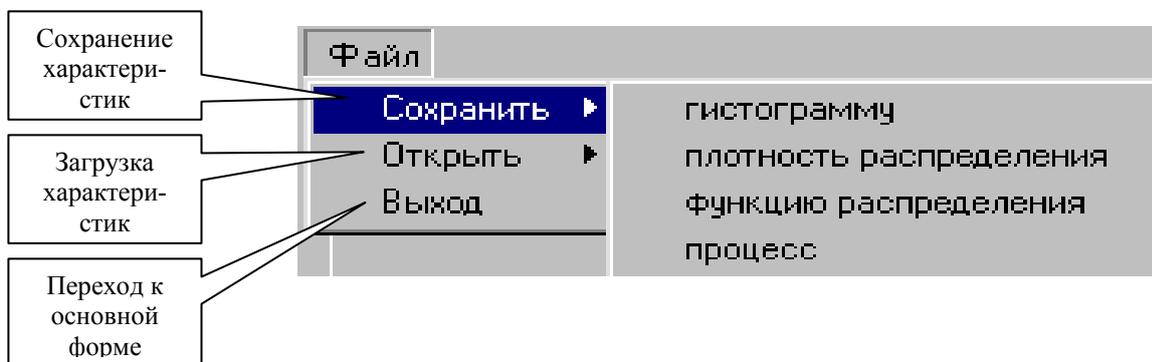


Рисунок П.22.5. Меню формы генерирования процесса методом линейной интерполяции функции распределения

Порядок работы. После загрузки главной экранной формы можно перейти либо к генерированию случайного процесса, либо к аппроксимации процесса. При нажатии кнопки «Генерирование процесса» на главной форме возможен переход к формам генерирования. Форма 1 - генерирование с помощью обратной функции; форма 2 - генерирование приближенным методом с использованием линейной интерполяции функции распределения; форма 3 - учебный вариант генерирования.

При переходе к форме 2 (рисунок П.22.3) необходимо выбрать из списка на панели 1 закон распределения, по которому будет генерироваться процесс; указать параметры процесса на панели 2; указать количество отсчетов случайного процесса и число дифференциальных коридоров гистограммы на панели 6. При нажатии кнопки «Сгенерировать» отображаются координаты узловых точек функции распределения

и генерируется случайный процесс. При нажатии кнопки «**Рассчитать**» рассчитываются и отображаются на панели 4 числовые характеристики сгенерированного случайного процесса. На панели 5 выбирается и рассчитывается функциональная характеристика. При выборе на панели 5 указателя «**Процесс**» появляется форма отображения случайного процесса (рисунок П.22.6).

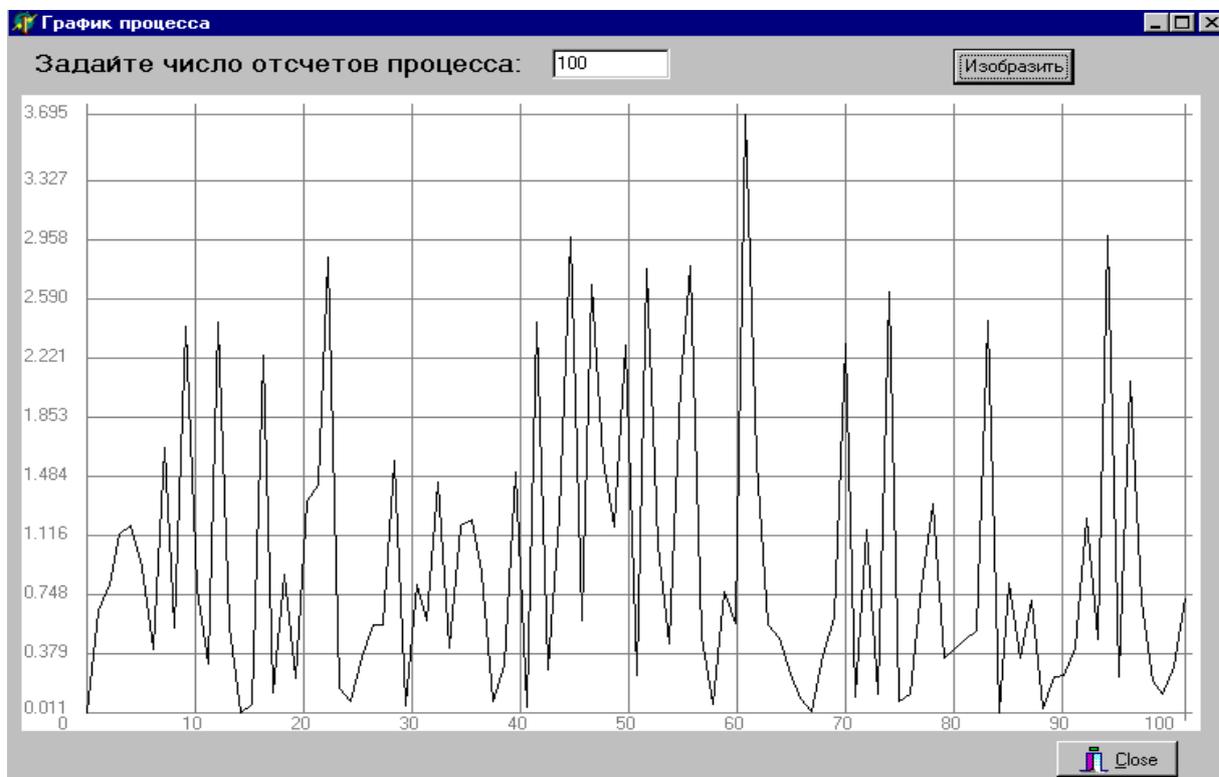


Рисунок П.22.6. Пример реализации случайного процесса

Загрузка данных извне и сохранение функциональных характеристик процесса осуществляется при использовании пунктов главного меню.

При переходе к форме 1 (рисунок П.22.2) работа ведется аналогично по описанному выше алгоритму. Отличие - не отображаются координаты узловых точек функции распределения, поскольку она задается аналитически.

При переходе к форме 3 (рисунок 5) на панели 1 необходимо ввести количество узловых точек функции распределения и нажать кнопку «**Ввод координат**». Затем на панели 2 ввести координаты узловых точек. При нажатии на кнопку «**Построить**» на панели 3 отображается введенная функция распределения. Существует возможность редактирования функции распределения. Пользователь может передвинуть узловые точки с помощью мыши. При этом на панели 2 отображаются новые координаты узловых точек. При нажатии кнопки «**Сгенерировать**» генерируется случайный процесс. На панели 5 выбирается и рассчитывается функциональная характеристика. При выборе на панели 5 указателя «**Процесс**» появляется форма отображения случайного процесса. Выход к главной экранной форме осуществляется нажатием кнопки «**Close**» или выбором в меню пункта «**Выход**».

Загрузка координат узловых точек извне и сохранение функциональных характеристик процесса осуществляется при использовании пунктов главного меню.

Приведем примеры генерирования ПСП с заданным законом распределения с помощью разработанной системы.

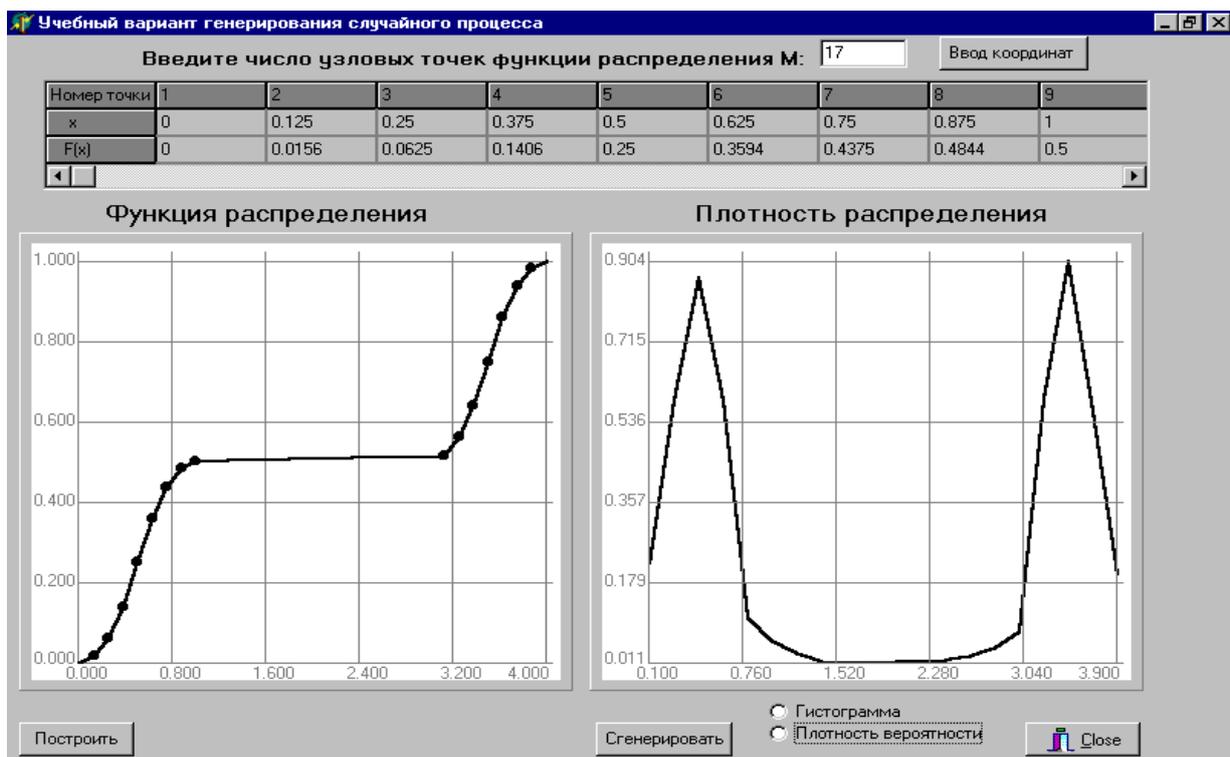


Рисунок П.22.7. Результаты генерирования ПСП с двумодальным законом распределения

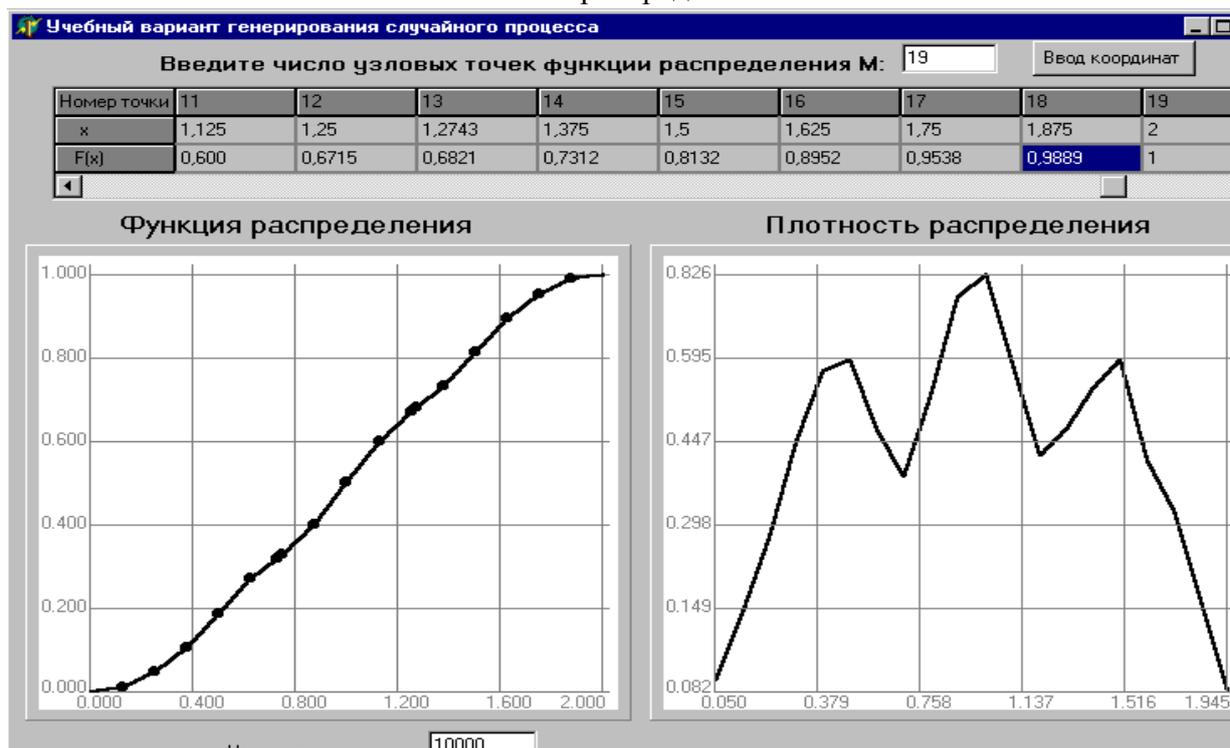


Рисунок П.22.8. Результаты генерирования ПСП с трёхмодальным законом распределения

Из анализа рисунков П.22.7-П.22.8 видно, что с помощью разработанной автоматизированной системы возможно генерирование ПСП с произвольным законом распределения. Отметим, что функция распределения ПСП может быть задана аналитически, таблично и в графическом виде.

Форматы данных, используемых в системе, приведены в таблице П.22.1.

Таблица П.22.1

Процесс	Гистограмма	Координаты узловых точек	Функция распределения	Плотность распределения вероятностей
N	N	M	M	N
X(1)	M	X(1)	X(1)	M
X(2)	X_{\min}	F(1)	F(1)	X_{\min}
X(3)	X_{\max}	X(2)	X(2)	X_{\max}
X(4)	H(1)	F(2)	F(2)	f(1)
X(6)	H(2)	f(2)
...	...	X(M)	X(M)	...
X(N)	H(N)	F(M)	F(M)	f(M)

Ниже в таблице П.22.2 приведены примеры вводимых и выводимых данных для генерирования ПСП, распределенного по закону Вейбулла.

Таблица П.22.2

Процесс	Гистограмма	Координаты узловых точек	Функция распределения	Плотность распределения вероятностей
10000	10000	21	21	10000
1.01925	20	0.00607	0.00607	20
1.38914	0.09360	0	0.00000	0.09360
1.31604	3.41987	0.18114	0.18114	3.41987
0.39389	0.18289	0.03202	0.03202	0.18289
1.04943	0.50295	0.35620	0.35620	0.50295
...
1.00325	0.01001	1	1.00000	0.01001

АИС для аппроксимативного анализа автокорреляционно-спектральных характеристик

Автоматизированная система состоит из следующих подсистем:

- задания входных воздействий;
- генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР);
- первичной и вторичной статистической обработки;
- идентификации КФ;
- аппроксимативного корреляционного анализа;
- аппроксимативного спектрального анализа.

Рассмотрим функции каждой подсистемы в отдельности.

Подсистема задания входных воздействий состоит из двух частей: генерирования псевдослучайной последовательности (ПСП) с заданным видом КФ [2] и ввода данных из файла.

Данные, получаемые в первой подсистеме, поступают на вход подсистемы генерирования НВР, а также на вход подсистемы первичной статистической обработки. В обоих случаях передается объем выборки N , интервал дискретизации Δt_0 и массив отсчетов СП.

Подсистема генерирования НВР включает в себя следующие способы получения НВР: p -преобразование, адаптивно-временная дискретизация, дискретизация с «дрожанием» и их комбинации [13]. А на выход поступают два массива: массив времен (меток времени) и массив соответствующих им отсчетов СП, а также объем выборки N и интервал дискретизации Δt_0 .

Подсистема первичной статистической обработки включает в себя оценку числовых характеристик, центрирование и нормирование СП и оценку КФ. В данную подсистему передаются массивы меток времени и соответствующих им отсчетов СП, объем выборки N и интервал дискретизации Δt_0 . При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции (ИКФ) [13]. Выходными данными данной подсистемы являются количество отсчетов КФ, интервал дискретизации Δt_0 и массив отсчетов КФ. Эти данные поступают на входы подсистем идентификации КФ и аппроксимации КФ.

Подсистема идентификации КФ состоит из двух частей: построения и анализа фазовых портретов и проверки качества идентификации. Данные в эту подсистему поступают из подсистемы первичной статистической обработки.

Используя переданные значения отсчетов КФ, в данной подсистеме производится построение фазового портрета данной КФ, а затем его последовательное сравнение с фазовыми портретами типовых КФ, используемых в системе. На основании результатов сравнения выбирается одна из типовых моделей КФ, при помощи которой в следующей подсистеме производится аппроксимация исходной КФ. Проверка качества идентификации производится на основании расчета квадратической погрешности фазового портрета.

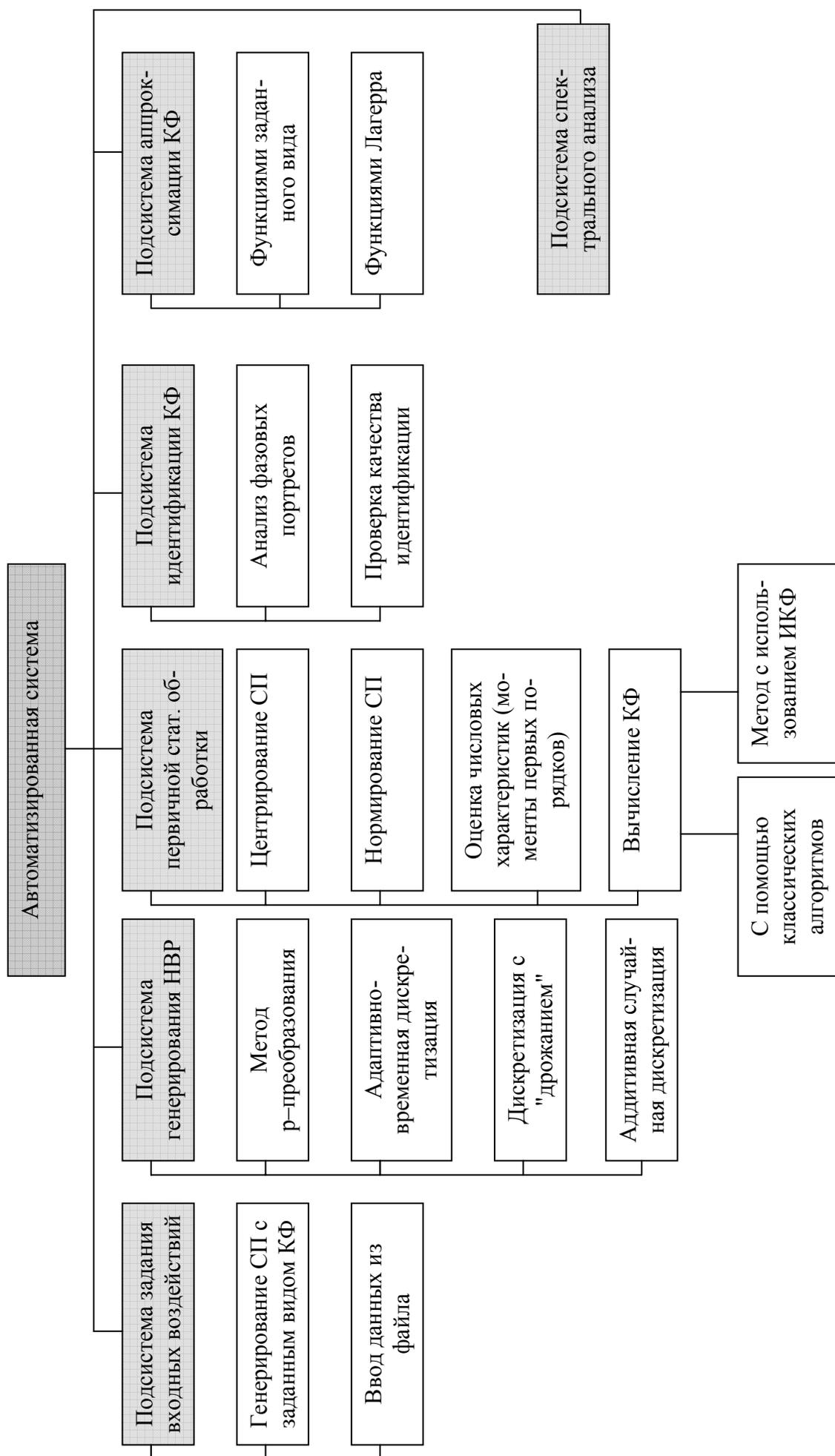


Рисунок П.23.1. Структура автоматизированной системы

Подсистема аппроксимативного анализа состоит из двух частей: аппроксимация КФ функциями заданного вида и функциями Лагерра с возможностью построения спектральной плотности мощности по параметрам модели.

На вход подсистемы аппроксимативного анализа поступают отсчеты КФ и вид аппроксимирующей функции (для случая аппроксимации функциями заданного вида) или количество членов разложения (при аппроксимации функциями Лагерра).

Используя переданные значения, в данной подсистеме вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации. Затем, по желанию исследователя, возможно построение спектральной плотности мощности по параметрам модели.

Благодаря такому блочному построению структуры программы в систему можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Схема алгоритма приведена в приложении П.9.

Программные требования системы: Microsoft Windows'98-2000; необходимые библиотеки поддержки Java.

Аппаратные требования системы: Процессор Pentium-166-MMX и выше; ОЗУ 32Мб; свободное место на диске 50Мб, разрешение монитора 1024×768 точек.

Программная реализация

Начало работы

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис. П.23.2. В первую очередь следует выбрать тип дискретизации СП (регулярная или нерегулярная) и нажать кнопку «**Новая модель**» для генерирования случайного процесса. Или же нажать кнопку «**Загрузить КФ из файла**» и выбрать нужный файл с данными.



Рисунок П.23.2. Вид формы начала работы в системе

Генерирование СП с заданным видом КФ

На рис.П.23.3 можно увидеть вид формы генерирования СП с заданным видом КФ при регулярной дискретизации.

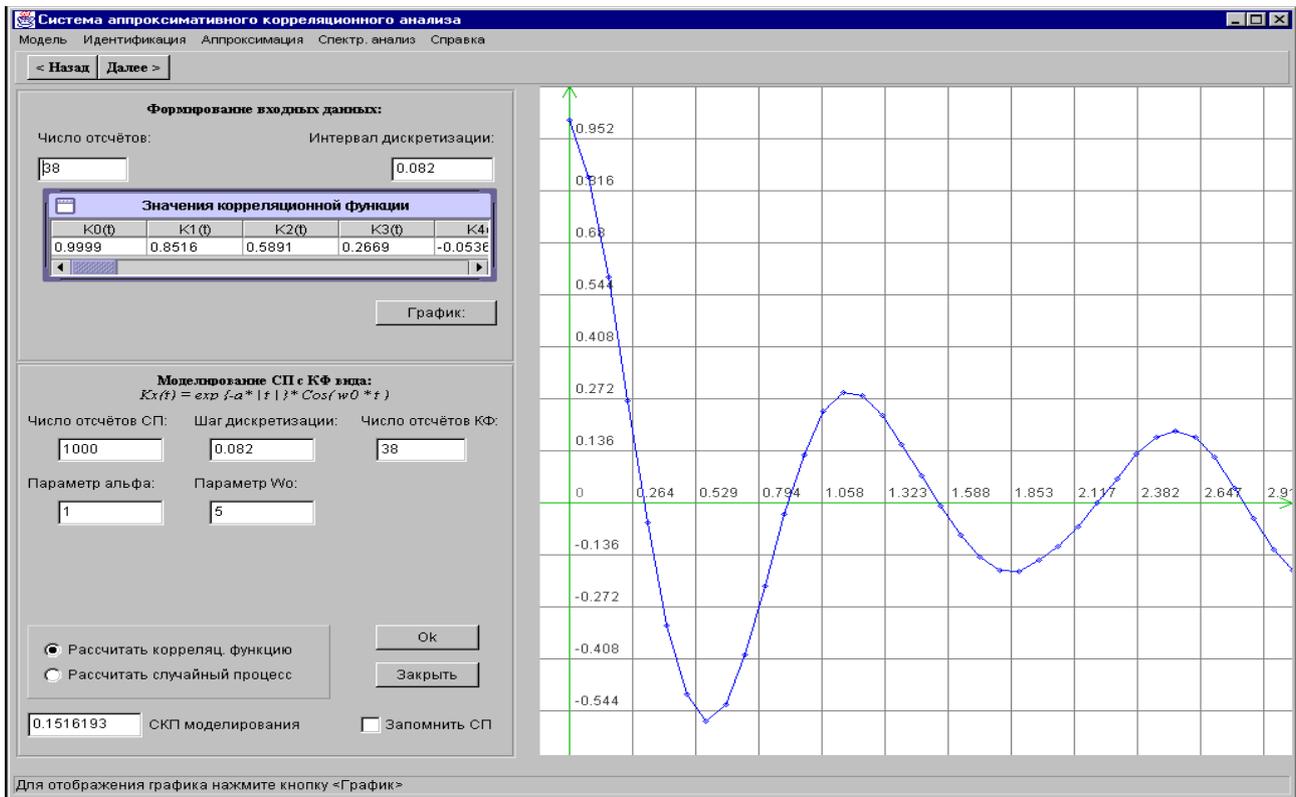


Рисунок П.23.3. Вид формы генерирования СП с заданным видом КФ

Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет регулярную дискретизацию в форме начала работы в системе.

Основными элементами формы расчета КФ при регулярной дискретизации СП являются:

- панель главного меню,
- кнопки движения по программе,
- панель данных,
- панель задания параметров моделируемого СП,
- панель графиков функций.

Перечислим функции, которые выполняют нижеследующие пункты главного меню:

Модель – выбор вида КФ моделируемого СП (один из шести), работа с файлами (запись в файл и открытие файла), завершение работы с программой;

Идентификация – выбор способа идентификации (автоматическая – позволяет строить фазовые портреты КФ и на основании их схожести с фазовыми портретами стандартных КФ выбирать вид аппроксимирующей модели, аналитическая – позволяет выбирать вид КФ на основании визуальных представлений стандартных КФ);

Аппроксимация – выбор способа аппроксимации (функциями заданного вида – при схожести исследуемой КФ с одним из стандартных ее видов, функциями Лагерра – в случае, если КФ не похожа ни на один из предложенных ее видов);

Справка – предоставление справки о программе.

