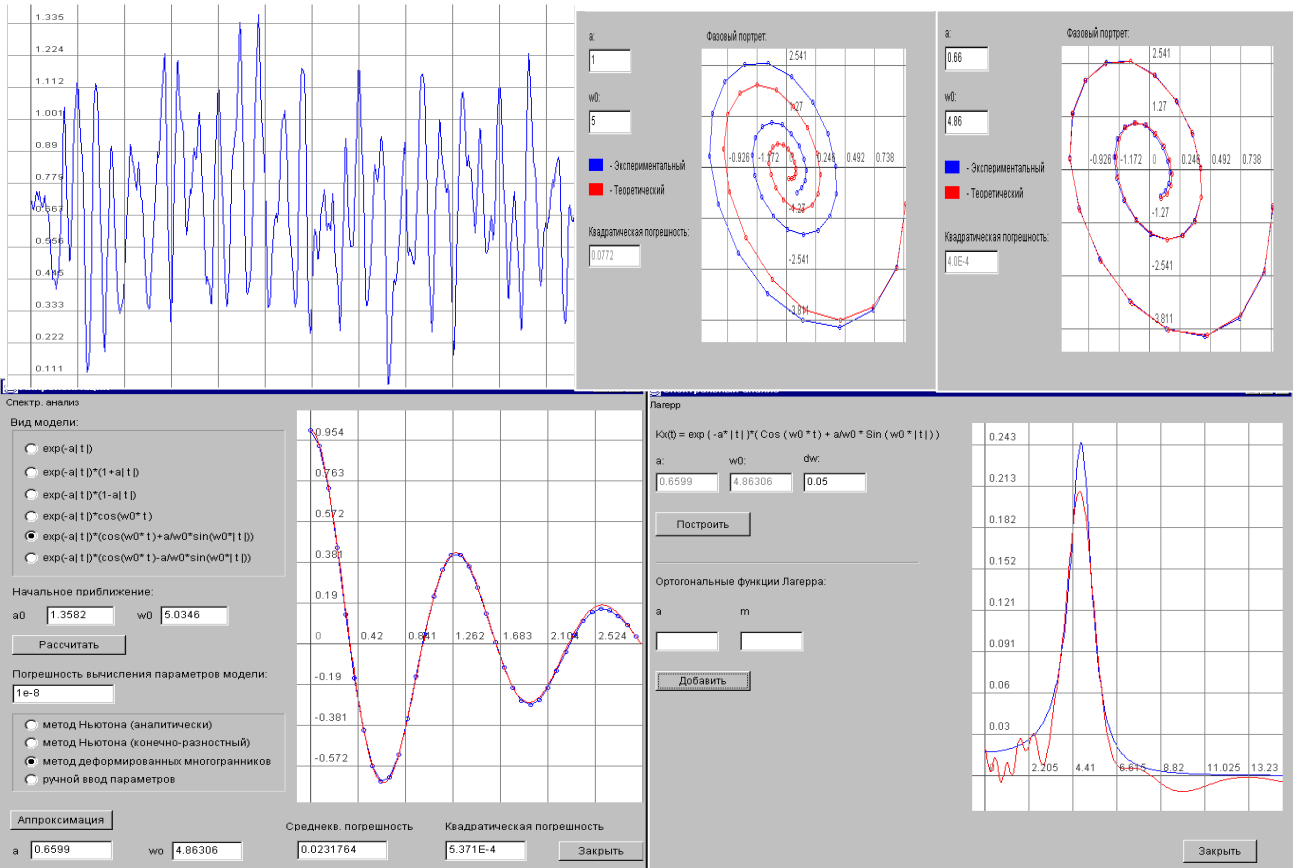


С.А. Прохоров

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Лабораторный практикум



Самара 2001 г.

Об авторе



Прохоров Сергей Антонович – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, декан факультета информатики, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета, директор Самарского филиала Российского НИИ информационных систем.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 180 научных трудах, в том числе, 5 монографиях, 40 авторских свидетельствах, 6 работах опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 50 международных, всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/

ББК 32.965я73

П 6

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор

Сойфер В.А.;

д.ф.-м.н., профессор Жданов А.И.

П 6 Прохоров С.А.

Моделирование и анализ случайных процессов.

Лабораторный практикум

Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. 191 с.: ил.

ISBN 9965-00-028-X

Рассматриваются методы и алгоритмы генерирования временных рядов с заданным видом законов распределения, корреляционных функций, неэквидистантных временных рядов с заданными вероятностными характеристиками.

Анализируются методы, алгоритмы анализа вероятностных характеристик временных рядов, включая неэквидистантные, основанные на применении классического подхода, а также с использованием интервальной корреляционной функции.

Рассматриваются задачи вторичной обработки временных рядов, включающие: идентификацию случайных процессов по виду функциональной характеристики, аппроксимацию законов распределения, корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями, представляющими собой как функции заданного вида, так и ортогональные функции Лагерра.

Приводится описание разработанных автоматизированных информационных систем для аппроксимативного анализа функциональных характеристик неэквидистантных временных рядов.

Предназначена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по изучению основ моделирования и прикладного анализа случайных процессов.

ББК 32.965я73

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

П 4310020000

00 (05) – 01

ISBN 9965-00-028-X

Самарский научный центр Российской академии наук, 2001

Самарский государственный аэрокосмический университет

С.А. Прохоров, 2001

	Стр.
СОДЕРЖАНИЕ	3
ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	7
1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	21
1.1. Теоретические основы лабораторной работы	21
1.2. Задание на самостоятельную работу	30
1.3. Содержание отчёта	31
1.4. Контрольные вопросы	37
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	38
2.1. Теоретические основы лабораторной работы	38
2.2. Задание на самостоятельную работу	44
2.3. Содержание отчёта	44
2.4. Контрольные вопросы	50
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	51
3.1. Теоретические основы лабораторной работы	51
3.2. Задание на самостоятельную работу	58
3.3. Содержание отчёта	58
3.4. Контрольные вопросы	58
4. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	62
4.1. Теоретические основы лабораторной работы	62
4.2. Задание на самостоятельную работу	66
4.3. Содержание отчёта	67
4.4. Контрольные вопросы	74
5. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ	75
5.1. Теоретические основы лабораторной работы	75
5.2. Задание на самостоятельную работу	86
5.3. Содержание отчёта	87
5.4. Контрольные вопросы	89
6. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА	90
6.1. Теоретические основы лабораторной работы	90
6.2. Задание на самостоятельную работу	96
6.3. Содержание отчёта	97
6.4. Контрольные вопросы	99
7. АППРОКСИМАЦИЯ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ	100
7.1. Теоретические основы лабораторной работы	100
7.2. Задание на самостоятельную работу	101
7.3. Содержание отчёта	102
7.4. Контрольные вопросы	102
8. АППРОКСИМАЦИЯ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА	107
8.1. Теоретические основы лабораторной работы	107
8.2. Задание на самостоятельную работу	109
8.3. Содержание отчёта	109
8.4. Контрольные вопросы	109
9. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ	112

9.1.	Теоретические основы лабораторной работы	112
9.2.	Задание на самостоятельную работу	113
9.3.	Содержание отчёта	113
9.4.	Контрольные вопросы	119
10.	АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА	120
10.1.	Теоретические основы лабораторной работы	120
10.2.	Задание на самостоятельную работу	120
10.3.	Содержание отчёта	121
10.4.	Контрольные вопросы	123
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	124
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	125
	ПРИЛОЖЕНИЯ	126
П.1.	Типовые законы распределения	126
П.2.	Характеристические функции	131
П.3.	Обратные функции законов распределения	133
П.4.	Характеристики типовых законов распределения ($P_d=0,999$)	134
П.5.	Таблица χ^2 распределения	137
П.6.	Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова	137
П.7.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации	138
П.8.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации	139
П.9.	Параметрические модели корреляционных функций	140
П.10.	Ортогональные функции Лагерра	143
П.11.	Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций	144
П.12.	Моменты для типовых моделей корреляционных функций	144
П.13.	Спектральные плотности мощности	145
П.14.	Обобщенные спектральные характеристики	146
П.15.	АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов	148
П.16.	АИС для аппроксимативного анализа авто корреляционно-спектральных характеристик	162
П.17.	Блок-схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа.	181
П.18.	АИС для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик	184

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый Вашему вниманию лабораторный практикум по моделированию и анализу случайных процессов подготовлен для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по изучению основ моделирования и прикладного анализа случайных процессов и временных рядов и дополняет монографии автора:

1. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 329 с.: ил.

2. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 209 с.: ил.

3. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 375 с.: ил.

Лабораторные работы можно разбить на три блока:

1. моделирование временных рядов с заданными вероятностными характеристиками;
2. аппроксимативный анализ функциональных вероятностных характеристик временных рядов;
3. аппроксимативный анализ функциональных вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов.

Лабораторные работы выполняются на трёх автоматизированных учебно-исследовательских информационных системах, разработанных под руководством и непосредственном участии автора.

В разработке автоматизированных информационных систем на разных этапах принимали участие аспиранты и студенты кафедры «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (ИСТ СГАУ), выполнявшие под руководством автора кандидатские диссертации, курсовые и дипломные проекты: Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Козлов А.Н., Учеватов С.В., Шевченко Д.В, Иващенко А.В.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры ИСТ СГАУ за обсуждение материалов лабораторного практикума, критические замечания, которых по мере возможности были учтены, особенно профессору Коварцеву А.Н. и доценту Иоффе В.Г.

Большую благодарность автор выражает академику АН СССР Ильичёву В.И., профессорам Витиху В.А., Григоровскому Б.К., Куликовскому К.Л., Кловскому Д.Д., Курочкину Е.П., Мартяшину А.И., Иванову В.Н., Рожкову В.А., Трапезникову Ю.А., Хуснутдинову Г.Н., Тельскнису Л.А. (Литва), М. Бранице (Хорватия), И. Ружичу (Хорватия), Л. Ефтичу (Хорватия), Б. Чосович (Хорватия), Д. Р. Кушину (Австралия), Ф. Вайде (Венгрия) - за обсуждение работы на различных её этапах.

Особую благодарность автор выражает своим учителям: доценту Волкову И.И., профессорам Карпову Е.М., Куликовскому Л.Ф., Самарину Ю.П., Фремке А.В., Цветкову Э.И., Б. Соучеку (Хорватия), - за постоянное внимание, консультации и особенно за то, что привели в чудесный мир теории вероятностей и случайных процессов.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании лабораторного практикума, а также рецензенту д.ф.-м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Неоценимую помощь в редактировании практикума оказала инженер кафедры ИСТ СГАУ Муравьева Е.В., которой автор выражает свою благодарность.

Издание практикума поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары», за что автор выражает глубокую признательность губернатору Самарской области Титову К.А., а также президенту Самарского научного центра РАН академику РАН Шорину В.П.

Большую благодарность автор выражает директору Западно-Казахстанского филиала ОАО «Национальный центр экспертизы и сертификации» (г. Уральск) Графкину В.Н. за дружескую поддержку и издание лабораторного практикума в Казахстане.

И, наконец, но не в последнюю очередь, я благодарен своей семье за понимание и поддержку в работе.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», декану факультета информатики, заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp @ smr. ru

ВВЕДЕНИЕ

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия.

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов [1-5].

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которые невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Theta}, t)$, с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$:

$$\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta}),$$

используемое для построения искомой модели объекта;

5. анализирует полученные результаты;
6. если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3,4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\vec{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров $\vec{\Theta}$ с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;

5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой - зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации: автоматизированных систем научных исследований (АСНИ), информационно-измерительных систем (ИИС), процессорных измерительных систем (ПРИС), - является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

Рассмотрим структуру отдельного измерительно-вычислительного канала.

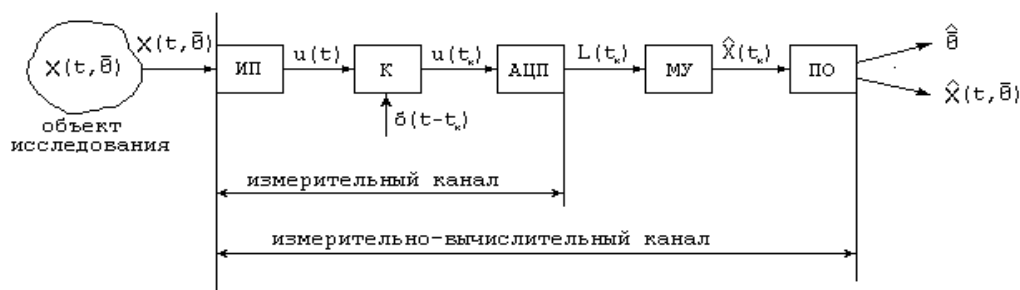


Рисунок В.1. Измерительно-вычислительный канал

На рис. В.1 приняты следующие обозначения:

- **ИП** - измерительный преобразователь (датчик);
- **К** - коммутатор;
- **АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;
- **МУ** - масштабирующее устройство;
- **ПО** - процессор обработки.

С помощью измерительно-вычислительного канала возможны два подхода к решению задачи оценки $\bar{\Theta}$:

- в режиме экспресс-анализа с помощью алгоритма A_{Θ} оценивают вектор неизвестных параметров $\bar{\Theta} = A_{\Theta} \{ \mathbf{x}(t_k) \}$;
- в режиме контроля и регистрации с помощью алгоритма A_s получают оценку сигнала $\mathbf{x}(t, \bar{\Theta}) = A_s \{ \mathbf{x}(t_k) \}$, записывают его на какой-либо промежуточный носитель, а затем обрабатывают. При этом происходит задержка в обработке информации и, следовательно, в получении результата.

Первый подход будем называть **статистическими измерениями**, второй - **статистической обработкой**.

Под **статистическими измерениями** будем понимать измерение вероятностных характеристик случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени.

Под **статистической обработкой** будем понимать оценку вероятностных характеристик случайных процессов на ЭВМ, записанных на промежуточный носитель, с задержкой в обработке информации.

С целью повышения эффективности научных исследований, особенно при исследовании новых объектов, возникает необходимость в разработке и исследовании **новых алгоритмов** оценки вектора неизвестных параметров - $\bar{\Theta} = A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$.

Решая разнообразные задачи научных исследований, исследователь на основании физических представлений и задачи исследований определяет составляющие вектора параметров случайного процесса $\bar{\Theta}$, дающие его исчерпывающее описание.

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. В.2).



Рисунок В.2. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.

На основании общей теории статистических измерений [1] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (B.1)$$

где Θ - измеряемая вероятностная характеристика;

S_d - оператор идеального усреднения;

d - параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);

g - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

$x_j(t)$ - j -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (B.2)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.3)$$

3. При усреднении по времени и совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.4)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\mathfrak{G}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] (j = 1, 2 \dots N). \quad (B.5)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность**, **состоятельность** и **эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\mathfrak{G}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (B.6)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(|\mathfrak{G}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon) = 1 \quad (B.7)$$

при любом ε .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

Эффективными называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [1].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (B.2)-(B.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\Theta_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (B.8)$$

- при усреднении по времени

$$\Theta_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (B.9)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\Theta_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.10)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от текущего времени и называется t -текущей характеристикой Θ_t [1]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации j , вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от номера реализации и называется j -текущей характеристикой Θ_j . При усреднении и по времени и совокупности значение $\Theta[X(t)]$ не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой - Θ_{cp} .

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смыслах. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство $\Theta_t = \text{const}$ выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если $\Theta_j = \text{const}$, где j - номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

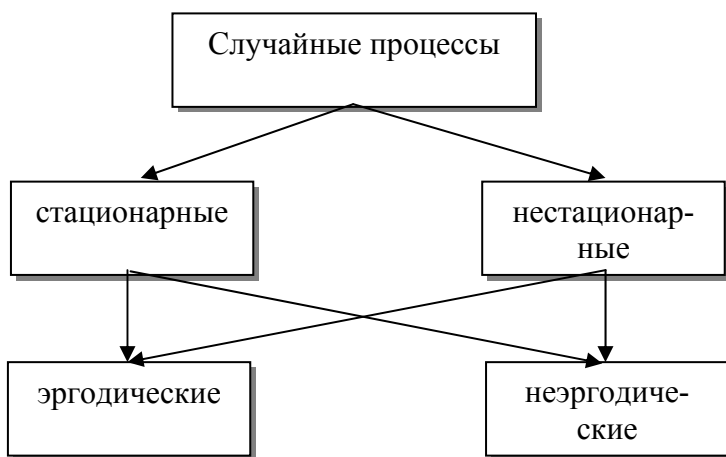


Рисунок В.3. Классификация случайных процессов

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис.В.3):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять: Θ_t , Θ_j , Θ_{cp} , - во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки монографии.

В [1] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса $\Theta_t = \Theta_j = \Theta_{cp}$, для стационарного неэргодического процесса $\Theta_t = \Theta_{cp}$, для нестационарного эргодического - $\Theta_j = \Theta_{cp}$, а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе S_d вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [1]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение N , M и T , т.е. объема выборочных данных.

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

Прямым методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (В. 1).

Косвенным методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\mathfrak{G}[z(t)] = F\left\{S_{d1}g_x[x_j(t_i^{(x)})], S_{d2}g_y[y_1(t_i^{(y)})], \dots\right\} \quad (\text{B. 11})$$

где $F\{ \}$ представляет собой функциональное преобразование полученных оценок $\mathfrak{G}[x(t)]$ и $\mathfrak{G}[y(t)]$ и т.д. с целью получения оценки $\mathfrak{G}[z(t)]$.

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\Xi_i \left\{ S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})] \right\} = 0; \quad (\text{B. 12})$$

$$\Xi_i \left\{ F^{(1)} \left\{ S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})] \right\}, \dots, F^{(m)} \left\{ S_{dm}g[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})] \right\} \right\} = 0. \quad (\text{B. 13})$$

Рассмотренный на рис. В. 1 измерительно-вычислительный канал даёт возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов - временные ряды**.

В этом случае выражения (B.2)-(B.4) при представлении случайного процесса $X(t)$ ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.14})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.15})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (\text{B.16})$$

где t_i - i -ый отсчёт j -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (B.5) примет вид:

$$\mathfrak{G}[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] (j = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, M). \quad (\text{B.17})$$

Выражения (B.8)-(B.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\mathfrak{G}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.18})$$

- при усреднении по времени

$$\mathfrak{G}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.19})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\mathfrak{G}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (\text{B.20})$$

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** - построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик.

Если не принимать во внимание фактор реального времени или задержку в обработке информации, то с точки зрения получения оценки по одному и тому же объему данных два подхода с методической точки зрения не отличаются друг от друга. Существенное отличие заключается в том, что работа в реальном масштабе времени накладывает жесткие ограничения на быстродействие технических средств. Это заставляет, в свою очередь, при статистических измерениях применять упрощенные алгоритмы оценивания интересующих параметров, обладающих значительным быстродействием. Кроме того, работа в реальном масштабе времени не дает возможности получить требуемые оценки, воспользовавшись другими алгоритмами, так как данную реализацию повторить нельзя - она **случайна**. Требуемую оценку необходимо получить за время, отводимое на эксперимент. Реализация же, записанная на промежуточный носитель или в память, становится **детерминированной**, и с ней можно экспериментировать сколь угодно долго. Это важное преимущество статистической обработки позволяет:

- с целью повышения точности оценивания осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации;
- выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию;
- с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

При исследовании сложных объектов проводят, как правило, большое число испытаний. При этом происходит и накопление большого числа массивов числовых и функциональных характеристик, что в значительной степени затрудняет хранение, анализ и интерпретацию полученных результатов.

Один из возможных способов решения этой проблемы заключается в применении аппроксимативных методов (от латинского слова **approximo** - приближаюсь), суть которых заключается в нахождении подходящего аналитического выражения $\varphi(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, удовлетворяющими заданному критерию оптимальности, которое бы описывало найденные экспериментальные результаты. Аппроксимативный подход оказывается эффективным и при обработке результатов имитационного моделирования (вычислительного эксперимента).

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек и построили график зависимости $\mathcal{E}_i = f(\mathcal{E}_i)$. Желательно обработать экспериментальные данные таким образом, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x и вместе с тем сгладить случайные отклонения, вызванные погрешностями самого эксперимента.

Наиболее эффективным методом решения этой задачи является метод наименьших квадратов [1].

Пусть задан некоторый класс функций $\varphi_j(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с одинаковым числом неизвестных параметров. Тогда наилучшей будет та функция, для которой сумма квадратов

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^M [\epsilon_i - \varphi_j(\epsilon_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 = \min. \quad (\text{B.21})$$

Если в сравнении участвуют функции с различным числом неизвестных параметров, это приводит к увеличению числа связей и к уменьшению числа степеней свободы $m-1$, что, в свою очередь, может ухудшить дисперсию [1].

$$D_j = \frac{\Delta_j}{m-r}. \quad (\text{B.22})$$

Под числом связей r понимают число неопределенных выражений, входящих в аналитическое выражение.

Так как Δ_j является функцией $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ то, как известно [1], необходимыми условиями минимума дифференцируемой функции многих переменных является система нормальных уравнений:

$$\frac{\partial S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{B.23})$$

решив которую с помощью того или иного численного метода найдем искомые параметры $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Классификация методов аппроксимации функциональных характеристик случайных процессов и последовательностей представлена на рис. В.4.

Основными преимуществами аппроксимативного подхода являются:

- наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;
- возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований, с целью получения обобщенных вероятностных характеристик;
- сокращение объёма хранимых данных.

К недостаткам метода следует отнести наличие методической погрешности, возникающей при замене полученных экспериментальных данных или другой функции более простым аналитическим выражением.

В общем случае, для реализации аппроксимативного подхода необходимо выполнить следующие этапы:

1. на основании анализа решаемой задачи определить требования к реализации входного процесса (последовательности): длине реализации (объёму выборки), интервалу дискретизации, числу уровней квантования и т.д. с целью получения оценок вероятностных характеристик для последующей аппроксимации с допустимыми погрешностями;
2. по измеренным значениям входного процесса (последовательности) оценить значения функциональной характеристики в заданных точках;
3. проанализировать полученный результат и выбрать подходящее аналитическое выражение, по возможности, с минимальным количеством неизвестных параметров, подлежащих определению, так как количество параметров в значительной мере определяет сложность аппаратуры или вычислений, его сходимости и устойчивость;

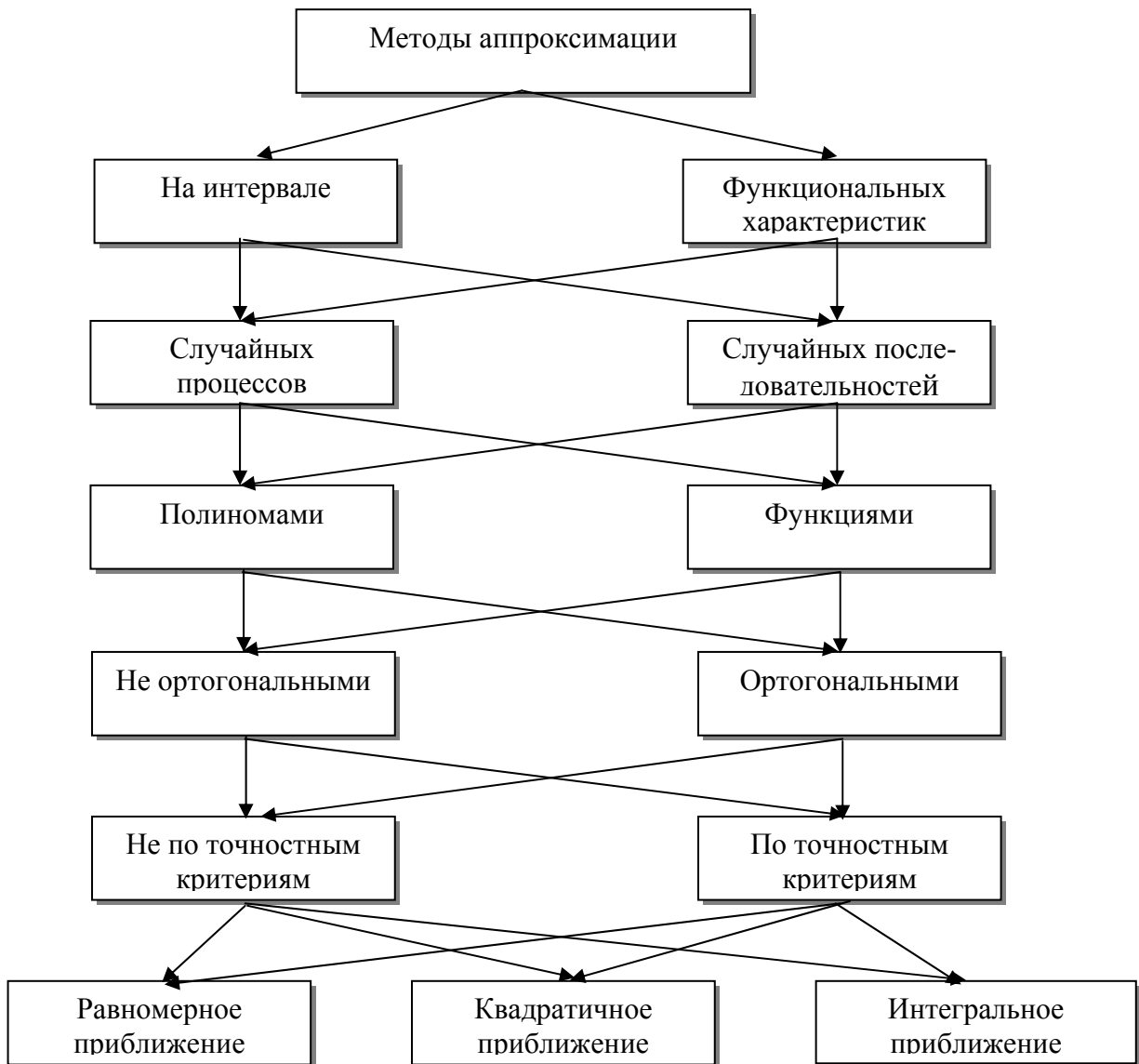


Рисунок В.4. Классификация методов аппроксимации случайных процессов и последовательностей

4. выбрать и обосновать критерий приближения;
5. составить и решить систему уравнений относительно неизвестных параметров аналитического выражения и определить погрешность приближения;
6. разработать структурную схему аппаратуры (программы) и рассчитать её параметры;
7. изготовить и отладить аппаратуру (написать и отладить программное обеспечение);
8. провести экспериментальные исследования (обработать полученные экспериментальные данные);
9. аналитически определить все интересующие обобщённые вероятностные характеристики.