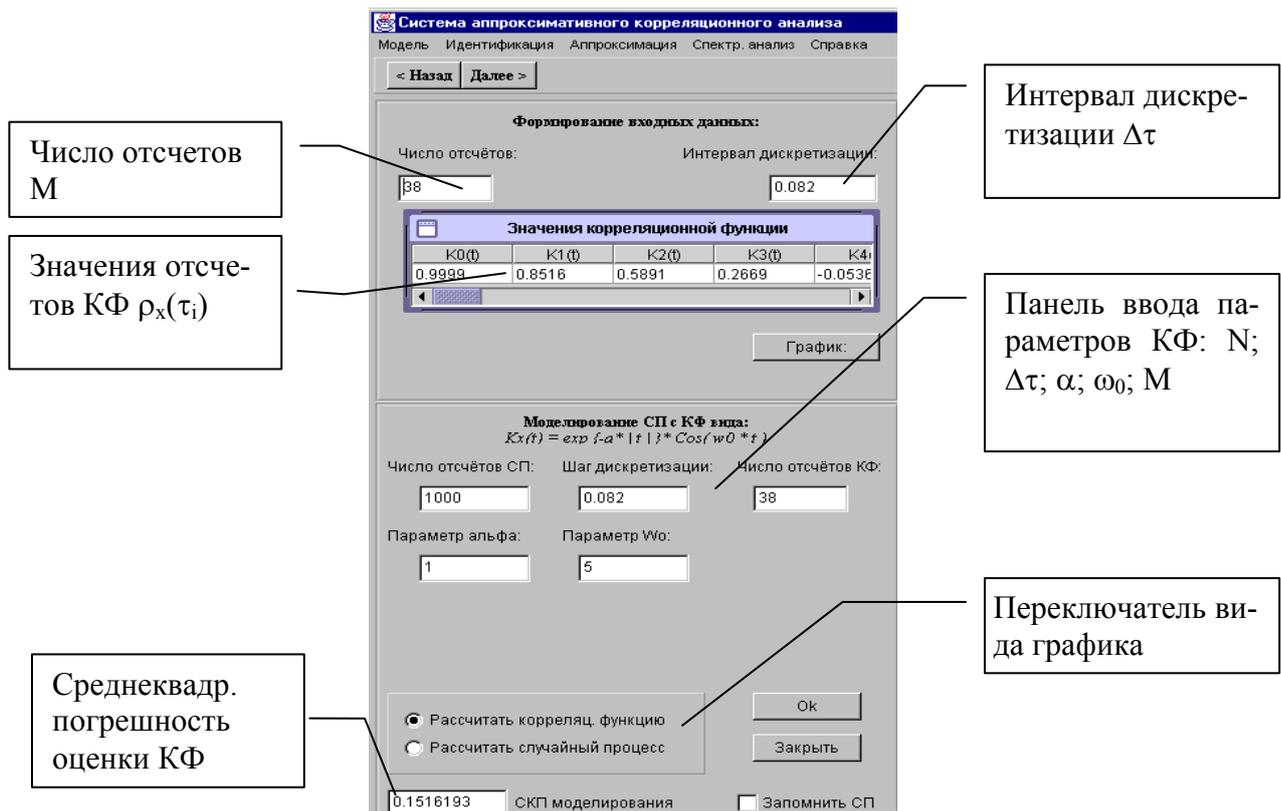


Рисунок П.23.4. Описание основной формы

Кнопки движения по программе играют роль «гида», то есть позволяют пользователю, не знакомому с программой, двигаться в нужном направлении, которое соответствует последовательности действий, приведенных в схеме алгоритма (см. приложение П.17).

Панель данных предназначена для ввода и хранения отсчетов СП или отсчетов КФ (в зависимости от того, в каком положении находится переключатель вида графика). Отсчеты КФ (или СП) хранятся в таблице на панели данных (см. рис. П.23.3). Данные в эту таблицу заносятся автоматически после того, как выбран вид КФ и смоделирован СП. В этом случае график КФ (или СП) строится автоматически. При желании пользователь может вручную задать значения отсчетов, тогда ему придется нажать на кнопку «График» для того, чтобы отобразить график функции, построенный по введенным отсчетам.

На панели задания параметров моделируемого СП находятся поля ввода следующих параметров:

- число отсчетов СП,
- шаг дискретизации,
- число отсчетов КФ,
- параметр α ,
- параметр ω_0 .

Для корректного расчета шага дискретизации и минимального числа отсчетов КФ необходимо щелкнуть по панели задания параметров правой клавишей «мыши» и после появления всплывающего меню выбрать нужную погрешность моделирования, после чего вышеуказанные параметры автоматически будут пересчитаны для конкретного случая.

Итак, для начала работы в данной форме необходимо выбрать в пункте меню «Модель» (подменю «Моделировать СП с КФ заданного вида:») нужный вид СП.

Затем, задав необходимые параметры модели и скорректировав шаг дискретизации и число отсчетов КФ, моделировать СП. Для этого нужно нажать кнопку «ОК».

После окончания моделирования на панели графиков появится изображение СП или соответствующей ему КФ, в таблице на панели данных будут занесены отсчеты СП (или КФ), а в поле вывода погрешности занесется среднеквадратическая погрешность моделирования.

Генерирование НВР с заданным видом КФ

Общий вид формы генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР) с заданным видом КФ дан на рис. П.23.5. Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет нерегулярную дискретизацию в форме начала работы системы.

Для начала работы в данной форме необходимо сначала выбрать вид КФ моделируемого СП (пункт меню «Модель»). Задать параметры модели (α , ω_0), число отсчетов СП, интервал дискретизации и число отсчетов КФ. Далее выбрать модель и параметры нерегулярной дискретизации, например, значение вероятности p – преобразования. После данных приготовлений следует нажать кнопку «ОК» для моделирования СП с заданным видом КФ.

Идентификация вида КФ

Форму для идентификации КФ можно вызвать из пункта «Идентификация» – «Автоматически» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов представлен на рис. П.23.6. Для идентификации КФ, необходимо сравнивать саму КФ (в простейшем случае) с шестью основными видами КФ, приведенными в списке, и ее фазовый портрет с типовыми фазовыми портретами. При выборе одной КФ из списка (щелчком мыши), появляется ее схематическое изображение. Затем, после нажатия кнопки «Построить фазовый портрет:», в области построения отобразятся портреты исходной (экспериментальной) и выбранной из списка (теоретической) КФ, синим и красным цветами соответственно. В поле «Погрешность» отобразится квадратическая погрешность сравнения фазовых портретов.

Определив примерный вид КФ, можно провести его уточнение. Задавая параметры α и ω_0 для теоретической модели КФ в полях « α :» и « ω_0 :», можно подобрать их таким образом, чтобы квадратическая погрешность была минимальной. В этом случае будет определен не только вид экспериментальной КФ, но и ее параметры, что особенно важно при аппроксимации параметрическими моделями.

Если результаты идентификации удовлетворительны, и вид КФ определен однозначно, то, нажав кнопку «Аппроксимировать», мы перейдем в форму аппроксимации КФ параметрическими моделями, где будет производиться аппроксимация КФ моделью, выбранной при идентификации.

Отметим, что по найденным параметрам модели корреляционной функции можно более точно построить теоретический фазовый портрет. Это, в свою очередь, даст возможность наглядно убедиться в качестве аппроксимации.

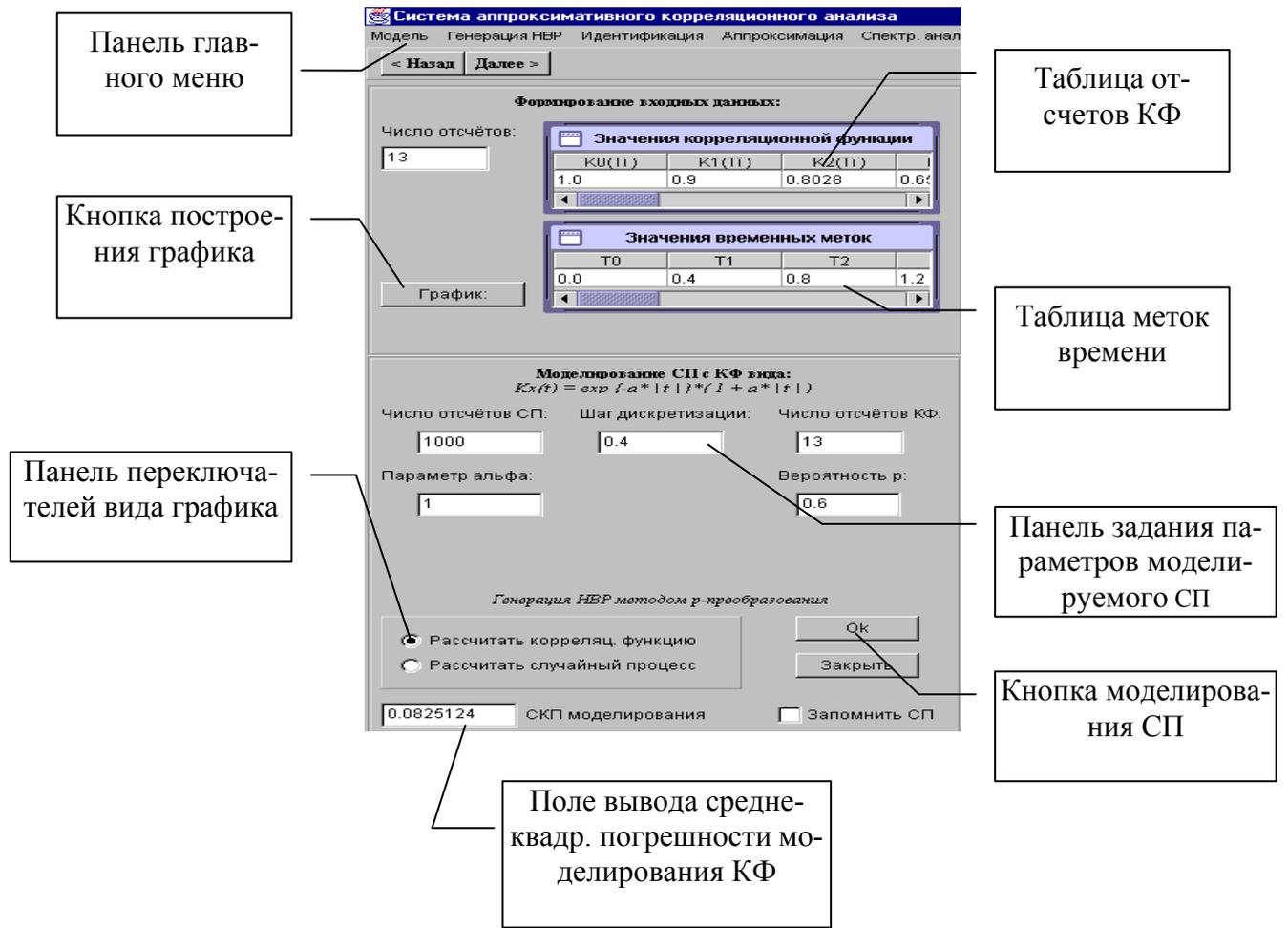
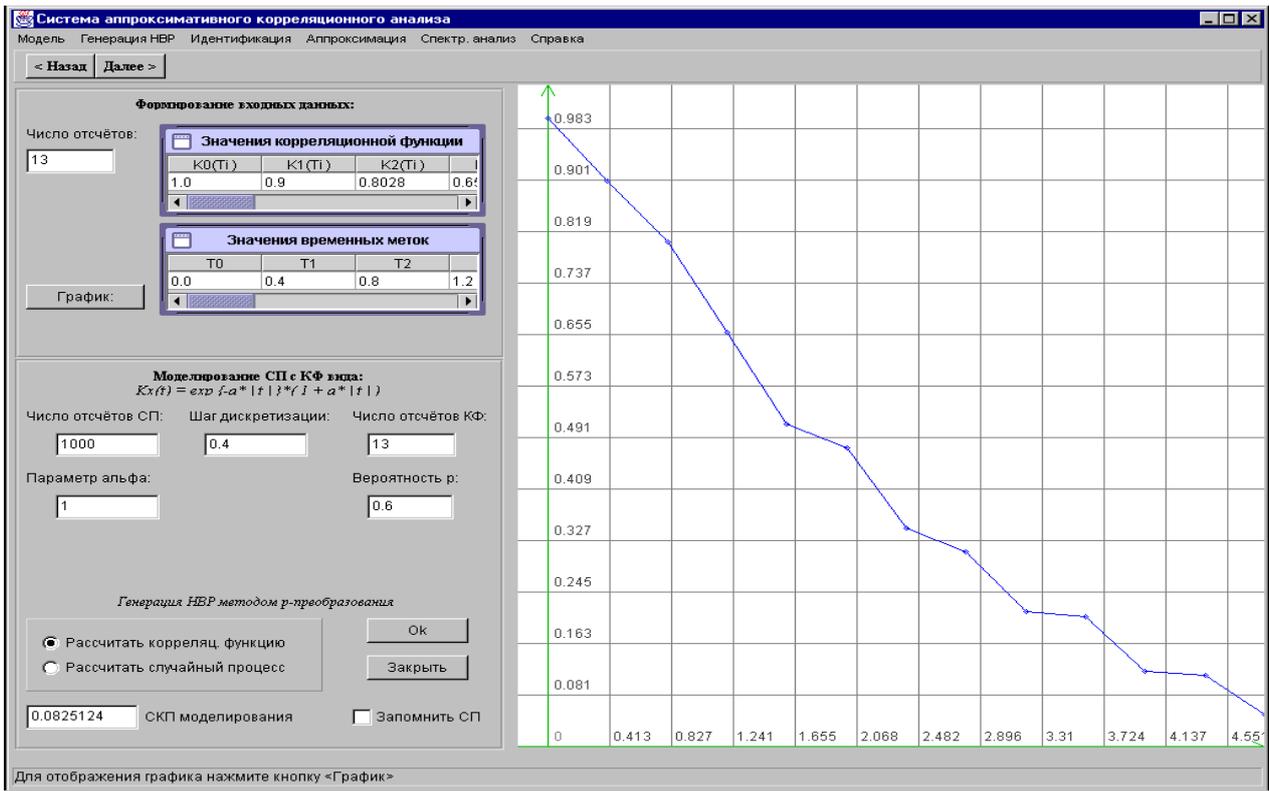


Рисунок П.23.5. Вид формы генерирования НВР с заданным видом КФ



Рисунок П.23.6. Окно идентификации КФ при помощи анализа фазовых портретов

В случае, если идентифицировать КФ не удалось, необходимо закрыть форму и производить аппроксимацию КФ ортогональными функциями Лагерра.

Аппроксимация КФ функциями заданного вида

В том случае, когда вид КФ известен или его удалось идентифицировать, следует аппроксимировать КФ функциями заданного вида.

Форму для аппроксимации КФ функциями заданного вида можно вызвать из пункта «Аппроксимация» главного меню, а также нажатием кнопки «Аппроксимация» на панели идентификации КФ после выбора вида аппроксимирующей функции.

Общий вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида представлен на рис П.23.7.

При работе в данной форме в первую очередь нужно задать вид аппроксимирующей функции при помощи переключателей на панели выбора вида аппроксимирующей модели (рис. П.23.8). Затем рассчитать начальные приближения параметров модели автоматически или задать вручную. Для автоматического расчета начальных приближений необходимо нажать кнопку «Рассчитать» на панели управления ходом аппроксимации. В некоторых случаях, особенно при аппроксимации методом Ньютона, процесс может не сойтись из данных точек. В таком случае следует вручную подкорректировать начальные приближения в их полях ввода (рис.П.23.8).

Иногда эту процедуру приходится выполнять многократно.

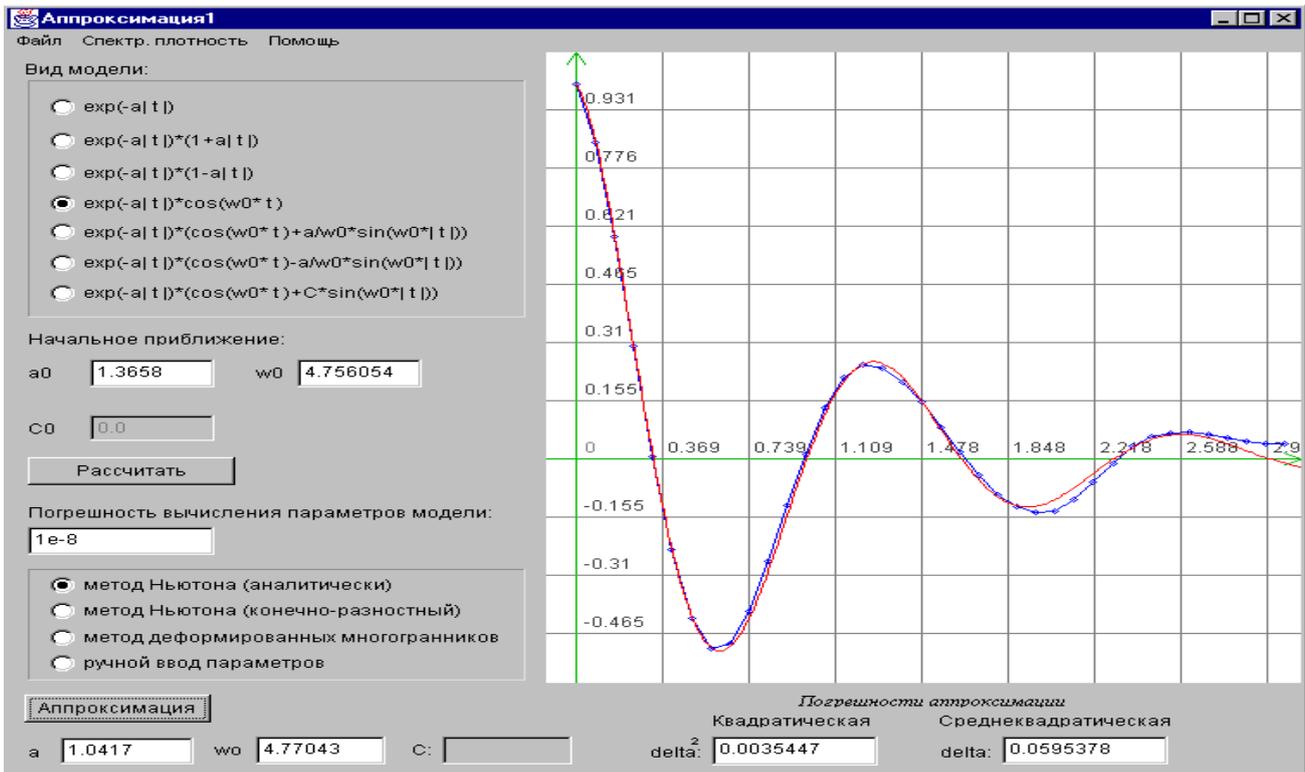


Рисунок П.23.7. Вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида

Далее следует задать значение погрешности вычислений параметров модели (критерия сходимости) в соответствующем поле (рис. П.23.8). Данное значение используется как критерий окончания вычислений при аппроксимации – ϵ .

После задания всех вышеуказанных числовых параметров следует выбрать метод аппроксимации на соответствующей панели. На панели выбора метода аппроксимации присутствуют следующие опции:

- метод Ньютона (аналитический),
- метод Ньютона (конечно-разностный),
- метод деформированного многогранника,
- ручной ввод параметров.

При выборе опции ручного ввода параметров после нажатия кнопки «**Аппроксимация**» происходит простой перенос значений полей ввода начальных приближений в поля вывода рассчитанных параметров и строится соответствующий график аппроксимирующей функции. Таким образом, предоставляется возможность пользователю самостоятельно подбирать значения параметров аппроксимирующего выражения.

При нажатии кнопки «**Аппроксимация**» (рис. П.23.5 или П.23.6) производится запуск алгоритма аппроксимации. В поля вывода рассчитанных параметров модели заносятся значения α и ω_0 , которые были вычислены одним из методов. В поля вывода погрешности аппроксимации заносятся значения среднеквадратической и квадратической погрешности.

Отметим, что по «умолчанию» система выбирает метод деформированного многогранника, обладающий лучшей сходимостью. Выбрав в качестве начального приближения параметров найденные значения модели указанным методом, возможно дальнейшее уточнение параметров модели. Для этого необходимо воспользоваться одним из методов Ньютона.

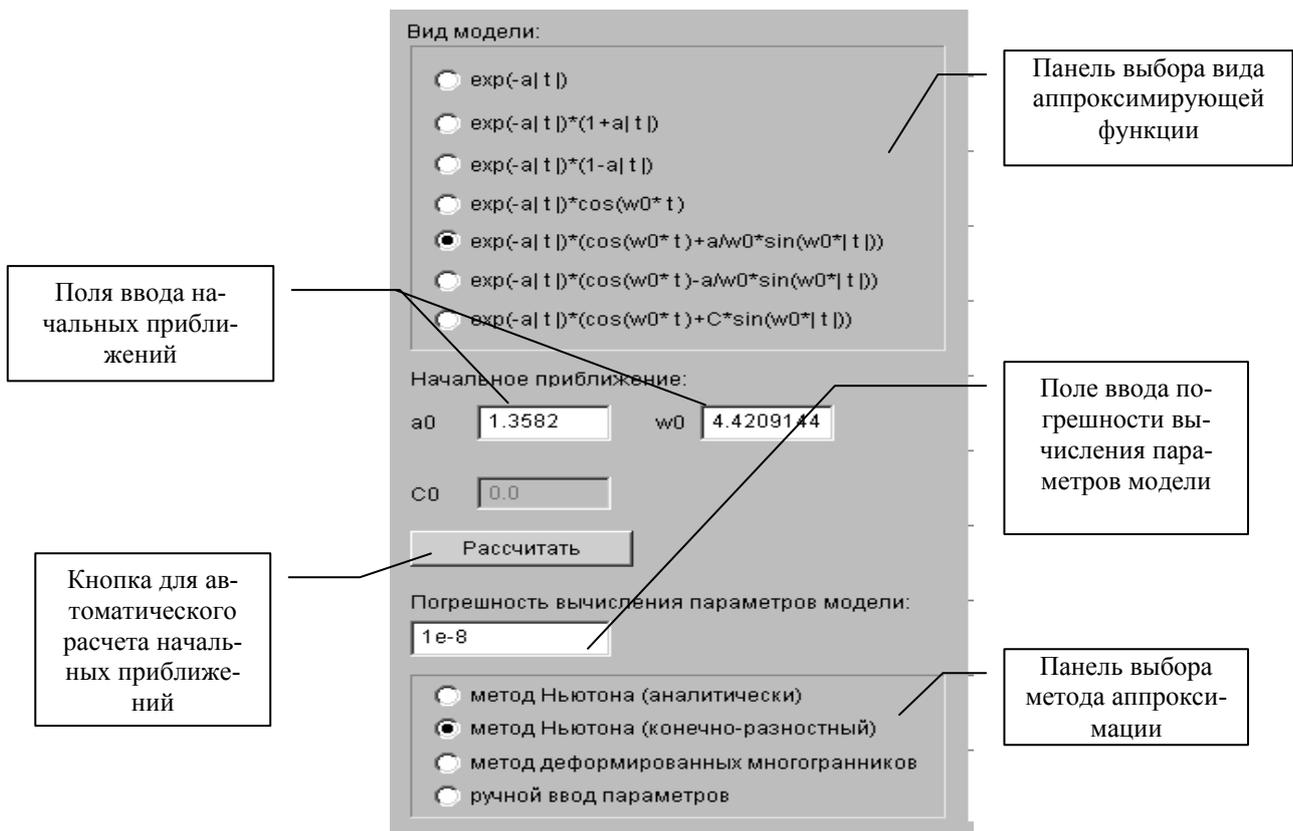


Рисунок П.23.8. Панель управления параметрами аппроксимации

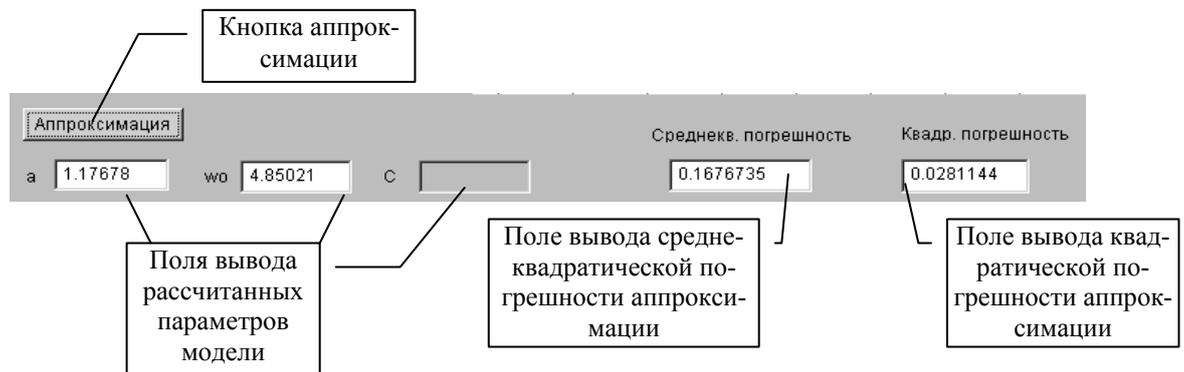


Рисунок П.23.9. Панель вывода результатов аппроксимации

Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

После получения массива отсчетов КФ, производится ее аппроксимация. Форму для аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра можно вызвать из пункта «Аппроксимация» - «Ортогональными ф-ми Лагерра» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра представлен на рис. П.23.10.

Для проведения аппроксимации необходимо вычислить параметр α функции Лагерра (рис. П.23.11) Для этого требуется задать начальное приближение параметра α (по умолчанию оно равно 1), которое необходимо для реализации расчета методом Ньютона, точность вычисления этого параметра (по умолчанию она равна 0.001) и выбрать один из методов численного интегрирования (метод Симпсона, трапеций или прямоугольников). После этого, нажав кнопку «Вычислить α », получим значение вычисленного параметра в поле « α » (в это поле можно занести произвольное значе-

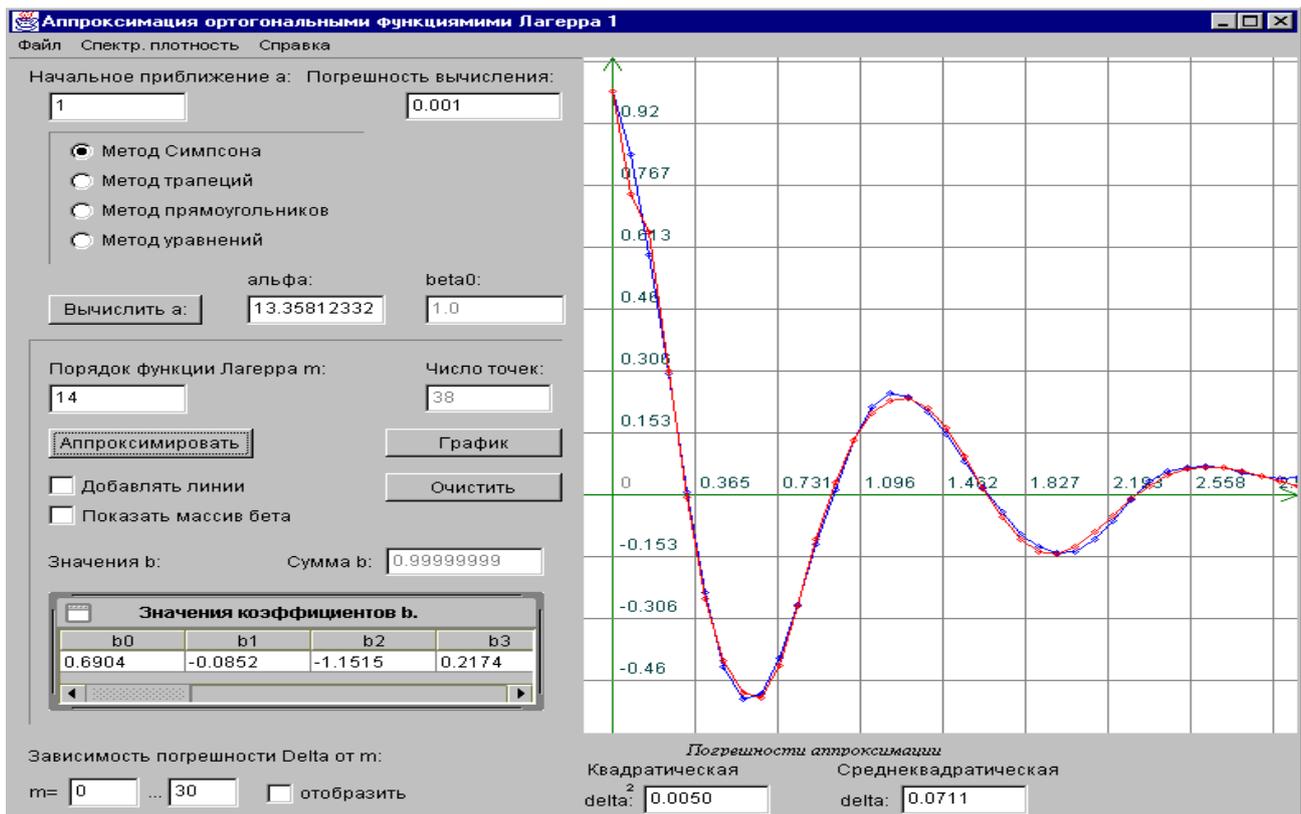


Рисунок П.23.10. Окно аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

Методы численного интегрирования для расчета параметров α и β

Погрешность вычисления параметра α

Разрешить / Отменить наложение линий на графике

Проверка выполнения условия $\beta_0=1$

Показывать массив b / beta

Проверка выполнения условия $\sum b=1$

Значения коэффициентов b полинома Лагерра

Рисунок П.23.11. Описание параметров окна аппроксимации

ние вручную), а в поле «**beta0:**» появится значение коэффициента b_0 которое должно быть равно 1 и является проверкой качества расчета α .

После того, как параметр α будет вычислен (либо установлен вручную), необходимо установить порядок аппроксимирующей функции Лагерра m . (В соседнем поле указывается число точек, по которым будет проводиться аппроксимация - оно равно числу отсчетов поступившей на вход КФ). После нажатия кнопки «**Аппроксимировать**», в таблицу «**Значения b:**» будут занесены вычисленные значения коэффициентов функции, в поле для построения графика к исходной КФ (она рисуется **синим цветом**) добавится график аппроксимирующей функции, а так же будут вычислены и отображены в специальном поле (рис. П.23.11) квадратическая и среднеквадратическая погрешности аппроксимации δ^2 и δ . Так же отобразится значение суммы коэффициентов b , которая должна быть равной 1.

Расставляя или убирая соответствующие флажки, пользователь может либо наслаивать графики один на другой, сравнивая результаты аппроксимации несколькими функциями не только по значению погрешности δ , но и визуально, либо отображать только одну функцию, а так же показывать, либо скрывать значения аппроксимирующей функции в каждой точке.

Задавая начальное и конечное значение m (рис. П.23.12) и устанавливая флажок «**отобразить**», пользователь может построить график зависимости квадратической погрешности аппроксимации δ^2 от порядка m функции Лагерра для данной КФ. Анализ этого графика позволит найти оптимальное значение m , при котором $\delta^2 \rightarrow \min$. (График строится с шагом по m , равным 2 (см. рис. П.23.13)).

Завершение работы с формой производится ее стандартным закрытием или с помощью кнопки «**Закреть**».

По определенной модели корреляционной функции исследователь может построить график спектральной плотности мощности. Для этого необходимо нажать кнопку «**Спектр. анализ**» в форме «**Аппроксимация**» при аппроксимации параметрическими моделями (см. рис П.23.4), а при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра - в соответствующем окне (см. рис.П.23.10) кнопку «**Спектр**», а в окне «**Спектральный анализ**» - кнопку «**Добавить**».



Рисунок П.23.12. Окно аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

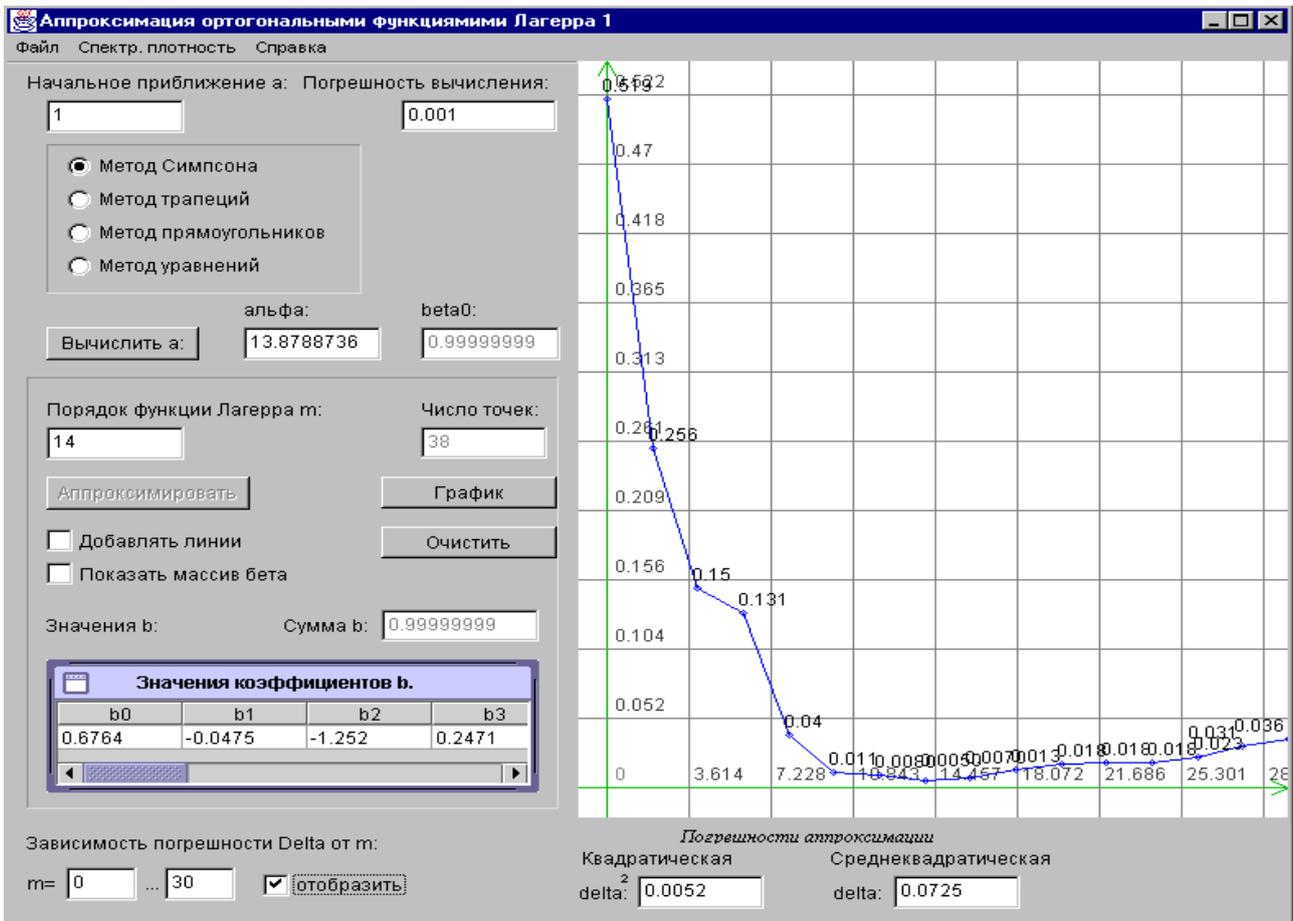


Рисунок П.23.13. Поиск оптимального числа членов разложения ряда

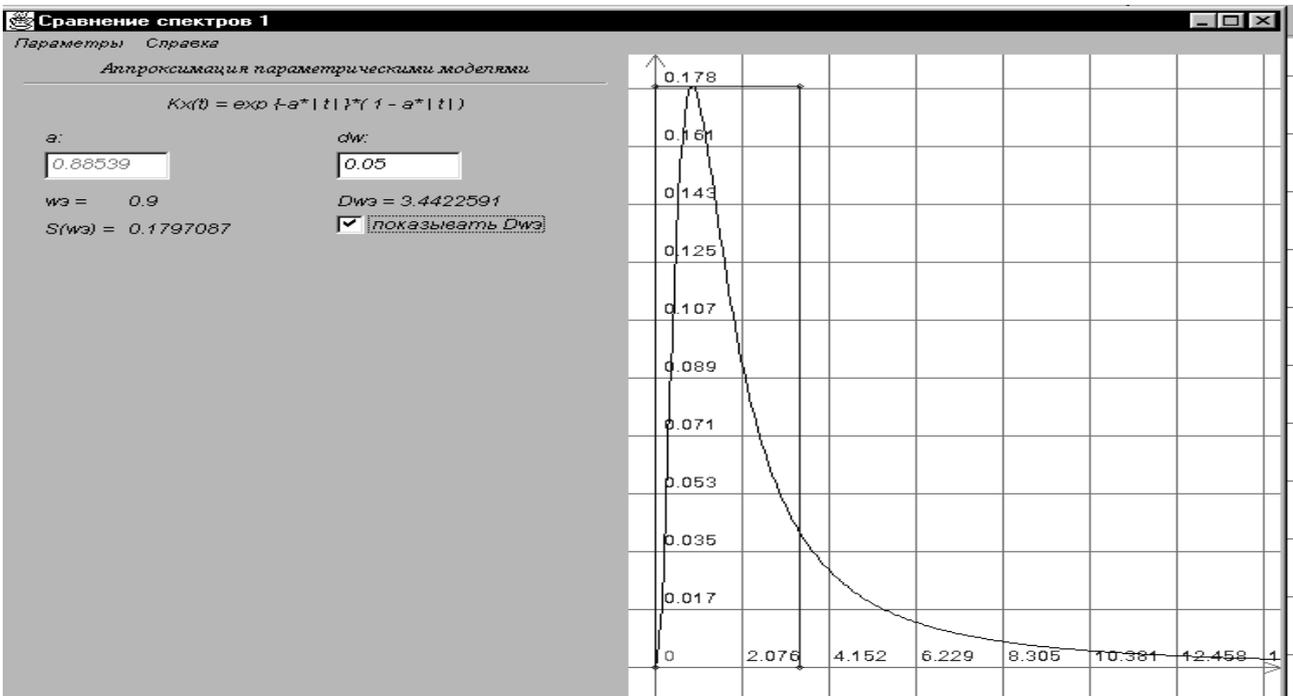


Рисунок П.23.14. Форма окна спектрального анализа

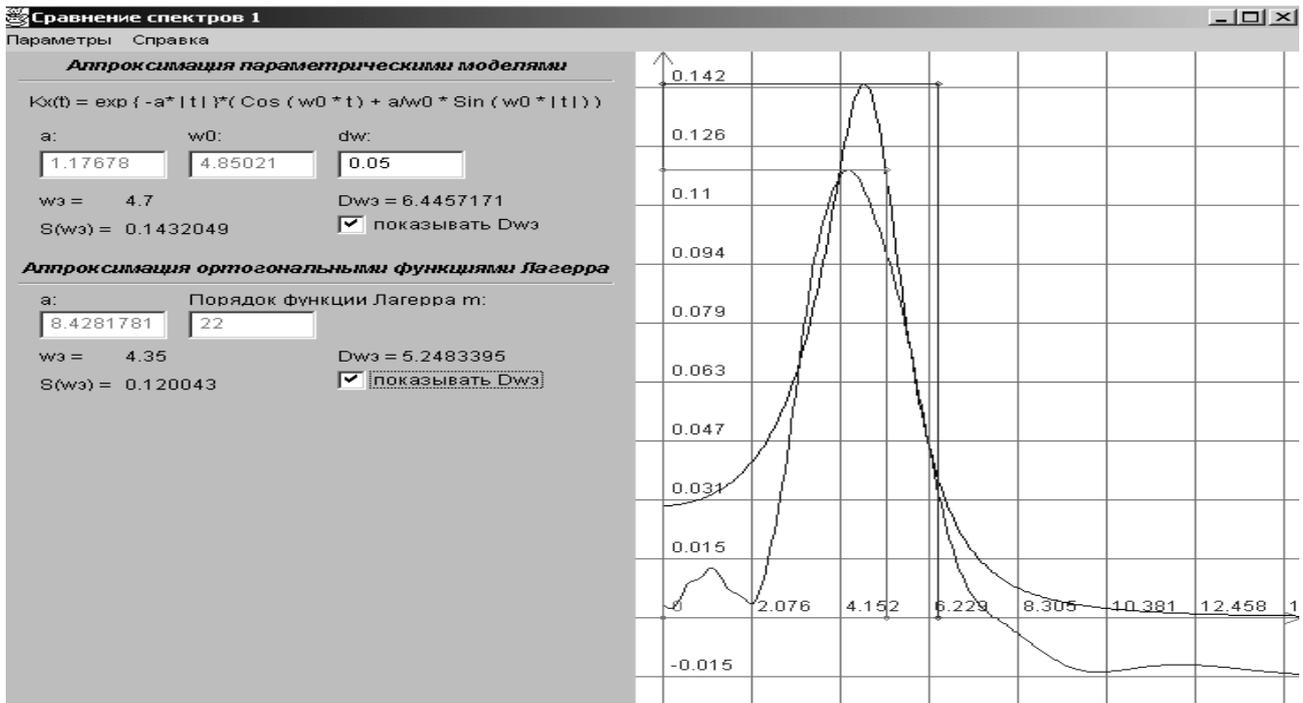


Рисунок П.23.15. Форма окна спектрального анализа при аппроксимации спектра ортогональными функциями Лагерра

Отметим, что для удобства пользователей в системе предусмотрены следующие возможности:

1. при моделировании СП возможно изменение интервала дискретизации, обеспечивающего восстановление корреляционной функции с заданной погрешностью (см. рис. П.23.16 а)).
2. При отображении графической информации возможно изменение формы представления результатов (см. рис. П.23.16 б)).

Для этого необходимо нажать правую кнопку «мыши», поместив курсор в соответствующее окно.



а)

б)

Рисунок П.23.16

Пример результатов обработки представлен на рис. П.23.17, где последовательно представлены: процесс, результаты идентификации и аппроксимации параметрической моделью, уточнение идентификации, аппроксимация ортогональными функциями Лагерра и построение спектральной плотности мощности по параметрической модели и в ортогональном базисе Лагерра.

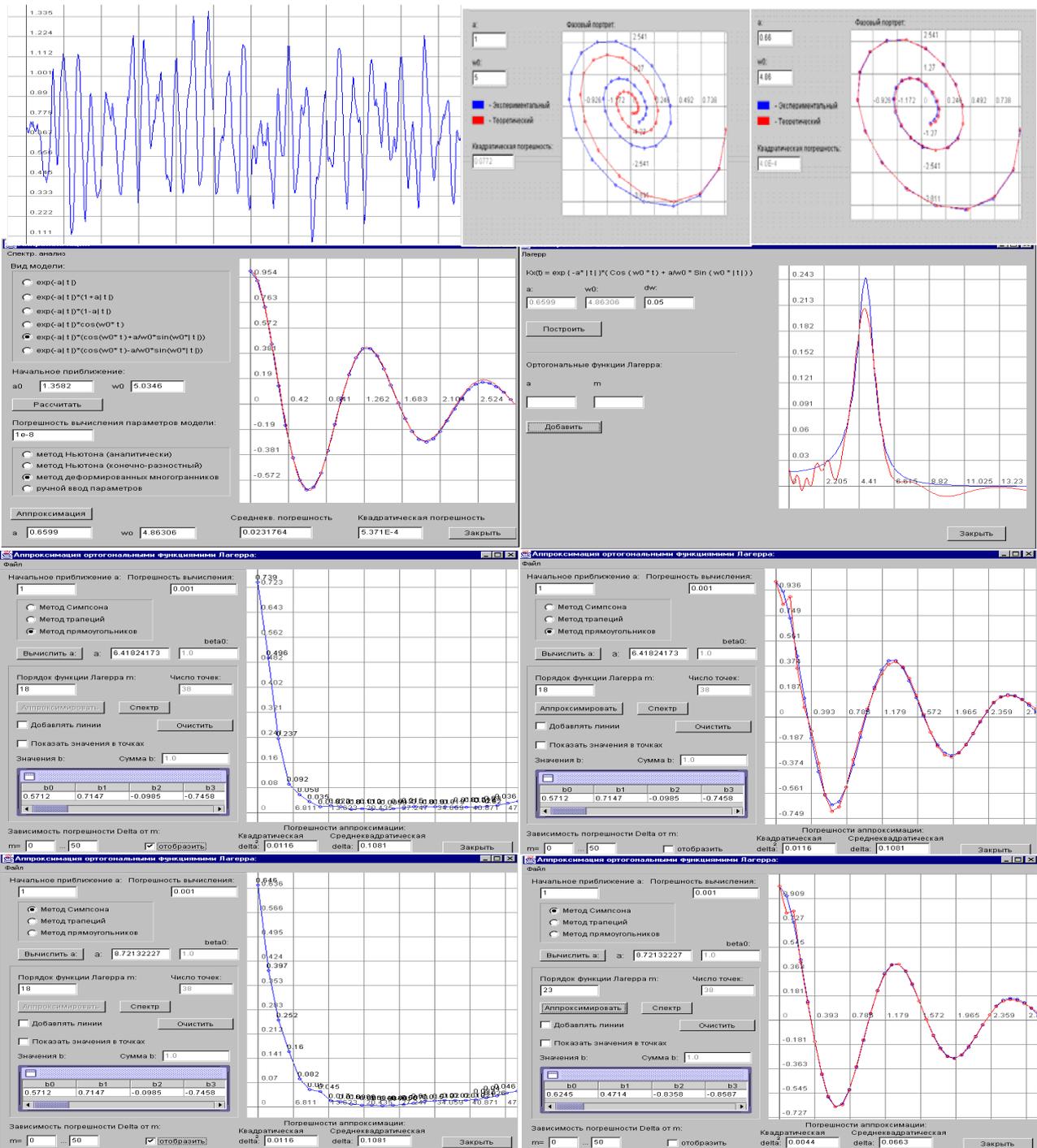


Рисунок П.23.17. Результаты обработки

Пример результатов обработки представлен на рис. П.23.18-П.23.21, где последовательно представлены: неквадрантный временной ряд, результаты идентификации и аппроксимации параметрической моделью, аппроксимация ортогональными функциями Лагерра и построение спектральной плотности мощности по параметрической модели и в ортогональном базисе Лагерра.

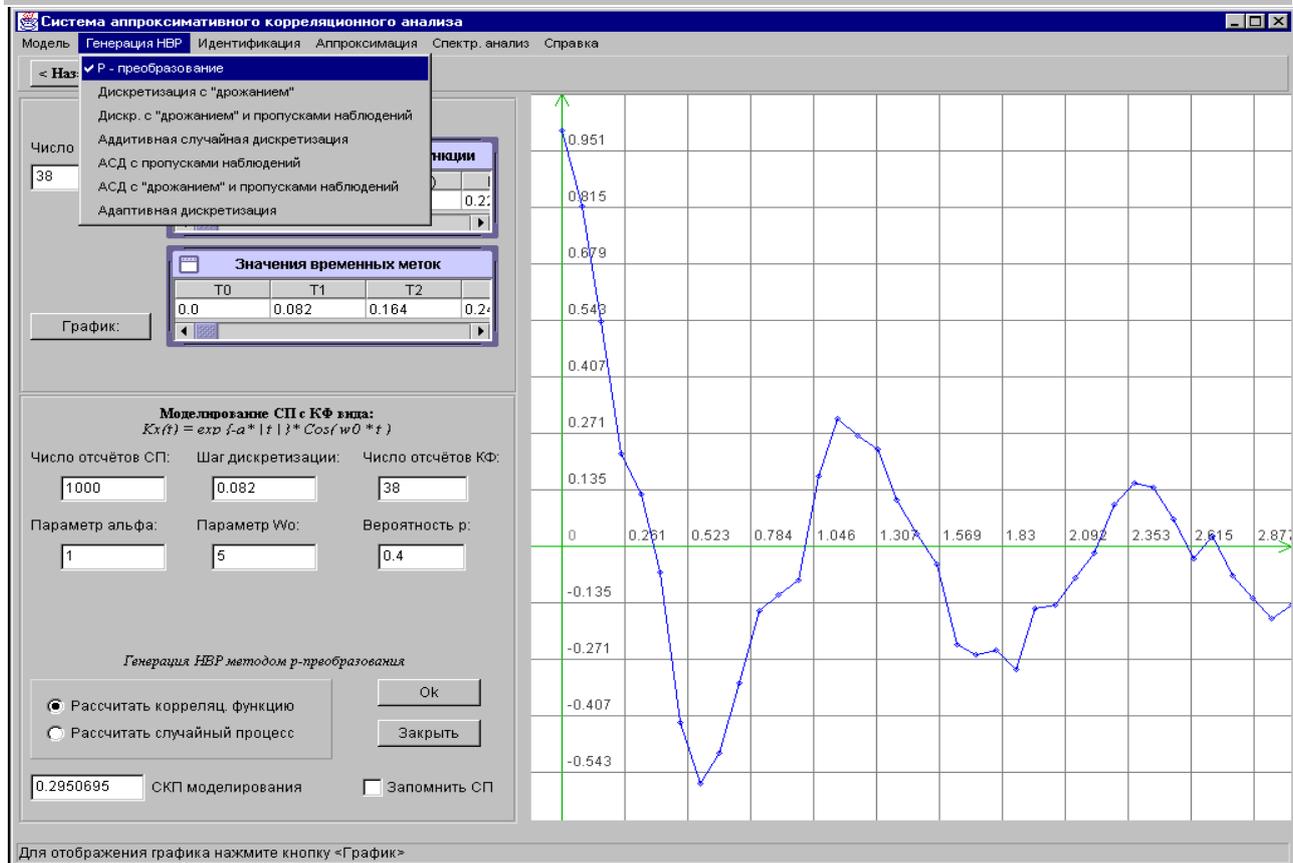
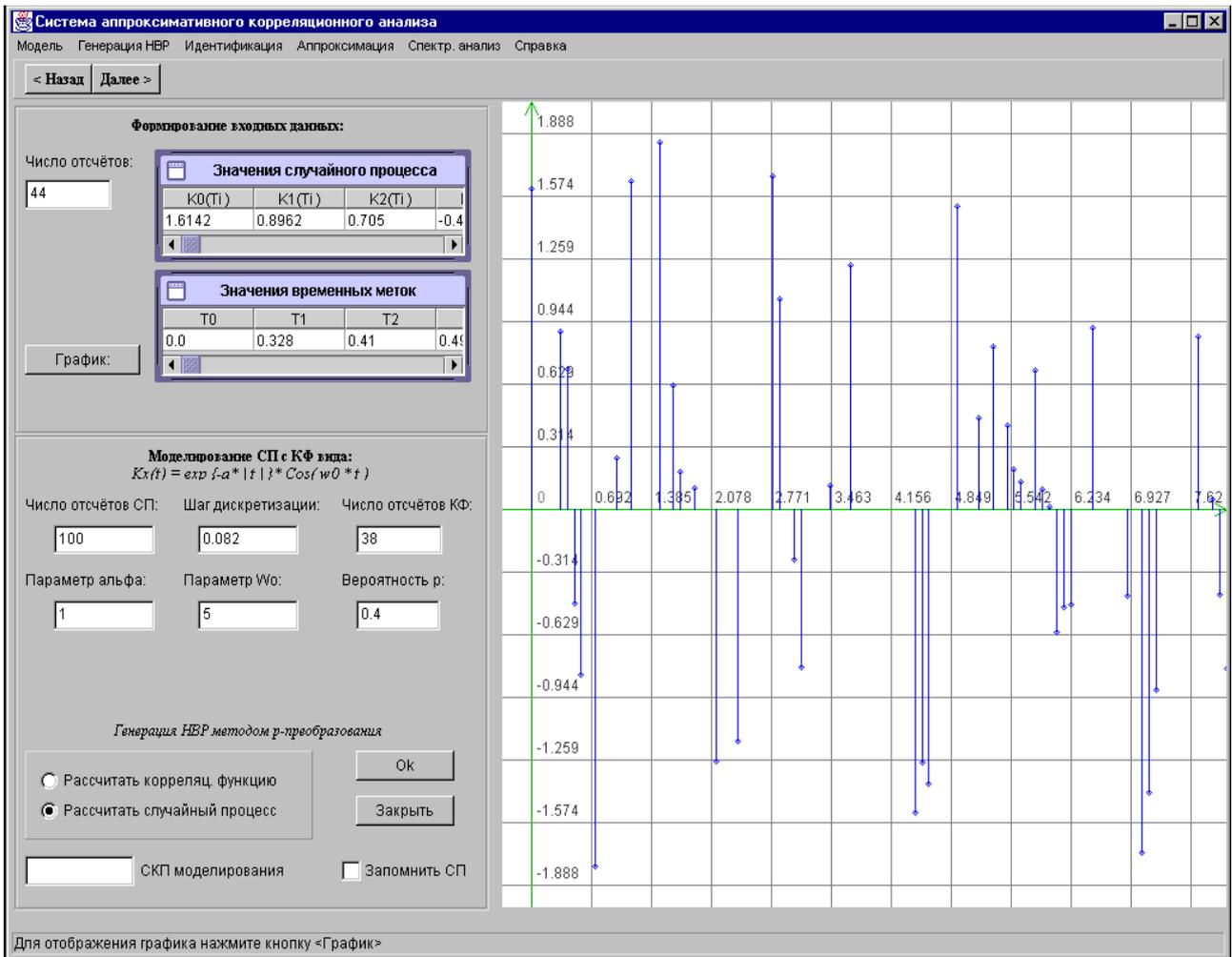