Следует отметить, что определять аналитические выражения возможно как при анализе стационарных, так и нестационарных процессов. В первом случае анализи-

руются функциональные характеристики, во втором - и моментные, являющиеся функциями времени.

Определять параметры аналитических выражений возможно как с помощью **статистических измерений**, так и в результате **статистической обработки**.

Под **статистическими измерениями с аппроксимацией** будем понимать измерение (оценку) параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени. Самыми популярными среди таких технических средств являются **коррелометры** и **спектроанализаторы** с аппроксимацией параметрическими моделями. В литературе их часто называют **статистическими анализаторами**. Статистические анализаторы, как правило, специализированные аппаратно-программные средства, определяющие **параметры реального процесса** (см. рис. В.5).

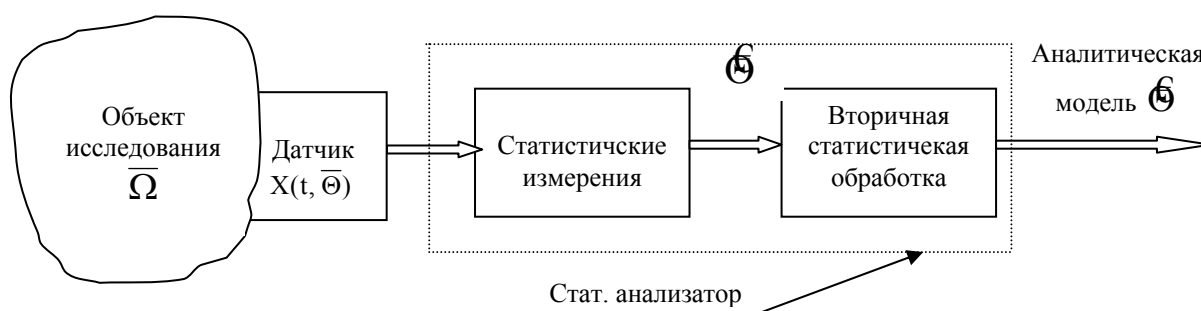


Рисунок В.5. Аппаратно-программные средства статистических измерений и обработки информации

Под **статистической обработкой с аппроксимацией** будем понимать оценку параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью ЭВМ, записанных на промежуточный носитель или память. При этом происходит временная задержка в обработке информации.

Аппроксимативные методы, основанные на применении ЭВМ, можно отнести к методам **вторичной обработки** информации.

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ. Появилось большое количество интересных и важных монографий и статей, посвященных методологии, планированию, конструированию и выполнению моделирования (см. список использованных источников в [2]). Большинство их них описывает метод, который носит название метода Монте-Карло. Современное толкование этого термина базируется на работе Неймана и Улама, выполненной в конце сороковых годов, в которой они применили специальный математический метод для решения проблемы ядерной физики, экспериментальные исследования которых очень дороги, а аналитическое решение очень сложно.

Как правило реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;

- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
 - первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
 - вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;
 - датчик системного времени;
 - управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.
- Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков представлена на рис. В.6.

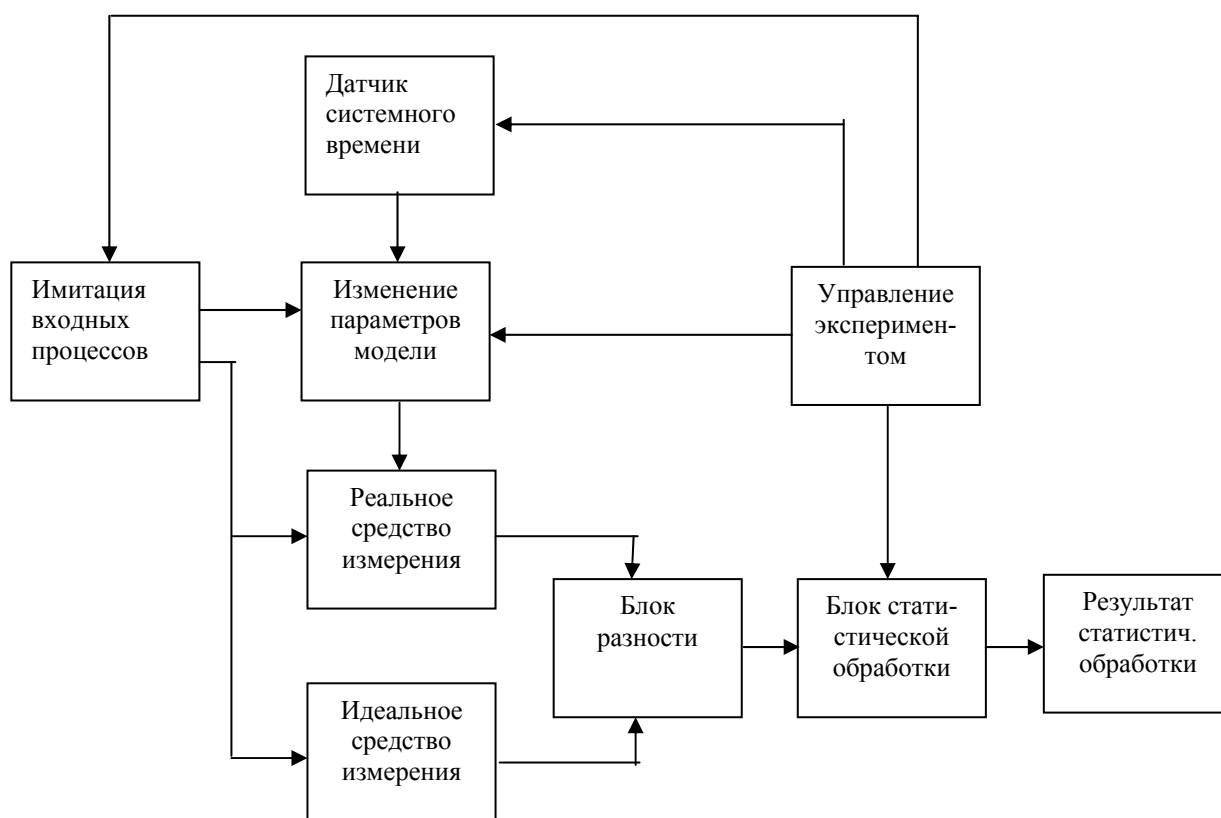


Рисунок В.6. Функциональная схема имитационного моделирования

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования АСНИ, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [3], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.

- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинствами блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [4], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки $\hat{\Theta}$:

$$\Delta = \max \left\{ \left| \Delta_j \right| \right\} j = 1, \dots, N, \quad (B.24)$$

где N-число испытаний, зависящее от доверительной информации P_d . Так, если $P_d = 0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания характеристик неэквидистантных временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является

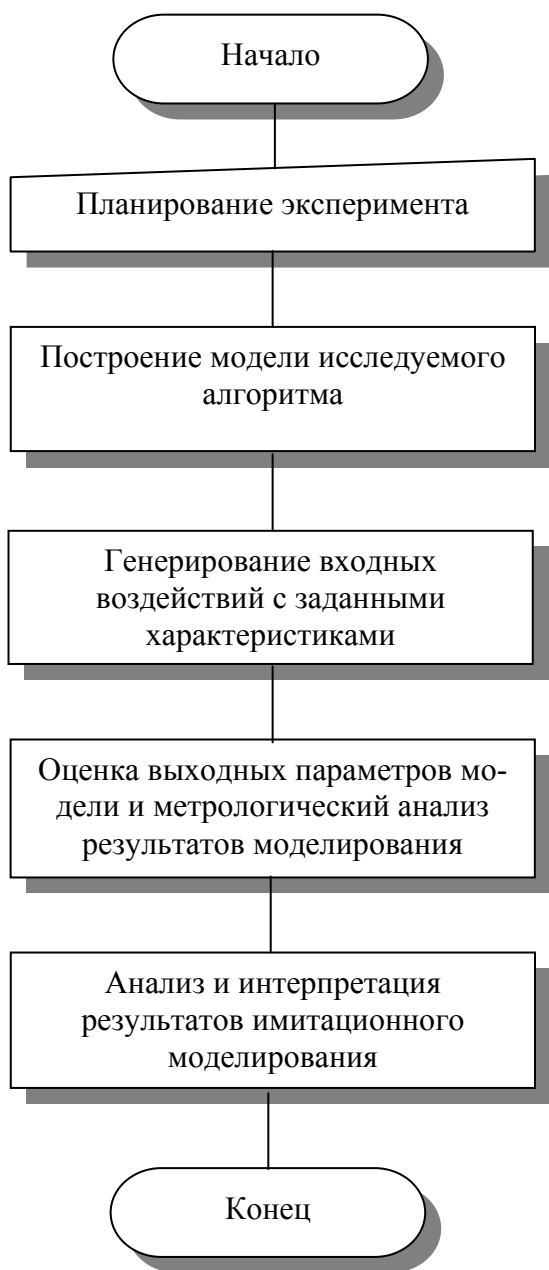


Рисунок В.7

возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий (см. рис. В.7).

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наилучшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересных исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наилучший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

В некоторых случаях, кроме случайных сигналов, возникает необходимость в применении детерминированных образцовых сигналов.

Количество входных сигналов, одновременно обрабатываемых в модели системы, определяется сложностью системы, сложностью модели, количеством каналов и т.д. Т.е. в системе моделирования должна быть предусмотрена возможность генерирования N сигналов как с одинаковыми, так и различными характеристиками.

Отметим, что используемые в монографии термины «генерирование случайных процессов» и «моделирование случайных процессов» являются синонимами.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании некоррелированных временных рядов с заданными законами распределения, проверка качества генерирования.

1.1. Теоретические основы лабораторной работы

Необходимость в решении этой задачи возникает при исследовании методом имитационного моделирования алгоритмов для анализа законов распределения случайных величин, процессов, потоков событий.

Для генерирования ПСП с заданным законом распределения (основные виды моделей приведены в приложении П.1) применяются различные методы [2]:

- метод нелинейного преобразования (обратной функции);
- приближенный метод (метод кусочно-линейной аппроксимации закона распределения);
- метод исключения (метод Неймана) и т.д.

Рассмотрим более подробно первые два.

Для решения задачи моделирования ПСП с заданным законом распределения случайный процесс подвергается нелинейному преобразованию. Теоретической базой для определения вида и характеристик нелинейной функции является теория функций случайного аргумента [2].

Допустим, случайная величина X имеет плотность распределения вероятности $f_x(x)$, а необходимо получить выходную величину Y с плотностью распределения вероятностей $f_y(y)$. Таким образом, мы должны определить вид нелинейной функции преобразования $y=g(x)$.

Известно, что

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (1.1)$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (1.2)$$

Допустим, что обратная функция преобразования

$$x = t(y). \quad (1.3)$$

Тогда

$$t'(y) = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (1.4)$$

Если в качестве входной ПСП выбрать «белый шум» с $f_x(x) = 1$, то

$$x = t(y) = F_y(y). \quad (1.5)$$

Отсюда можно определить вид нелинейной функции преобразования

$$y = g(x) = F_y^{-1}(x). \quad (1.6)$$

Графическая интерпретация метода инверсного преобразования представлена на рис. 1.1.

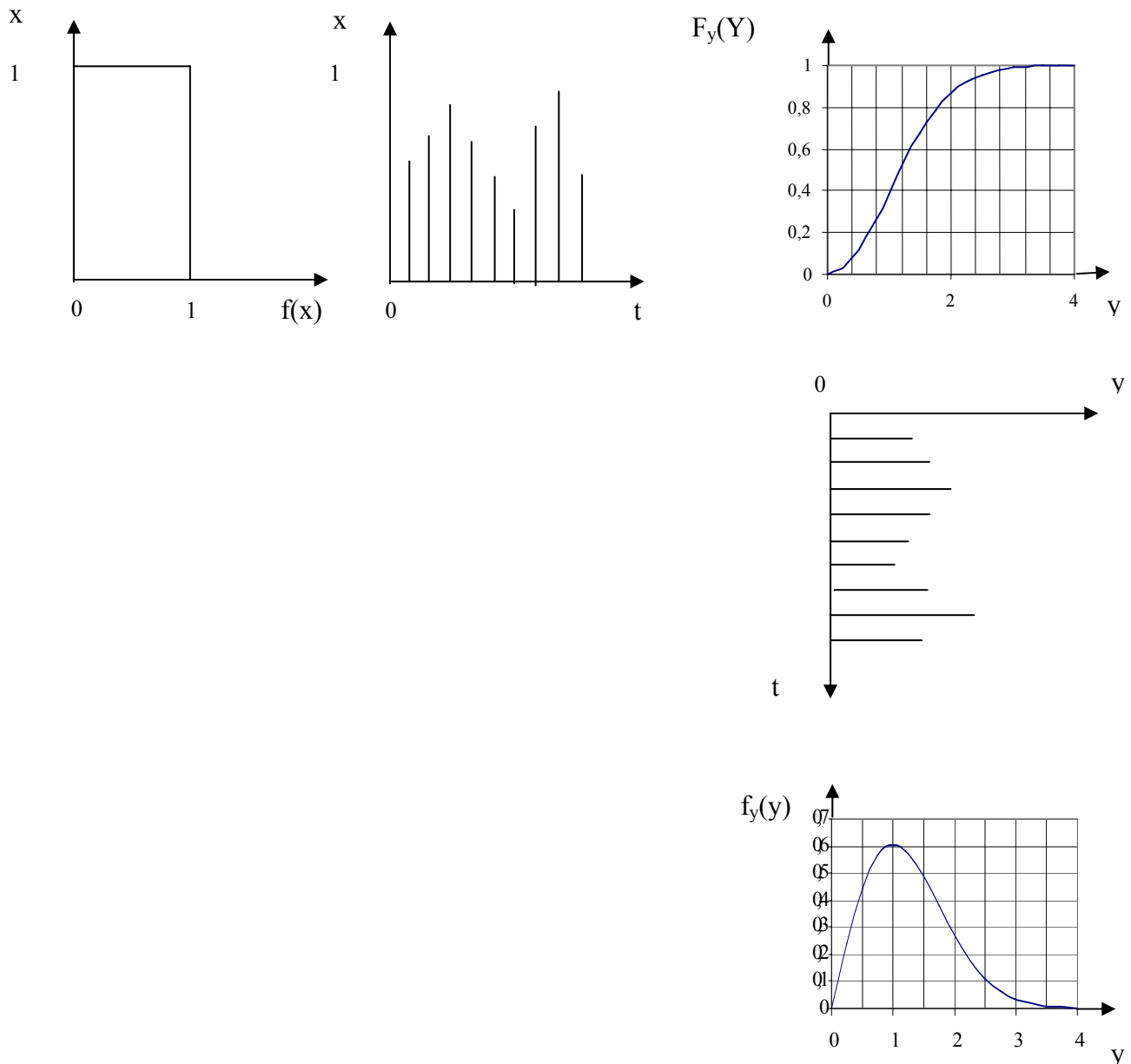


Рисунок 1.1. Моделирование ПСП с заданным видом закона распределения вероятностей

Обычно можно найти аналитическое решение $F_y^{-1}(x)$ только для ограниченно-го числа случаев. Примеры интегральных функций распределения и обратных им функций приведены в приложении П.3.

Для большинства случаев интегральную функцию нельзя найти аналитически и тогда применяют приближенный метод моделирования, который основан на использовании ПСП с равномерным законом распределения, кусочно-линейной интерполяции функции распределения и решении задачи обратной интерполяции.

При кусочно-линейной интерполяции функцию распределения представим в виде:

$$F_y(y_i) = \sum_{l=1}^L \left\{ F_y(y_{l-1}) + \frac{y_i - y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}} [F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})] \right\} \mathbb{1}(y_{l-1} \leq y_i < y_l), \quad (1.7)$$

где $i=1,2,\dots,N$.

Отсюда найдем обратную функцию:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + \frac{F_y(y_i) - F_y(y_{l-1})}{F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbb{1} [F_y(y_{l-1}) \leq F_y(y_i) < F_y(y_l)]. \quad (1.8)$$

С учётом того, что при генерировании ПСП $x_l = F_y(y_l)$, получим:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + \frac{x_i - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbb{1} (x_{l-1} \leq x_i < x_l). \quad (1.9)$$

Так как координаты узловых точек $F(y_l)$ рассчитываются заранее, окончательно получим:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + (x_i - x_{l-1}) A_l \right] \mathbb{1} (x_{l-1} \leq x_i < x_l), \quad (1.10)$$

где

$$A_l = \frac{y_l - y_{l-1}}{x_l - x_{l-1}}.$$

Отсюда следует, что необходимо, задавшись допустимой погрешностью восстановления $F_y(y)$ δ , видом интерполяции, определить узловые точки $\{y_l - F_y(y_l)\}$ и A_l . Затем, воспользовавшись формулой (1.9), сгенерировать ПСП с требуемым законом распределения.

Выбор допустимой погрешности аппроксимации функции распределения $F_y(y)$ определяется в зависимости от N - числа генерируемых чисел ПСП, допустимого уровня значимости P , выбранного критерия и его значения.

Наиболее целесообразно в этом случае применить критерий Колмогорова [2], связанный с погрешностью восстановления:

$$\delta = \max |F_y^{(N)}(y) - F_y(y)|, \quad (1.11)$$

где $F_y^{(N)}(y)$ - функция распределения, определяемая экспериментально на выборке размером N ;

$F_y(y)$ - теоретическая функция распределения.

Для определенной погрешности восстановления δ и объёма выборки N определяется

$$\lambda = \delta \sqrt{N}. \quad (1.12)$$

Гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P

$$\lambda < \lambda_{1-P}. \quad (1.13)$$

В приложении П.6. приведены результаты расчёта λ для различных δ и N .

Задавшись допустимым уровнем значимости, например $P=0,3$, определим $\lambda=0,97$. Гипотеза принимается, если $\lambda < 0,97$. Так, если необходимо сгенерировать $N=5000$ чисел, допустимая погрешность восстановления $\delta=0,01$.

Для расчёта узловых точек функции распределения $F_y(Y_i)$ необходимо выбрать вид интерполяции, определить диапазон изменения $u \in [y_{\min}, y_{\max}]$ при заданной доверительной вероятности, интервал дискретизации аргумента Δu и число узловых точек M :

$$M = \text{ent} \left[\frac{y_{\max} - y_{\min}}{\Delta y} \right] + 1. \quad (1.14)$$

В случае применения линейной интерполяции

$$\Delta y = \sqrt{\frac{8\delta}{[F_y''(y)]_{\max}}}. \quad (1.15)$$

В приложении П.4 приведены результаты определения $|F_y''(y)|_{\max}$ и $[y_{\min}, y_{\max}]$.

При генерировании ПСП, т.е. решении задачи обратной интерполяции, возможны три варианта:

1. $\Delta y_1 = \text{const}, \Delta x_1 = \text{var}$;
2. $\Delta y_1 = \text{var}, \Delta x_1 = \text{const}$;
3. $\Delta y_1 = \text{var}, \Delta x_1 = \text{var}$.

В первом варианте упрощается процедура нахождения узловых точек (интервал дискретизации определяется в соответствии с выражением (1.15), но больше время генерирования, т.к. необходимо определять участок интерполяции. Во втором - сложнее процедура определения узловых точек, но меньше время генерирования, т.к. упрощается процедура нахождения участка интерполяции. Заметим, что решение третьей задачи аналогично решению задачи адаптивно-временной дискретизации сигнала при выбранной модели восстановления [2]. В этом случае интервал Δy_1 определяется в соответствии с выражением:

$$\Delta y_1 = \sqrt{\frac{8\delta}{[F_y''(y)]}}. \quad (1.16)$$

Достоинствами данного метода являются:

- возможность применения его для моделирования случайных величин со сколь угодно сложным законом распределения;
- значительно меньшее время генерирования ПСП по сравнению с методом инверсного преобразования за счёт уменьшения количества интервалов.

Недостаток - необходимость проведения некоторой подготовительной работы перед непосредственным применением процедуры генерирования ПСП (разбиение области распределения y на интервалы).

Как правило, при решении важных задач методом имитационного моделирования исследователь проверяет качество генерирования псевдослучайной последовательности. Эта задача решается с использованием критериев согласия. Отличие применения этих критериев при оценке качества генерирования от классической задачи сглаживания статистических рядов заключается в том, что исследователь априори задаёт закон распределения и требуемые значения параметров псевдослучайной (сгенерированной) последовательности, а при решении задачи сглаживания необходимо решить задачу идентификации закона распределения.

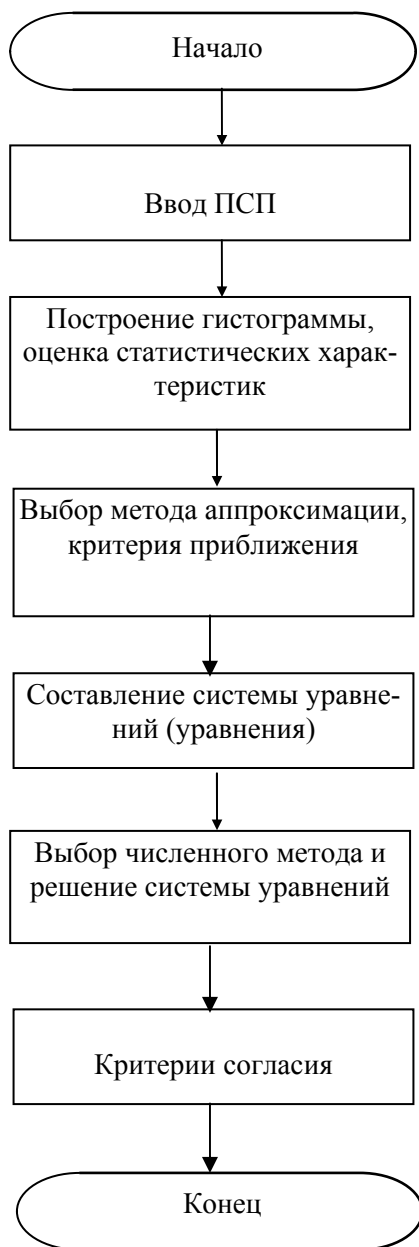


Рисунок 1.2. Блок-схема проверки качества генерирования ПСП

При оценке качества генерирования псевдослучайной последовательности в качестве теоретического закона распределения возможно использование:

1. заданного закона распределения с заданными параметрами;
2. заданного закона распределения с уточненными параметрами путём решения задачи аппроксимации закона распределения тем или иным способом.

Рассмотрим последовательность этапов решения задачи оценки качества генерирования применительно ко второму случаю, как более общему (см. рис. 1.2).

После ввода исходных данных первым шагом в решении этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда $\{x_i\}_{i=1}^N$. Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. определить диапазон изменения статистического ряда $x_{\min}-x_{\max}$.
2. определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M}, \quad (1.17)$$

где M - количество дифференциальных коридоров [2].

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в j -ый дифференциальный коридор:

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{ij}, \quad (1.18)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x} \right] + 1 = j \wedge x_i = x_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_i = j \Delta x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.19)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что $\delta_{i, j+1}=1/2$, если $x_i=j\Delta x \wedge x \neq x_{\max}$, т.е. в этом случае в j и $j+1$ коридоры добавляется по 1/2.

4. Если частота попадания в какой-либо k -ый дифференциальный коридор мала ($p_j < 0,01 \div 0,02$), для уменьшения влияния случайности его объединяют с $k+1$ коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходным материалом для построения гистограммы является сгруппированный по дифференциальным коридорам статистический ряд, представленный, как правило, в виде таблицы (см. таблицу 1.1), где $\bar{f}_j = f_j / \Delta x_j$.

Статистический ряд

Таблица 1.1

f_j	0,099	0,1006	0,1003	0,0989	0,099	0,1067	0,0954	0,1008	0,0997	0,0996
$j \Delta x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
\bar{f}_j	0,99	1,006	1,003	0,989	0,99	1,067	0,954	1,008	0,997	0,996

После построения гистограммы и оценки статистических характеристик решают задачу уточнения параметров распределения, используя тот или иной метод аппроксимации закона распределения [1].

Заключительным этапом решения задачи является проверка качества генерирования с использованием критериев согласия. Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу H , состоящую в том, что случайная величина X подчиняется заданному закону распределения. Введем случайную величину U , являющуюся мерой расхождения теоретического и статистического распределений. Закон распределения этой случайной величины $f_u(u)$ зависит как от закона распределения случайной величины X , так и от числа опытов N . Если гипотеза H верна, то $f_u(u)$ определяется законом распределения $f_a(x)$ и числом опытов N .

Вычислим вероятность события $P(u \leq U) = P_d$. Если эта вероятность мала, то гипотезу следует отвергнуть как маловероятную, если значительна - экспериментальные данные не противоречат гипотезе H .

Выберем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями случайную величину

$$U = \sum_{j=1}^M c_j (f_j - p_j)^2, \quad (1.20)$$

где c_j – веса;

$p_j = F_a(x_{j+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - F_a(x_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ – теоретические вероятности, соответствующие f_j .

Коэффициенты c_j вводятся для учёта веса отклонений, относящихся к разным разрядам. Так отклонения могут быть малозначительными, если вероятность p_j велика, и наоборот.

К. Пирсон показал, что если положить $c_j = N/p_j$, то при большом N $f_u(u)$ не зависит от $f_x(x)$ и N , а зависит только от числа разрядов M . Этот закон при увеличении

N приближается к закону χ^2 с r степенями свободы, плотность распределения вероятностей которого определяется выражением [2]:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (1.21)$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ - гамма-функция [2]. (1.22)

В этом случае мера расхождения обозначается χ^2 и определяется выражением:

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^M \frac{(\hat{p}_j - p_j)^2}{p_j}. \quad (1.23)$$

Иногда для удобства вычислений, чтобы избежать вычислений с промежуточными малыми числами, выражение (1.23) представляют в виде

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{(n_j - N p_j)^2}{N p_j}, \quad (1.24)$$

где n_j - число попаданий x в j -ый дифференциальный коридор.

Распределение χ^2 зависит от параметра r , называемого числом «степеней свободы». Число степеней свободы равно $r=M-k$, где k – число независимых наложенных условий (связей), например, условие нормировки, совпадение теоретических и статистических моментов и т.д.

Для распределения χ^2 составлены специальные таблицы (см. приложение П.5). Пользуясь ими, можно для каждого значения χ^2 и числа степеней свободы r найти вероятность того, что величина, распределенная по закону χ^2 , превзойдет это значение. Если эта вероятность мала, то результат опыта следует признать противоречащим гипотезе о том, что случайная величина распределена по предполагаемому закону. Если на практике она оказывается меньше, чем 0,1, рекомендуется проверить результаты эксперимента и, если это возможно, повторить его.

Схема применения критерия сводится к следующему:

1. строится гистограмма входной последовательности;
2. определяется мера расхождения χ^2 по формуле (1.23) или (1.24);
3. определяется число степеней свободы $r=M-k$;
4. по r и χ^2 по таблице приложения П.6 определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение χ^2 с r степенями свободы, превзойдет данное значение χ^2 ;
5. если вероятность P_d велика, то гипотеза H принимается.

Следует отметить, что с помощью критериев согласия можно только в некоторых случаях опровергнуть гипотезу H . Если вероятность P_d велика, то это указывает лишь на то, что гипотеза H не противоречит опытным данным [2].

Кроме критерия Пирсона на практике применяется критерий А.Н. Колмогорова [2].

В качестве меры расхождения между статистическим и теоретическим распределениями рассматривается величина, равная

$$\delta = \max \left| \hat{F}(x) - F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right|. \quad (1.25)$$

Обоснованием выбора этой меры расхождения являются следующие обстоятельства:

- простота определения δ ;
- при неограниченном числе испытаний N вероятность неравенства $\delta \sqrt{N} \geq \lambda$ стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \lambda^2}. \quad (1.26)$$

Значения $P(\lambda)$, подсчитанные по формуле (2.41), приведены в приложении П.6.

Схема применения этого критерия сводится к следующему:

1. строятся статистическая и теоретическая функции распределения;
2. по графикам определяется δ ;
3. вычисляется $\lambda = \delta \sqrt{N}$;
4. по таблице приложения П.7 определяется $P(\lambda)$;
5. гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P_d $\lambda < \lambda_{1-P_d}$;
6. Если вероятность P_d мала, гипотезу H следует отвергнуть. При сравнительно больших $P(\lambda)$ её можно считать совместимой с опытными данными.

Следует отметить, что критерий Колмогорова можно применять, когда известно теоретическое распределение и численные значения его параметров, например, при проверке качества сгенерированной псевдослучайной последовательности с заданным законом распределения, расчете параметров функций распределения. Если применять этот критерий в случаях, когда параметры теоретического распределения определяются по статистическим данным, критерий даёт завышенное значение $P(\lambda)$. В этом случае мы рискуем принять неправильную гипотезу.

Если уточнение параметров распределения сгенерированной последовательности не производится, т.е. не решается задача аппроксимации законов распределения, оценка качества генерирования ПСП производится с использованием в качестве теоретического распределения заданного закона с заданными параметрами.

Исследования показали, что более наглядным способом проверки качества генерирования ПСП является способ, основанный на анализе фазовых портретов (структурных функций) законов распределения [1]. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: $f_x(x)$ и $f'_x(x)$. На рисунке 1.3 приведены фазовые портреты типовых законов распределения.

Следует отметить, что каждому закону распределения соответствует свой, уникальный фазовый портрет, не зависящий от значений параметров закона распределения. Заметим, что при расчете координат фазового портрета вместо точного значения производной плотности распределения вероятностей определялось приращение плотности на заданном интервале.

В силу случайного характера исследуемых случайных величин фазовые портреты, построенные по экспериментальным данным, безусловно, будут отличаться от

теоретических. Но эти отличия, тем не менее, позволяют идентифицировать случайные процессы по типу законов распределения.

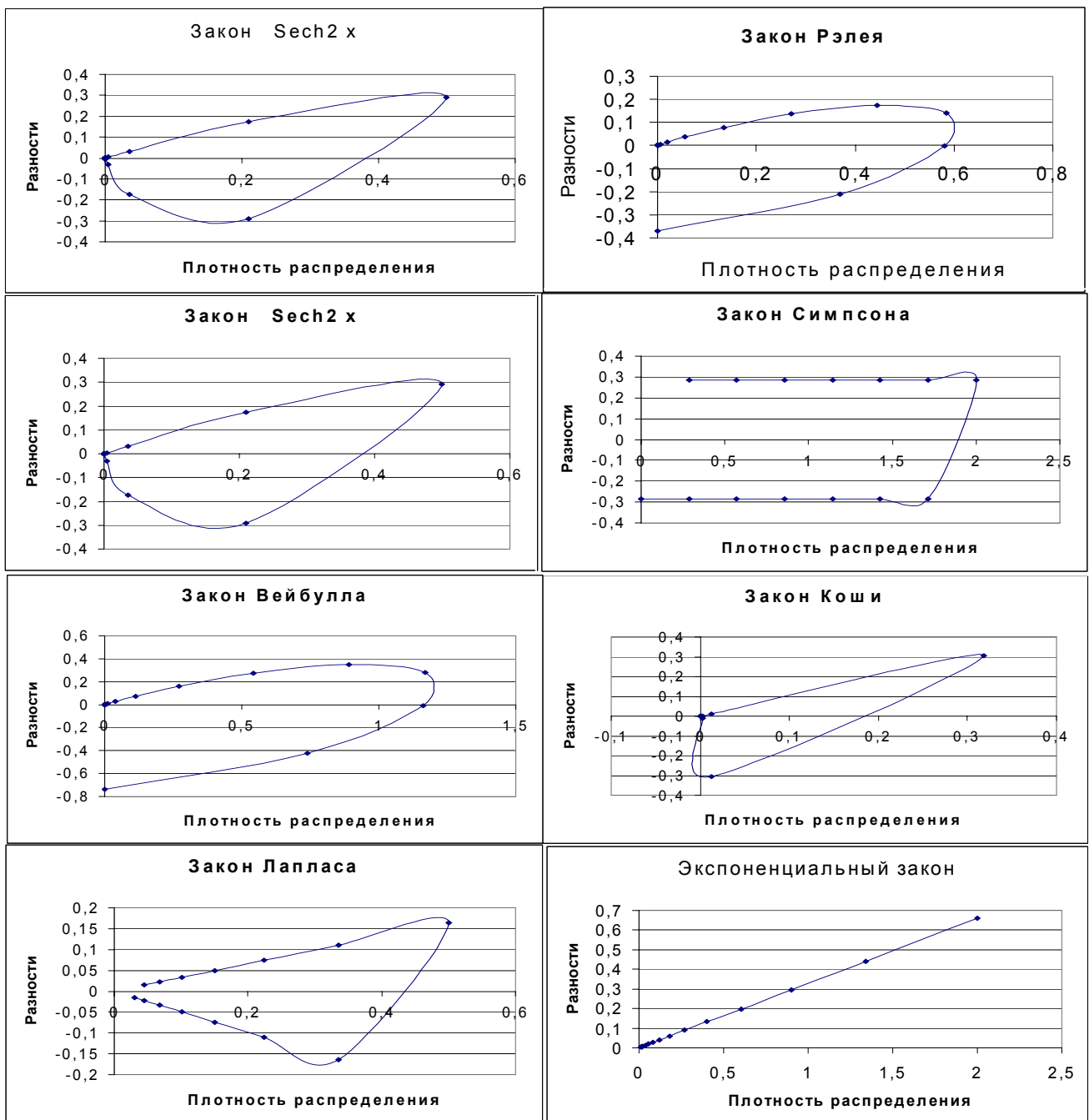
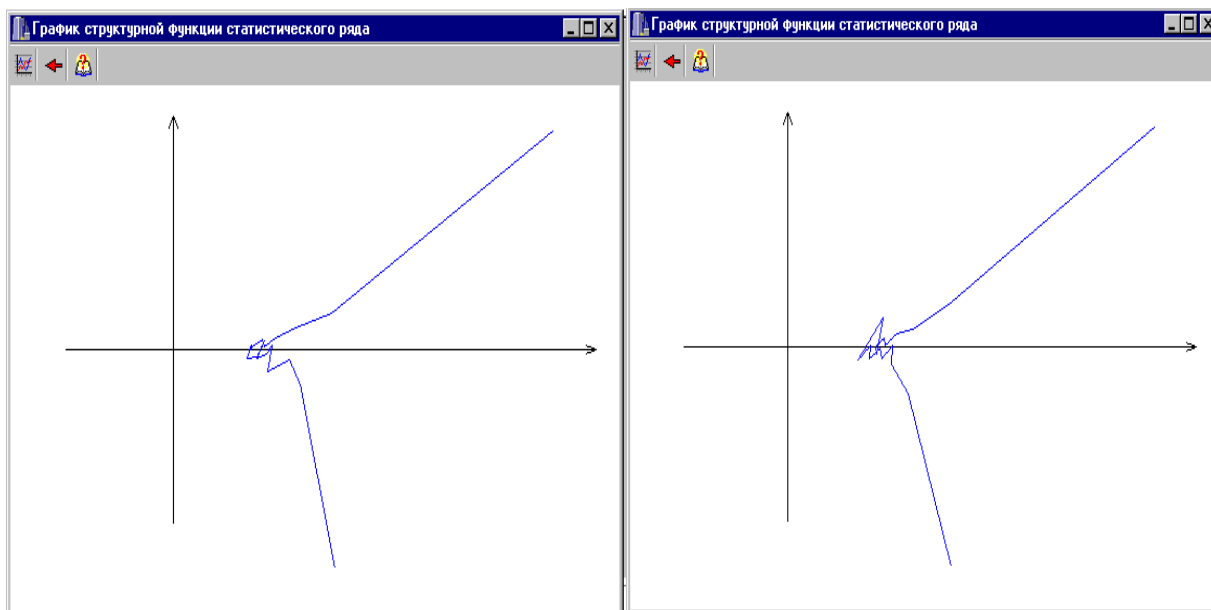


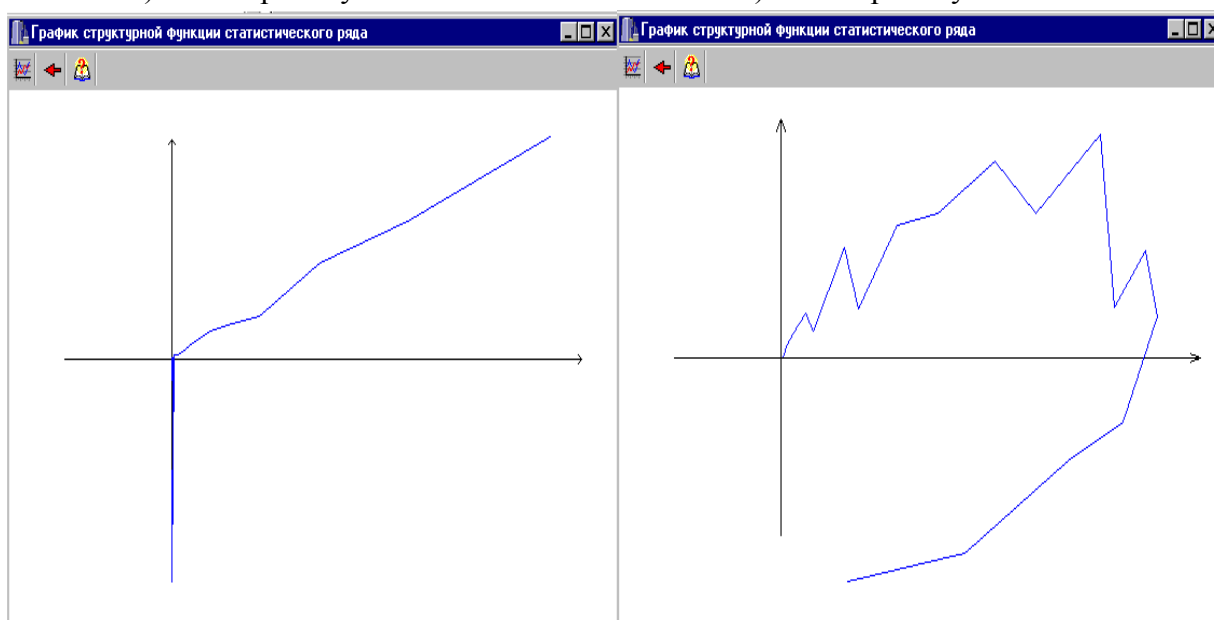
Рисунок 1.3. Фазовые портреты законов распределения

Ниже приведены фазовые портреты для случайного процесса, сгенерированного на ЭВМ по законам распределения арксинуса с разными параметрами, Рэля и экспоненциальному закону.



а) закон арксинуса – $a=5$

б) закон арксинуса – $a=8$



в) экспоненциальное распределение - $\lambda=1$

г) распределение Рэля - $\sigma=1$

Рисунок. 1.4. Экспериментальные фазовые портреты

Построив фазовый портрет по параметрам гистограммы, необходимо сравнить его с теоретическими фазовыми портретами и выбрать подходящий, т.е. выбрать соответствующий закон распределения. После этого необходимо перейти к определению параметров выбранного аналитического выражения.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить систему моделирования (см. приложение П.15).

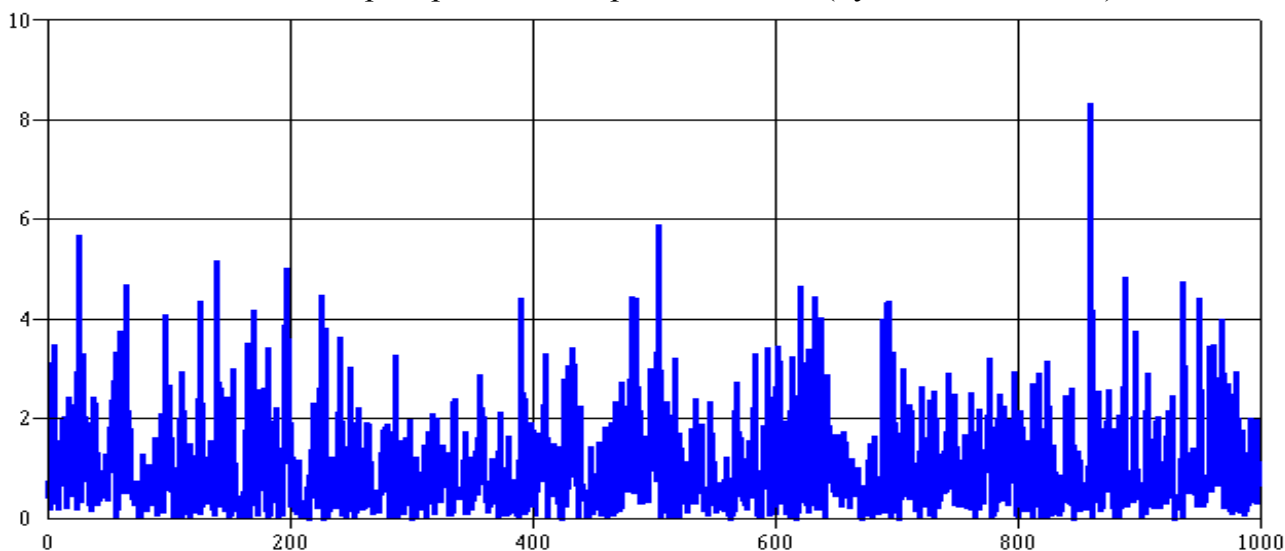
1.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным законом распределения с объемом выборки, равным $N=500$ (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).

2. Проверить качество генерирования, воспользовавшись для определения параметров аналитического выражения законов распределения методом моментов.
3. Проверить качество генерирования, воспользовавшись фазовыми портретами.
4. Определить погрешности оценки параметров модели.
5. Пункты 1-3 повторить для объёмов выборки $N=1000, 2000, 5000$.

1.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
 2. Метод и алгоритм моделирования некоррелированных временных рядов для заданного закона распределения.
 3. Обратная функция закона распределения вероятностей.
 4. Пример реализации некоррелированного временного ряда и первой экранной формы.
 5. Примеры гистограмм для различного объёма выборки – $N=500, 1000, 2000, 5000, M=20$.
 6. Значения параметров, определенные по методу моментов, и модуль относительной погрешности оценки параметров закона распределения для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Для определения параметра закона распределения и вычисления погрешности оценки параметра можно воспользоваться пакетом Exell.
 7. Графическая зависимость максимальной по модулю относительной погрешности оценки параметров закона распределения от объёма выборки - $N=500, 1000, 2000, 5000$. Для построения графических зависимостей можно воспользоваться пакетом Exell.
 8. Фазовый портрет закона распределения (структурная функция).
 9. Выводы по работе.
- Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для экспоненциального закона распределения приведен ниже (пункты 4-8 отчёта).



Процесс, распределенный по экспоненциальному закону

Рисунок 1.5. Реализация случайного процесса

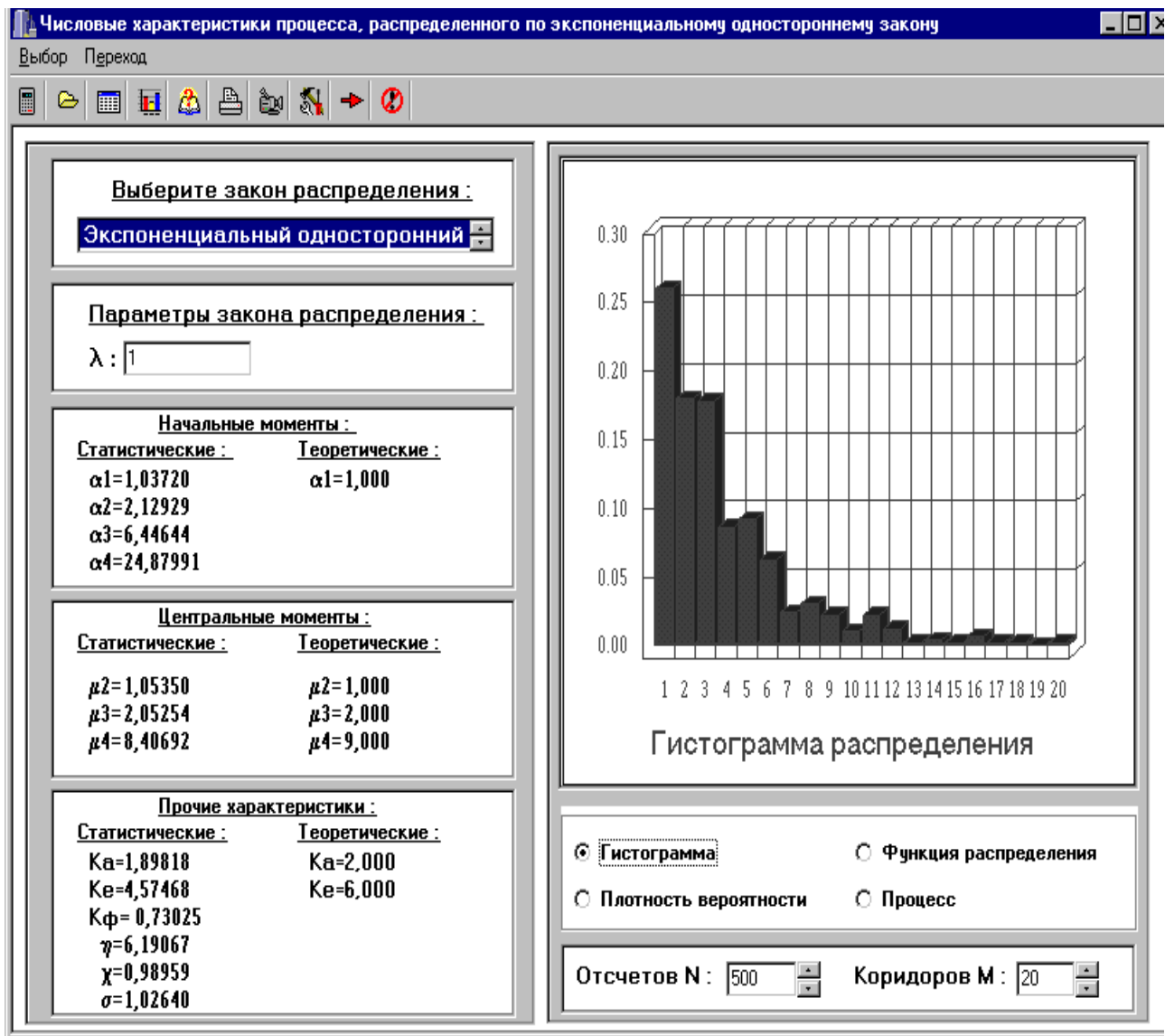


Рисунок 1.6. Пример первой экранной формы

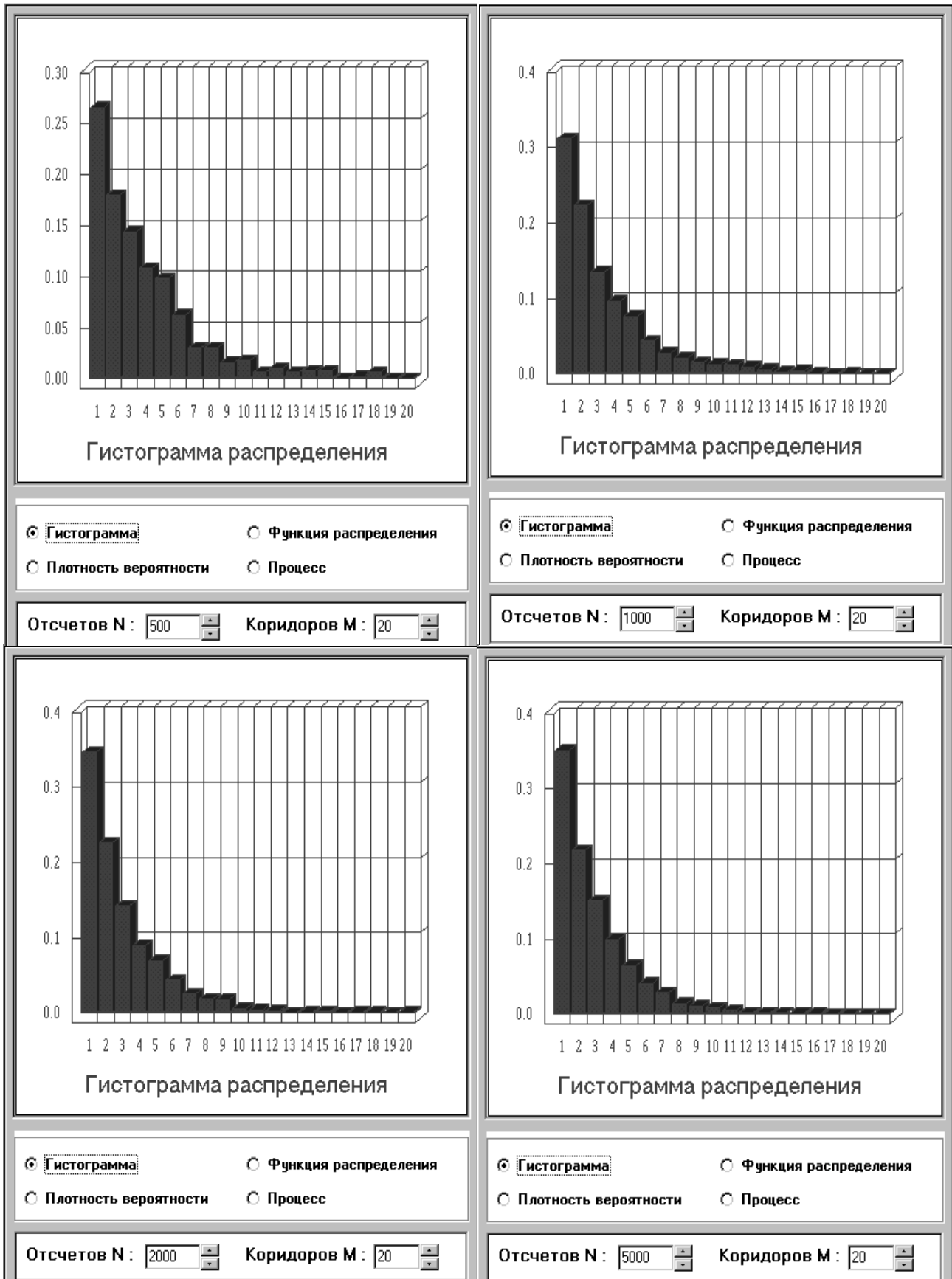


Рисунок 1.7. Примеры гистограмм ПСП

Значения параметров, определенные по методу моментов, и относительные погрешности оценки параметров закона распределения