Рисунок П.23.18

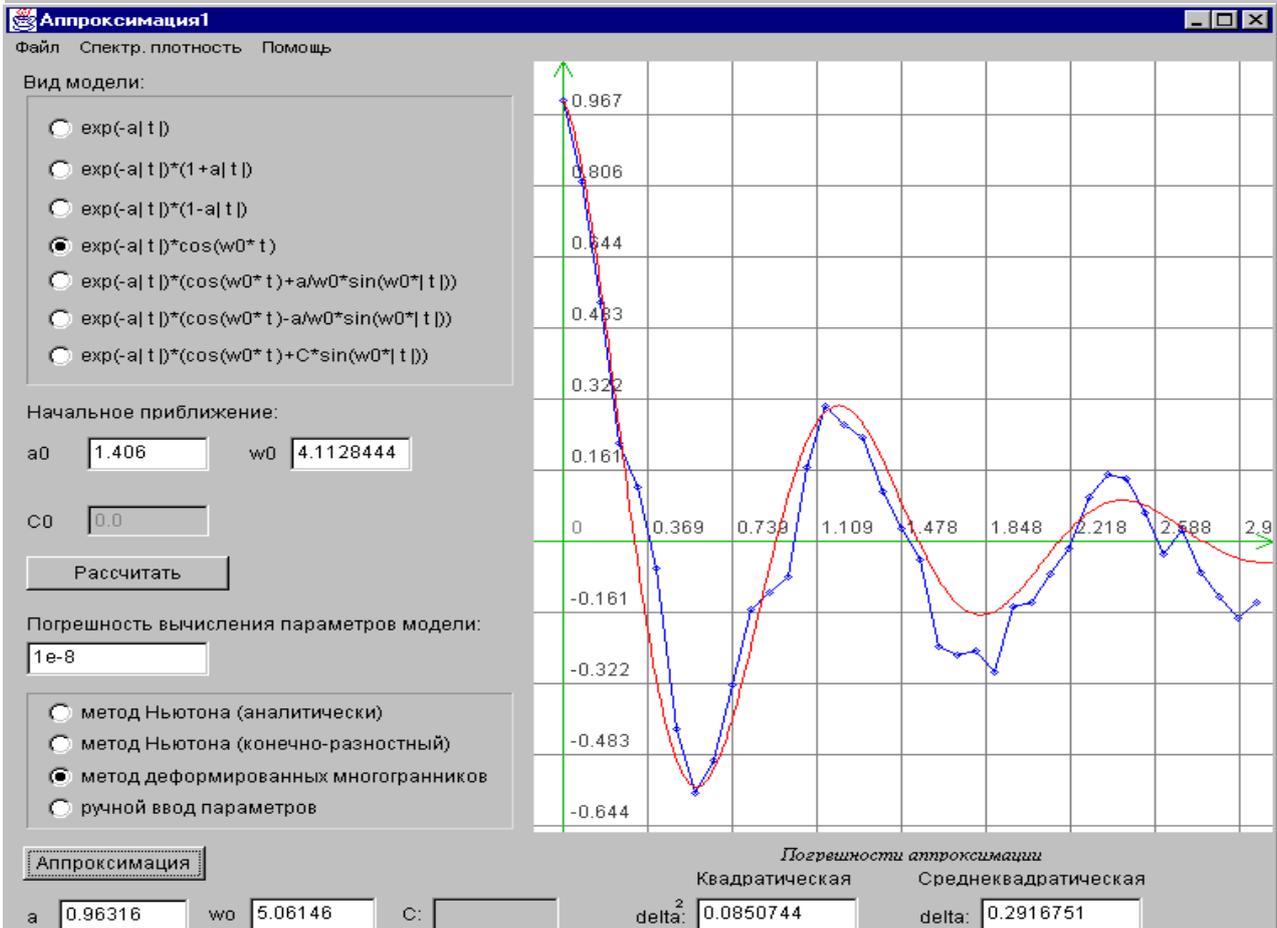
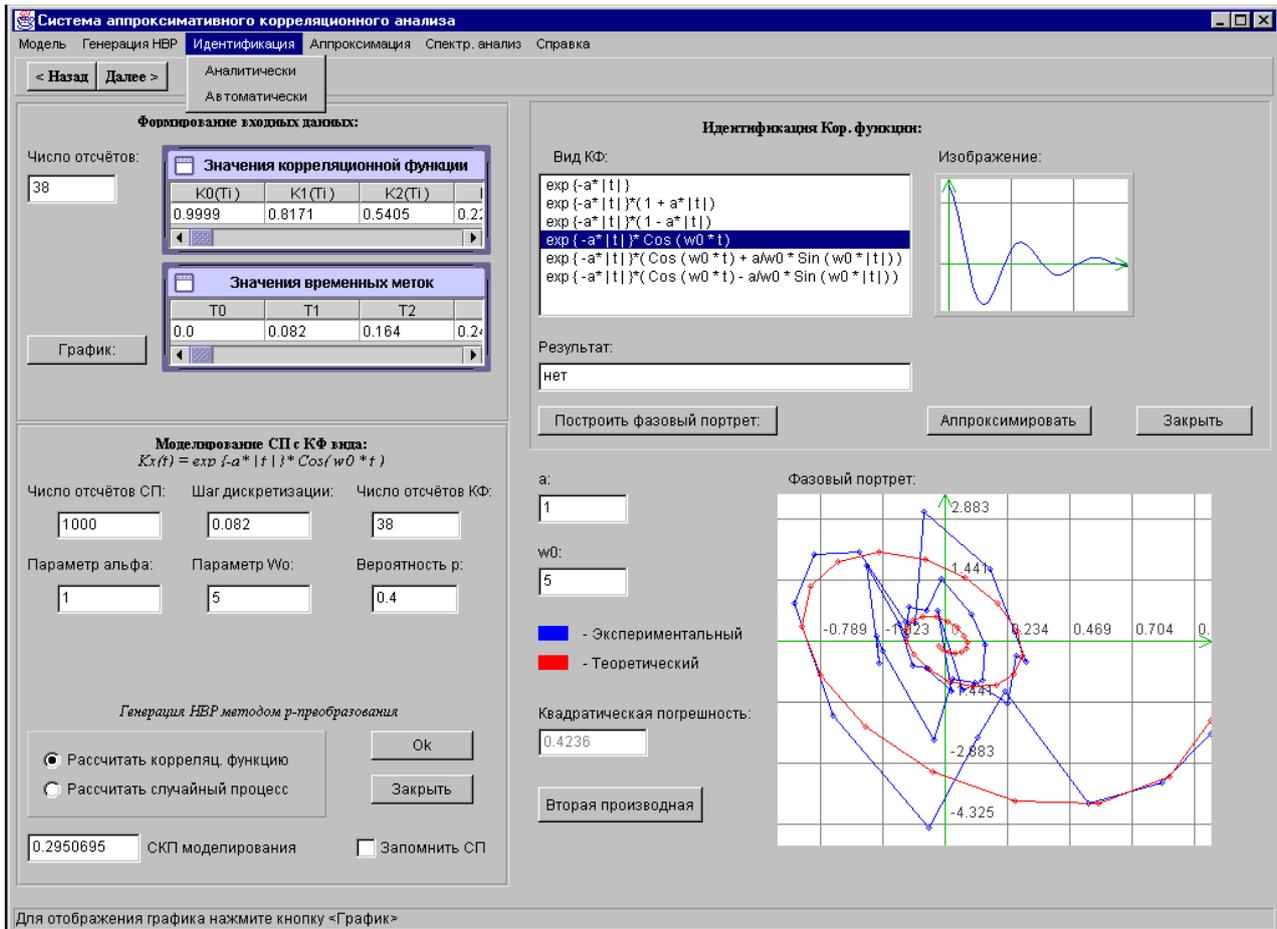


Рисунок П.23.19

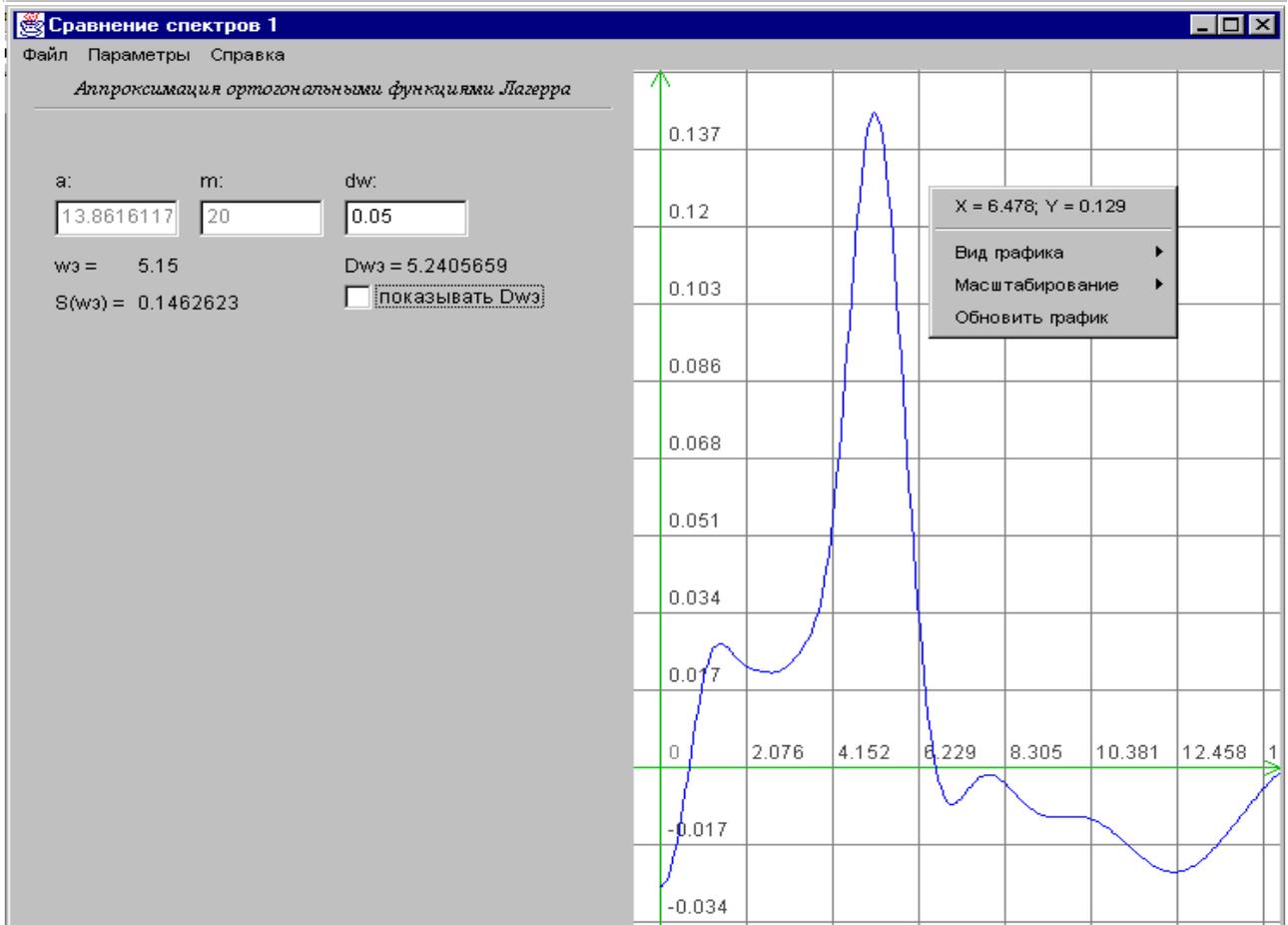
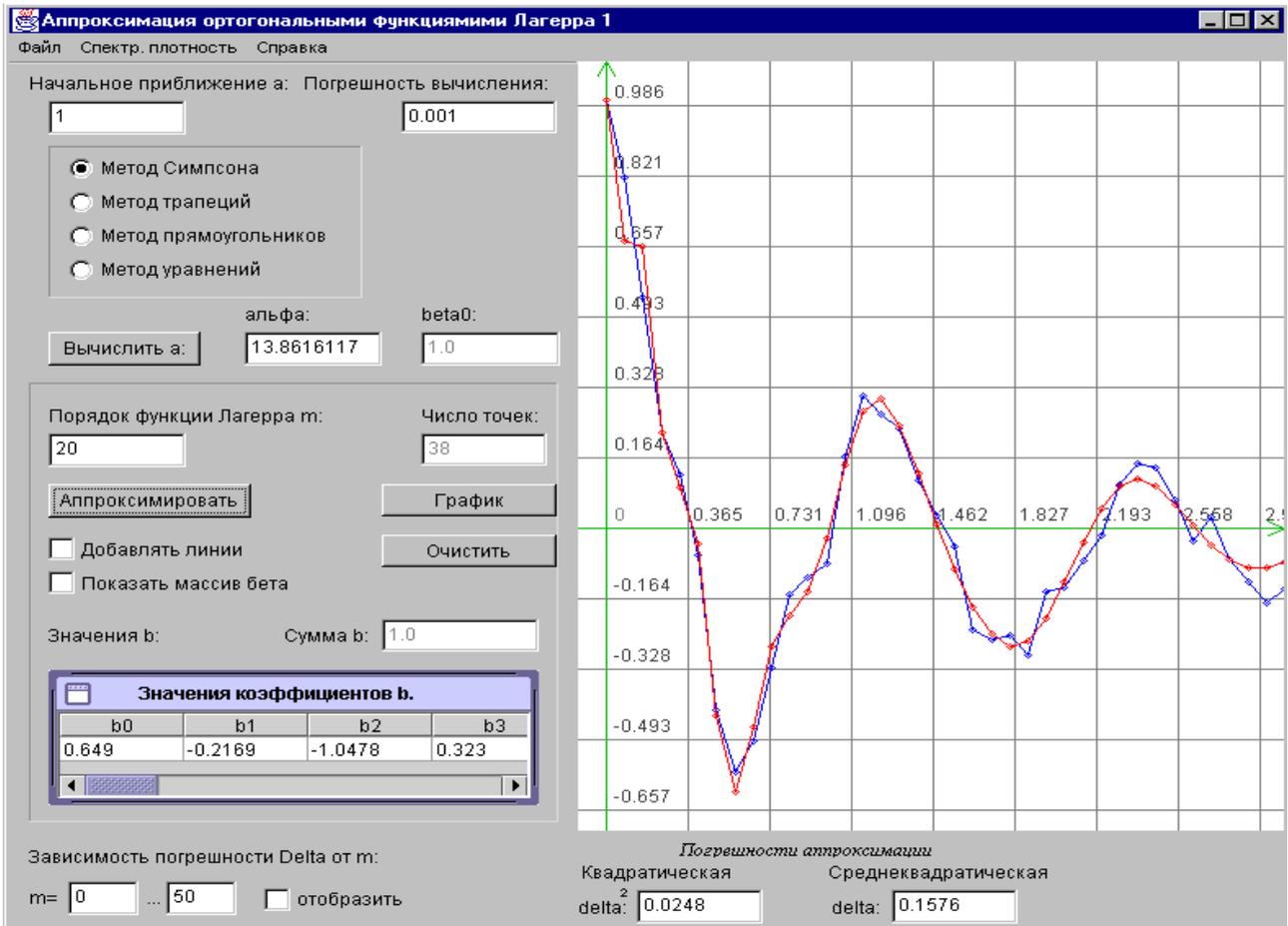


Рисунок П.23.21

Форматы данных, используемых в системе, приведены в таблице П.23.1.

Таблица П.23.1

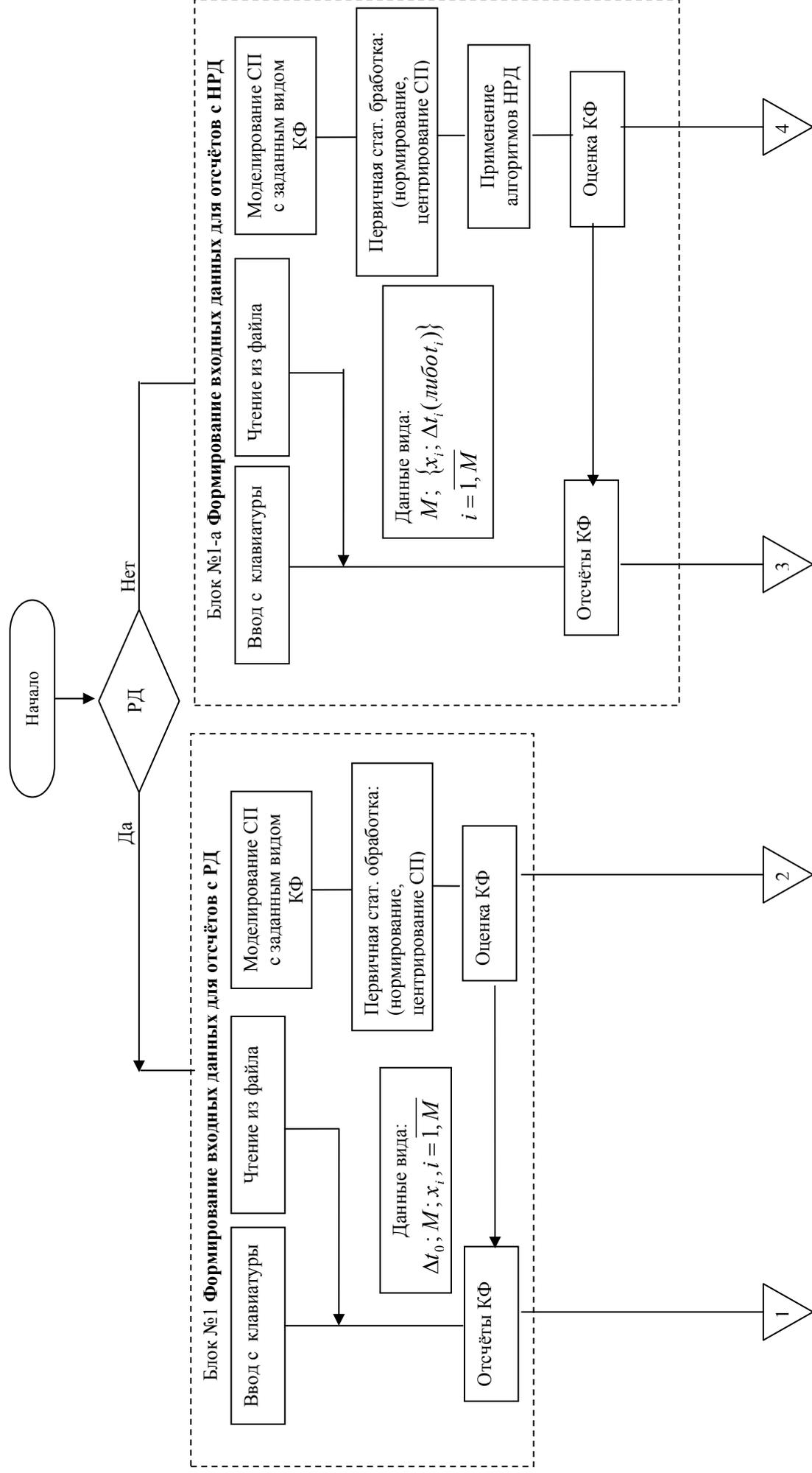
Процесс с регулярной дискретизацией *rd	Процесс с нерегулярной дискретизацией *nrd	КФ с регулярной дискретизацией *rd	КФ с нерегулярной дискретизацией *nrd	Спектральная плотность мощности *spt	Параметры ортогональных функций Лагерра *prl	Параметры параметрической модели *prm
M	M_j	J_{\max}	J_{\max}	$\Delta\omega$	Метод интегрирования (0-2)	Номер модели (0-5)
Δt	$x(1)$	$\Delta\tau$	$\rho_x(1)$	ω_3	Номер модели (0-5)	Метод аппроксимации (0-2)
$x(1)$...	$\rho_x(1)$...	$S_x(\omega_3)$	m	$\lambda^{(0)}$
...	$\Delta\omega_3$	α	λ
...	$x(M_j)$...	$\rho_x(J_{\max})$	$S_x(1)$	Метод выбора α	$\omega_0^{(0)}$
...	$t(1)$...	$t(1)$	$S_x(2)$	Погреш. вычислен. α	ω_0
...	β_0	Погрешность выч. параметров модели
...	
$x(M)$	$t(M_j)$	$\rho_x(J_{\max})$	$t(J_{\max})$...	β_m	

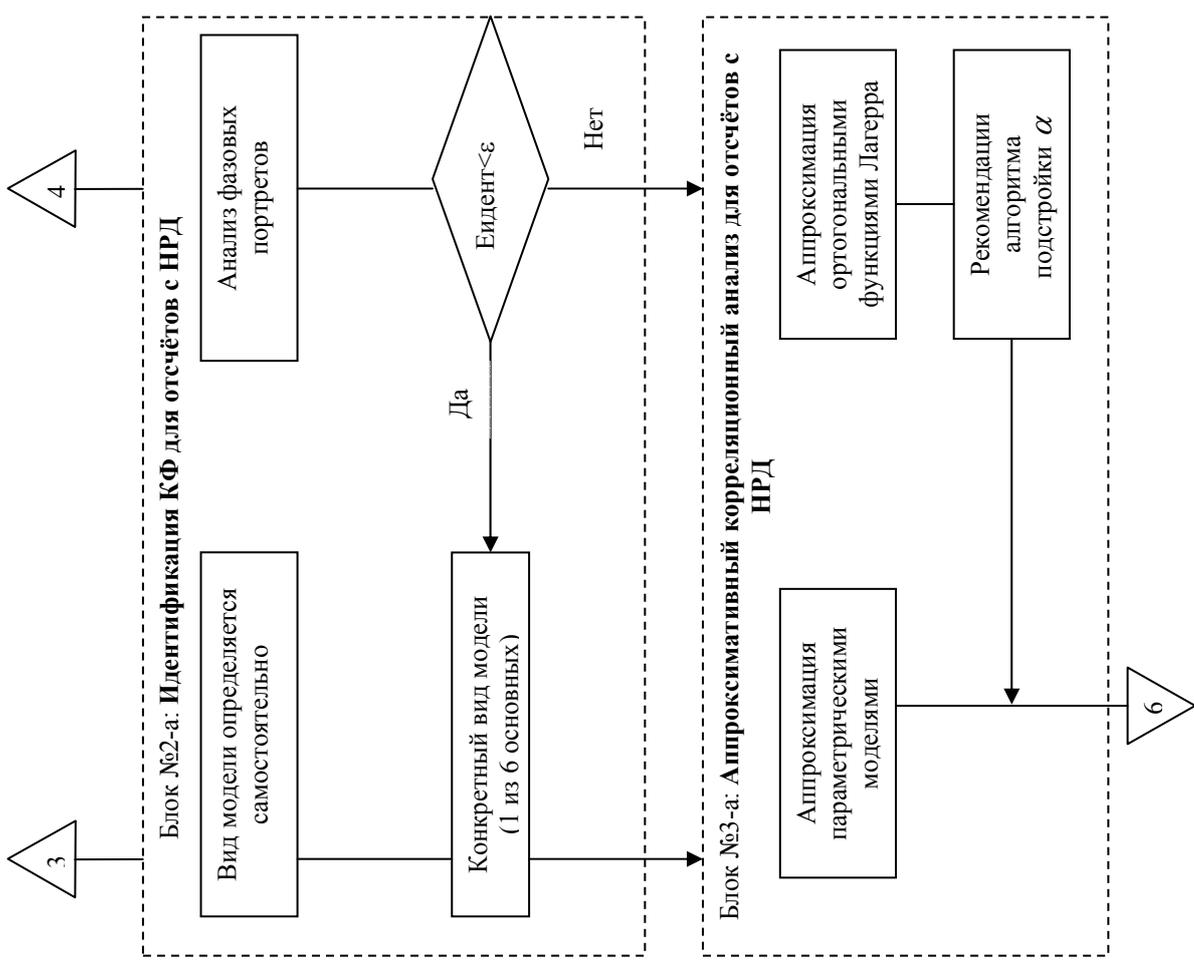
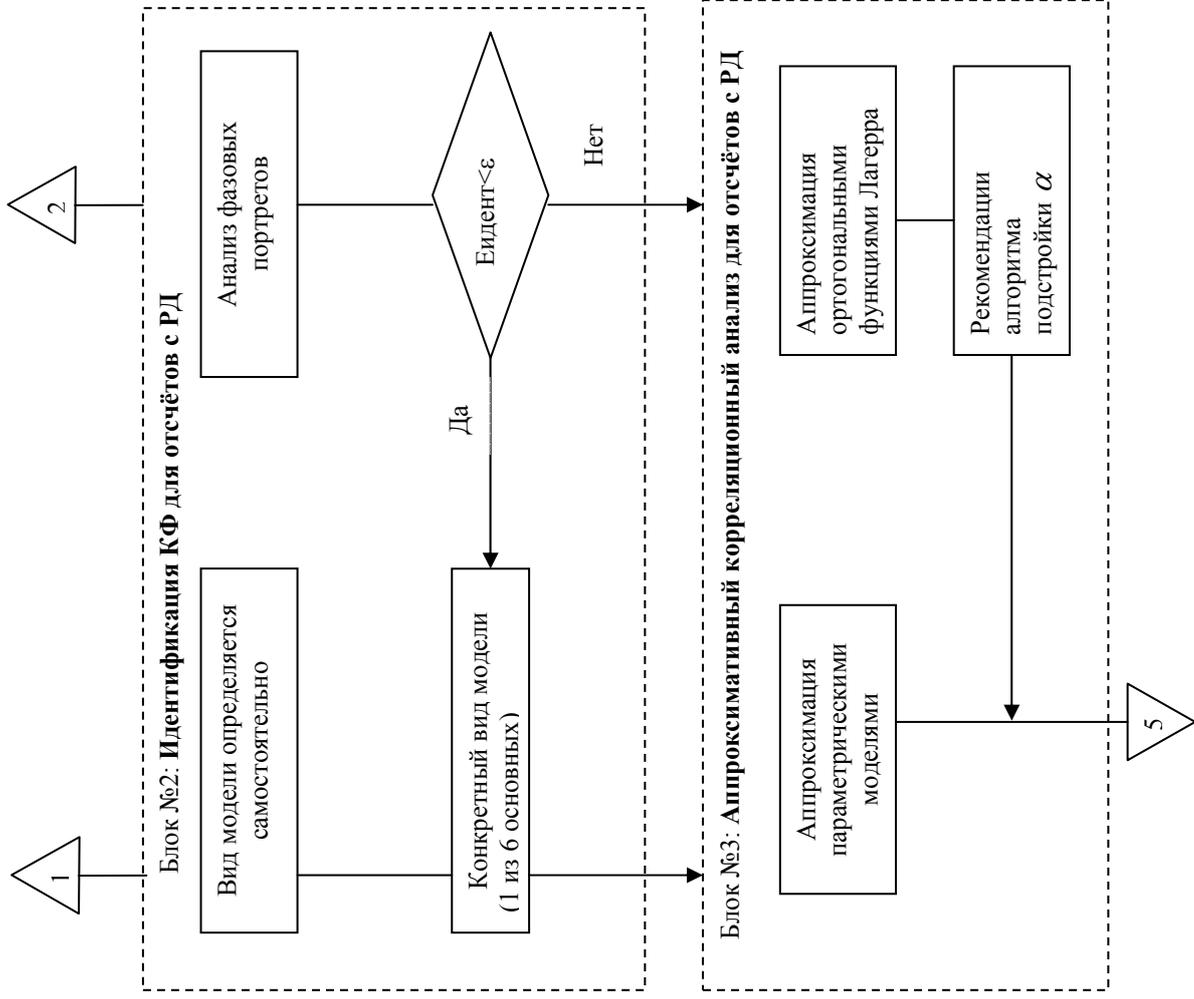
Ниже приведены примеры вводимых и выводимых данных при аппроксимативном корреляционно-спектральном анализе ПСП с заданным видом корреляционной функции.

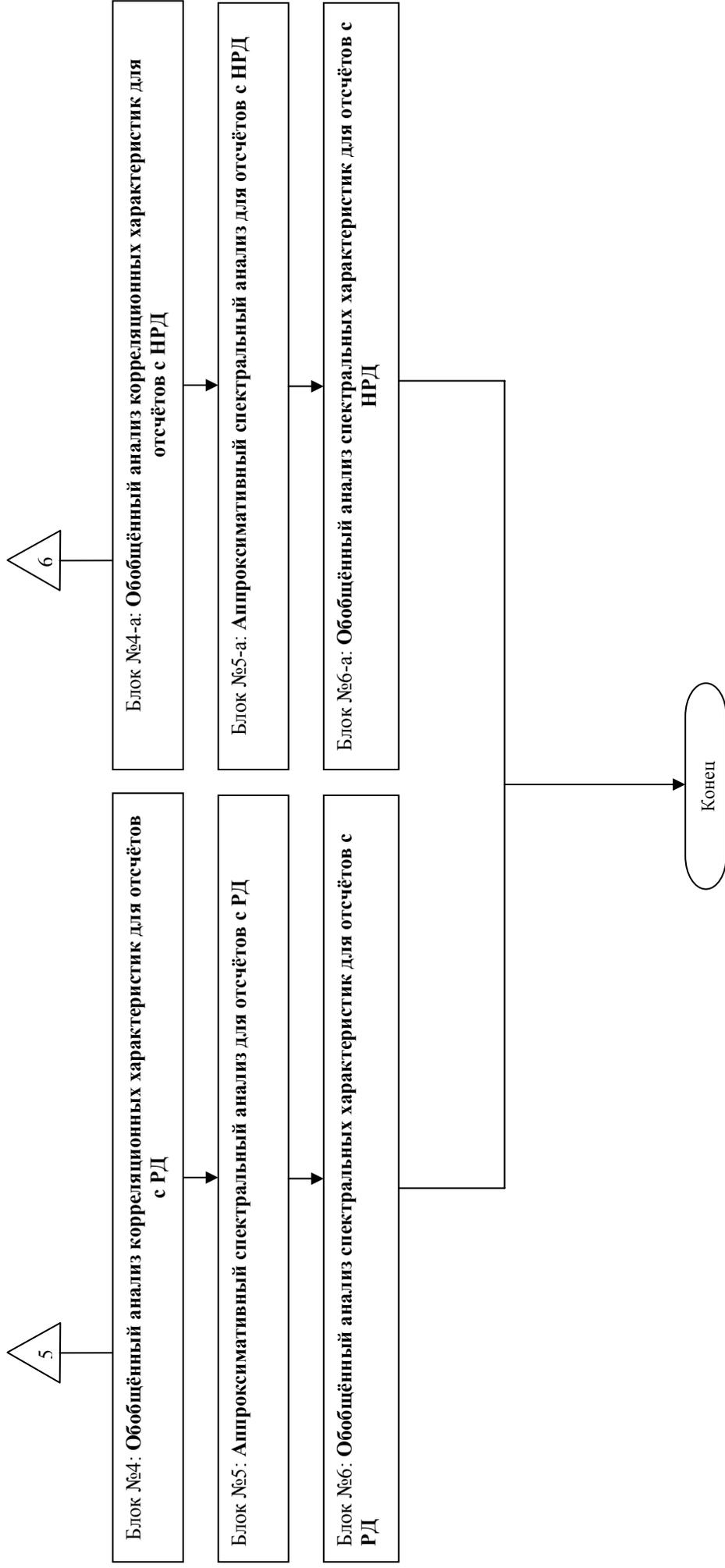
Таблица П.23.2

Процесс с регулярной дискретизацией *rd	Процесс с нерегулярной дискретизацией *nrd	КФ с регулярной дискретизацией *rd	КФ с нерегулярной дискретизацией *nrd	Спектральная плотность мощности *spt	Параметры ортогональных функций Лагерра *prl	Параметры параметрической модели *prm
1000	57	38	38	1.0E-4	0	3
0.082	0.9983	0.082	0.9999	0.016	3	2
-1.1052	0.9123	1.0	0.8219	34.36	14	1.406
-1.1052	0.768	0.8535	0.925	0.0232	13.9197	0.9560
-0.9793	0.5954	0.5868	0.0578	5.3934	1.0000	5.0327
-0.7031	0.5325	0.2645	-0.0956	5.3956	0.0010	5.1294
...	1e-8
1.0495	7.566	-0.0689	3.034	3.8572	0.5334	

Блок-схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа







Автоматизированная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов

Структура автоматизированной системы

Система предназначена для генерирования и обработки временных рядов (ВР) с различными взаимно-корреляционными функциями (ВКФ), аппроксимации ВКФ параметрическими моделями и ортогональными функциями Лагерра, определения взаимного спектра по параметрам аппроксимирующих выражений и является дальнейшим развитием системы [10]. Структура системы может быть описана с помощью схемы, приведенной на рис. П.25.1.

На первом этапе работы системы задаются исходные данные для генерации ВР с заданным видом корреляционной функции. При генерации осуществляется расчет некоторых вероятностных характеристик процесса, а именно математического ожидания, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса и корреляционной функции. Процесс поступает на вход второй подсистемы, состоящей из двух модулей. Первый модуль имеет в своем составе фильтр и модуль получения ВР. Вторым – фильтр, модуль получения ВР и линию задержки. Задав параметры модулей, можно получить два ВР, взаимная корреляционная функция которых рассчитывается в третьей подсистеме. Есть также возможность получения фазового портрета [7-8]. Отсчеты ВКФ поступают в подсистемы аппроксимации с помощью ортогональных функций Лагерра и параметрическими моделями. При работе в этих подсистемах необходимо задать исходные (приближенные) значения параметров аппроксимирующих выражений и получить их оптимальные значения. Значения параметров аппроксимирующих выражений поступают на вход подсистемы расчета взаимной спектральной плотности мощности.

Работа может производиться как последовательно по схеме, описанной выше, так и непосредственно в каждой конкретной подсистеме, с использованием информации из файлов.

Автоматизированная система разделена на следующие основные подсистемы:

1. генерирования процесса с заданным видом КФ;
2. создания пары процессов;
 - 2.1. модуль создания первого процесса;
 - 2.1.1. фильтр;
 - 2.1.2. модуль создания ВР;
 - 2.2. модуль создания второго процесса;
 - 2.2.1. фильтр;
 - 2.2.2. модуль создания ВР;
 - 2.2.3. линию задержки;
3. расчета ВКФ и её фазового портрета;
4. аппроксимации ВКФ ортогональными функциями Лагерра;
5. аппроксимации ВКФ параметрическими моделями;
6. расчета взаимной спектральной плотности мощности.

Кроме того, введены вспомогательные подсистемы:

7. задания входных воздействий и отображения результатов;
8. обмена информацией с файлами;
9. контроля ошибок и обработки исключений.

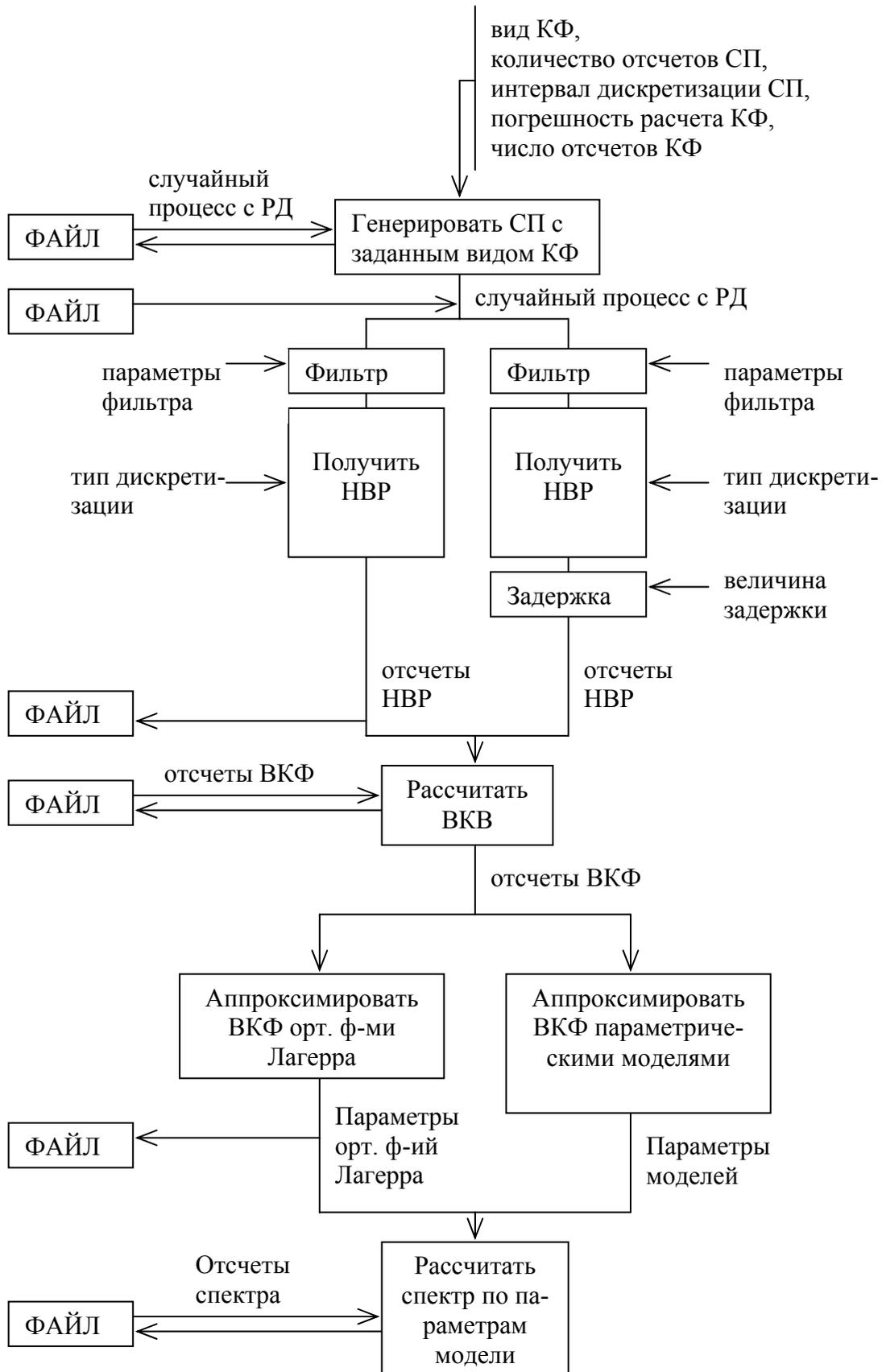


Рисунок П.25.1. Структурная схема автоматизированной системы

Программная реализация

Согласно структурной схеме автоматизированной системы форма, появляющаяся на экране, состоит из шести страниц – по числу основных подсистем. Переход с одной страницы на другую осуществляется выбором вкладки сверху экрана или через меню «**Файл**». В верхнем левом углу некоторых страниц расположены функциональные кнопки. На них изображены пиктограммы, кнопки сопровождаются исчезающими подсказками (**hints**). При нажатии на кнопки происходят действия, сопровождающиеся пересчетом некоторых параметров и построением графиков.

Графики требуют пояснений. При перемещении мыши в верхнем правом углу отображаются ее координаты в системе координат графика. Для увеличения некоторой области необходимо нажать правую кнопку мыши и, удерживая ее, растянуть прямоугольник на область. К возвращению к исходному графику приведут клик мыши, повторное растяжение прямоугольника, переход на другую страницу и, в общем, любое событие, приводящее к перерисовке экрана. Размеры графиков в ряде случаев могут меняться перемещением границ графиков.

Для генерирования исходного процесса, используется первая страница, приведенная на рис. П.25.2.

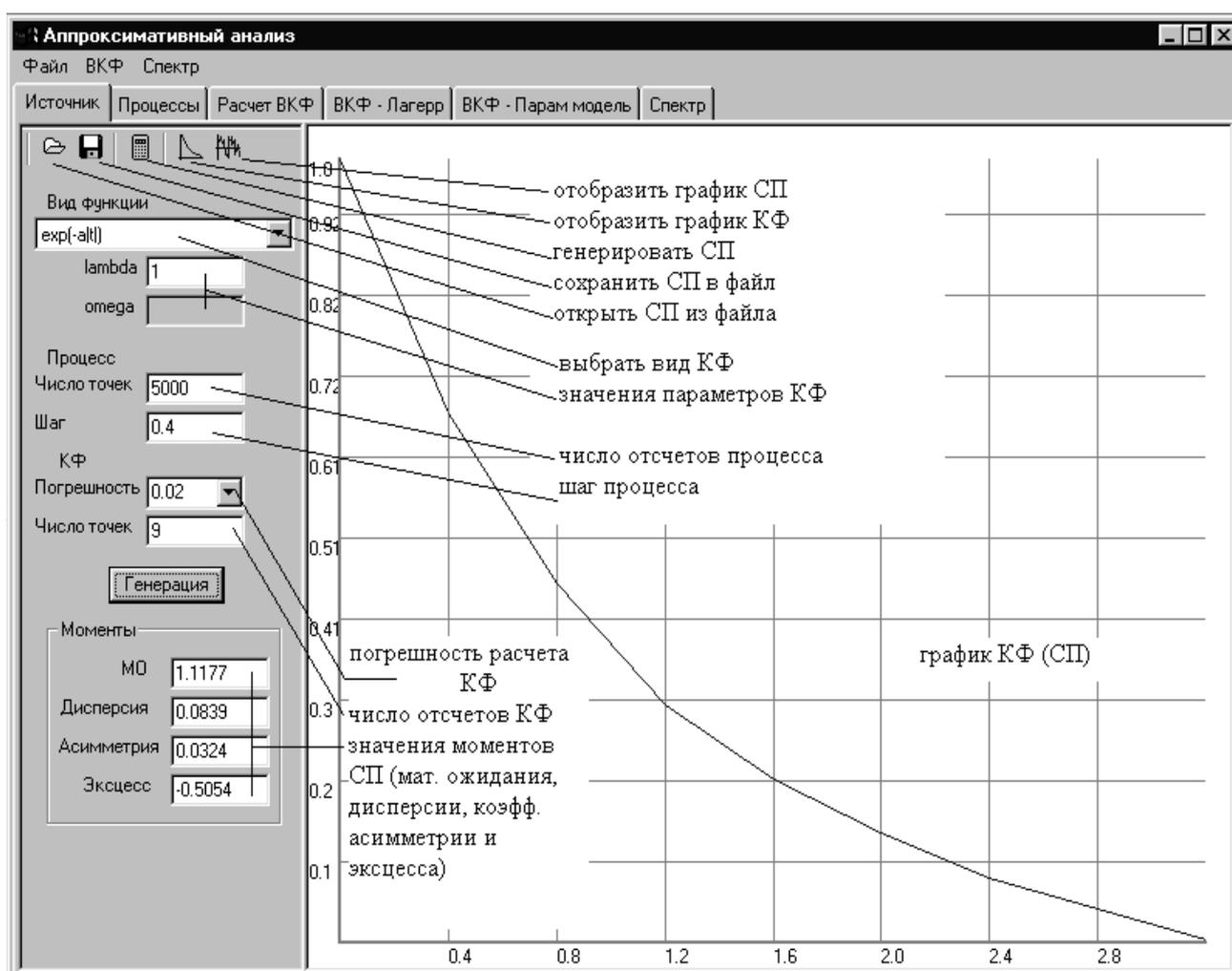


Рисунок П.25.2. Генерирование исходного процесса

Возможный вид нормированной корреляционной функции приведен на рис. П.25.3 а).

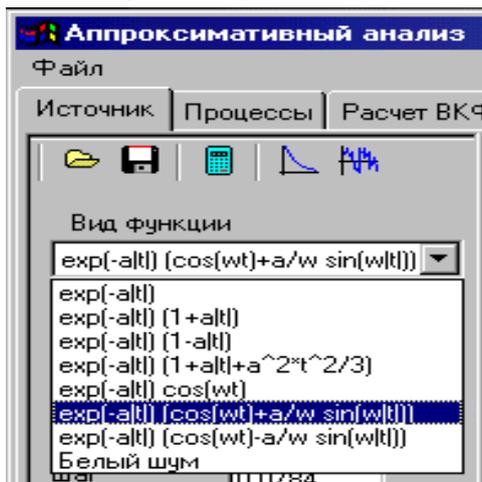


Рисунок П.25.3

Для создания процессов (рис. П.25.4) необходимо задать параметры модулей. Для фильтра (см. рис. П.25.6 а)) требуется указать вид фильтра и два параметра (λ и ω_0). Для каждого процесса можно выбрать один из 5 типов дискретизации (см. рис. П.25.6. б)) [13]. Для р-преобразования и адаптивной дискретизации необходимо задать параметр (вероятность того, что отсчет останется в процессе и величину коридора соответственно). Для аддитивной дискретизации и дискретизации с «дрожанием» нужно задать поток (равномерный, нормальный или экспоненциальный).

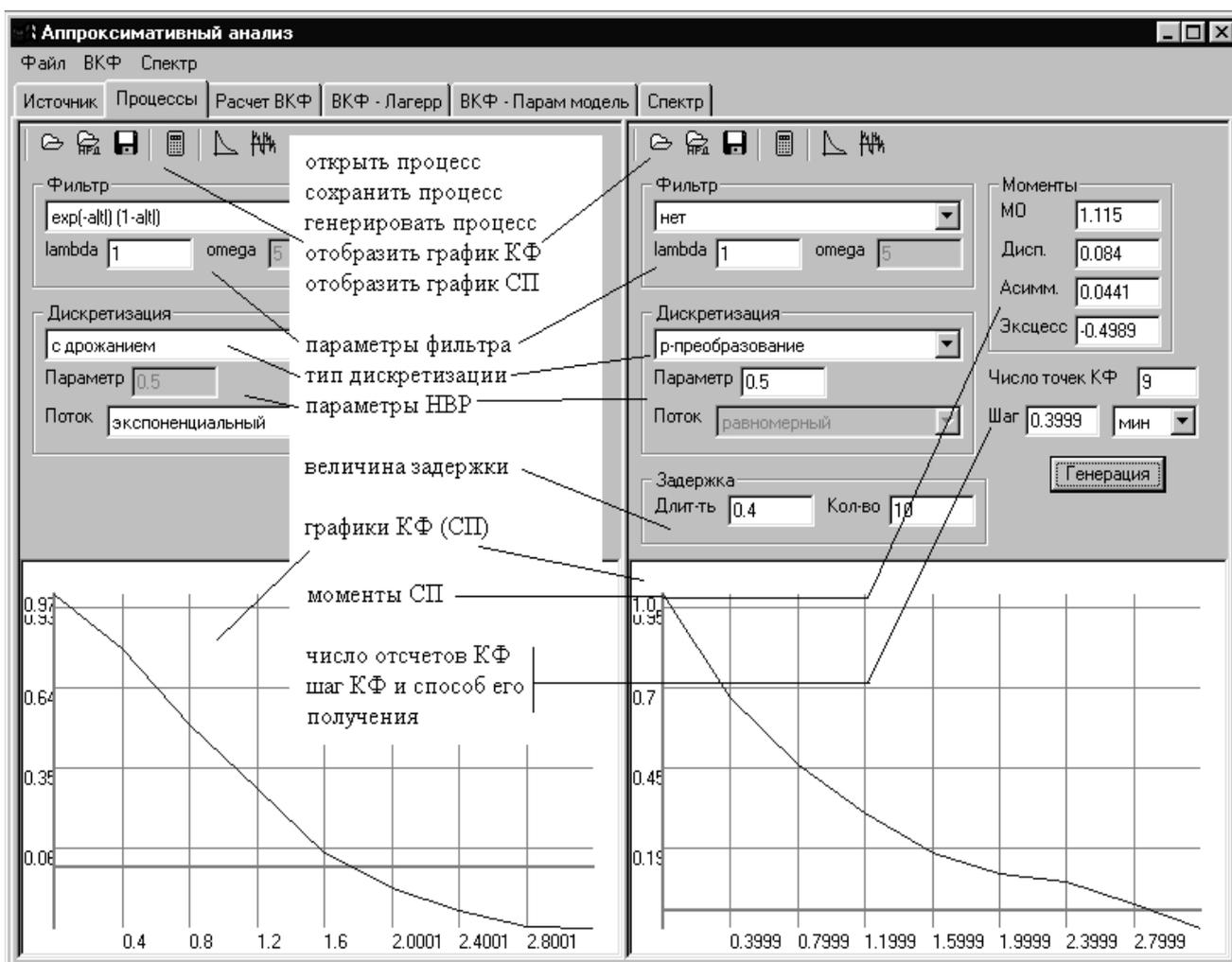
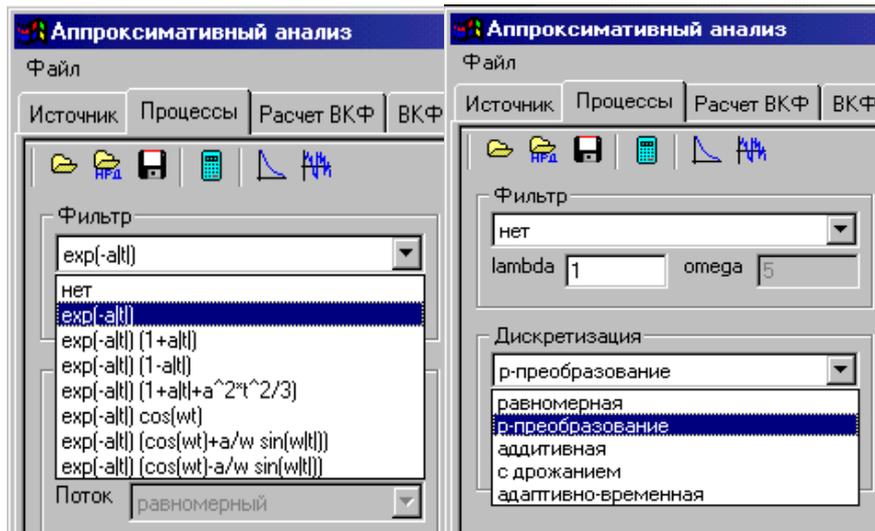


Рисунок П.25.4. Получение двух ВР

Для второго процесса необходимо задать величину задержки и количество задержек. Если величина задержки равна интервалу дискретизации первого процесса, то количеством задержек можно задавать суммарную задержку, кратную интервалу дискретизации первого процесса.



а)

б)

Рисунок П.25.6

Фильтра может и не быть (установить «нет» в окне «фильтр»). Задержка может равняться 0 (установить «кол-во» в 0).

Шаг КФ в первом и втором процессах автоматически определяется при генерации как минимальный шаг в процессе. Однако алгоритм его определения может быть изменен в соседнем окне. Предусмотрено определение шага КФ как среднего среди интервалов в процессе (задаётся вручную). Число отсчетов КФ определяется автоматически, однако также может быть изменено при установке ручного режима.

Шаг КФ в первом процессе при генерации автоматически рекомендуется в качестве величины задержки во второй процесс.

При генерации пары процессов минимальный шаг из двух шагов КФ рекомендуется в качестве интервала дискретизации ВКФ на третью страницу.

При генерации осуществляется расчет моментов каждого процесса, расчет и отображение корреляционных функций внизу страницы.

Процесс, полученный на первой странице можно пропустить через фильтр, задержать, сохранить и результат опять открыть на первой странице. Таким образом, можно реализовать использование неограниченного числа фильтров для получения СП. Важное условие при этом: фильтрации подвергаются только процессы с равномерной дискретизацией.