Таблица 1.2

N=500				N=1000			
№	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}_1$	$\delta = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$	№	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}_1$	$\delta = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$
1	0,97723	1,023301	0,023301	1	0,94009	1,063728	0,063728
2	0,96093	1,040659	0,040659	2	0,99149	1,008583	0,008583
3	0,94707	1,055888	0,055888	3	1,01004	0,99006	-0,00994
4	1,0122	0,987947	-0,01205	4	0,98566	1,014549	0,014549
5	1,01325	0,986923	-0,01308	5	1,02001	0,980383	-0,01962
6	1,06513	0,938853	-0,06115	6	0,92825	1,077296	0,077296
7	1,04756	0,954599	-0,0454	7	1,02934	0,971496	-0,0285
8	0,98242	1,017895	0,017895	8	1,0109	0,989218	-0,01078
9	1,01613	0,984126	-0,01587	9	0,99031	1,009785	0,009785
10	0,90731	1,102159	0,102159	10	1,0059	0,994135	-0,00587
11	1,05346	0,949253	-0,05075	11	0,94411	1,059199	0,059199
12	0,97002	1,030907	0,030907	12	0,99562	1,004399	0,004399
13	0,92659	1,079226	0,079226	13	0,9987	1,001302	0,001302
14	0,94311	1,060322	0,060322	14	0,9672	1,033912	0,033912
15	0,91677	1,090786	0,090786	15	1,1127	0,898715	-0,10129
16	0,91441	1,093601	0,093601	16	0,98334	1,016942	0,016942
17	0,97835	1,022129	0,022129	17	1,01539	0,984843	-0,01516
18	0,98175	1,018589	0,018589	18	1,04018	0,961372	-0,03863
19	0,97255	1,028225	0,028225	19	0,98262	1,017687	0,017687
20	1,05078	0,951674	-0,04833	20	1,0151	0,985125	-0,01488
21	1,0076	0,992457	-0,00754	21	0,99286	1,007191	0,007191
22	0,95833	1,043482	0,043482	22	0,925	1,081081	0,081081
23	1,03565	0,965577	-0,03442	23	1,02148	0,978972	-0,02103
24	0,87468	1,143275	0,143275	24	0,97933	1,021106	0,021106
25	1,06397	0,939876	-0,06012	25	0,99113	1,008949	0,008949
26	0,95993	1,041743	0,041743	26	1,00296	0,997049	-0,00295
27	0,96412	1,037215	0,037215	27	1,00701	0,993039	-0,00696
28	1,04051	0,961067	-0,03893	28	1,01401	0,986184	-0,01382
29	0,99359	1,006451	0,006451	29	0,99266	1,007394	0,007394

Продолжение таблицы 1.2

N=2000				N=5000			
№	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}_1$	$\delta = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$	№	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}_1$	$\delta = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$
1	1,00292	0,997089	-0,00291	1	1,02181	0,978656	-0,02134
2	0,99638	1,003633	0,003633	2	0,98327	1,017015	0,017015
3	1,00708	0,99297	-0,00703	3	0,99148	1,008593	0,008593
4	0,98824	1,0119	0,0119	4	0,98502	1,015208	0,015208
5	1,02102	0,979413	-0,02059	5	1,02117	0,979269	-0,02073
6	0,99564	1,004379	0,004379	6	1,00947	0,990619	-0,00938
7	0,96806	1,032994	0,032994	7	1,00089	0,999111	-0,00089
8	0,98639	1,013798	0,013798	8	1,01286	0,987303	-0,0127
9	1,02966	0,971194	-0,02881	9	0,98589	1,014312	0,014312
10	0,99591	1,004107	0,004107	10	0,98445	1,015796	0,015796
11	0,99639	1,003623	0,003623	11	0,99633	1,003684	0,003684
12	1,02298	0,977536	-0,02246	12	0,99761	1,002396	0,002396
13	0,99853	1,001472	0,001472	13	0,99352	1,006522	0,006522
14	0,99237	1,007689	0,007689	14	1,00774	0,992319	-0,00768
15	0,99152	1,008553	0,008553	15	1,00557	0,994461	-0,00554
16	1,02363	0,976915	-0,02308	16	1,01113	0,988993	-0,01101
17	1,00942	0,990668	-0,00933	17	0,99911	1,000891	0,000891
18	1,00899	0,99109	-0,00891	18	1,00916	0,990923	-0,00908
19	0,98241	1,017905	0,017905	19	0,99684	1,00317	0,00317
20	0,98853	1,011603	0,011603	20	1,01254	0,987615	-0,01238
21	0,9678	1,033271	0,033271	21	1,00414	0,995877	-0,00412
22	1,00999	0,990109	-0,00989	22	0,99648	1,003532	0,003532
23	0,98163	1,018714	0,018714	23	1,01124	0,988885	-0,01112
24	0,95262	1,049737	0,049737	24	1,00915	0,990933	-0,00907
25	0,9806	1,019784	0,019784	25	1,00342	0,996592	-0,00341
26	1,02819	0,972583	-0,02742	26	0,98785	1,012299	0,012299
27	1,01243	0,987723	-0,01228	27	0,98125	1,019108	0,019108
28	0,99446	1,005571	0,005571	28	0,99468	1,005348	0,005348
29	0,97052	1,030375	0,030375	29	1,02684	0,973862	-0,02614

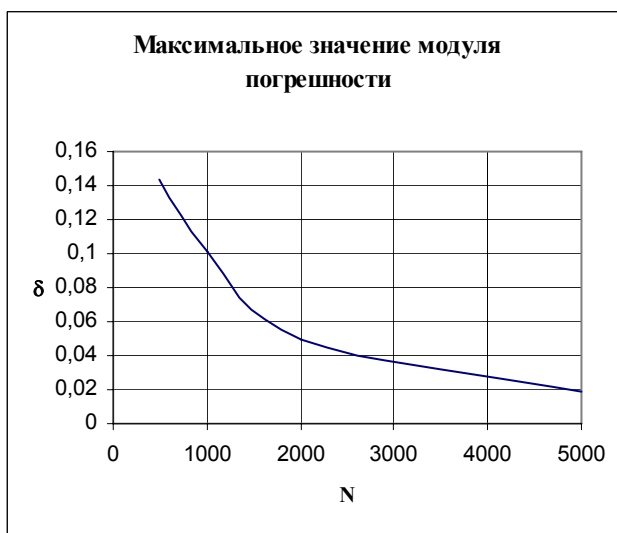
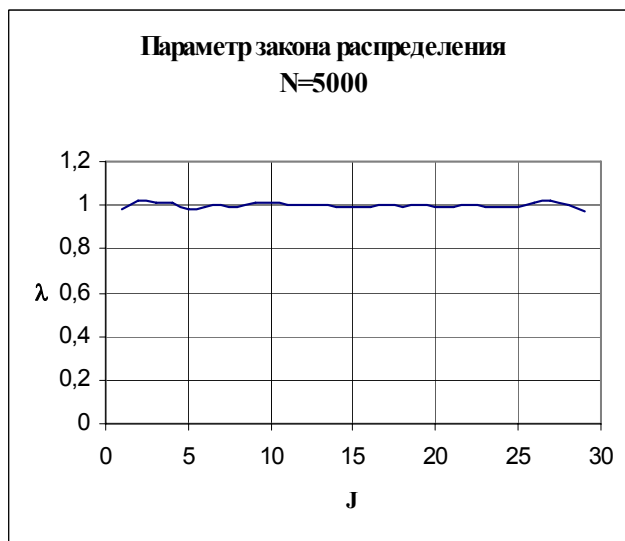
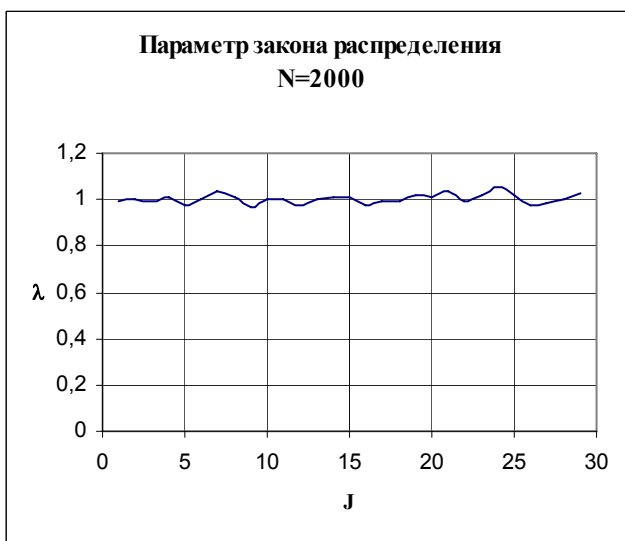
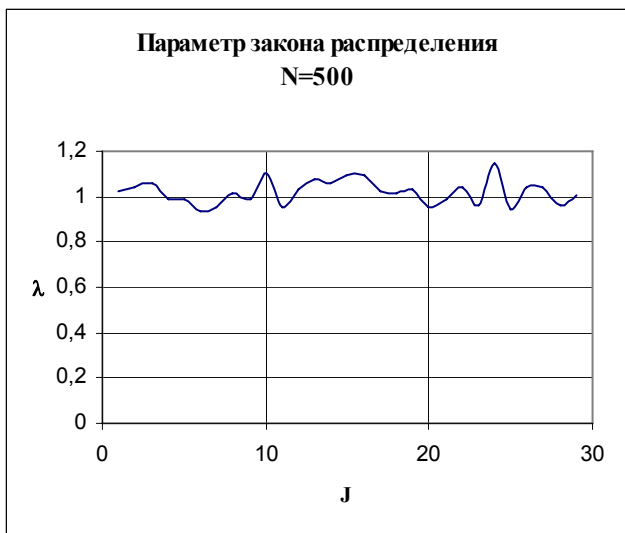


Рисунок 1.8. Результаты моделирования

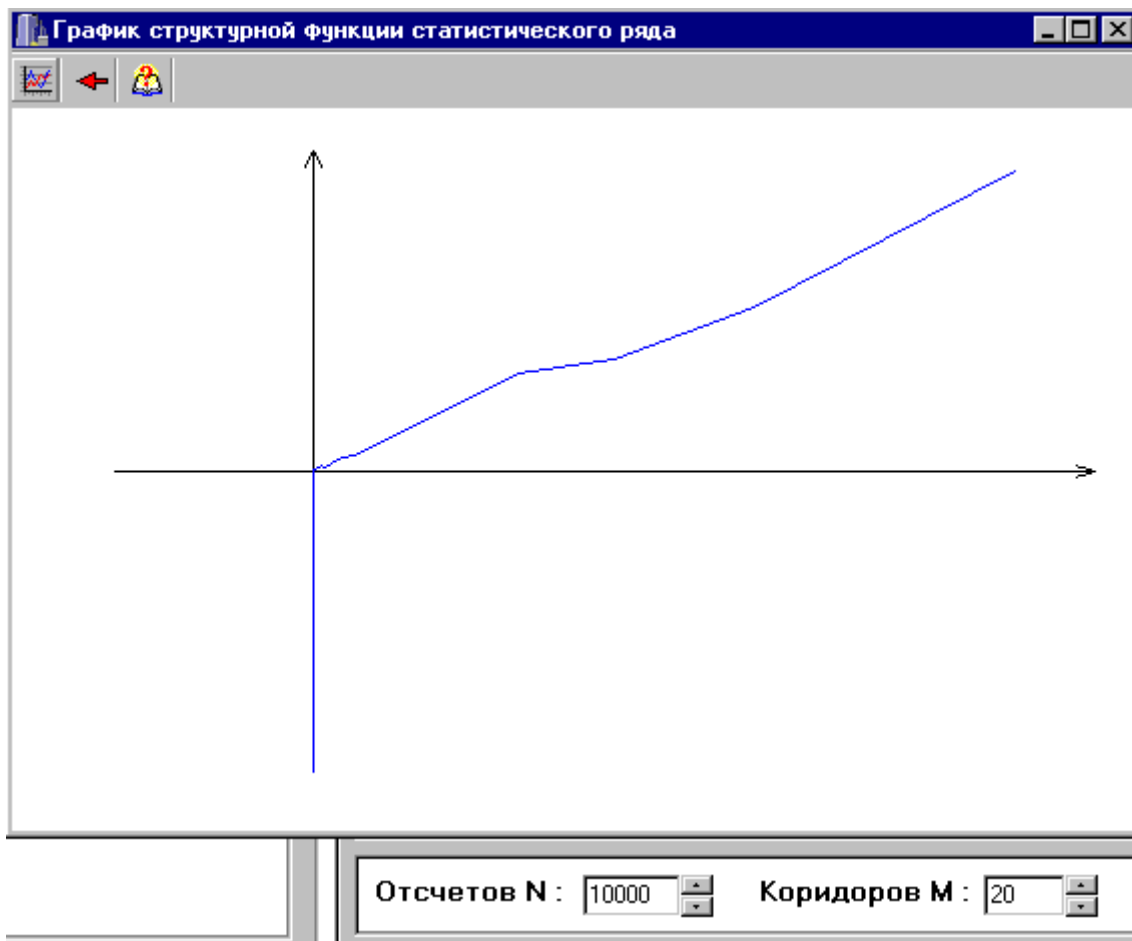


Рисунок 1.9. Фазовый портрет (структурная функция) экспоненциального распределения

1.4. Контрольные вопросы

1. Какие временные ряды называются некоррелированными?
2. Какие вероятностные характеристики характеризуют положение случайной величины?
3. Какие вероятностные характеристики характеризуют форму законов распределения случайной величины?
4. У какого закона распределения коэффициент эксцесса имеет наименьшее значение?
5. Для каких законов распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают?
6. Назовите основные характеристики потоков событий.
7. Назовите основные методы генерирования случайных процессов.
8. Что лежит в основе метода обратной функции?
9. В чем заключается метод моментов оценки параметров законов распределения?
10. Что представляет собой фазовый портрет закона распределения?
11. В чём заключается методика проверки качества генерирования ПСП на основе анализа фазового портрета?

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании временных рядов с заданным видом корреляционной функции, проверка качества генерирования.

2.1. Теоретические основы лабораторной работы

Часто при решении задач имитационного моделирования средств измерений возникает необходимость в формировании процессов с заданным видом корреляционной функции. При этом не обращают внимание на закон распределения процесса. Теоретически эта задача решается методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [2] (см. рис. 2.1).

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (2.1)$$

где $S_x(\omega)$ - спектральная плотность мощности входного сигнала;

Рисунок 2.1

$|W(j\omega)|^2$ - квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $|W(j\omega)|^2$ - чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega) \varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega) \psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega) W(-j\omega). \end{cases} \quad (2.2)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (2.3)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра $W(j\omega)$ во многом будет определяться видом $S_x(\omega)$. При использовании в качестве входного сигнала «белого» шума с $S_x(\omega) = S_0$, получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (2.4)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра (см. приложение П.7):

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.5)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$Y(j) = \Delta\tau \sum_{i=0}^{N1} x(j-i)h(i), \quad (2.6)$$

где N1 - число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$ - интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h(i)=h(i\Delta\tau)$ - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, требуемой точности вычисления корреляционной функции δ и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции и различных погрешностях восстановления корреляционной функции представлено в таблице 2.1.

Минимальное количество ординат корреляционной функции

Таблица 2.1

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	0,02	0,05	0,1	0,2
$e^{-\alpha \tau }$	9	6	4	3
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	13	9	7	5
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	19	13	10	7
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2 / 3)$	10	7	5	4
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$

Используя эту таблицу, можно определить интервал дискретизации в виде:

$$\Delta\tau = \frac{\tau_{kmax}}{N1}, \quad (2.7)$$

где τ_{kmax} - максимальный интервал корреляции (см. таблицу 2.2).

Другой подход также сводится к нерекурсивной фильтрации входного ряда [2]:

$$Y_n = \sum_{k=0}^N c_k x_{n-k}, \quad (2.8)$$

причём $M[y_n] = 0$,

а

$$M[y_n y_k] = \begin{cases} K_{n-k}, & |n-k| \leq N; \\ 0, & |n-k| > N, \end{cases} \quad (2.9)$$

где K_{n-k} - значение корреляционной функции в точке $(n-k)\Delta$.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей
корреляционных функций

Таблица 2.2

№	Наименование	$\Delta=0,01$	$\Delta=0,02$	$\Delta=0,05$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Коэффициенты $c_k, k=0,1,\dots,N$ удовлетворяют следующей нелинейной системе алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 c_0 + c_1 c_1 + c_2 c_2 + \dots + c_N c_N = K_0 \\ c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{N-1} c_N = K_1 \\ \dots\dots\dots \\ c_0 c_N = K_N \end{array} \right. ; \quad (2.10)$$

Решение этой системы дает искомый алгоритм моделирования выходной последовательности. Тем не менее, применение этого метода затруднено из-за трудности решения указанной системы уравнений. Рекуррентный алгоритм оценивания коэффициентов c_k заключается в следующем [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^{(0)} = \sqrt{K_0}; \\ c_k^{(l)} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > l; \\ \frac{K_k - \sum_{i=1}^{m-k} c_i^{(l-k)} c_{i+k}^{(l)}}{c_0^{(l-k)}}, & \text{если } k \leq l; \end{cases} \\ c_0^{(l)} = \sqrt{K_0 - \sum_{i=1}^m (c_i^{(l)})^2}, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

где $l=0,1,2,\dots$ - номер итерации.

Однако при оценочном характере K_k возникают дополнительные сложности в корректировке c_k , что усложняет его и ставит под сомнение его целесообразность.

Поиски более быстродействующих алгоритмов моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции привели к использованию рекурсивной фильтрации [2]:

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i}. \quad (2.12)$$

Для нахождения коэффициентов a_i и b_i (т.е. параметров фильтра) применяются, в основном, три класса методов: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчёта цифровых фильтров в Z -плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. В общем случае невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учётом применимости этих методов в конкретных условиях и многих других факторов, каждый из них может оказаться наиболее подходящим. Однако большинство цифровых фильтров рассчитываются методом билинейного преобразования стандартных аналоговых фильтров. Это обстоятельство связано с тем, что в задачах статистического моделирования необходимо проектировать фильтры, для которых билинейные преобразования аналоговых фильтров уже известны.

Параметры и вид цифрового рекурсивного фильтра для основных моделей корреляционных функций представлены в приложении П.8.

Для проверки качества генерирования ПСП представляется перспективным использование фазовых портретов [2]. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: $\rho_x(\tau)$ и $\rho'_x(\tau)$ (см. рис. 2.2-2.3):

$$\rho'_x(\tau) = \Phi_x[\rho_x(\tau)]. \quad (2.13)$$

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет. На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

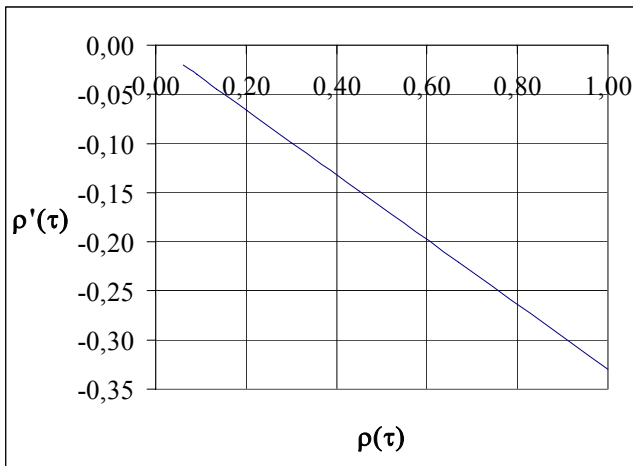
Для сравнения фазовых портретов определим квадратическую погрешность в виде:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} [\Phi_T[\rho_x(\tau_i)] - \Phi_x[\rho(\tau_i)]]^2}{\sum_{i=0}^{J_{\max}} \Phi_T^2[\rho_x(\tau_i)]}, \quad (2.14)$$

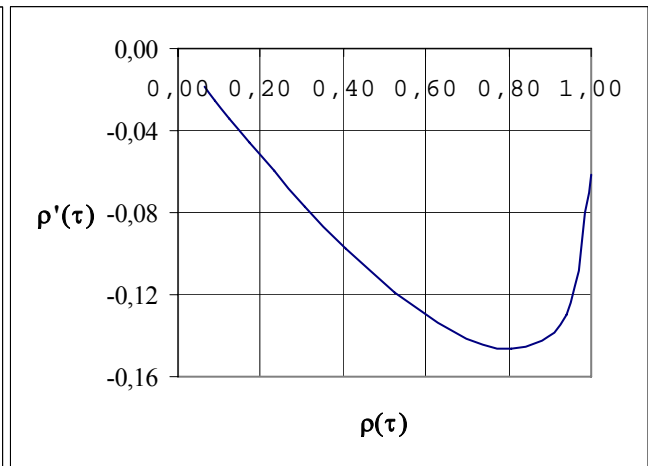
$\Phi_T[\rho_x(\tau_i)]$ - эталонный фазовый портрет.

На рис. 2.2 приведены фазовые портреты широко применяемых однопараметрических моделей. Следует отметить, что за исключением фазового портрета корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$, все фазовые портреты расположены в четвертом квадранте и не пересекают ось абсцисс. Кроме этого, фазовые портреты второй и четвертой моделей очень близки по форме и отличаются лишь численными значениями, в частности, значениями минимума.

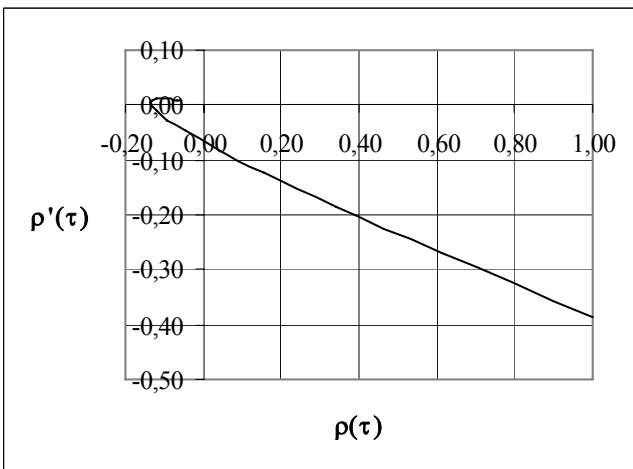
Фазовые портреты колебательных моделей, представленные на рис. 2.3, расположены во всех квадрантах. Причем, количество пересечений оси абсцисс зависит не от вида корреляционной функции, а от численного значения показателя колебательности $\mu = \omega_0 / \alpha$ [2].