Аналогичным образом может быть достигнут смешанный тип дискретизации СП (например, r-преобразование с «дрожанием»).

При открытии процесса необходимо контролировать тип файла (он автоматически не проверяется) и нажимать нужную кнопку для равномерной (чистая папка на кнопке) и неравномерной (на кнопке написано НРД) дискретизации открываемых процессов.

При сохранении формат файла определяется автоматически.

Две правые кнопки с графиками нужны для отображения КФ и СП соответственно.

Расчет ВКФ

На странице 3 (см. рис. П.25.7) происходит расчет ВКФ и фазового портрета. На верхней панели нужно указать интервал дискретизации ВКФ и количество отсчетов левой и правой ветвей (окно для отсчетов левой ветви находится слева). Расчет производится после нажатия левой кнопки с графиком ВКФ. Расчет фазового портрета следует производить только после расчета ВКФ нажатием правой кнопки с изображением графика фазового портрета.

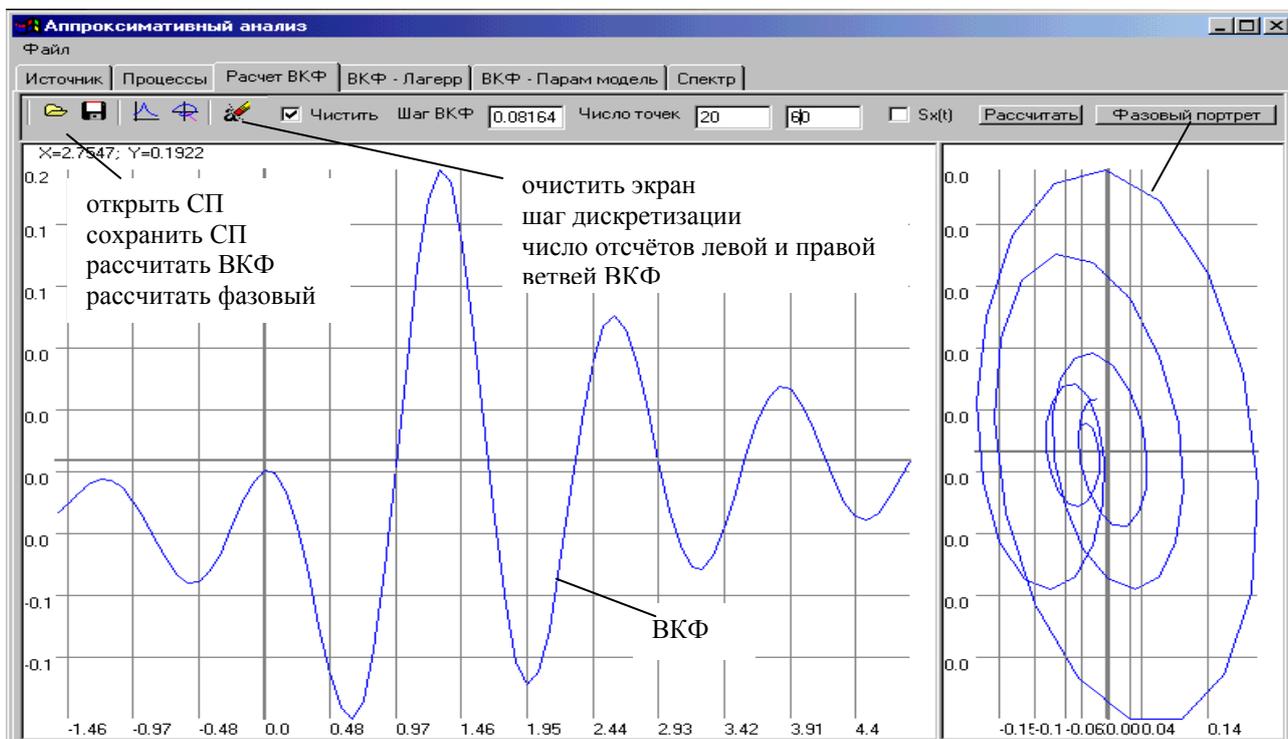


Рисунок П.25.7. Расчет ВКФ

Предусмотрена возможность сохранения и чтения ВКФ, а также очистки экрана и вывода на него более одного графика (см. рис. П.25.8).

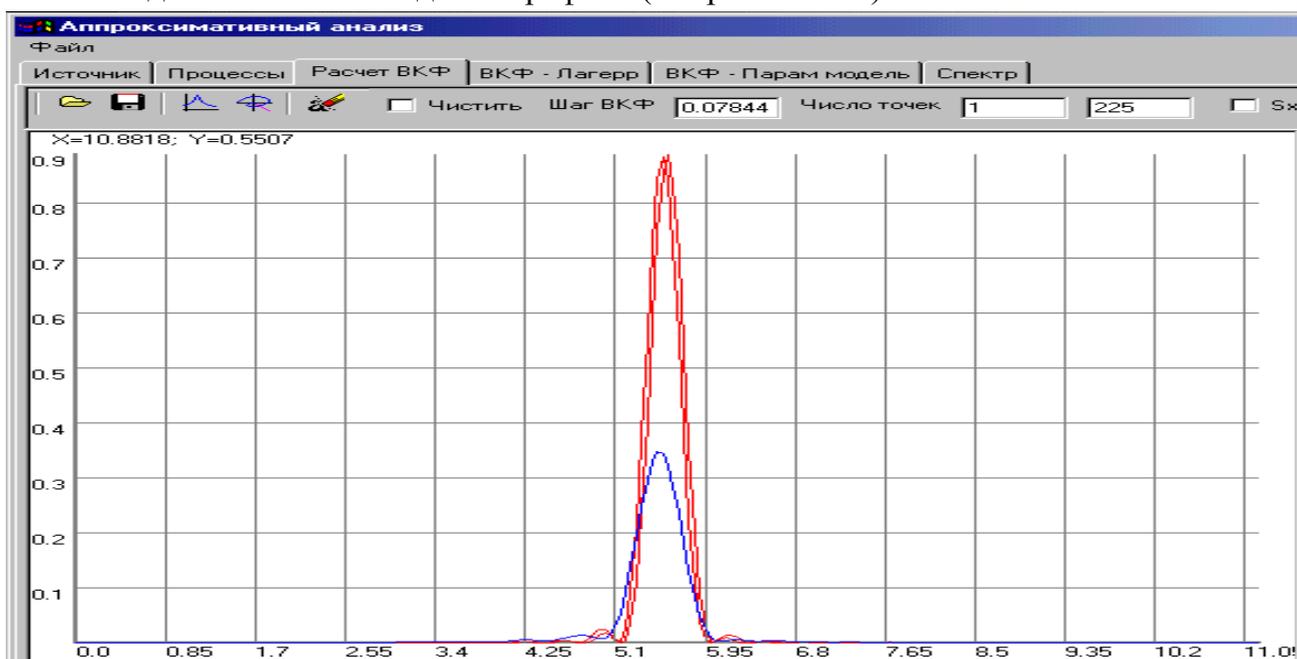


Рисунок П.25.8

Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями Лагерра

Аппроксимация ортогональными функциями Лагерра производится на странице 4, приведенной на рис. П.25.9.

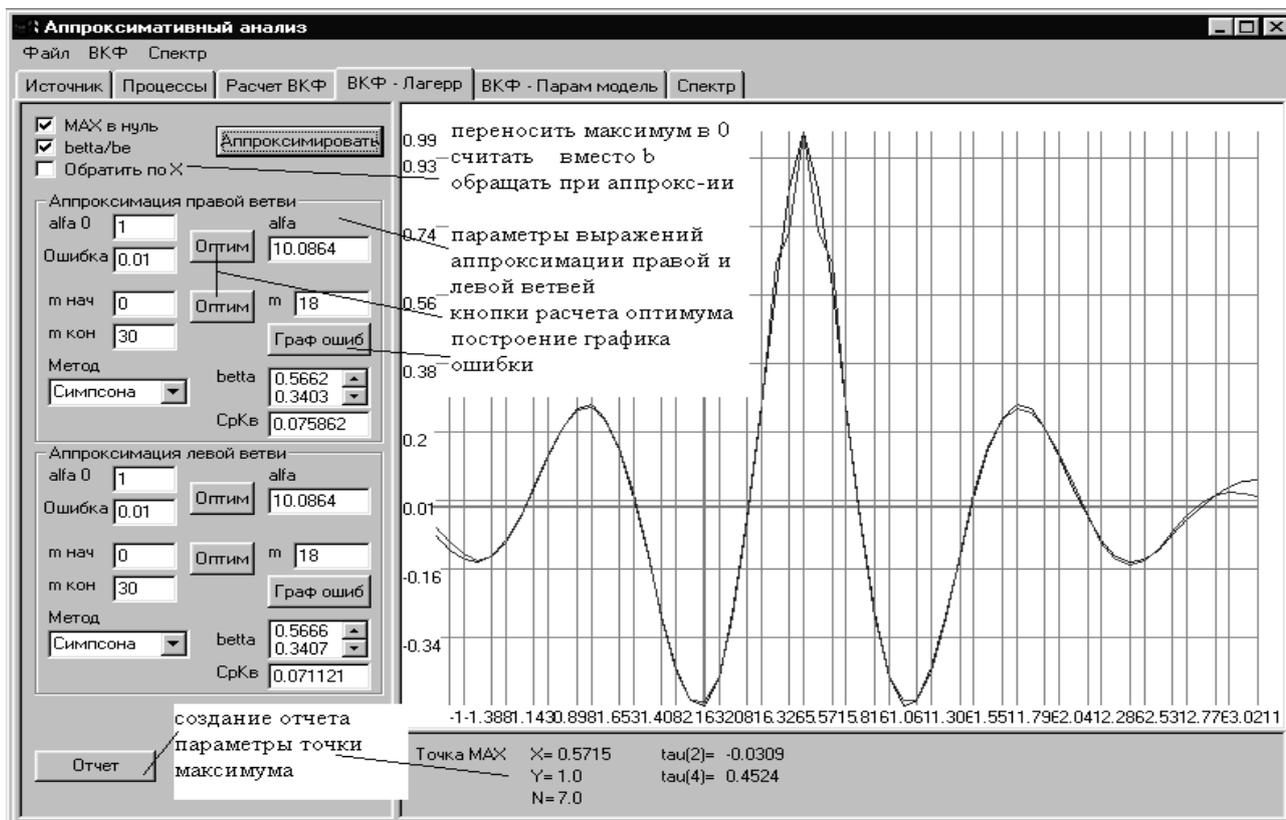


Рисунок П.25.9. Аппроксимация ВКФ ортогональными рядами Лагерра

Сначала нужно установить флажки в верхнем левом углу страницы. Флажок «МАХ в нуль» означает, что будет найден максимум на графике ВКФ (справа или слева от оси ординат), затем график сдвинется вдоль оси X на величину абсциссы точки максимума. Значение максимума будет приведено внизу страницы после аппроксимации. Таким образом, максимум графика будет в точке с абсциссой 0. Затем все ординаты графика будут разделены на ординату максимума. После аппроксимации функциями Лагерра ВКФ будет приведена в исходное состояние, а при вычислении ВКФ и спектра по параметрам аппроксимирующего выражения будут учтены проведенные изменения.

Флажок «beta/be» означает, что вместо параметров аппроксимирующего выражения β будут использоваться исправленные b .

Флажок «Обратить по X» устанавливается, когда у графика есть ярко выраженный минимум в отрицательной области. Тогда график будет инвертирован относительно X и это будет учтено при построении аппроксимирующего выражения.

После установления флажков необходимо определить оптимальные значения параметров ряда Лагерра α и β_0, \dots, β_m для каждой ветви. Для этого необходимо:

- выбрать метод численного интегрирования в поле «Метод»;
- указать начальное приближение α_0 в поле «alpha 0» и погрешность определения α в поле «Ошибка»;
- нажать на кнопку «Оптим» рядом с полем «alpha»;

- выбрать диапазон, в котором будет рассчитано число членов разложения m , в полях « m нач» и « m кон»;
- нажать на кнопку «Оптим» рядом с полем « m »;
- в случае необходимости построения зависимости ошибки аппроксимации от числа членов разложения, нажать на кнопку «Граф ошиб»;
- определив α и число членов разложения для обеих ветвей, нажать на кнопку «Аппроксимировать».

После этого в поле « β » появится массив членов разложения β , а в поле «СрКв» будет отображена среднеквадратическая ошибка аппроксимации. Будет также построен график исходной ВКФ (синим цветом) и аппроксимирующего выражения (красным цветом).

Параметр α и число членов разложения m могут быть введены вручную в полях « α » и « m » соответственно.

Для сохранения результатов аппроксимации в файл необходимо нажать на кнопку «Отчет» в левом нижнем углу страницы.

Аппроксимация ВКФ параметрическими моделями

Страница 5 (см. рис.П.25.10) предназначена для аппроксимации ВКФ параметрическими моделями. Здесь нужно установить флажок в верхнем левом углу (назначение его аналогично описанному для флажка с тем же именем на предыдущей странице), затем указать для правой и левой ветви вид аппроксимирующей функции в поле «Вид функции» и начальные приближения для параметра λ в поле « λ_0 » и параметра ω_0 в поле « ω_0 » при необходимости. Затем нужно задать один из методов аппроксимации (аналитически, численно, Нелдера-Мида или ввод параметров вручную) в поле «Вид аппр» для обеих ветвей.

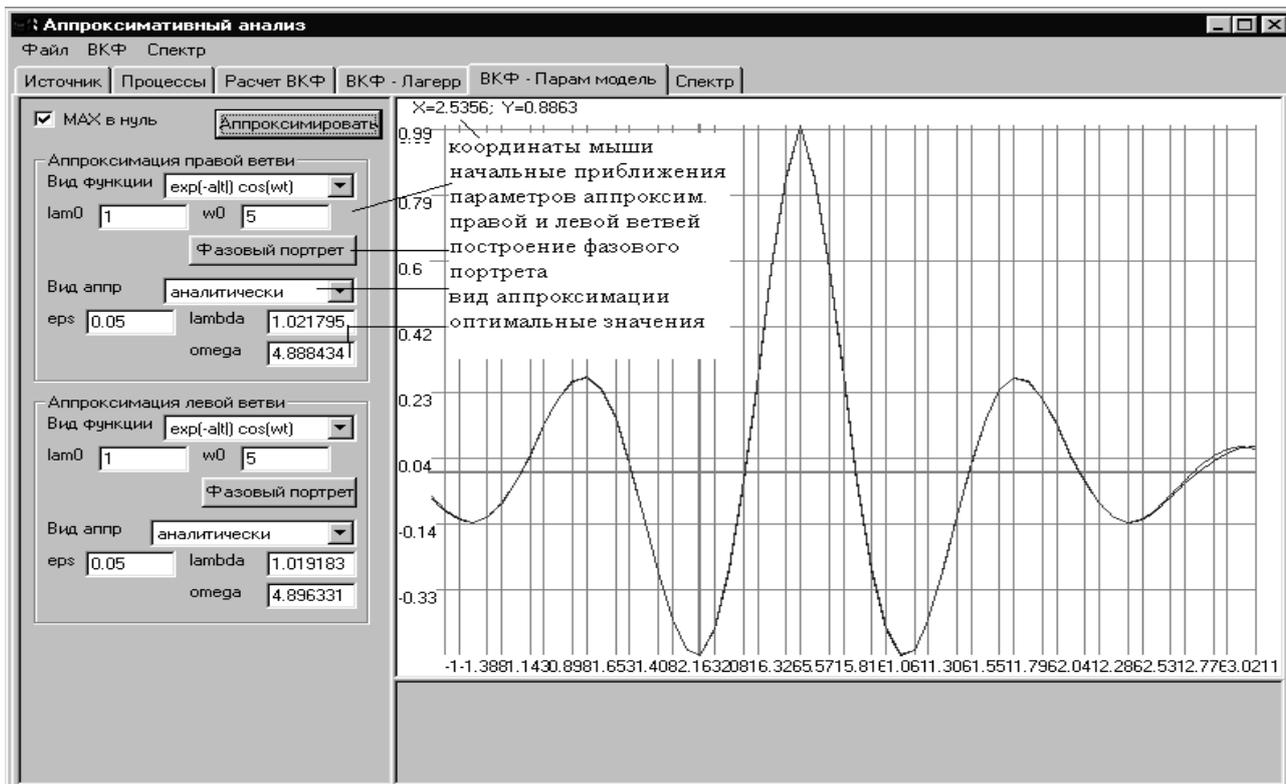


Рисунок П.25.10. Аппроксимация ВКФ параметрическими моделями

После нажатия на кнопку «**Аппроксимировать**» будут найдены значения λ и ω_0 в полях «**lambda**» и «**omega**» и построен график ВКФ (синим цветом) и график аппроксимирующего выражения (красным цветом).

Определение взаимной спектральной плотности мощности

На странице 6 (см. рис. П.25.11) происходит вычисление спектральной плотности мощности. После нажатия на кнопку с лампочкой и буквой L происходит вычисление спектра по параметрам аппроксимирующего ВКФ выражения Лагерра, полученным на странице 4, после нажатия на кнопку с лампочкой и буквой P происходит вычисление спектра по параметрам выражения, полученным на странице 5.

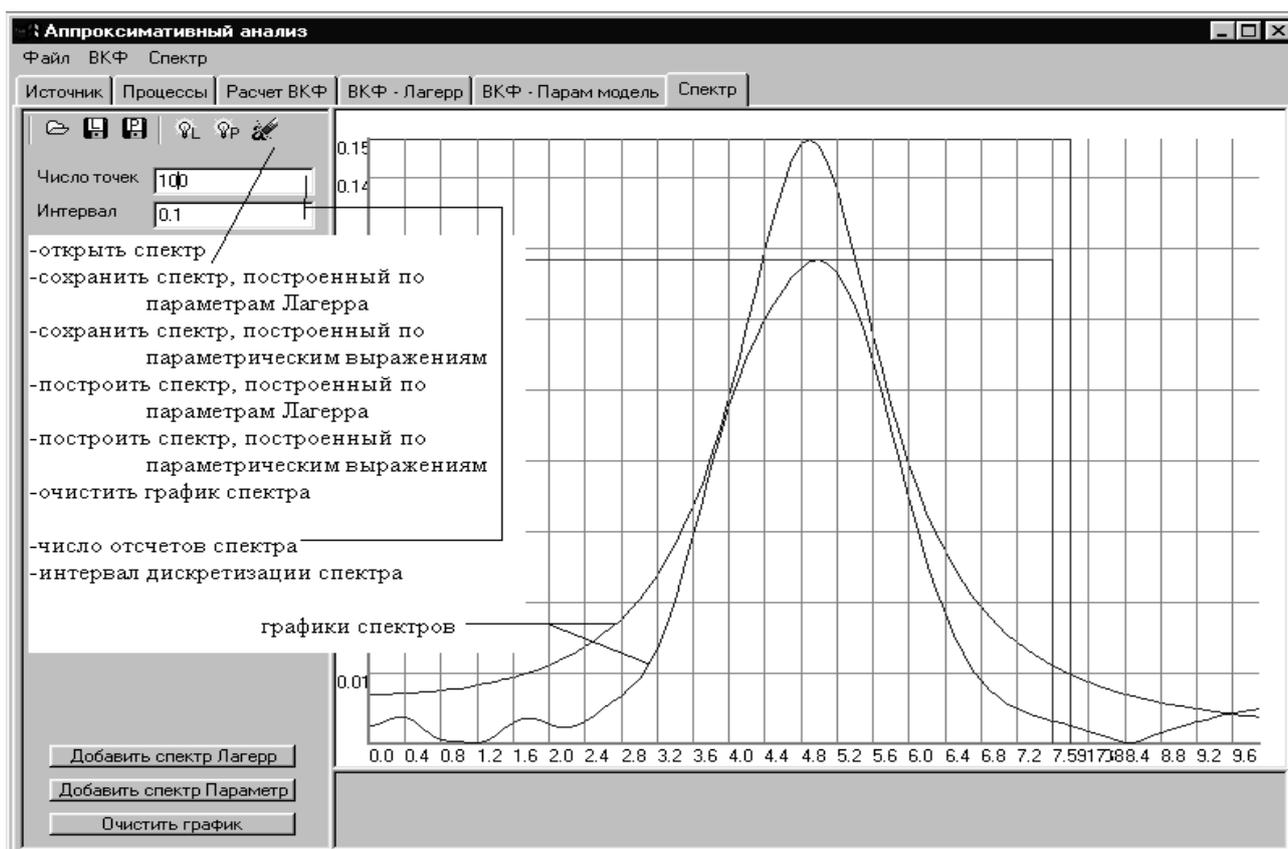


Рисунок П.25.11. Взаимный спектр

При этом синим цветом отображается спектр, красным – эквивалентная ширина спектра. Предусмотрена возможность сохранения полученных спектров (нажатием соответствующих кнопок) и открытия нескольких спектров из файлов (чистая кнопка «**Открыть**», см. рис. П.25.12 и П.25.13). Нажатием на кнопку с ластиком график очищается.

Вся информация, приведенная выше, содержится в файле справки. Файл справки вызывается нажатием «**F1**» с любой страницы системы.

Ошибки, возникающие в ходе работы системы и не предусмотренные автором, сопровождаются стандартным сообщением языка JAVA. В большинстве случаев после нажатия на кнопку «**Continue**» работу в системе можно продолжить.

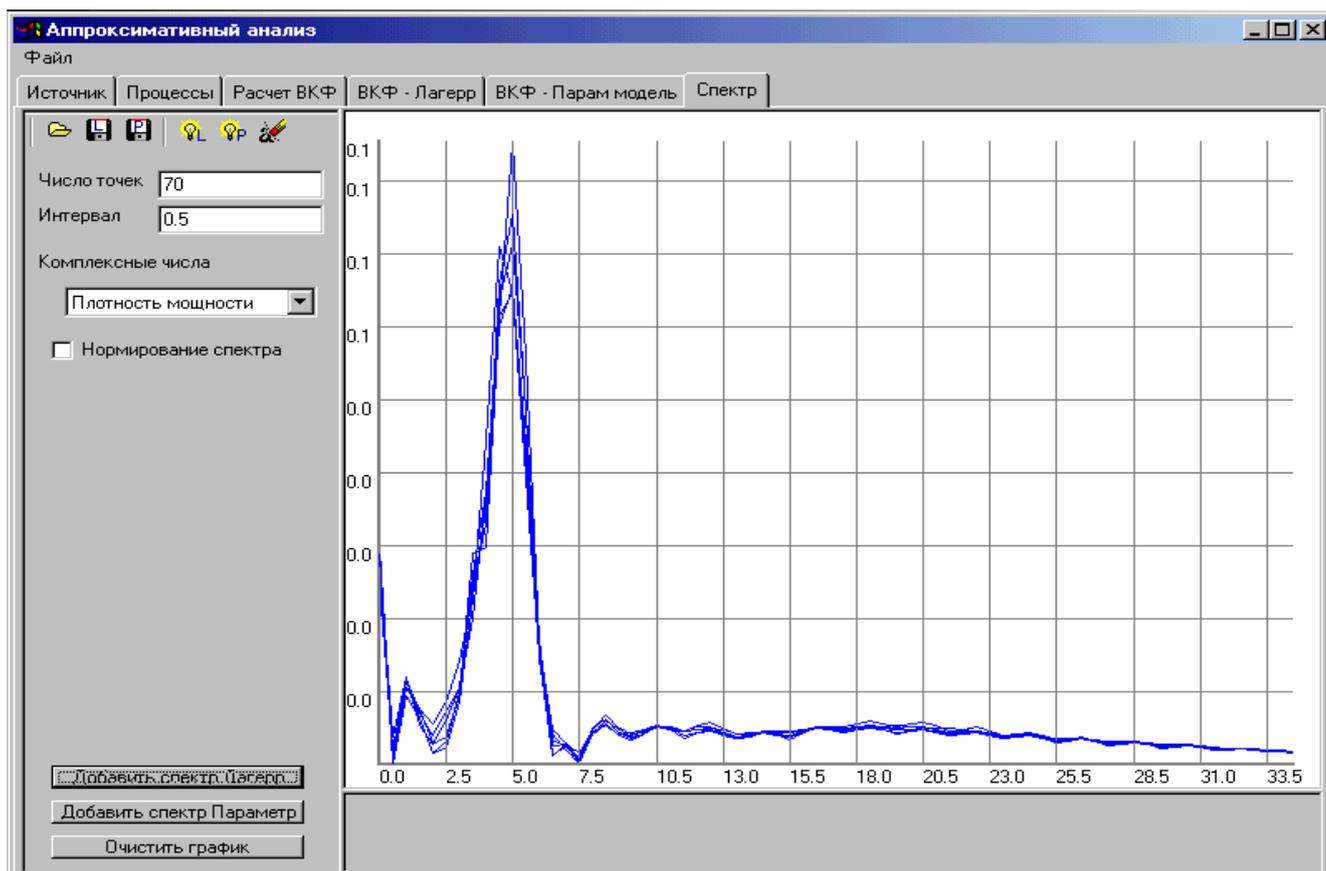


Рисунок П.25.12. Наложение спектров при аппроксимации спектров ортогональными функциями Лагерра

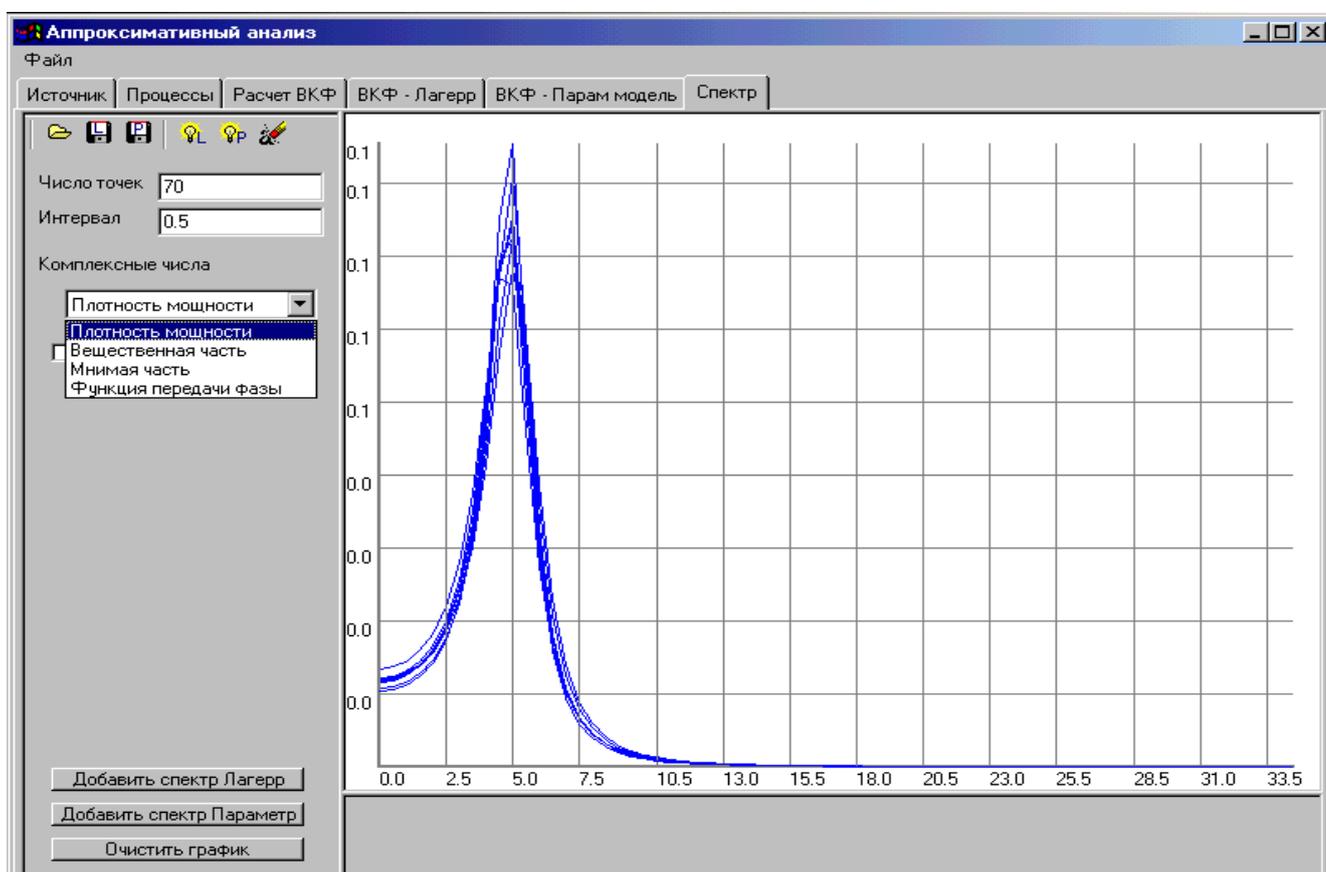


Рисунок П.25.13. Наложение спектров при аппроксимации параметрическими моделями

Требование к формату чисел заключается в следующем. Число отсчётов – **целое** в виде строки. Отсчёты времени, СП и КФ – **double** в виде строки (разделитель – точка). После каждого числа разделитель – знак абзаца.