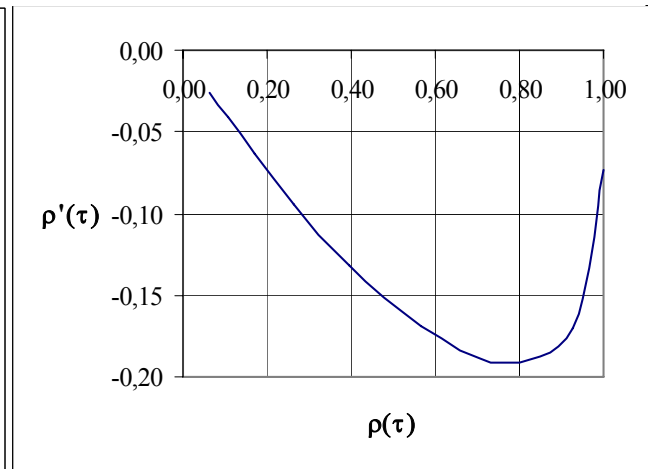
а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha\tau = 0,4$



б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, $\alpha\tau = 0,4$



в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$, $\alpha\tau = 0,23$



г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3)$, $\alpha\tau = 0,693$

Рисунок 2.2. Фазовые портреты однопараметрических моделей

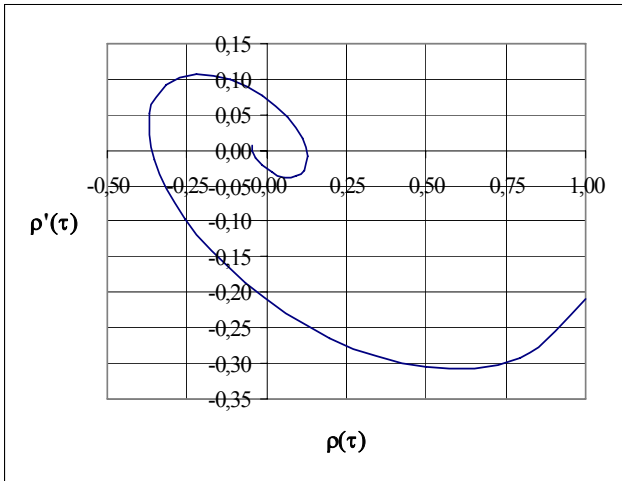
Алгоритм проверки качества генерирования ПСП с заданным видом КФ на основе анализа фазовых портретов (идентификации корреляционной функции ПСП) заключается в выполнении следующих этапов:

1. построения фазового портрета КФ сгенерированной ПСП с заданными параметрами;
2. построения фазового портрета заданной КФ - эталона;
3. сравнения фазовых портретов (вычисление квадратической погрешности).

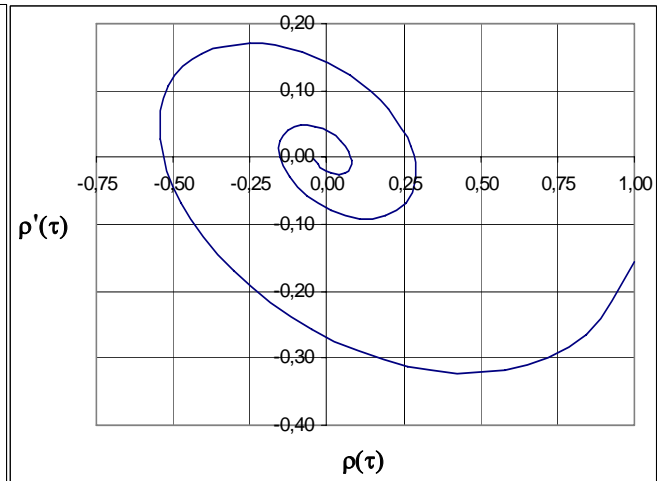
Отметим, что погрешность идентификации КФ по фазовым портретам уменьшается с увеличением объёма выборки. Исследования показали, что фазовые портреты являются устойчивыми при отношении интервала наблюдения к интервалу корреляции ≥ 10 [2].

Тем не менее, проверять качество генерирования ПСП рекомендуется на выборке объёмом 5000-10000 отсчётов.

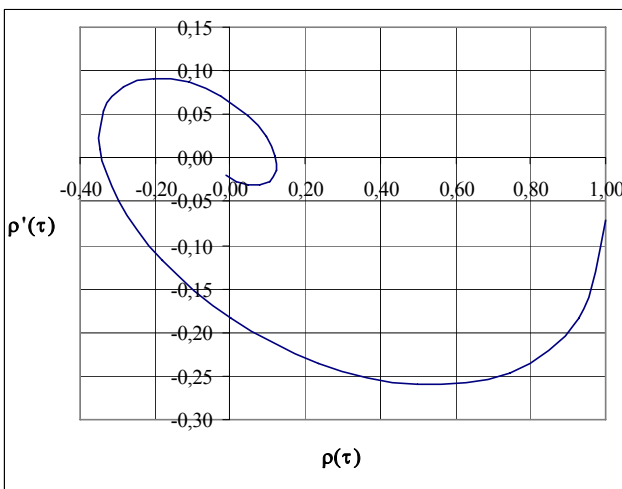
Поскольку при увеличении показателя колебательности наибольшие различия наблюдаются вблизи «нуля» корреляционной функции, наиболее информативным у фазового портрета является «хвост» [2].



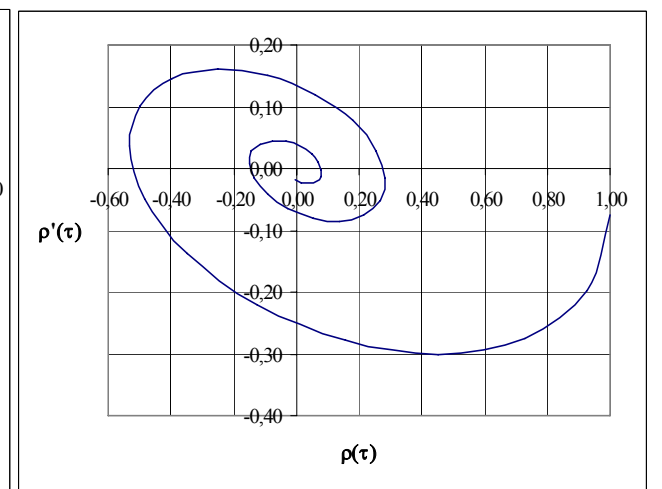
а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 3$



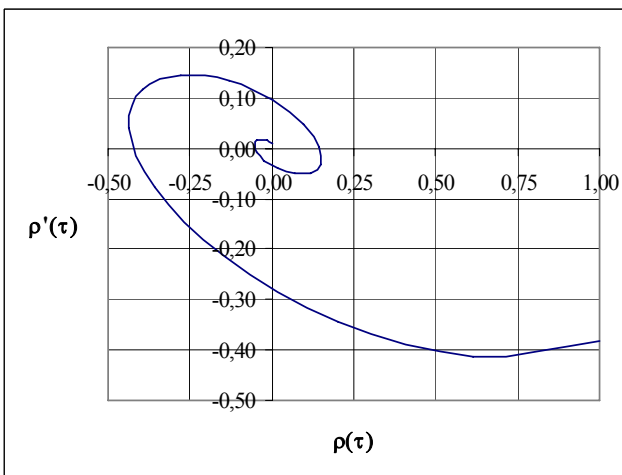
б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 5$



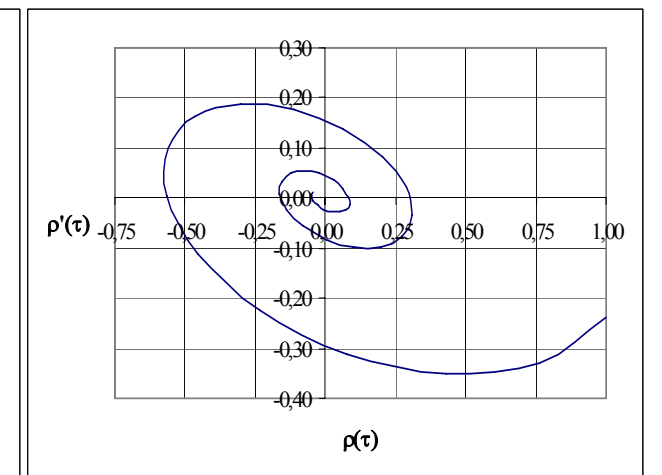
в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$



д) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



е) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$

Рисунок 2.3. Фазовые портреты колебательных корреляционных функций

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить систему моделирования (см. приложение П.16).

2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=1000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
2. Для каждого временного ряда определить корреляционную функцию.
3. Для каждой корреляционной функции построить её фазовый портрет.
4. Наложить на фазовый портрет фазовые портреты типовых моделей корреляционных функций с заданными параметрами. Сделать вывод о виде корреляционной функции временного ряда (идентифицировать вид корреляционной функции).
5. С помощью графического пакета Paint распечатать реализации временных рядов ($N=100$) и соответствующие им корреляционные функции и фазовые портреты.
6. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=500, 1000, 2000, 5000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
7. Определить и построить зависимость максимального значения модуля погрешности оценки корреляционной функции от объёма выборки (число модельных экспериментов равно 29).
8. Определить и построить зависимость максимального значения модуля погрешности оценки фазового портрета от объёма выборки (число модельных экспериментов равно 29).

2.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритм моделирования коррелированных временных рядов с заданным преподавателем видом корреляционной функции.
3. Импульсная характеристика формирующего фильтра (Приложение 9).
4. Примеры реализации коррелированных временных рядов для объёма выборки $M=1000$ и соответствующих им корреляционных функций.
5. Фазовые портреты корреляционных функций.
6. Погрешности генерирования коррелированных временных рядов для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Интервал дискретизации выбрать для восстановления корреляционной функции с погрешностью $\delta = 0,02$.
7. Графические зависимости погрешности генерирования от объёма выборки - $M=500, 1000, 2000, 5000$. Для построения графических зависимостей можно воспользоваться пакетом Excel.
8. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже (пункты 4-7 отчёта).

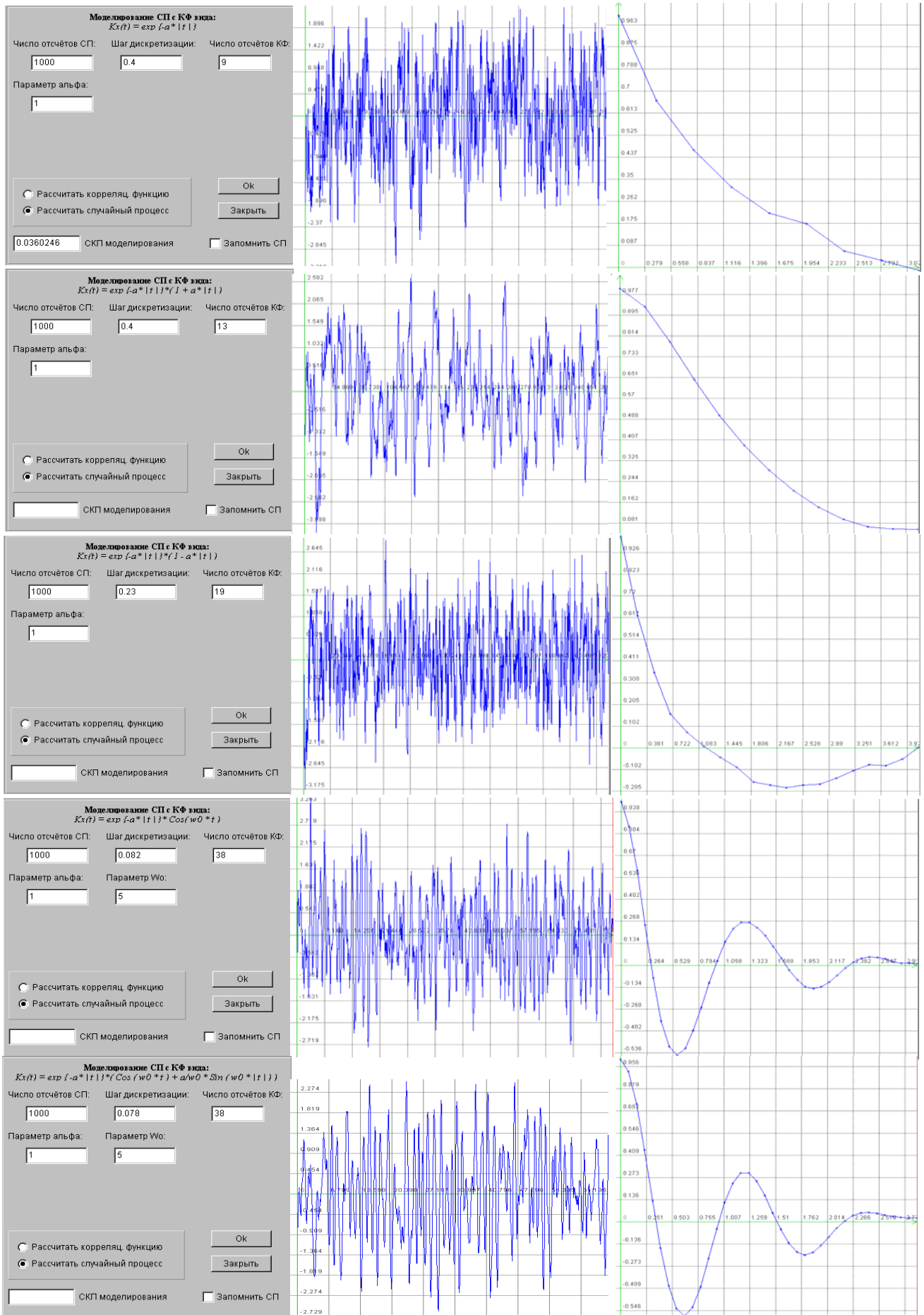


Рисунок 2.4. Случайные процессы и их корреляционные функции

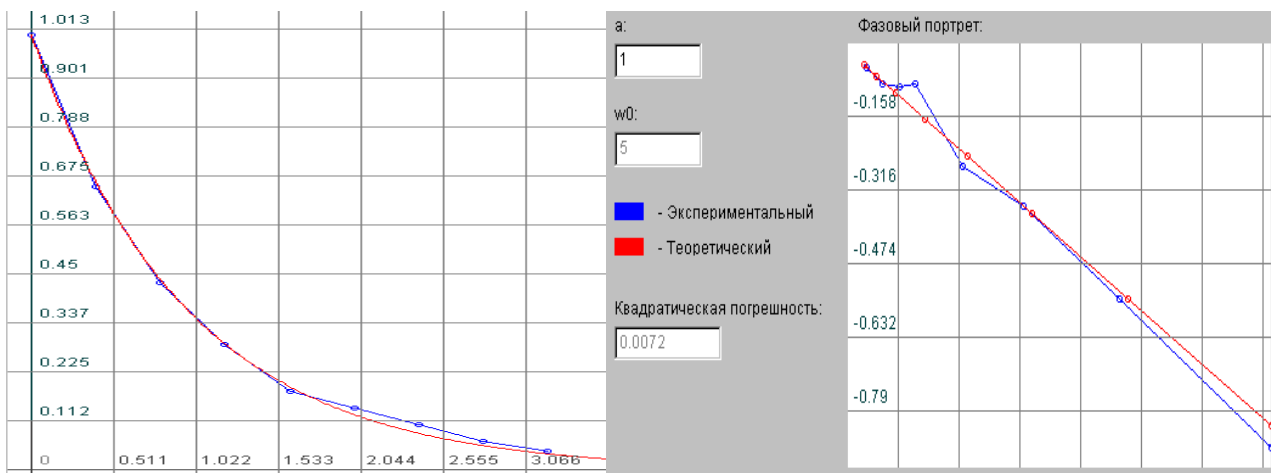


Рисунок 2.5. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

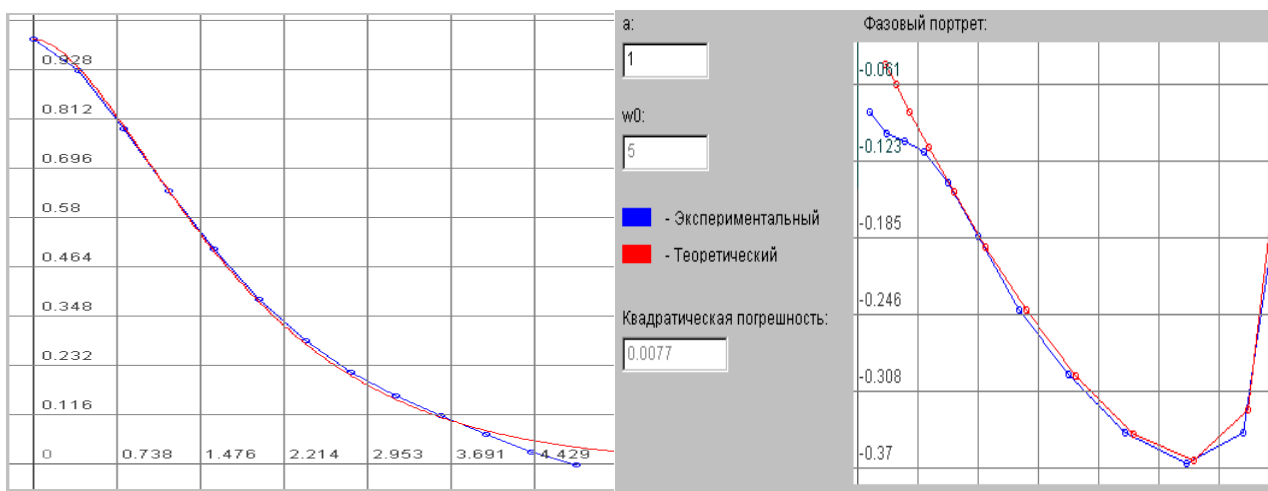


Рисунок 2.6. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$

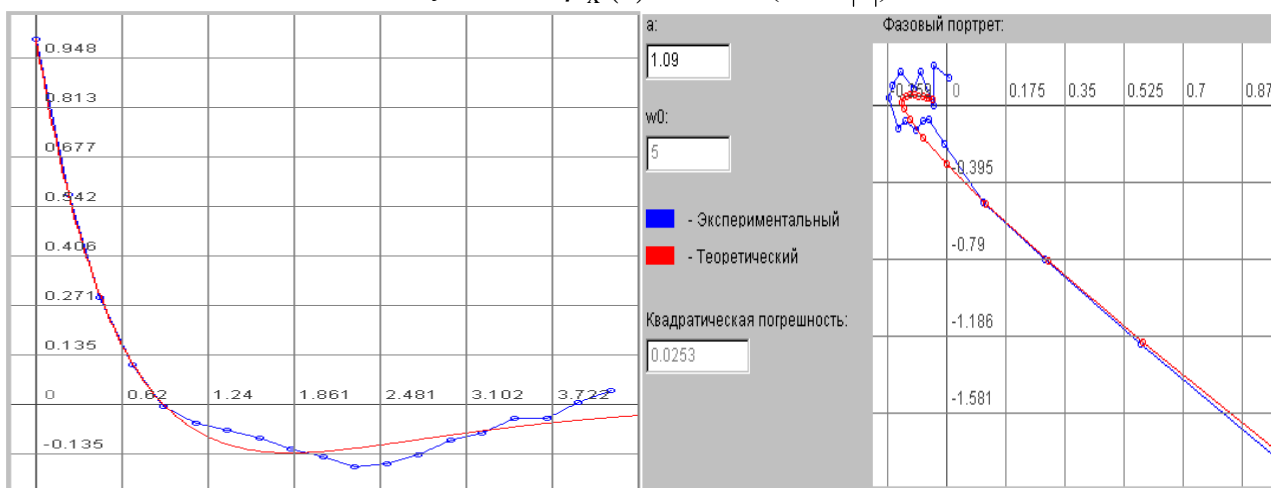


Рисунок 2.7. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$

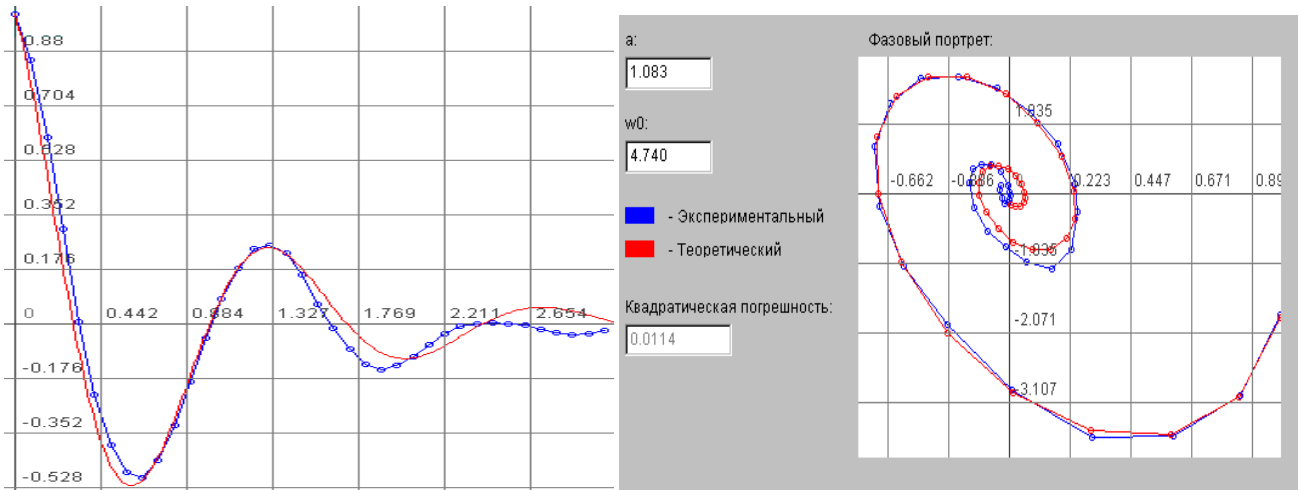


Рисунок 2.8. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

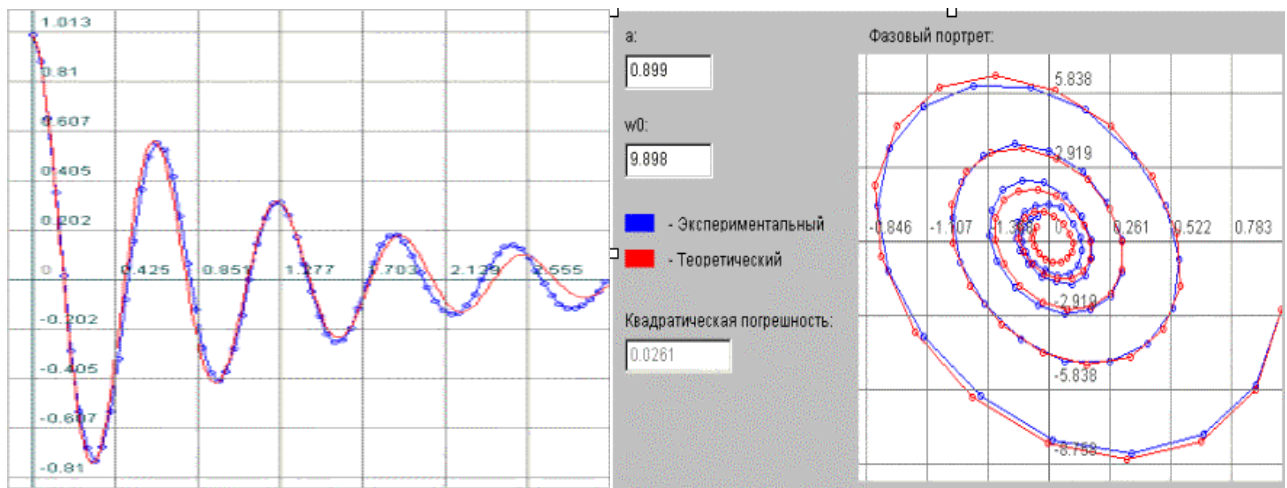


Рисунок 2.9. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \cos \omega_0 \tau)$

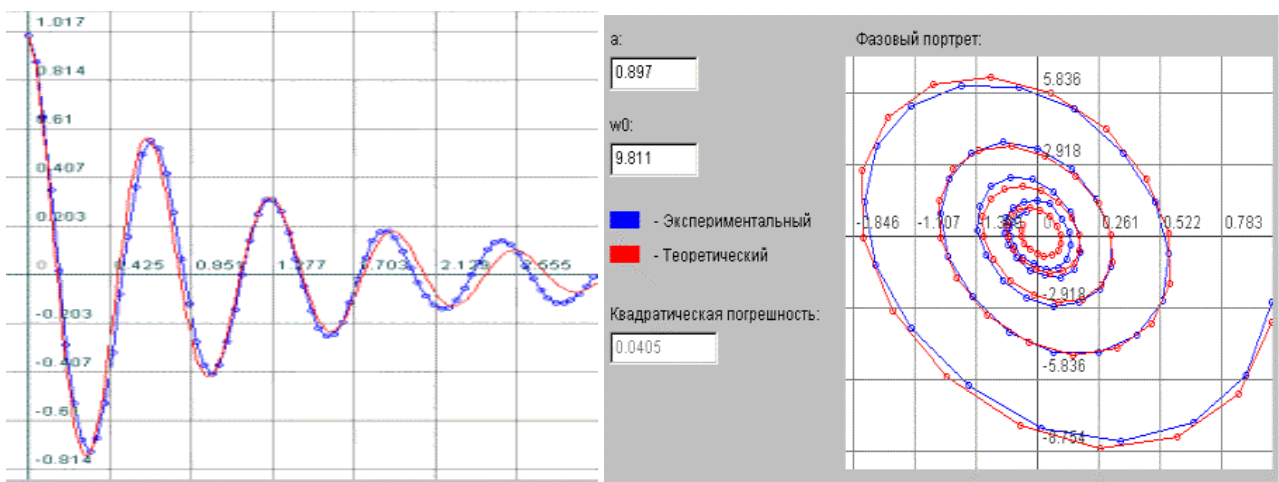


Рисунок 2.10. $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \cos \omega_0 \tau)$