Формат вводимых и выводимых файлов представлен в таблице П.25.1.

Таблица П.25.1

Процесс с регулярной дискретизацией *rd	Процесс с нерегулярной дискретизацией *nrd	ВКФ с регулярной дискретизацией *txt	Спектральная плотность мощности (парам. модели) *txt	Спектральная плотность мощности (Лагерра) *txt	Параметры ортогональных функций Лагерра *txt
M	M_j	$J_{\max,п}$	$\Delta\omega$	$\Delta\omega$	$\alpha_{п}$
Δt	$x(1)$	$J_{\max,л}$	ω_3	ω_3	$\beta_{0,п}$
$x(1)$...	$\Delta\tau$	$S_x(\omega_3)$	$S_x(\omega_3)$...
...	...	$\rho_{x,л}(1)$	$\Delta\omega_3$	$\Delta\omega_3$	$\beta_{m1,п}$
...	$x(M_j)$...	$S_x(1)$	$S_x(1)$	$\alpha_{л}$
...	$t(1)$	$\rho_{x,л}(J_{\max,л})$	$S_x(2)$	$S_x(2)$	$\beta_{0,л}$
...	...	$\rho_{x,п}(1)$
...
...	$\beta_{m2,п}$
...	τ_m
...	$\rho_{xy\max}$
...	m
...	$\tau_k^{(2)}$
$x(M)$	$t(M_j)$	$\rho_{x,п}(J_{\max,п})$	$S_x(N)$	$S_x(N)$	$\tau_k^{(4)}$

Ниже приведены примеры вводимых и выводимых данных при аппроксимативном корреляционно-спектральном анализе ПСП с заданным видом корреляционной функции.

Таблица П.25.2

Процесс с регулярной дискретизацией *rd	Процесс с нерегулярной дискретизацией *nrd	ВКФ с регулярной дискретизацией *txt	Спектральная плотность мощности (парам. модели) *txt	Спектральная плотность мощности (Лагерра) *txt	Параметры ортогональных функций Лагерра *txt
5000	38	30	0.25	0.25	0.9452
0.4	0.9999	10	0.0	0.0	0.9480
0.0347	0.8382	0.4000	0.5687	0.5506	...
0.5947	0.5626	0.0339	0.7955	0.8085	-0.0557
0.9869	0.2431	0.0615	0.5687	0.5506	0.9452
1.4605	-0.0585	0.1023	0.5159	0.4903	0.9480

...
3.2080	2.6240	-0.0065	0.0	0.0010	-0.0557
3.8014	2.7060	-0.0141	0.0	9.0E-4	4.0
4.0639	2.788-	-0.0225	0.0	9.0E-4	1.0
4.0235	2.8700	-0.0319	0.0	8.0E-4	10
4.5296	2.9520	-0.0393	0.0	8.0E-4	3.2134
5.1575	3.0340	-0.0448	0.0	8.0E-4	1.7537

Примеры результатов моделирования и аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа двух процессов в ортогональном базисе Лагерра представлены на рис. П.25.13-П.25.16, где последовательно изображены:

- исходный процесс и его корреляционная функция;
- процессы и корреляционные функции двух процессов после фильтрации и задержки одного сигнала относительно другого;
- взаимная корреляционная функция и её фазовый портрет;
- графические зависимости погрешностей аппроксимации для правой и левой ветвей от членов разложения ортогонального ряда;
- результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра;
- результаты аппроксимации спектральной плотности мощности в ортогональном базисе Лагерра.

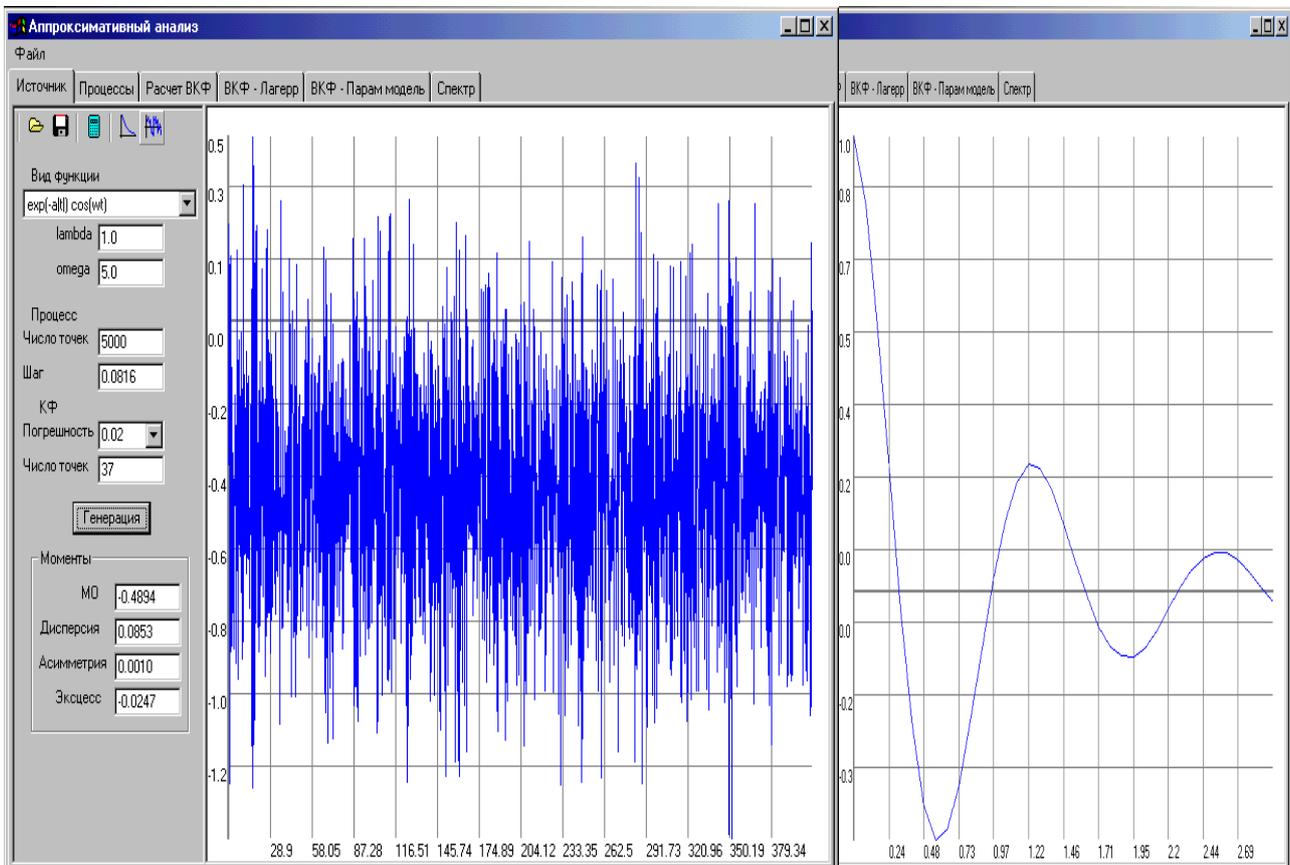


Рисунок П.25.14. Исходный процесс и его корреляционная функция

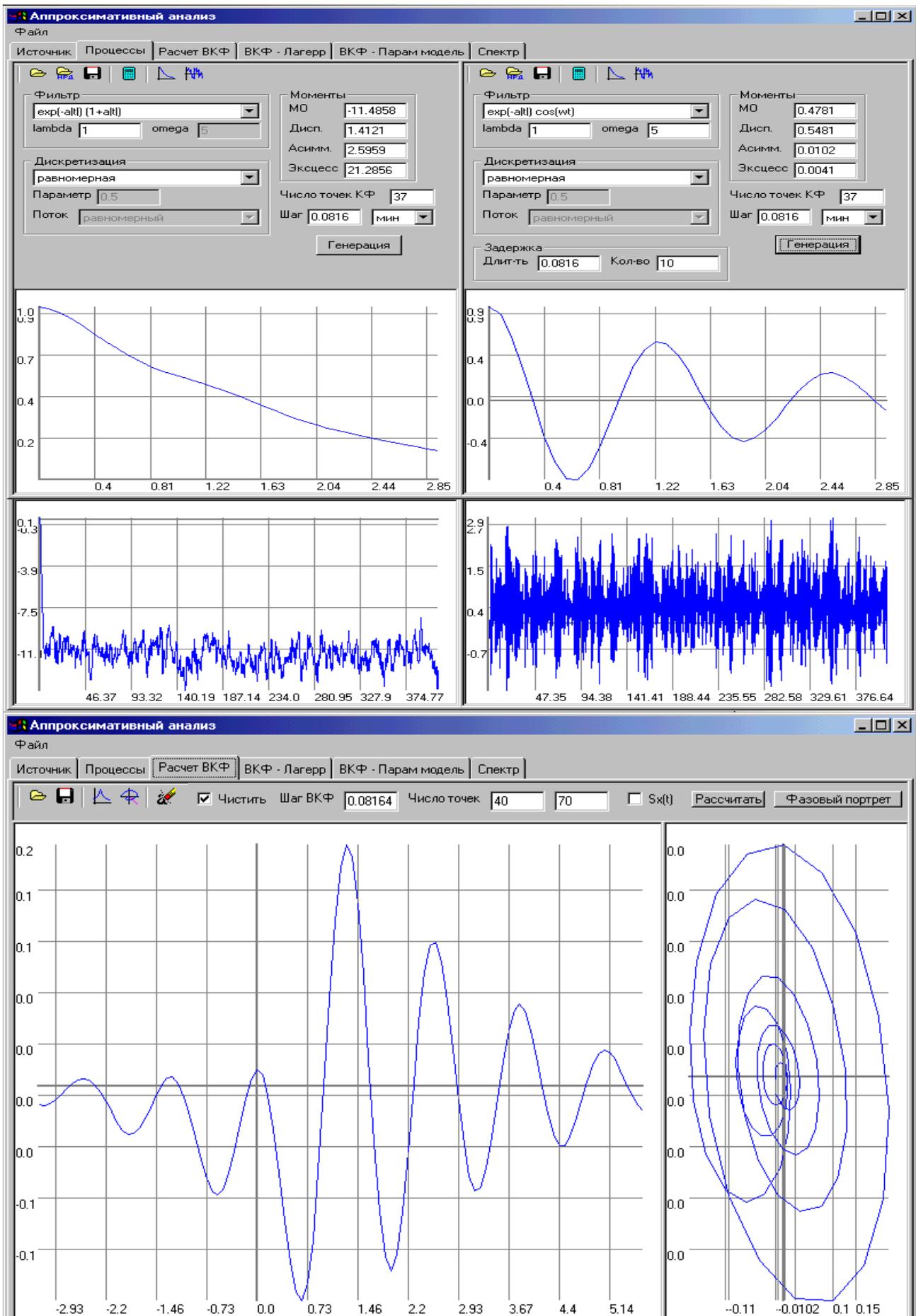


Рисунок П.25.15. Характеристики процессов и результаты их первичной обработки

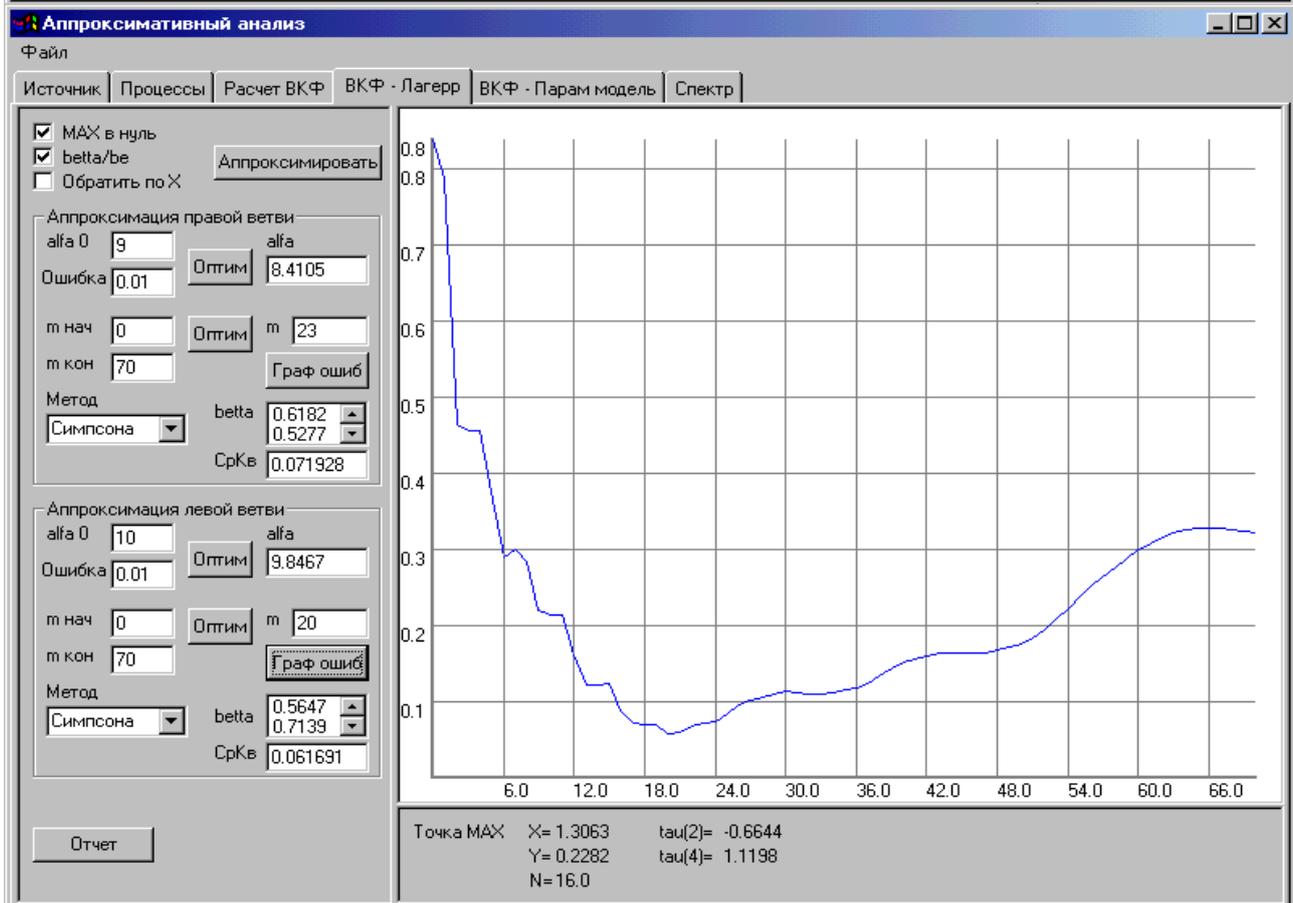
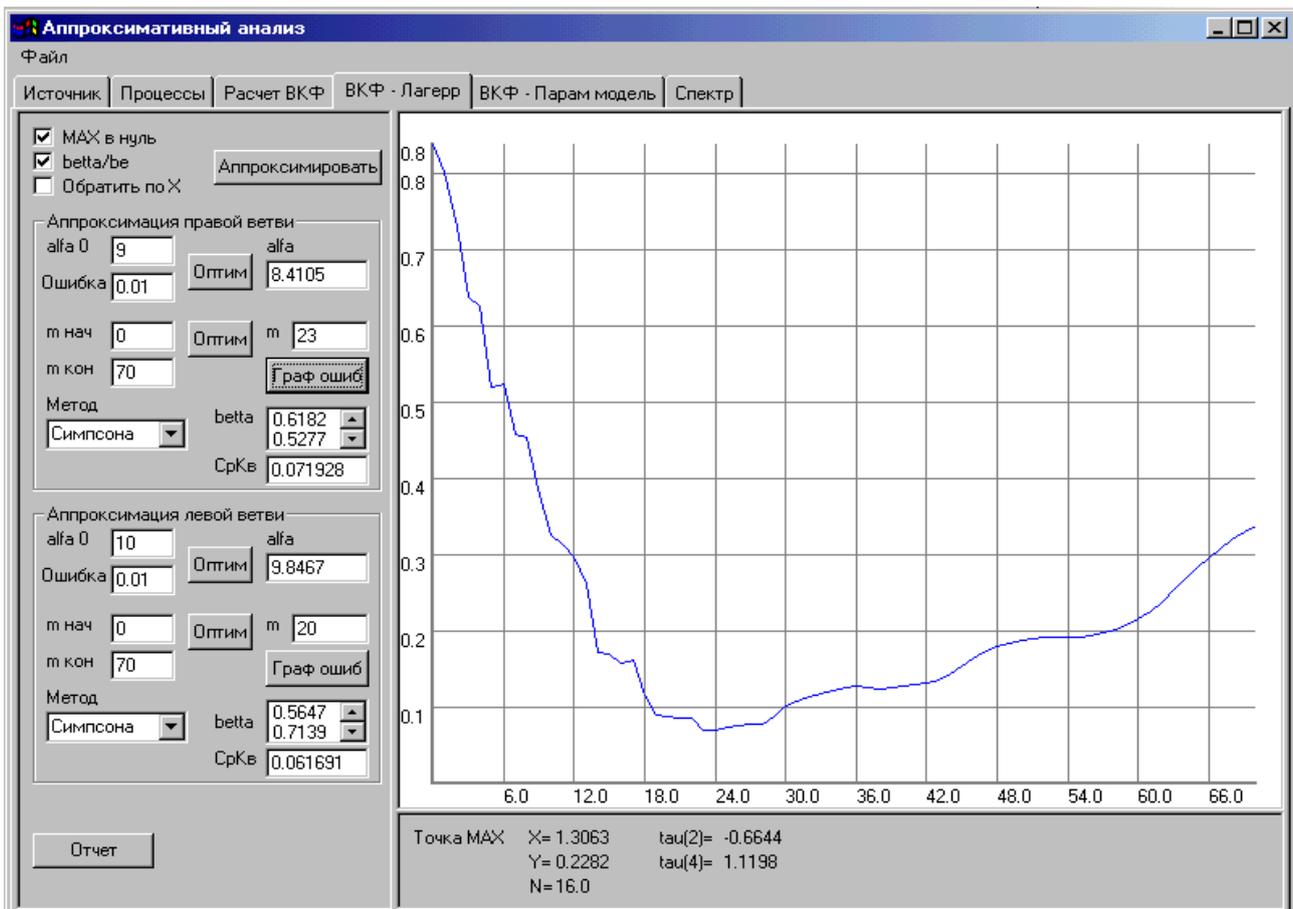


Рисунок П.25.16. Зависимости погрешностей аппроксимации правой и левой ветвей взаимной корреляционной функции от числа членов разложения ортогонального ряда в базисе Лагерра

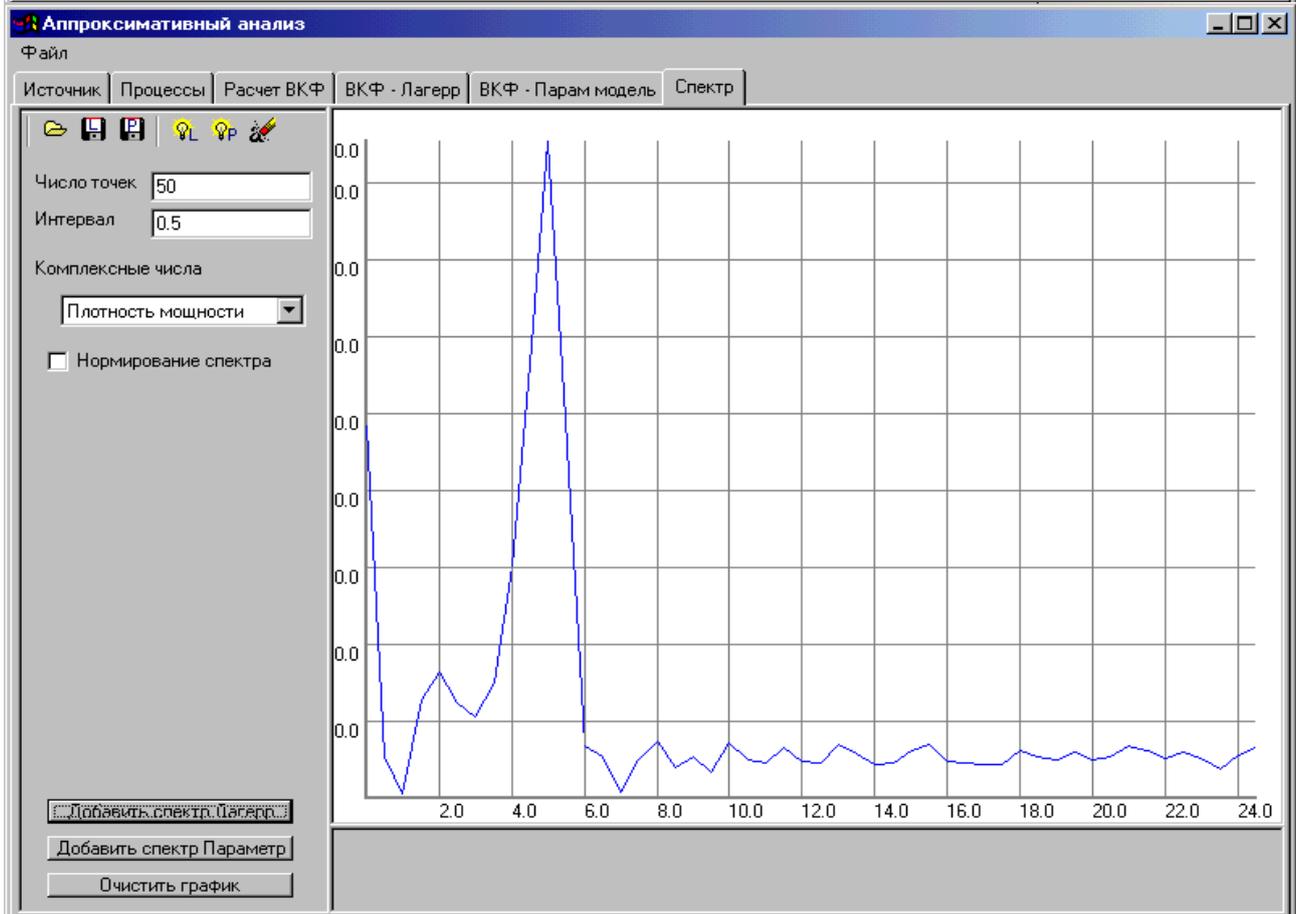
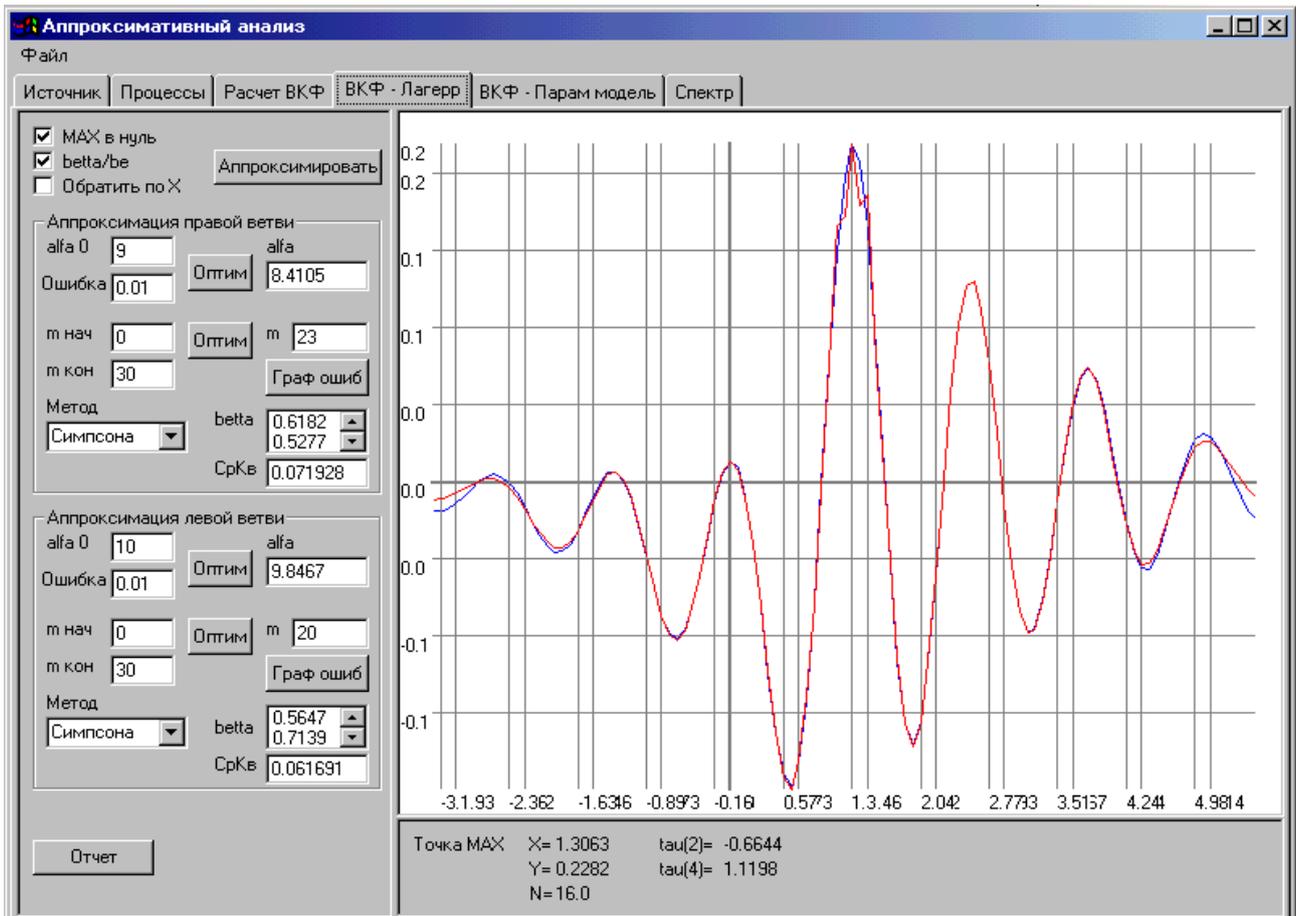


Рисунок П.25.17. Результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции и спектральной мощности в ортогональном базисе Лагерра

Примеры результатов моделирования и аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа двух процессов функциями заданного вида представлены на рис. П.25.17-П.25.16.