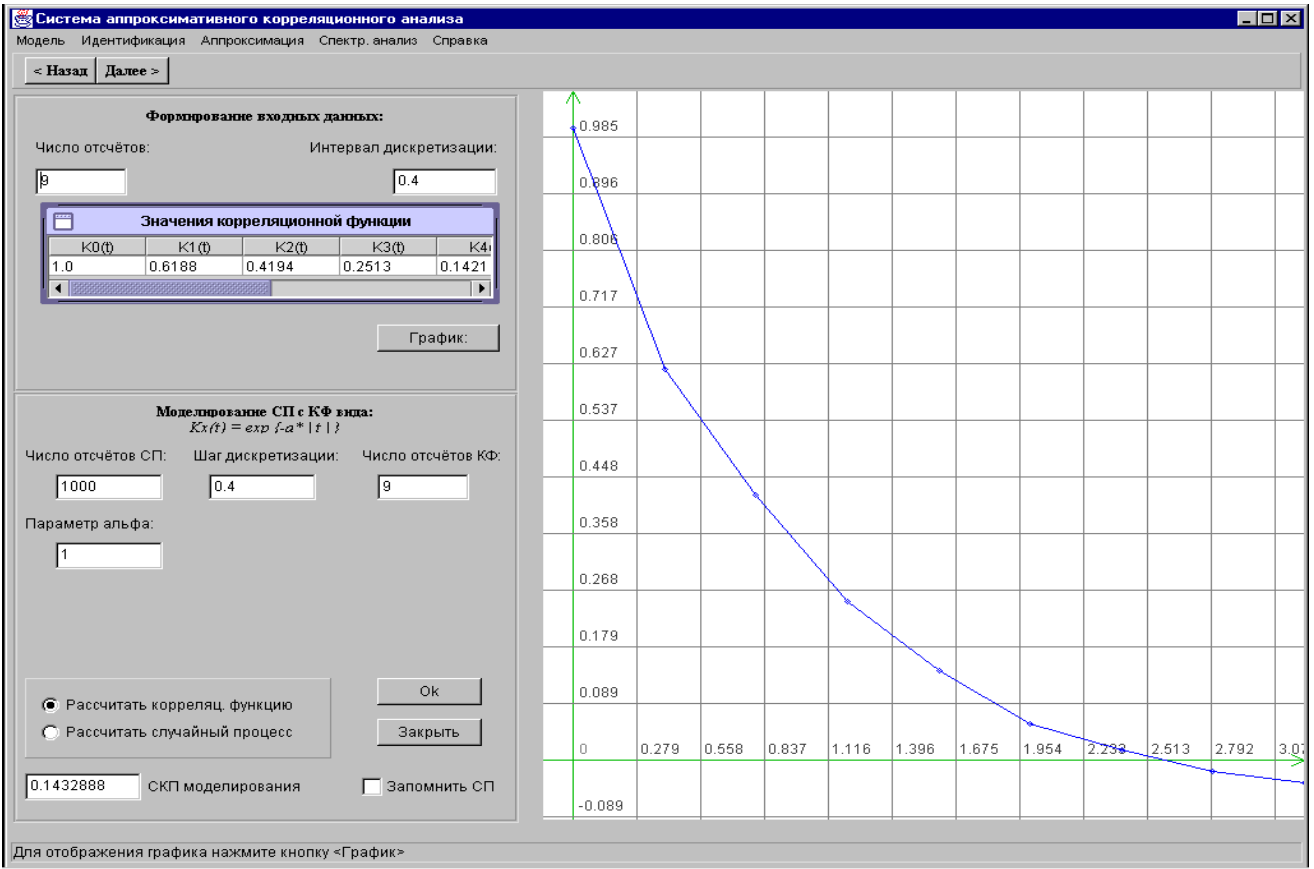
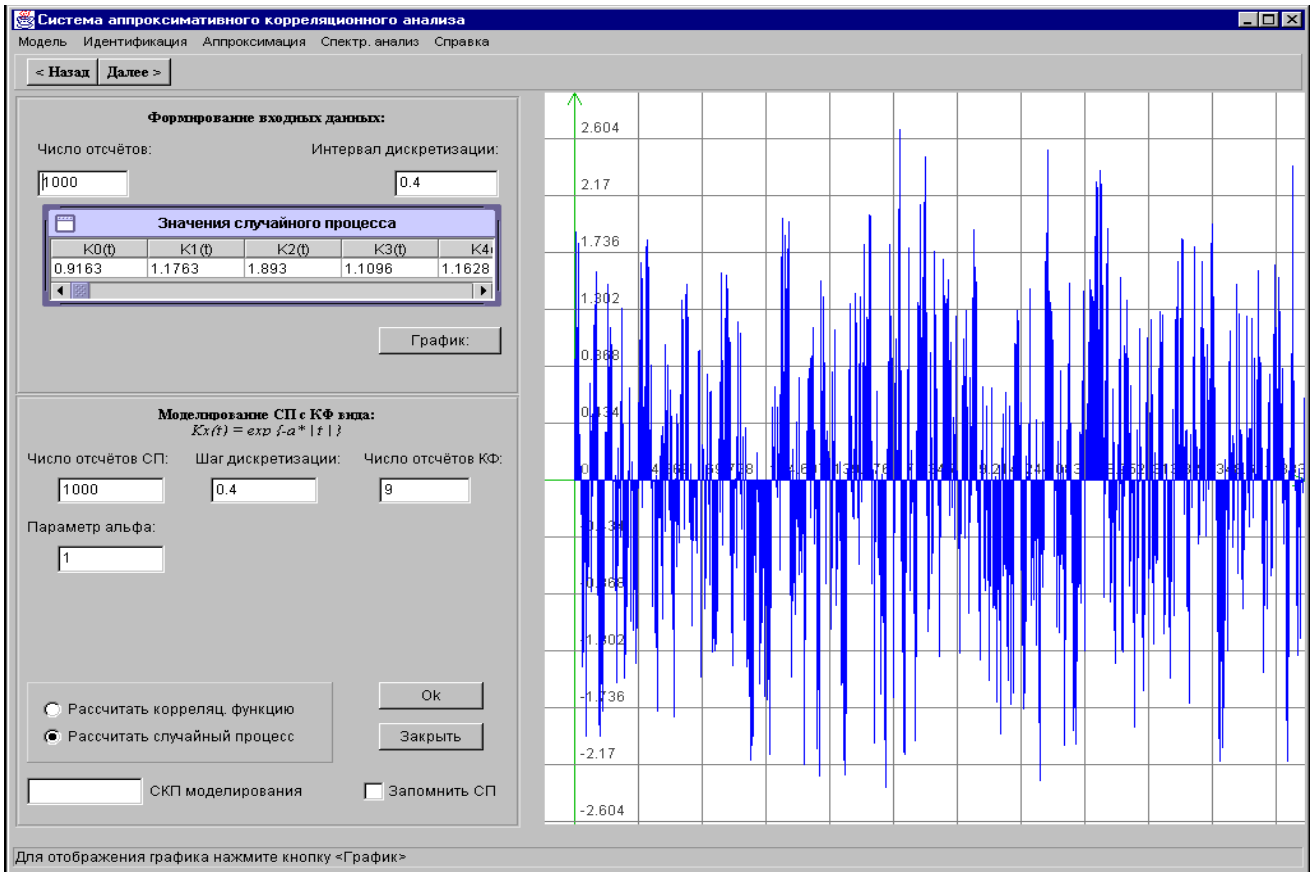


Рисунок 2.11. Результаты моделирования

Погрешности генерирования временного ряда с корреляционной функцией

$$\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \Delta\tau = 0,4/\alpha.$$

Таблица 2.3

J\N	500	1000	2000	5000
1	0,1042	0,061	0,0477	0,0362
2	0,1198	0,0709	0,0347	0,0358
3	0,0852	0,0684	0,0378	0,0283
4	0,071	0,1089	0,0827	0,0495
5	0,0744	0,1146	0,0792	0,0208
6	0,0762	0,0857	0,1108	0,0224
7	0,1356	0,0632	0,0667	0,0350
8	0,2661	0,0334	0,0528	0,0263
9	0,092	0,1065	0,132	0,0137
10	0,1203	0,0814	0,0305	0,0409
11	0,0772	0,0813	0,0274	0,0486
12	0,0745	0,0432	0,0916	0,0424
13	0,2757	0,0308	0,0289	0,0478
14	0,152	0,0746	0,0852	0,0167
15	0,2661	0,0707	0,0458	0,0360
16	0,1311	0,0775	0,057	0,0396
17	0,2182	0,0412	0,1455	0,0701
18	0,1581	0,0981	0,0768	0,0690
19	0,0541	0,0927	0,0525	0,0495
20	0,1431	0,0377	0,0272	0,0513
21	0,0816	0,0917	0,0593	0,0263
22	0,0919	0,0808	0,0422	0,0446
23	0,1523	0,076	0,0946	0,0160
24	0,095	0,1487	0,0537	0,0623
25	0,0769	0,0996	0,0291	0,0759
26	0,1973	0,1598	0,0492	0,0399
27	0,1134	0,0658	0,0401	0,0289
28	0,1012	0,0674	0,0584	0,0571
29	0,0668	0,0574	0,04	0,0273

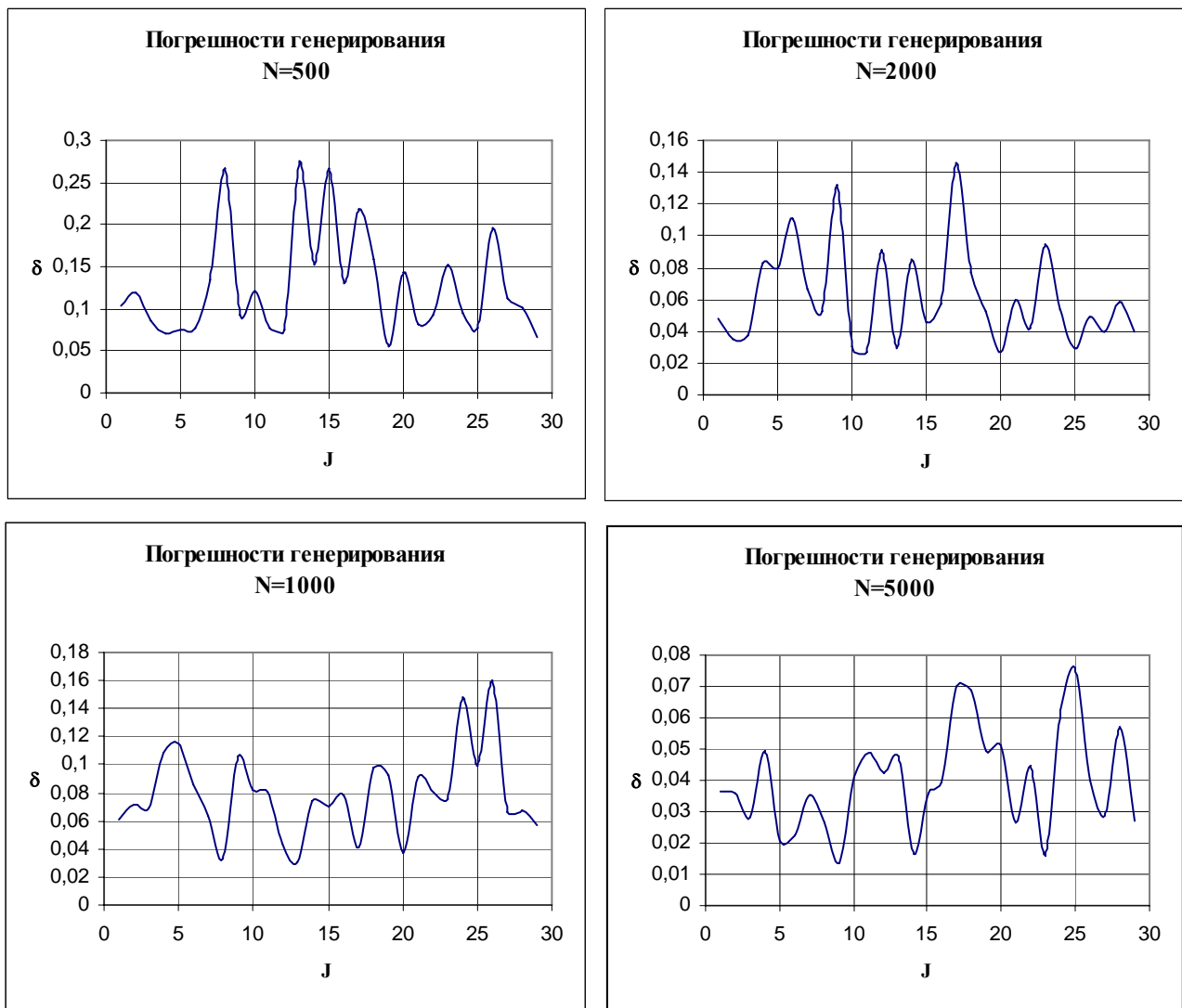


Рисунок 2.12. Результаты моделирования

2.4. Контрольные вопросы

1. Какие вероятностные характеристики относятся к характеристикам взаимосвязи?
2. Какие случайные процессы, временные ряды относятся к классу коррелированных?
3. Какой метод лежит в основе генерирования временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
4. От чего зависит выбор интервала дискретизации случайного процесса?
5. Что такое фазовый портрет корреляционной функции?
6. Какая часть фазового портрета является наиболее информативной?
7. Как отличить фазовый портрет колебательной корреляционной функции?
8. Что характеризует показатель колебательности корреляционной функции?
9. В чем заключается методика оценки качества генерирования случайного процесса с заданным видом корреляционной функции с использованием фазового портрета корреляционной функции?

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ЗАДАНЫМ ВИДОМ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании неэквидистантных временных рядов с заданным видом корреляционной функции, проверка качества генерирования.

3.1. Теоретические основы лабораторной работы

Необходимость в решении этой задачи возникает при исследовании методом имитационного моделирования алгоритмов для анализа вероятностных характеристик при неравномерной дискретизации случайных процессов, неэквидистантных временных рядов.

При описании неэквидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных: массива мгновенных значений $\{x_{ji}\}$ и соответствующего ему массива меток времени $\{t_{ji}\}$, фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений $\{x_{ji}\}$ использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности $\{t_{ji}\}$ - математический аппарат теории потоков событий. Кроме того, это обстоятельство позволяет иногда рассматривать модели случайных процессов и потоков автономно.

Обозначим j -ую реализацию неэквидистантного временного ряда $x_j(t_i) = \{x_{ji}, t_{ji}\}$. Независимо от особенностей математического описания $\{x_{ji}\}$ и $\{t_{ji}\}$ неэквидистантные временные ряды можно разбить на два класса:

- * характеристики потока событий $\{t_{ji}\}$ не зависят от характеристик исследуемого случайного процесса (см. рис. 3.1);
- * характеристики потока событий $\{t_{ji}\}$ полностью определяются характеристиками исследуемого случайного процесса (см. рис. 3.2).

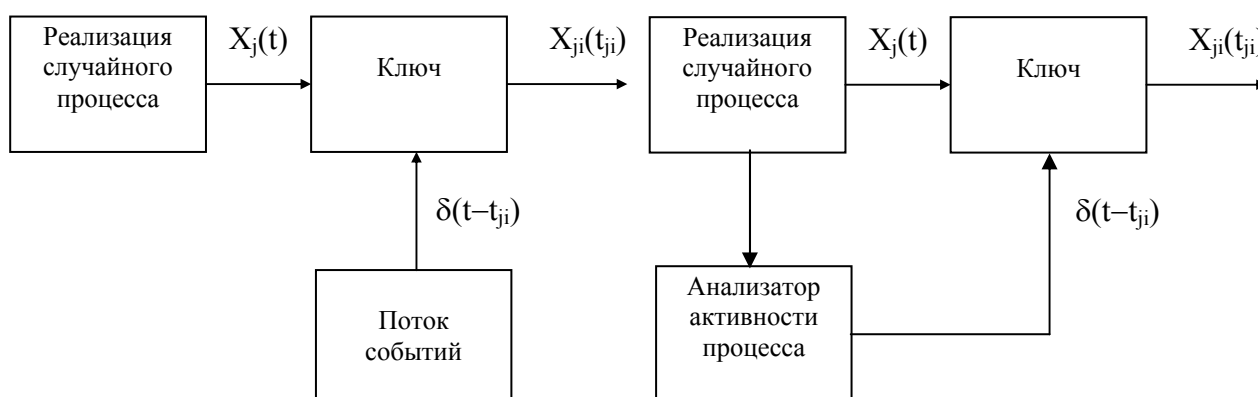


Рисунок 3.1. Характеристики потока не зависят от характеристик процесса

Рисунок 3.2. Характеристики потока зависят от характеристик процесса

К первому классу неэквидистантных временных рядов приводит **непреднамеренная случайная дискретизация**, независящая от желания исследователя, например, при океанологических исследованиях. Ко второму классу относится **преднамеренная нерегулярная дискретизация**, например: адаптивно - временная, спорадическая, - вводимая по желанию исследователя.

Следует подчеркнуть, что чем большей априорной информацией о характере нерегулярной дискретизацией располагает исследователь, тем более точную модель потока событий он построит.

Так например, если $\Delta x_{ji} = \text{const}$, а $t_{ji} = \text{random}$, то такая дискретизация называется спорадической [3]. Для неё известна связь между интервалом дискретизации и характеристиками случайного процесса. Учёт этого важного обстоятельства позволяет упростить процедуру оценивания вероятностных характеристик и её метрологический анализ.

Таким образом, математическое описание потоков событий, его характеристики зависят от способа нерегулярной дискретизации, особенно при преднамеренной дискретизации. К сожалению, этого нельзя сказать о непреднамеренной случайной дискретизации, характеристики которой зависят от особенностей проведения эксперимента. Единственным разумным выходом в сложившейся ситуации при построении модели является использование накопленной информации, полученной при решении других задач в данной предметной области.

Случайные потоки после дискретизации можно разбить на три группы:

$$1. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{random}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{const}; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$2. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{const}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$3. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{random}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}. \end{cases} \quad (3.3)$$

К первой группе относится равномерная дискретизация, ко второй - преднамеренная неравномерная дискретизация: идеальная спорадическая, адаптивно-временная полиномиальная дискретизация ($n=0$) (учет этого обстоятельства позволяет в ряде случаев упростить алгоритмы статистических измерений [3]). К третьей группе относится как преднамеренная неравномерная дискретизация: адаптивно-временная дискретизация и коммутация, стохастическая дискретизация, реальная спорадическая, так и непреднамеренная неравномерная дискретизация: пропуски, сбои, определяемая характером эксперимента и т.д.

Разнообразие способов неравномерной дискретизации, приводящее к этой группе моделей, позволяет считать этот способ представления наиболее общим и требующим наибольшего внимания.

В системах реального времени обработки и передачи информации, управления наблюдаются различные потоки событий. Поток событий представляет собой точечный процесс с событиями, появляющимися случайным или периодическим образом во времени.

Различают потоки **однородных** и **неоднородных** событий. Например, в системах связи, реализующих приоритет определенной группы абонентов, поток вызовов будет с этой точки зрения неоднородным, система по-разному будет реагировать на

разные события (вызовы) в потоке. На рассматриваемые же события (отсчеты первичного процесса) реакция устройств АСНИ, дискретных ИИС, как правило, не меняется при изменении порядкового номера события и поэтому поток выборок можно считать однородным [3].

Основными характеристиками, классифицирующими случайный поток, являются свойства стационарности, ординарности и последствий [3].

Стационарным называется поток событий, для которого вероятность $P_k(1-t, 1)$ появления какого-либо числа k событий на определенном интервале времени $(1-t, 1)$ зависит лишь от значения этого интервала t и не зависит от его расположения на оси времени.

Ординарным называется поток, для которого вероятность появления на малом участке δt , примыкающем к произвольно выбранному моменту времени, более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления хотя бы одного события.

Последствие потока заключается в зависимости вероятности $P_k(1-t, 1)$ от распределения событий на оси времени вне интервала $(1-t, 1)$. Либо, другими словами, поток не обладает последствием, если вероятность появления на любом интервале времени какого-либо числа событий не зависит от того, сколько событий произошло на других, не перекрывающихся с данным интервалом. Из литературы известно [3], что не обладает последствием только простейший случайный или иначе стационарный пуассоновский поток, имеющий экспоненциальное распределение интервалов времени между событиями в потоке.

Варьируя этими свойствами, можно образовывать различные классы потоков [3]:

- простейший поток - поток Пуассона, обладающий всеми тремя свойствами, наиболее широко применяемый на практике;
- рекуррентные потоки, относящиеся к классу стационарных потоков Пальма, у которых одномерные законы распределения интервалов дискретизации одинаковы, а сами интервалы независимы между собой;
- поток смены состояний марковского процесса Вольда, предполагающий зависимость соседних интервалов между событиями в потоке;
- альтернирующие потоки, у которых плотность распределения интервалов чередуется от интервала к интервалу (выбирается из двух возможных видов);
- модель рекуррентного потока, получаемого разрежением посредством p -преобразования исходного потока (каждое событие с вероятностью p остается в потоке, а с вероятностью $q=1-p$ выбрасывается).

Выбор модели потока зависит от характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д. При аналитических исследованиях предпочтение следует отдавать простейшим моделям, позволяющим получить сравнительно простые выражения, удобные для инженерного расчета основных параметров алгоритмов.

При решении перечисленных задач необходимо определить характеристики потока, которые можно задать различными способами [3]:

- вероятностью числа событий на заданном временном интервале;
- законом распределения интервалов между отсчетами потока;
- временами возвращения.

Эти способы дополняют друг друга, и в зависимости от решаемой задачи применяется один из них или их совокупность.

Плотность распределения вероятностей интервалов $f_{\Delta t}(\Delta t)$ и функция распределения вероятностей интервалов $F_{\Delta t}(\Delta t)$ являются основными характеристиками, позволяющими определить большинство вероятностных характеристик, и при математическом описании потока специфики не имеют. Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает.

Плотности распределения прямого V и обратного U времен возвращаения, необходимые для метрологического анализа оценки взаимных корреляционно-структурных функций, определяются в виде [3]:

$$\varphi(t) = \varphi_v(t) = \varphi_u(t) = \lambda[1 - F(t)], \quad (3.4)$$

где $F(t)$ - функция распределения интервала дискретизации;

λ - интенсивность потока.

При решении ряда прикладных задач представляет интерес время появления события и его отношение к предшествующим событиям, не обращая внимание ни на амплитуду события, ни на информацию, которую они несут. В системах реального времени к событиям могут быть отнесены: электрический импульс, сигнал переключения, прерывания, момент окончания алгоритма и т.д.

В настоящее время в литературе описаны различные статистические методы и аппаратура для анализа случайных событий (см. список использованных источников в [3]). Важной частью этого анализа является корреляционный анализ потоков событий. Корреляция событий основана на измерении распределения интервалов времени между случайными событиями. События могут представлять поток данных в вычислительных системах реального времени или временные ряды экспериментальных импульсов.

Автокорреляция $C_x(t)$ определяет вероятность появления события в потоке X как функцию времени после данного события без учета числа прошедших событий:

$$C_x(t)dt = P[\text{событие в } X(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (3.5)$$

В дальнейшем для отличия автокорреляционной функции случайных процессов (последовательностей) автокорреляционную функцию потоков будем называть **интервальной корреляционной функцией (ИКФ)**.

Взаимная корреляция $C_{xy}(t)$ применяется в случае двух потоков событий X и Y и определяет вероятность наблюдения события в потоке Y как функцию времени после данного события в потоке X , без учета числа прошедших событий:

$$C_{xy}(t)dt = P[\text{событие в } Y(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (3.6)$$

Функцию $C_{xy}(t)$ по аналогии назовем **взаимной интервальной функцией (ВИКФ)**.

Определенные таким образом автокорреляция и взаимная корреляция применяются для объяснения поведения систем реального времени для измерения и управления, нейронных сетей и моделей поведения определения зависимости в случайных потоках, осуществления этой зависимости, обнаружения скрытых моделей в случайной последовательности и предложения соответствующей вероятностной модели исследуемой системы.

При описании неэквидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных: $[x_{ji}(t_{ji}/\Delta t_{ji})]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}$ - массива мгновенных значений x_{ji} и соответствующих им моментов или интервалов времени $t_{ji}/\Delta t_{ji}$, фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений x_{ji} использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности t_{ji} - математический аппарат теории потоков событий [2, 3].

Выбор модели потока при описании неэквидистантного временного ряда зависит от способа неравномерной дискретизации, характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели потока событий, являются следующие:

- модель должна адекватно описывать поток - совпадение основных характеристик потока и модели;
- быть по возможности простой, позволяющей аналитическое определение основных характеристик потока;
- для потоков, зависящих от характеристик случайного процесса, позволять определение характеристик потока в зависимости от характеристик процесса.