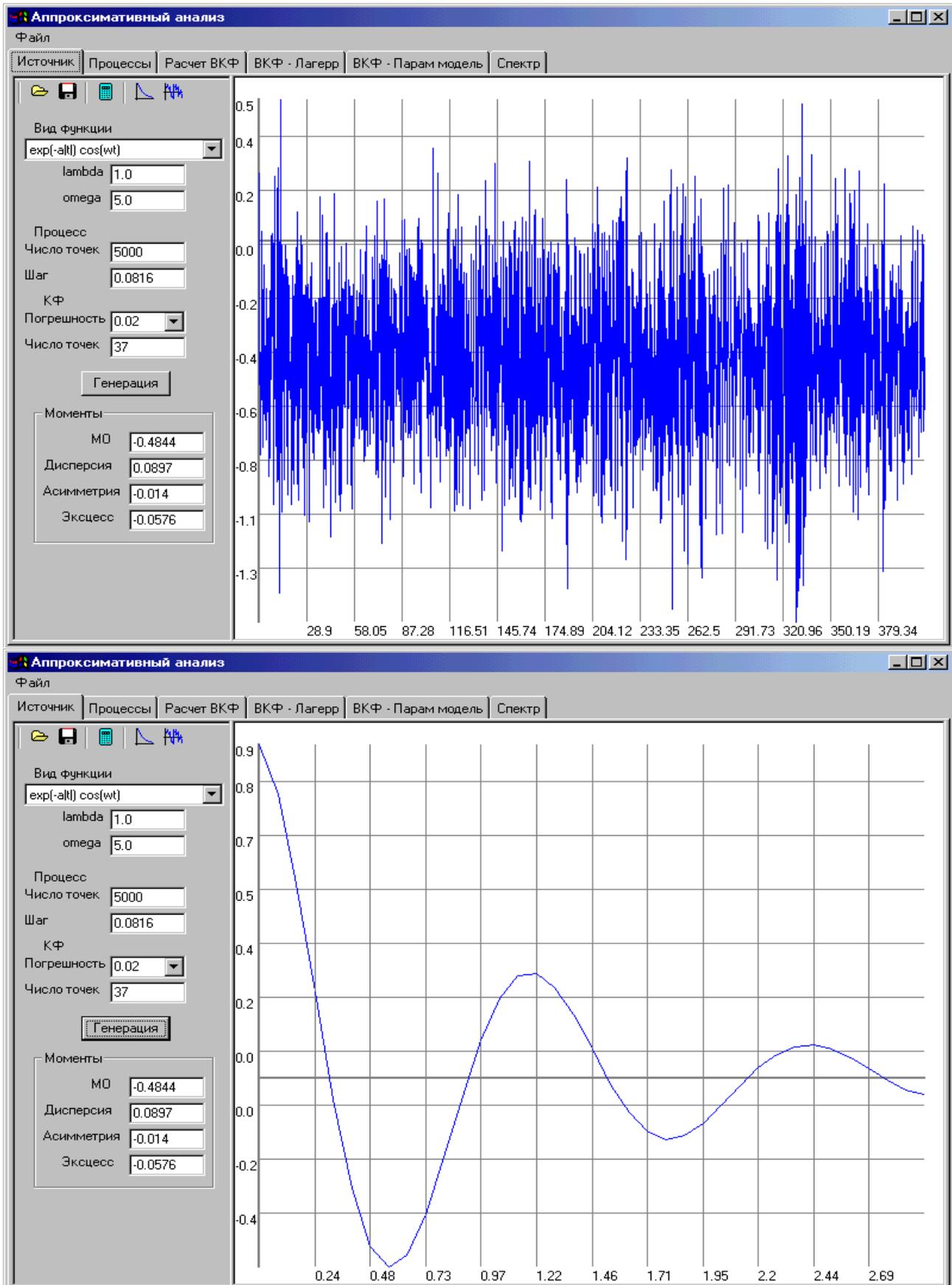


Рисунок П.25.18. Характеристики исходного процесса

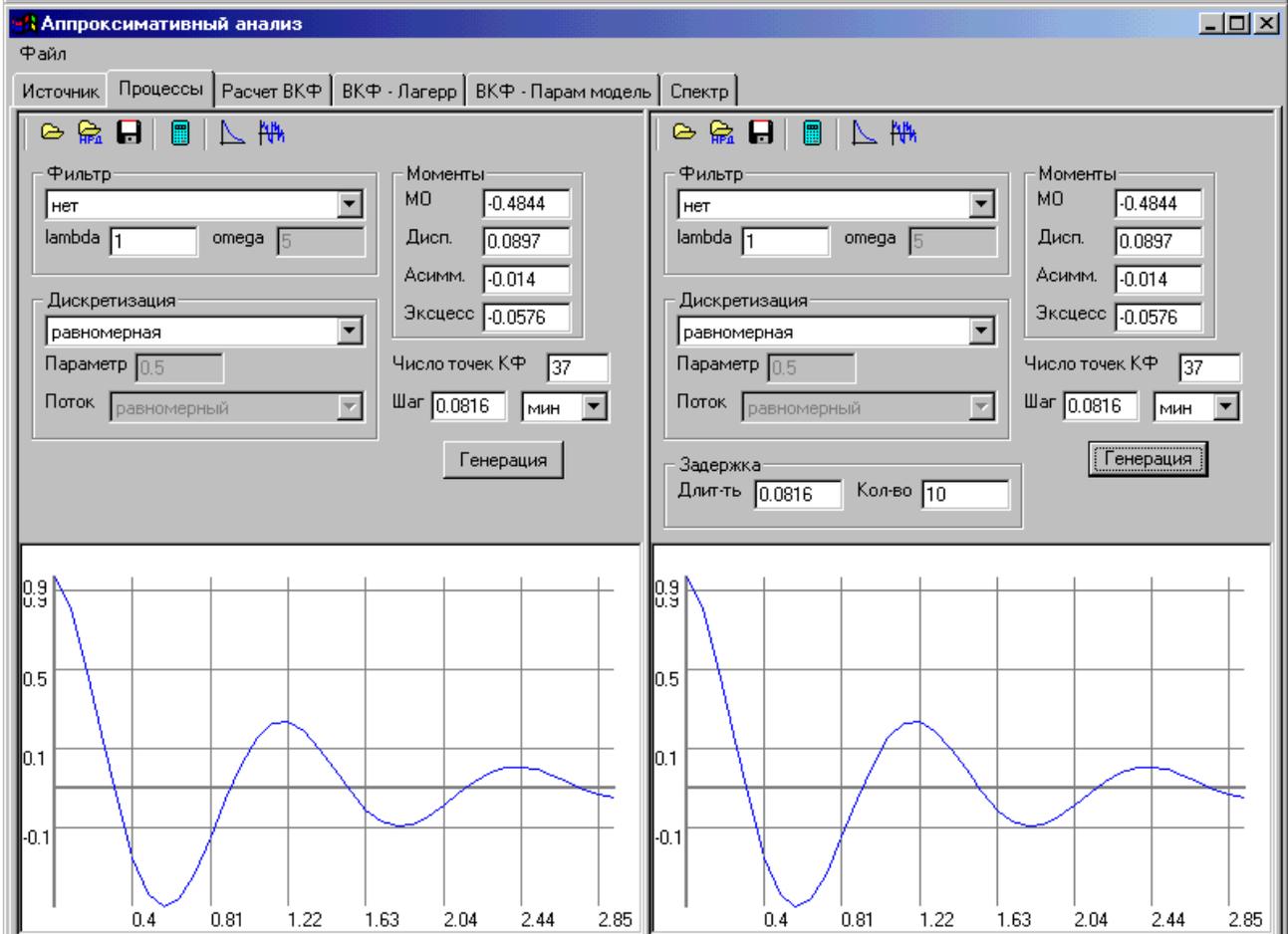
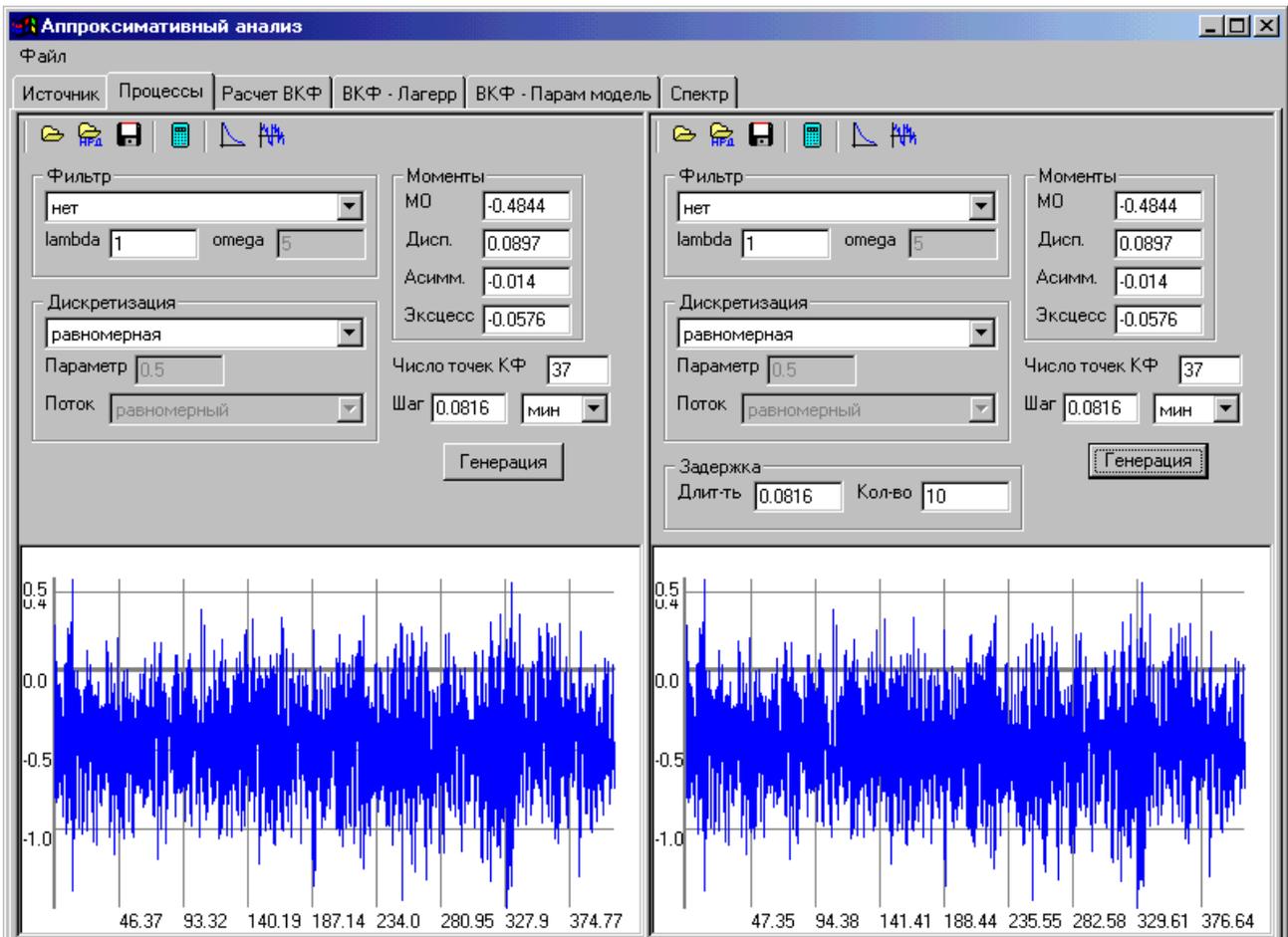


Рисунок П.25.19. Характеристики процессов

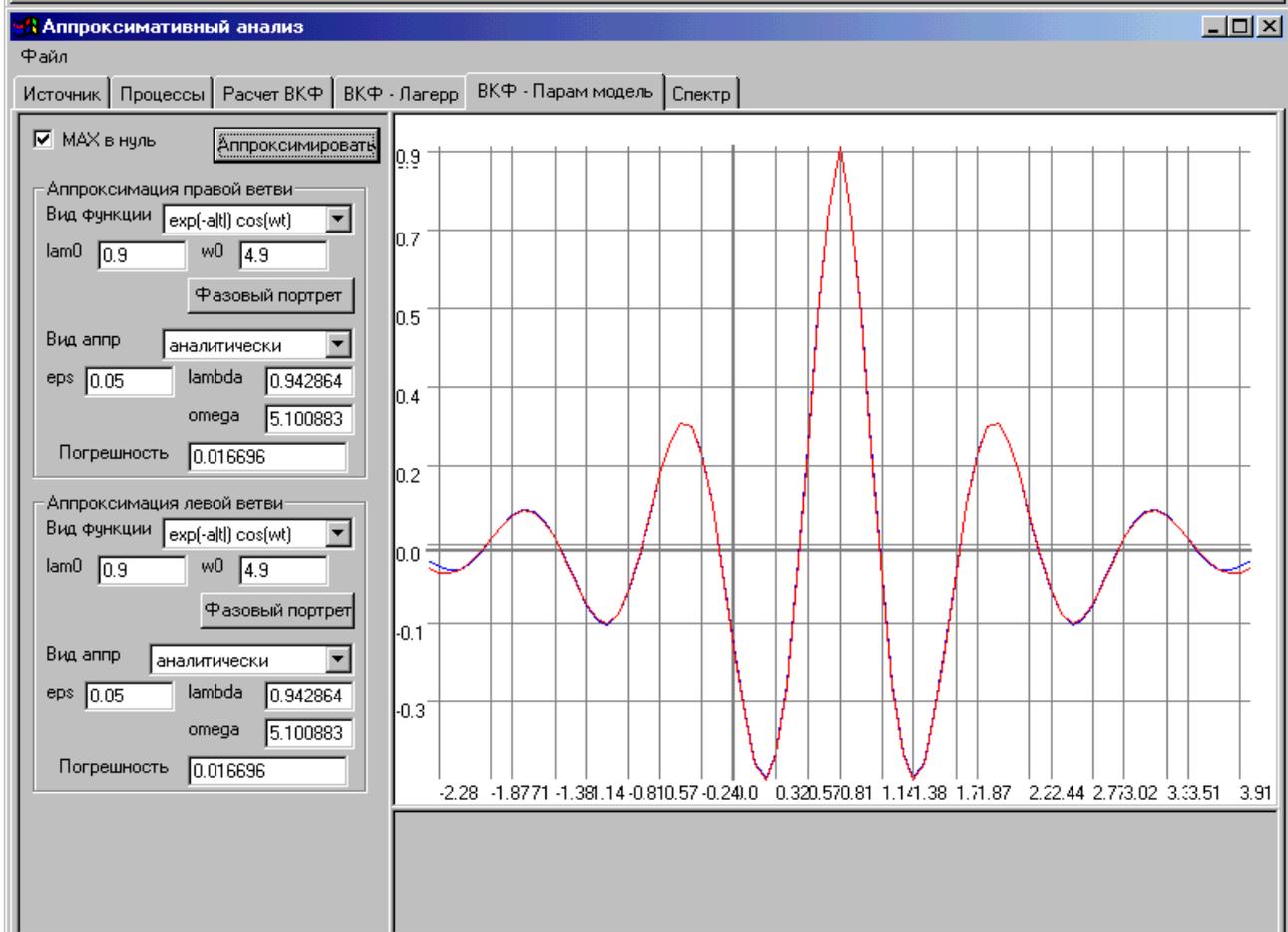
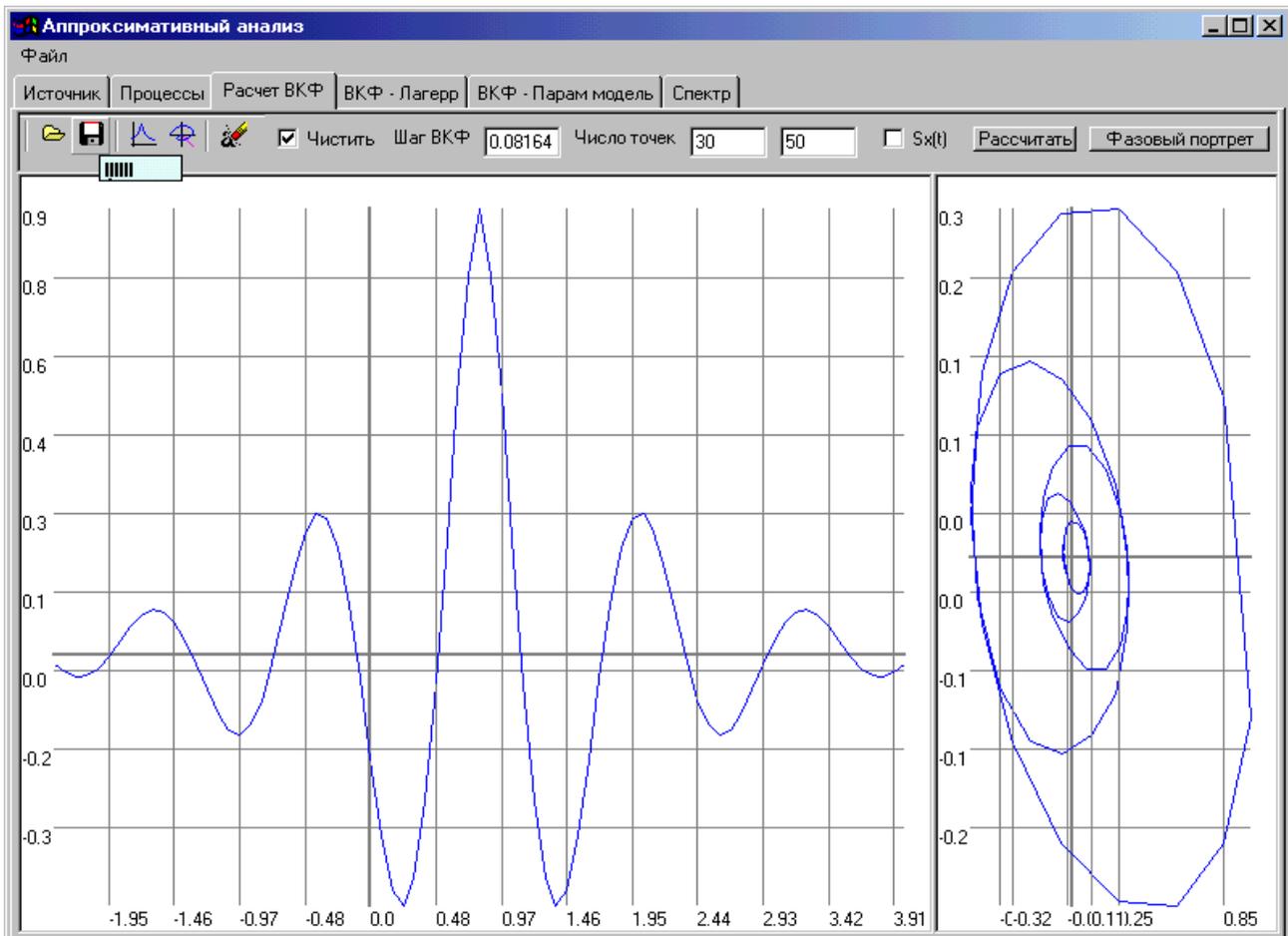


Рисунок П.25.20. Результаты первичной обработки случайных процессов и аппроксимации взаимной корреляционной функции функциями заданного вида

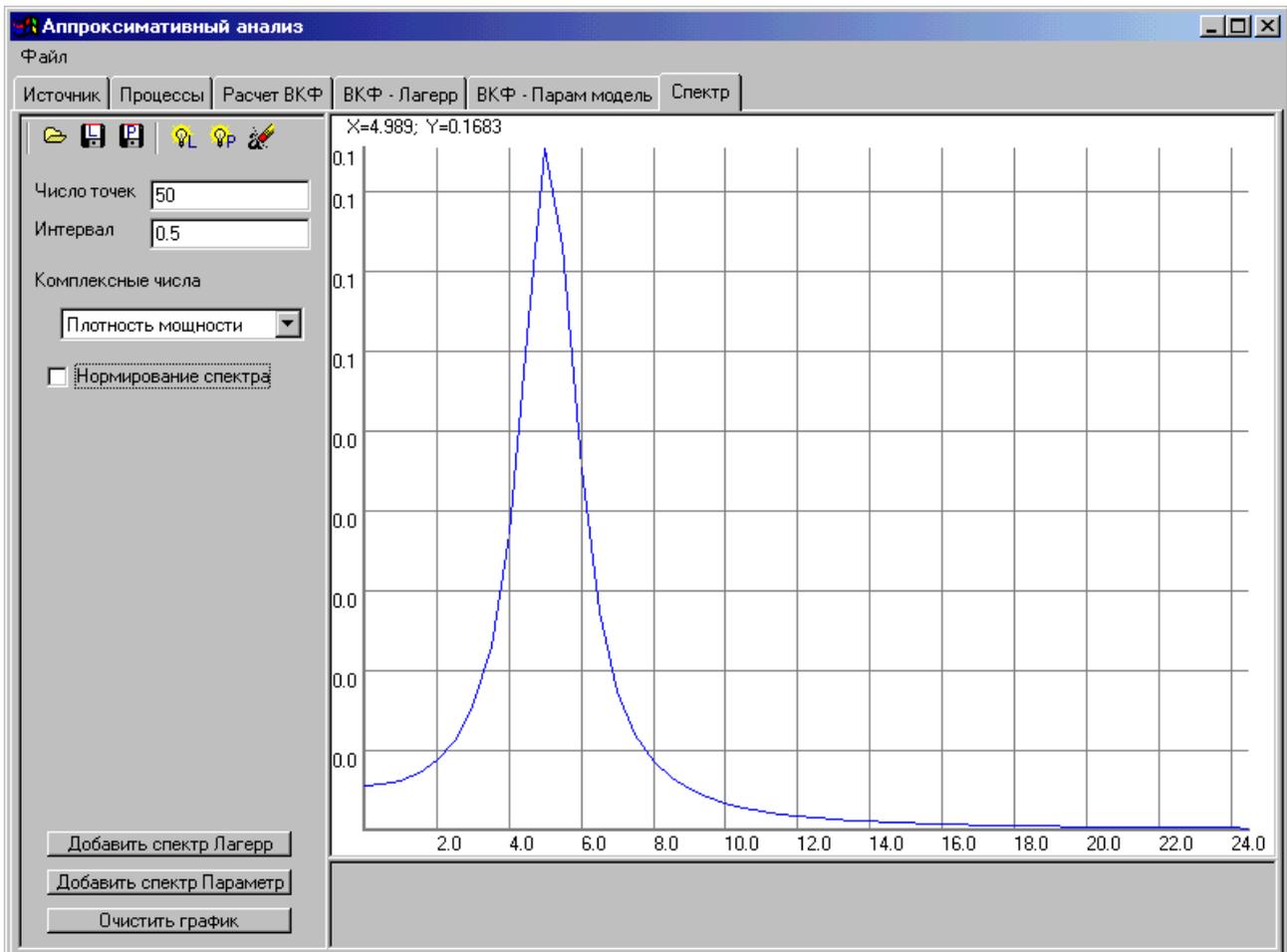


Рисунок П.25.21. Результаты аппроксимации спектральной плотности мощности функцией заданного вида

Прохоров Сергей Антонович

Моделирование и анализ случайных процессов.
Лабораторный практикум
Издание второе, переработанное и дополненное

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров
Лицензия ЛР № 040910 от 10.08.98

Подписано в печать. Формат
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л.
Тираж 500 экз. Заказ № 256

Самарский научный центр Российской академии наук.
443001 Самара, Студенческий переулок, 3 А.