При статистических измерениях при неравномерной дискретизации случайных процессов возможны следующие случаи:

- случайная дискретизация непреднамеренная и для нее необходимо оценить увеличение методической погрешности, вызванное этой неравномерностью;
- случайная дискретизация преднамеренная с известными характеристиками потока и необходимо: разработать алгоритмы статистических измерений, определить увеличение методической погрешности, вызванной неравномерностью дискретизации;
- случайная дискретизация преднамеренная, и для нее необходимо определить требования к потоку при известных характеристиках процесса с целью обеспечения допустимых методических погрешностей измерения значений вероятностных характеристик.

Как правило, для анализа алгоритмов статистических измерений и расчета их основных параметров необходимо знание:

- закона распределения интервалов и их моментных характеристик, используемых при оценке составляющей методической погрешности, обусловленной неравномерностью дискретизации;
- закона распределения сумм интервалов, требуемого для определения числа каналов аппаратно-программных средств при измерении функциональных вероятностных характеристик, например, корреляционно-структурных;
- плотности распределения времен возвращения, используемой при статистическом анализе взаимных корреляционно-структурных характеристик;
- интервальной корреляционной функции, необходимой для усреднения результата и оценки составляющих методической погрешности;

- минимального интервала дискретизации - параметра аппаратно-программных средств, обеспечивающего допустимые значения составляющей методической погрешности, обусловленной дискретизацией;
- интенсивности потока - величины, обратной математическому ожиданию интервала дискретизации, используемой для оценки коэффициента сжатия, определения допустимого значения погрешности восстановления случайного процесса;
- коэффициента сжатия $k_{сж}$, характеризующего число существенных отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя.

Рассмотрим типовые модели неэквидистантных временных рядов, широко применяемых на практике как при описании, так и при метрологическом анализе алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов. На практике, при описании различных видов неравномерной дискретизации, приводящей к нерегулярным временным рядам, как правило, применяют модели рекуррентных потоков Пальма [3]:

- периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений;
- периодической дискретизации с «дрожанием»;
- аддитивной случайной дискретизации;
- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений;
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

Так для периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений (р-преобразование) интервал дискретизации $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}$ определяется в соответствии с выражением

$$\Delta t_{ji} = Y_{ji} \Delta t_0, \quad (3.7)$$

где Δt_0 - интервал принудительной дискретизации;

Y - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p [3]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3.8)$$

В соответствии с выражением (3.7) мгновенное значение выборки случайного процесса и соответствующая ему метка времени равны:

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ji} \left(\Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{jk} \right); \\ t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{j=1}^i Y_j. \end{cases} \quad (3.9)$$

Для периодической дискретизации с «дрожанием»

$$\begin{cases} t_{ji} = i\Delta t_0 + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (3.10)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне

$\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2} \right)$, а интервал дискретизации равен

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}. \quad (3.11)$$

Для аддитивной случайной дискретизации

$$\begin{cases} t_{j,i+1} = t_{ji} + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (3.12)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне $(0, \infty)$.

Интервал дискретизации для этой модели равен

$$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}. \quad (3.13)$$

Модель периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений является обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Delta t}(\Delta t)$, разряжены р-преобразованием [3].

Для нее:

$$\begin{cases} t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{kj} + \xi_{\sum_{k=1}^i Y_{kj}} - \xi_0; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (3.14)$$

где Y_i - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p в соответствии с выражением (3.8), а интервал дискретизации

$$\Delta t_{ji} = Y_i \Delta t_0 + \xi_{\sum_{j=1}^i Y_i} - \xi_{\sum_{j=1}^{i-1} Y_j}. \quad (3.15)$$

Модель аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений является обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой $\Theta_i = \xi_i$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Theta}(\Theta)$ разряжены р-преобразованием.

Для этой модели:

$$\begin{cases} t_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{Y_j} \xi_{k+\sum_{l=1}^{j-1} Y_l}; \\ x_i = x(t_i), \end{cases} \quad (3.16)$$

а интервал дискретизации равен

$$z_i = \sum_{l=1}^Y \Theta_i = \sum_{k=1}^{Y_i} \xi_{k+\sum_{l=1}^{i-1} Y_l}. \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

Рассмотренные модели, естественно, не являются исчерпывающими, но они перекрывают широкий класс практических задач.

Таким образом, генерирование неэквидистантных временных рядов основано на «прореживании» регулярного ($\Delta t_i = \text{const}$) временного ряда с учётом модели потока событий.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить систему моделирования (см. приложение 16).

3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=5000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
2. Запомнить временные ряды в базе данных.
3. Для каждого временного ряда, вызванного из базы данных, с помощью алгоритма нерегулярной дискретизации сгенерировать неэквидистантный временной ряд с заданными параметрами нерегулярной дискретизации (рассмотреть модели с р-преобразованием, «дрожанием» и аддитивной случайной дискретизацией).
4. Для каждого неэквидистантного временного ряда с помощью алгоритма с использованием интервальной корреляционной функции определить корреляционную функцию.
5. Для заданной модели нерегулярной дискретизации определить коэффициенты сжатия (число модельных экспериментов равно 29).
6. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение коэффициента сжатия.

3.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритм моделирования неэквидистантного временного ряда с заданными видом корреляционной функции и модели нерегулярной дискретизации.
3. Пример реализации неэквидистантного временного ряда для объёма выборки $M=1000$.
4. Пример оценки корреляционной функции для объёма выборки $M=1000$.
5. Оценки коэффициентов сжатия, представленные в табличной форме и виде графических зависимостей от параметра нерегулярной дискретизации (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).
6. Оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения коэффициентов сжатия, представленные в графическом виде.
7. Выводы по работе.

3.4. Контрольные вопросы

1. Назовите основные свойства потоков событий.
2. Каким образом задаются потоки случайных событий?
3. Назовите основные классы неэквидистантных временных рядов.
4. Назовите типовые модели неэквидистантных временных рядов.
5. Назовите основные характеристики неэквидистантных временных рядов.
6. Что характеризует интервальная корреляционная функция?
7. Каким образом генерируются неэквидистантные временные ряды?
8. Что характеризует коэффициент сжатия?

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для генерирования временного ряда с экспоненциальной корреляционной функцией приведен ниже (пункты 4-6 отчёта).

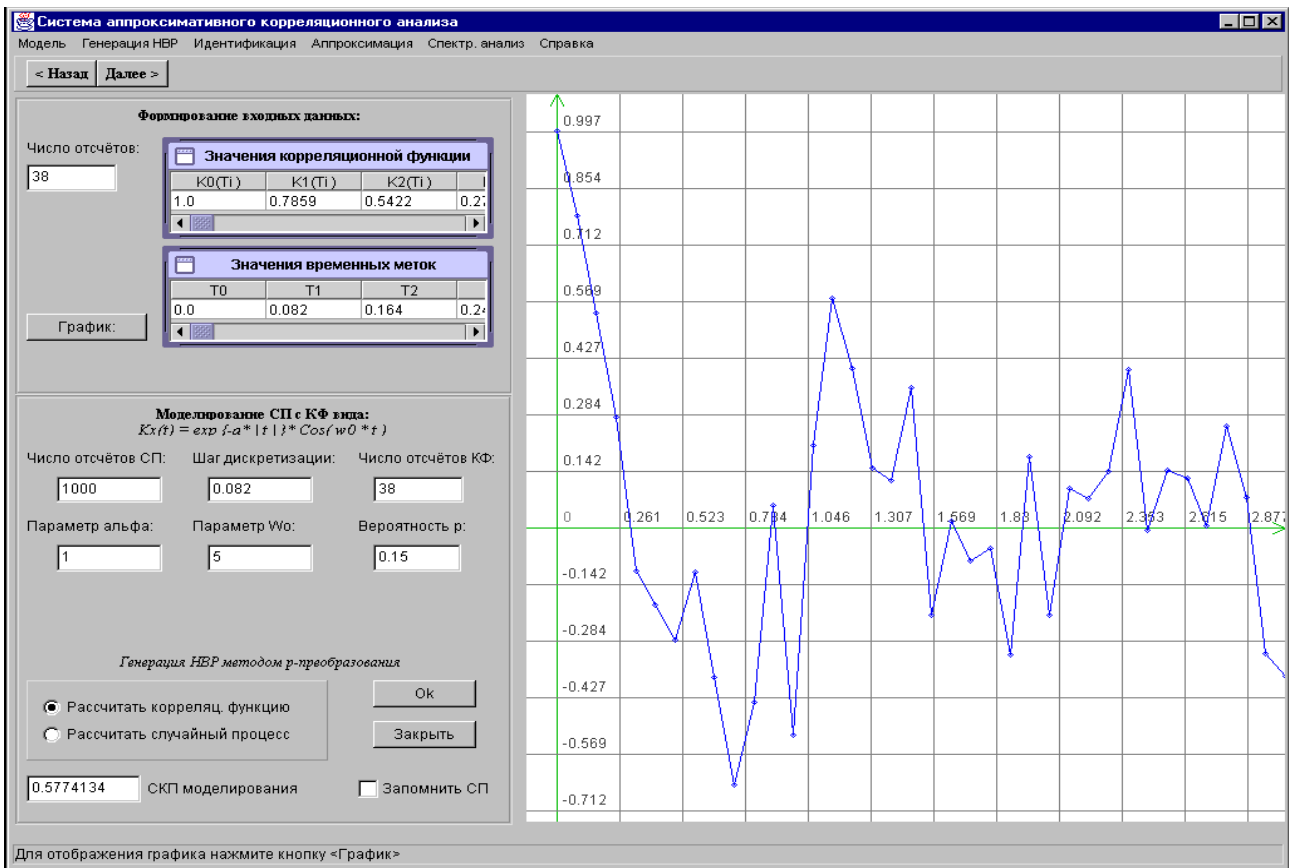
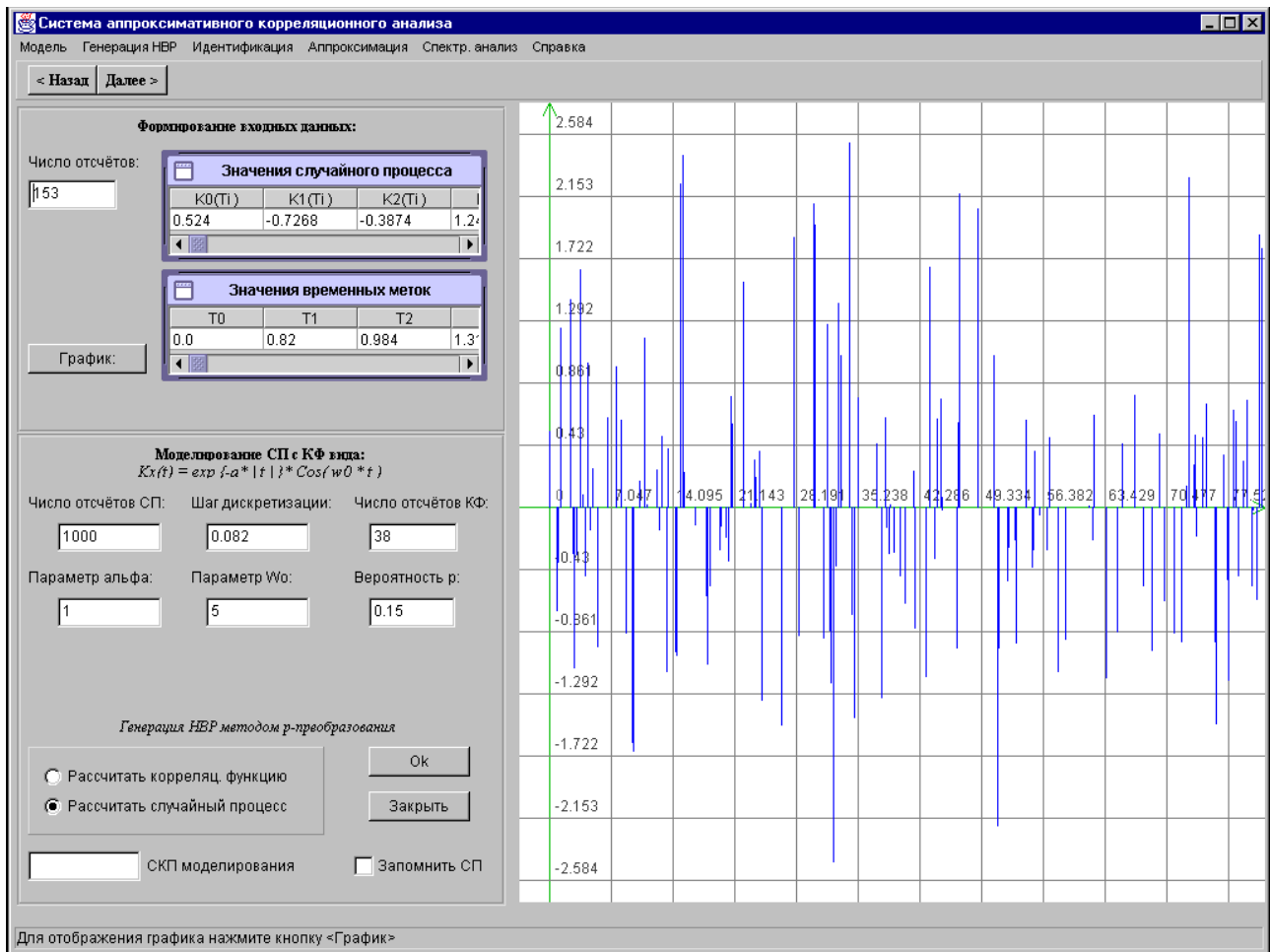


Рисунок 3.3. Результаты моделирования

Оценки коэффициента сжатия неэквидистантного временного ряда с корреляционной функцией $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, с р-преобразованием $\Delta\tau = 0,082$.

Таблица 3.1

Np	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
1	6,7568	3,2362	2,2676	1,6393	1,3158	1,1038
2	6,4103	3,1646	2,1231	1,6835	1,3387	1,1111
3	5,9172	3,4014	2,3310	1,6667	1,3193	1,1038
4	6,8493	3,4247	2,3364	1,6807	1,3055	1,1351
5	6,4103	3,4364	2,0964	1,5798	1,3405	1,0929
6	5,8480	3,2680	2,2989	1,6474	1,3441	1,1236
7	6,8966	3,3670	2,2472	1,7123	1,3280	1,1136
8	6,7568	3,2787	2,2624	1,7241	1,3736	1,0989
9	7,3529	3,4364	2,1692	1,6447	1,3141	1,1038
10	6,8493	3,5461	2,2075	1,6474	1,3755	1,1099
11	6,2112	3,1746	2,0964	1,6420	1,3210	1,1025
12	6,4103	3,2154	2,1692	1,6722	1,3569	1,1161
13	7,6923	3,3898	2,2173	1,5898	1,3106	1,1198
14	7,2993	3,5587	2,3095	1,6000	1,3351	1,1025
15	6,7114	3,5336	2,0450	1,6000	1,3123	1,1136
16	6,4935	3,3784	2,3641	1,6779	1,3405	1,1148
17	8,1301	3,4483	2,2624	1,7182	1,2804	1,1123
18	6,7568	3,4843	2,2272	1,6529	1,3106	1,1001
19	7,2464	2,9762	2,1930	1,7182	1,2953	1,1211
20	6,5789	3,2787	2,3529	1,7271	1,3387	1,0953
21	6,5359	3,1949	2,2222	1,6584	1,3175	1,1074
22	6,9444	3,4965	2,1692	1,6949	1,3387	1,1186
23	6,2112	3,4014	2,2573	1,6722	1,3123	1,1025
24	6,8027	3,1056	2,2075	1,7271	1,3004	1,1198
25	6,4935	3,1646	2,1692	1,7153	1,3387	1,1062
26	6,2500	3,3223	2,1739	1,6611	1,3141	1,1013
27	6,6667	3,3784	2,2779	1,6447	1,3175	1,1038
28	5,8480	3,4483	2,2883	1,6556	1,3495	1,1198
29	7,9365	3,2468	2,2831	1,7007	1,3193	1,0929

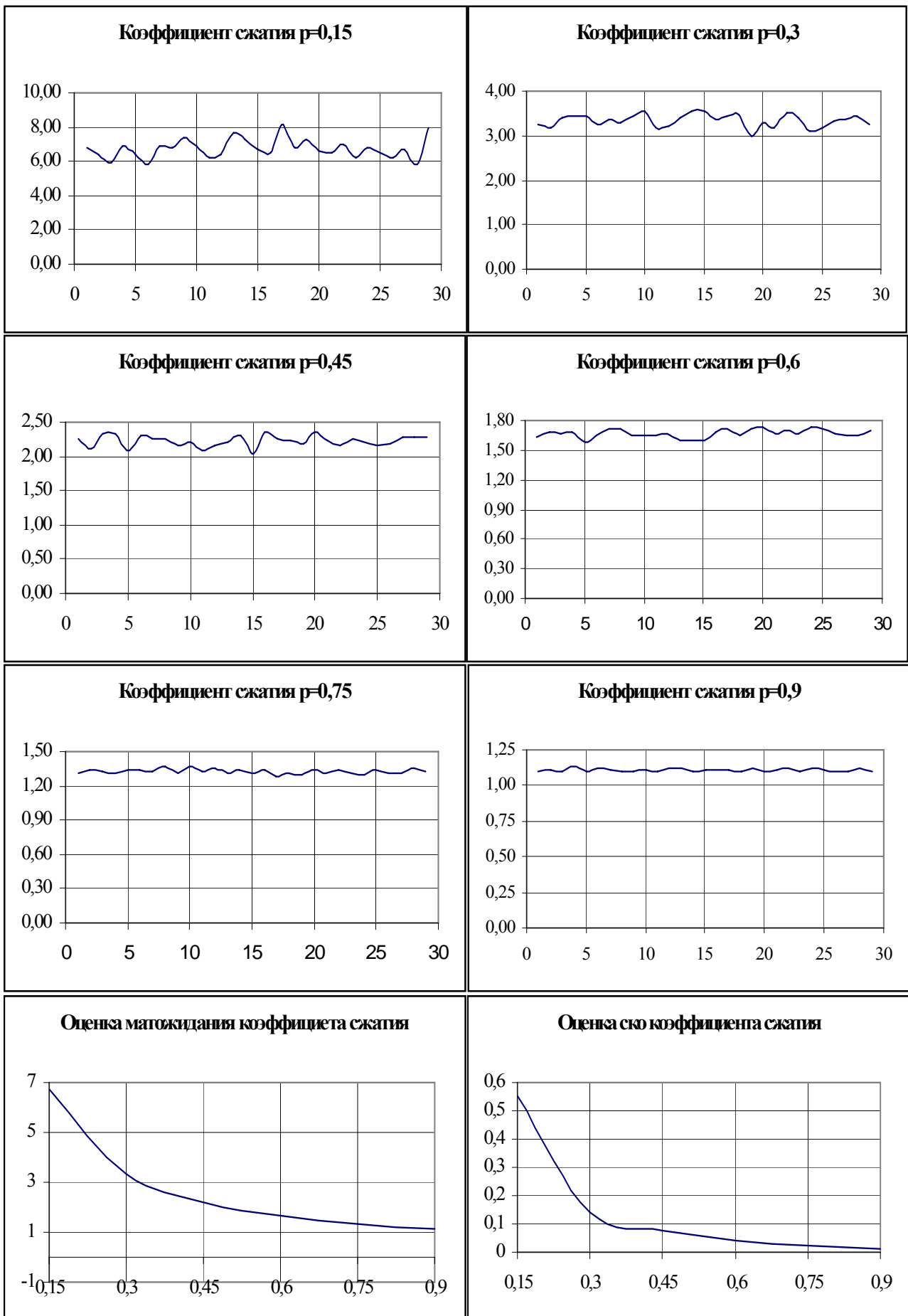


Рисунок 3.4. Результаты моделирования

4. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации законов распределения временных рядов.

4.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей законов распределения случайных величин, процессов, потоков событий.

Один из методов, применяемый для решения задачи сглаживания статистических рядов, называется методом моментов [1]. Согласно этому методу, параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ выбираются таким образом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны статистическим характеристикам. При составлении уравнений для определения неизвестных параметров, как правило, выбирают моменты низших порядков. Общими рекомендациями являются здравый смысл и простота решения полученной системы уравнений.

Другим способом решения задачи сглаживания статистических рядов является определение параметров аналитического выражения, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \sum_{j=1}^M \left[\bar{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right]^2 = \min, \quad (4.1)$$

где M - число дифференциальных коридоров;

$\bar{f}_x(\bar{x}_j) = \bar{f}_j / \Delta_j$ - значение плотности распределения вероятностей в середине j -го дифференциального коридора \bar{x}_j ;

$f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)$ - аналитическое выражение с неизвестными параметрами.

Условиями минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M \left[\bar{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M \left[\bar{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (4.2)$$

Сложность этой системы зависит от вида аналитического выражения и числа неизвестных параметров, подлежащих определению. Как правило, решение этой системы возможно лишь приближенными методами.

Так, например, при однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона [1], неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{j=1}^M [\xi_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_n)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ [\xi_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_n)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}. \quad (4.3)$$

В качестве начального приближения можно выбрать значение параметра, определенное по методу моментов.

Алгоритм завершает свою работу, когда выполняется следующее условие:

$$|\beta_{n+1} - \beta_n| \leq \varepsilon, \quad (4.4)$$

где ε - погрешность вычисления параметра, задаваемая исследователем.

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить систему уравнений (4.2) для двумерного случая:

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{j=1}^M [\xi_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0 \\ f_2 = \sum_{j=1}^M [\xi_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 0 \end{cases}. \quad (4.5)$$

Решить эту систему можно только приближенными методами, например, методом Ньютона. Воспользовавшись формулой для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными по методу Ньютона, получим:

$$\beta_1^{n+1} = \beta_1^n - \frac{1}{\Delta'} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} f_1(\beta_1^n, \beta_2^n) - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} f_2(\beta_1^n, \beta_2^n) \right), \quad (4.6)$$

$$\beta_2^{n+1} = \beta_2^n - \frac{1}{\Delta'} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} f_2(\beta_1^n, \beta_2^n) - \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} f_1(\beta_1^n, \beta_2^n) \right), \quad (4.7)$$

где

$$\Delta' = \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1}.$$

Для вычислений необходимо знать значения частных производных по неизвестным параметрам функций f_1 и f_2 . Их выражения приведены в формулах (4.8) - (4.11).

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\xi_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\xi_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\xi_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} -$$

$$-\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\mathfrak{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}. \quad (4.11)$$

При аппроксимации плотностей распределения вероятностей в качестве аргумента используется середина дифференциального коридора, что, в свою очередь, вносит дополнительные погрешности при анализе асимметричных законов распределения. От этого недостатка свободна аппроксимация функций распределения вероятностей.

Задача аппроксимации статистического ряда функциями распределения вероятностей ставится аналогично задаче аппроксимации плотностей распределения вероятностей:

$$\Delta = \sum_{j=1}^M [\mathfrak{f}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)]^2 = \min, \quad (4.12)$$

где M - число дифференциальных коридоров;

$\mathfrak{f}_x(x_j) = \sum_{s=1}^j \mathfrak{f}_s$ - значение функции распределения вероятностей в конце j -го

дифференциального коридора x_j ;

$F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)$ - аналитическое выражение с неизвестными параметрами β_1, β_2, \dots

Условиями минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\mathfrak{f}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\mathfrak{f}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0. \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (4.13)$$

При однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона, неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_n)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_n)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}, \quad (4.14)$$

и дальше все расчеты производятся аналогично случаю с плотностями вероятностей.

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить уравнение (4.13) для двумерного случая.

Составим систему из двух уравнений для нахождения неизвестных параметров аппроксимации. Эту систему можно получить, продифференцировав выражение (4.13) по неизвестным параметрам.

$$\begin{cases} F_1 = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0 \\ F_2 = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 0 \end{cases}. \quad (4.15)$$

Для решения системы (4.15) воспользуемся приближенным методом Ньютона. Способ нахождения неизвестных параметров аналогичен случаю с плотностями распределения вероятностей по формулам (4.6) и (4.7).

Для вычислений необходимо определить частные производные по неизвестным параметрам β_1, β_2 функций F_1 и F_2 :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \beta_2} &= \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \\ &\quad - \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \beta_1} &= \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \\ &\quad - \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Значения неизвестных параметров вычисляются итерационно до достижения заданной точности.

При решении разнообразных задач полезной характеристикой случайной величины является её характеристическая функция - математическое ожидание комплексной случайной величины e^{iux} , рассматриваемое как функция параметра u [21]:

$$\varphi_x(u) = M[e^{iux}]. \quad (4.20)$$

Так как $|e^{iux}| = 1$ при любых действительных u и x , то вследствие основного свойства плотности вероятности характеристическая функция при любом действительном значении u не превосходит по модулю единицы и равна единице при $u = 0$.

Характеристическая функция и плотность распределения вероятности случайной величины связаны парой взаимно обратных преобразований Фурье [2]:

$$\varphi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f_x(x) dx; \quad (4.21)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \varphi_x(u) du. \quad (4.22)$$

Таким образом, характеристическая функция случайной величины также является её полной вероятностной характеристикой.

Примеры характеристических функций для типовых законов распределения приведены в приложении П.2.

Зная характеристическую функцию, можно просто определить начальные и центральные моменты случайной величины [2]:

$$\alpha_k = \frac{1}{i^k} \varphi_x^{(k)}(0), \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (4.23)$$

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} [\exp(-i u m_x) \varphi_x(u)]_{u=0}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (4.24)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов (см. приложение 15).

4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд, распределенный по заданному закону распределения $N=500, M=10$.
2. Построить гистограмму.
3. Определить параметры законов распределения методом моментов, аппроксимации плотностей распределения вероятностей, функций распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации.
4. Найти характеристическую функцию случайного временного ряда (для одной реализации).
5. Пункты 1-4 повторить для $N=1000, 2000, 5000$ и $M=10, M^{(0)}$ – оптимальное число дифференциальных коридоров.
6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров законов распределения от объёма выборки, числа дифференциальных коридоров.
7. Качество аппроксимации определить, воспользовавшись критерием Пирсона и Колмогорова.

4.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации законов распределения.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации законов распределения вероятностей.
4. Значения параметров законов распределения, определенные по методу моментов, аппроксимации плотностей распределения вероятностей и функций распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации, относительные погрешности оценки параметров закона распределения, для $N=500, 1000, 2000, 5000$ и $M=10, M^{(0)}$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).
5. Характеристическая функция случайного временного ряда.
6. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для экспоненциального закона распределения приведен ниже (пункт 3 - 4 отчёта).

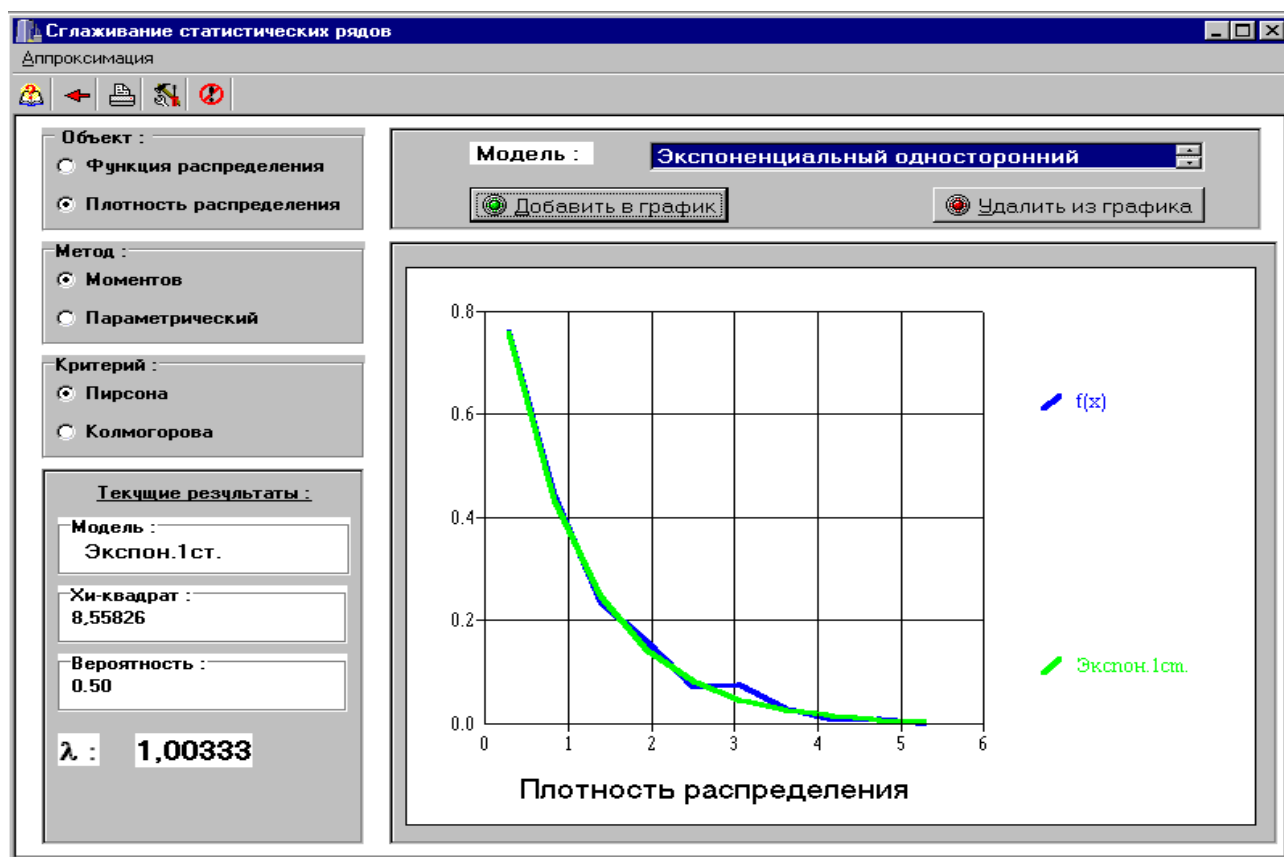


Рисунок 4.1. Примеры экранных форм аппроксимации законов распределения

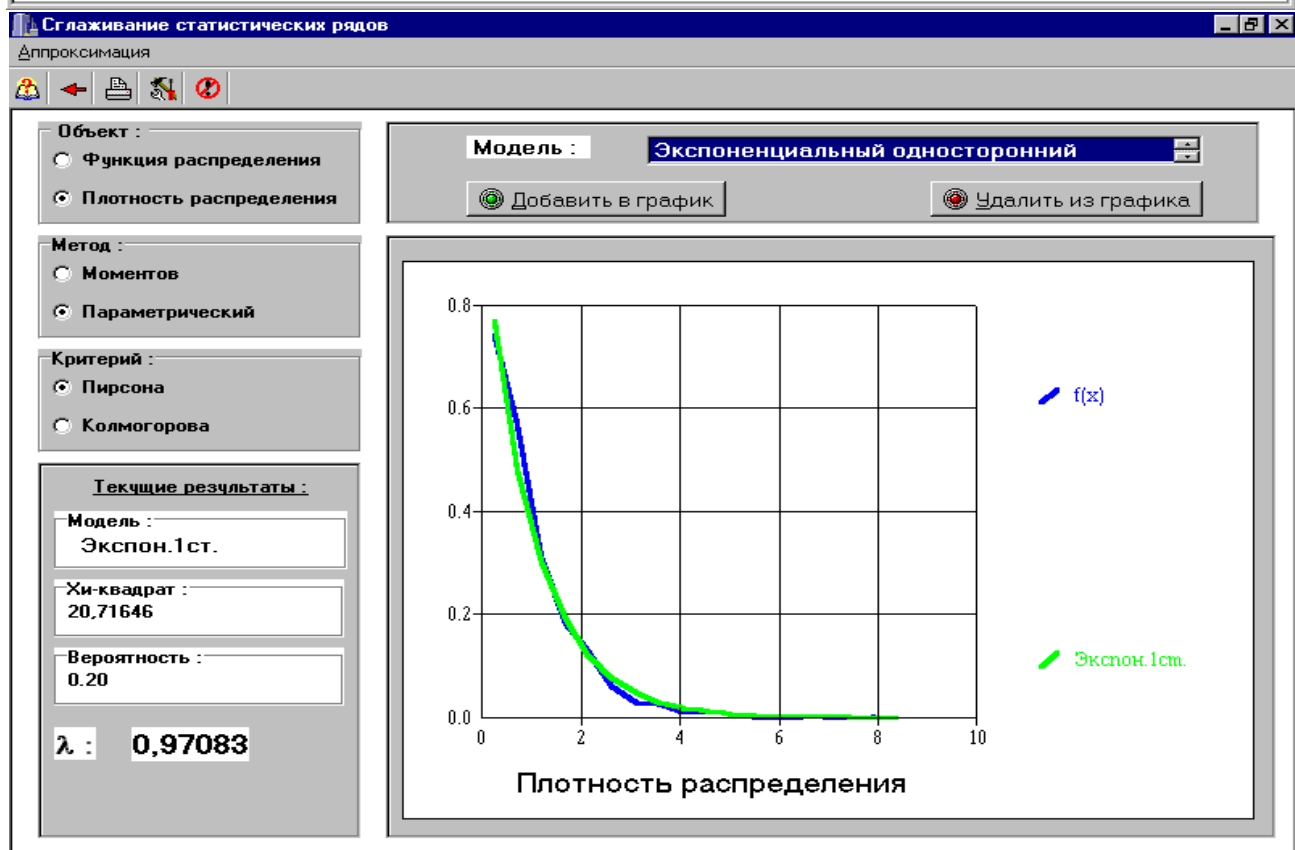
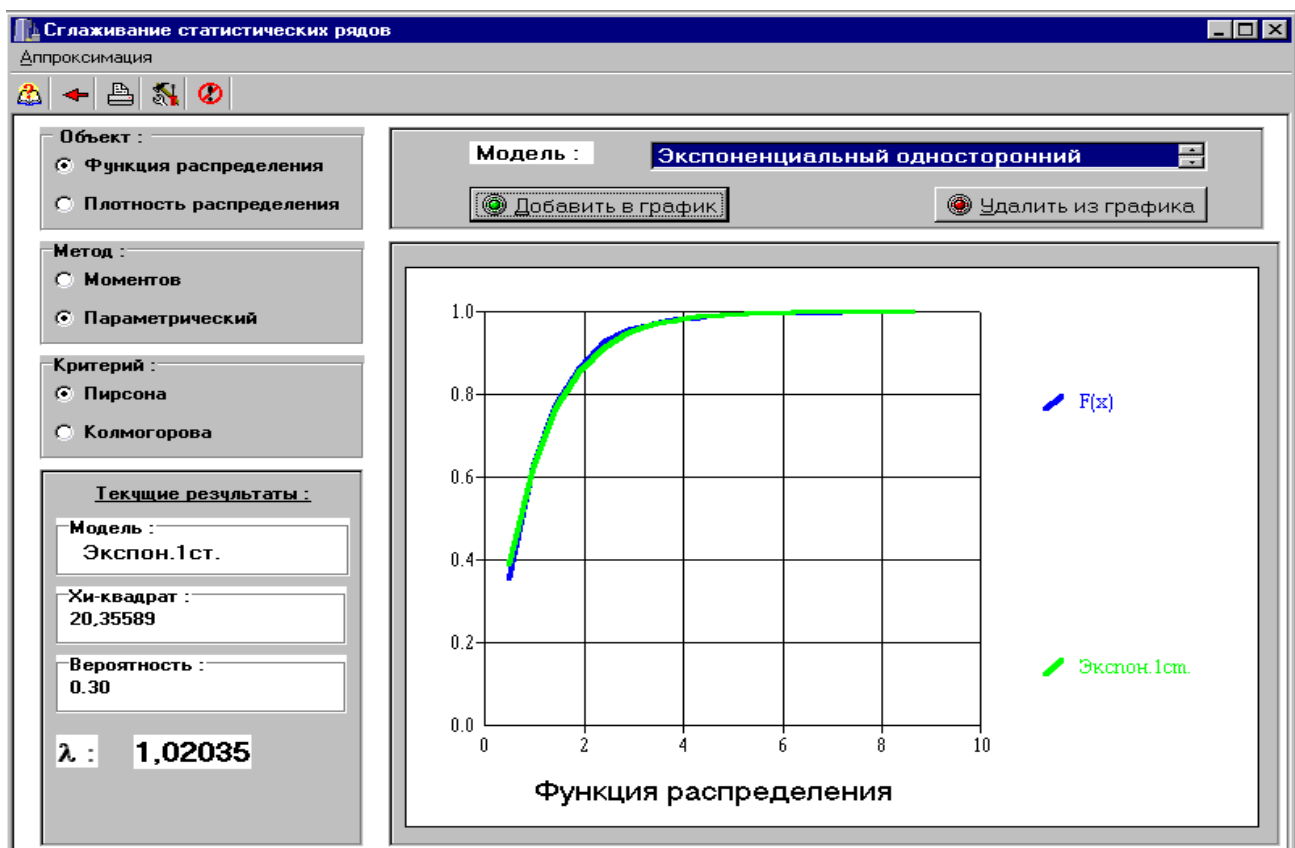


Рисунок 4.2. Примеры экранных форм аппроксимации законов распределения

Значения параметра закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=500$, $M=10$.

Таблица 4.1

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	0,9603	5,5439	1,00579	8,51	0,9674	5,798
2	0,98	6,1867	0,9307	6,4984	0,9582	6,0585
3	0,9446	16,2528	1,0176	22,636	0,9602	17,0424
4	0,9804	1,7875	0,9737	1,8577	0,984	1,7663
5	1,0165	5,2636	1,0799	7,6052	1,0283	5,4085
6	0,9473	13,545	0,9101	12,5885	0,9189	12,6992
7	0,9549	5,7752	0,9339	5,6472	0,9522	5,7334
8	1,0333	10,256	1,0605	11,4268	1,0195	9,9176
9	0,9788	6,7865	1,0062	7,5619	0,9664	6,6783
10	0,9699	8,646	0,9677	8,5363	0,9574	8,1046
11	1,0022	13,856	1,1132	24,6434	1,0091	14,1086
12	1,0516	5,3593	1,0153	4,5777	1,0273	4,7372
13	1,0274	6,314	1,0169	6,1396	1,0183	6,1564
14	1,0496	3,8448	1,0182	3,8185	1,0314	3,735
15	0,9409	7,1225	0,9537	7,3787	0,9345	7,0582
16	1,0549	11,7544	1,1391	18,9582	1,0871	13,4777
17	0,9992	1,7917	1,0515	2,6638	1,0717	1,7661
18	0,9645	7,985	0,9191	7,3457	0,9452	7,4891
19	1,0815	11,7833	1,1122	13,5319	1,0499	10,7825
20	1,0486	9,4825	1,0185	8,8276	1,0401	9,2218
21	0,9689	9,773	1,0246	13,3076	0,9892	10,614
22	0,9844	5,1709	0,9752	5,1367	0,9816	5,1523
23	0,9728	7,0216	0,9655	6,9621	0,965	6,9599
24	1,068	12,3235	1,0462	12,1296	1,0634	12,2956
25	0,9822	6,0582	0,9514	6,1036	0,9728	5,9853
26	0,9432	4,9787	0,8908	5,9352	0,9258	5,0102
27	0,9859	5,7124	1,0979	11,5524	1,0068	5,8126
28	0,9841	12,5944	0,9567	11,6159	0,9798	12,3894
29	0,9461	9,4224	0,9359	9,112	0,9265	8,9192
		8		9		12

Выделенные значения параметров соответствуют минимальному значению χ^2 в строке, т. е. лучшему методу аппроксимации из рассмотренных. В последней строке указано количество случаев, когда данный метод аппроксимации даёт лучший результат.

Значения параметра закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=500, M=18$.

Таблица 4.2

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,0127	30,0388	0,9946	28,9604	0,9965	29,0616
2	1,008	24,8421	1,0957	37,7176	1,0217	26,0049
3	0,9825	16,2121	0,9689	15,8397	0,9782	16,0742
4	1,0008	18,543	1,1115	28,725	1,0131	18,9419
5	0,95667	16,8424	0,9215	16,8512	0,9659	17,0691
6	1,0214	17,9857	1,0695	21,1378	1,0015	17,3084
7	0,9768	18,3176	1,0779	30,7334	0,9876	18,9646
8	1,0187	11,0238	1,023	11,174	1,0287	11,3927
9	1,0286	7,9664	1,0243	7,8573	1,0273	7,9298
10	1,0343	19,6174	1,1143	29,8176	1,0478	20,6982
11	1,0048	16,1095	0,9738	15,4993	0,9887	15,6505
12	0,9954	30,0012	0,9396	28,1424	0,9644	28,6237
13	0,9777	15,3788	1,0287	18,6061	0,994	16,0764
14	0,971	25,3711	0,923	25,1372	0,9535	25,0218
15	0,9796	7,0792	0,9939	7,2193	0,9823	7,0892
16	0,9894	14,4784	1,0094	15,642	0,9979	14,9114
17	1,0449	16,6996	1,0234	16,0457	1,0443	16,6733
18	1,042	14,364	0,96	16,1122	1,028	14,2795
19	0,9905	16,3258	1,1159	36,4491	1,0199	18,6467
20	0,9762	19,8329	0,9686	19,3503	0,9666	19,2287
21	1,0006	12,3535	1,0302	13,6947	1,0037	12,447
22	0,942	24,4423	0,9593	25,5634	0,9294	23,8492
23	1,0995	19,2909	1,0972	19,2077	1,1072	19,5999
24	1,0498	10,4912	1,0771	11,503	1,0515	10,533
25	0,9901	16,0817	1,0174	17,5145	0,9881	16,0096
26	1,0066	15,7954	1,0605	19,7859	1,0267	16,8713
27	1,0285	16,8928	1,0533	17,9404	1,018	16,6184
28	0,9446	10,2616	0,9222	10,2748	0,9457	10,2748
29	0,9622	24,9265	1,0032	30,1757	0,9708	25,8216
		15		7		7

Значения параметра закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=1000$, $M=10$.

Таблица 4.3

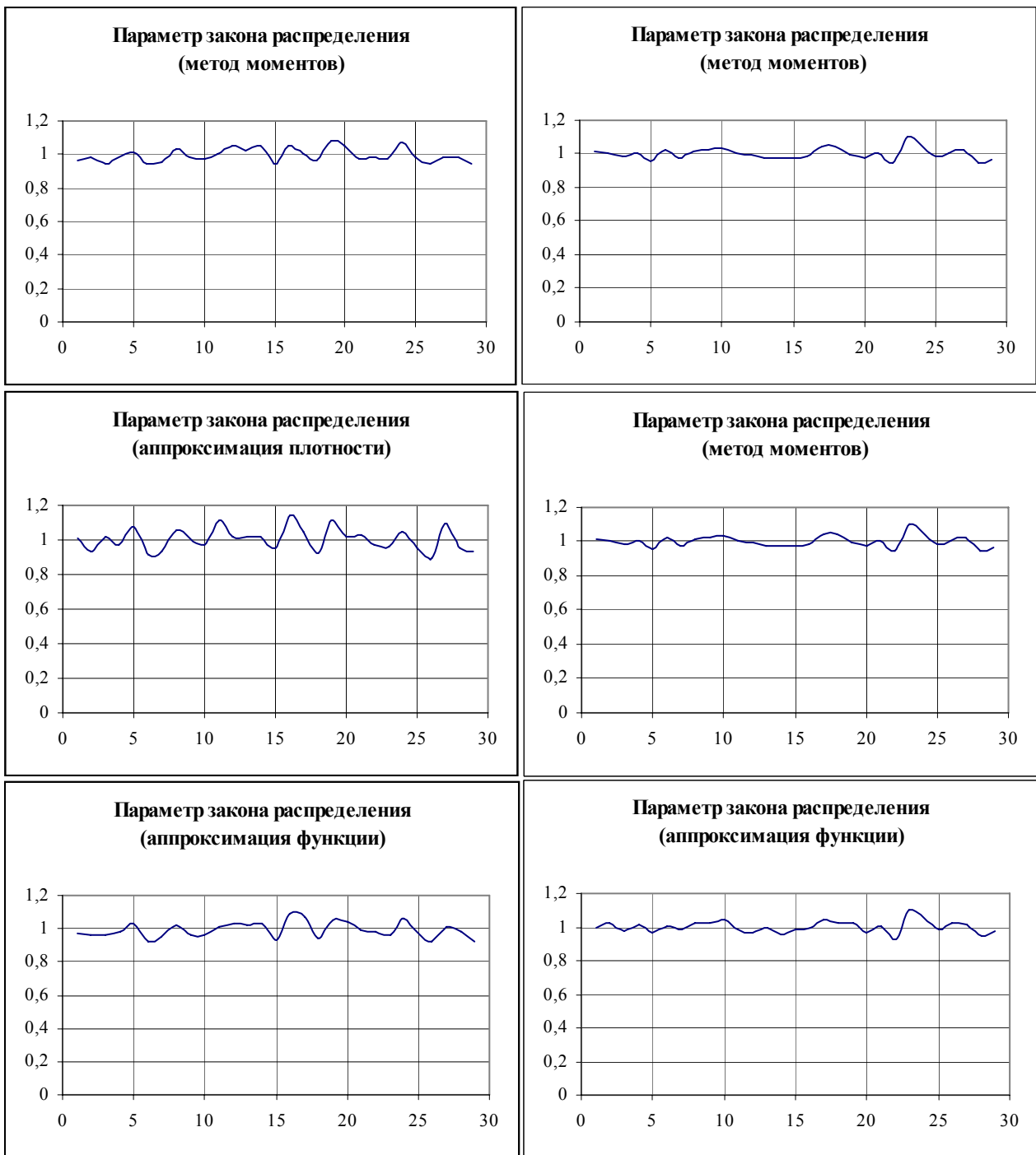
№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,026	6,0544	1,0845	10,129	1,0365	6,2926
2	0,9942	3,9715	0,9692	3,776	0,9844	3,7655
3	1,0367	5,3788	1,0187	5,4418	1,0311	5,3409
4	0,9783	5,9228	0,9466	5,1975	0,9571	5,2322
5	1,0328	14,8583	1,1192	25,5762	1,0367	15,0252
6	1,0324	8,3546	1,0342	8,3928	1,0259	8,2676
7	0,9865	6,7539	1,0404	11,4175	0,9866	6,7591
8	0,9723	12,4803	0,9668	12,3669	0,9704	12,4348
9	1,0168	3,6844	1,0006	3,7336	1,0008	3,6526
10	0,9555	6,8015	1,0026	9,3827	0,9556	6,8021
11	0,928	10,0032	0,9349	10,3591	0,9138	9,5959
12	1,0033	10,0002	1,0329	11,5942	1,0021	9,9728
13	0,9937	3,7253	1,0375	6,7555	0,9941	3,7368
14	1,0044	9,4678	1,137	30,0153	1,0364	10,7445
15	0,9926	12,7283	1,0691	26,9167	1,011	14,6097
16	0,9812	7,1325	0,9952	7,7588	0,9795	7,081
17	1,0454	7,0005	1,0698	7,5939	1,0536	7,0834
18	0,9895	2,1392	1,0056	2,7801	0,9805	2,0029
19	1,0513	5,9046	1,1117	10,1679	1,0573	6,0339
20	0,976	4,7991	0,9948	5,5362	0,9736	4,7546
21	0,9892	6,0324	0,9816	5,9528	0,9845	5,9701
22	1,0587	9,3571	1,1132	14,0838	1,0673	9,7502
23	0,9696	10,4077	0,9781	10,8449	0,9634	10,1879
24	0,9606	10,1536	1,0355	21,1182	0,9556	9,9012
25	0,9456	23,499	0,9836	30,2088	0,9521	24,348
26	1,0007	11,7813	0,9924	11,4433	0,9776	11,1553
27	1,0145	11,3965	1,0666	15,7728	1,0225	11,7088
28	0,9434	6,9877	0,9841	8,824	0,9506	7,0624
29	0,9986	8,5507	1,0588	14,8627	0,9982	8,5313
		13		3		13

Значения параметра закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=1000$, $M=18$.

Таблица 4.4

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,0271	10,2578	1,0525	11,4528	1,0295	10,3173
2	0,9992	13,6004	1,0149	14,408	1,004	13,7934
3	1,0452	30,2983	0,9855	28,8668	1,0355	29,554
4	0,9948	14,2192	1,0151	15,2224	0,9978	14,3165
5	1,0082	10,4226	1,0096	10,4646	1,0065	10,3773
6	0,9304	21,0138	0,8746	20,721	0,9231	20,5856
7	0,9757	17,8272	1,0027	20,2347	0,9723	17,6399
8	0,994	14,6985	1,0198	16,283	0,9871	14,5126
9	0,9998	23,7479	0,9932	23,4965	1,0017	23,8402
10	0,9775	10,2187	1,0284	14,7148	0,9937	10,9811
11	0,9844	36,8398	1,0324	41,9356	0,9836	36,7996
12	1,0239	15,1359	1,0063	14,7952	1,0184	14,9682
13	1,0139	5,5332	0,9886	6,3762	1,0101	5,5898
14	0,9793	14,6157	0,9525	13,8815	0,9711	14,2418
15	1,0213	13,5708	1,0507	15,5194	1,0211	13,5624
16	0,9907	13,4329	1,0056	14,2469	0,9878	13,3272
17	1,0061	24,0603	1,0331	26,7577	1,0286	26,1765
18	0,9965	26,835	1,0379	31,5281	1,0048	27,454
19	0,9363	11,6612	0,921	11,7442	0,9322	11,6481
20	0,9869	18,0129	0,9773	17,6869	0,9778	17,6994
21	0,9658	15,2997	0,9232	15,0138	0,9541	14,8432
22	1,0158	10,6789	1,018	10,7887	1,014	10,6015
23	1,0234	12,6209	1,0229	12,5996	1,0242	12,6504
24	0,9881	12,1475	1,0259	15,0593	0,9898	12,2102
25	0,9814	22,5003	1,0172	25,4466	0,9851	22,6775
26	0,9787	14,3113	1,0485	21,3315	0,9823	14,4102
27	0,969	19,929	0,9594	19,7503	0,9633	19,8002
28	1,0005	19,4525	1,0674	27,9585	1,023	21,1067
29	1,0198	20,3337	0,9708	20,7165	1,0204	20,3559
		13		7		9

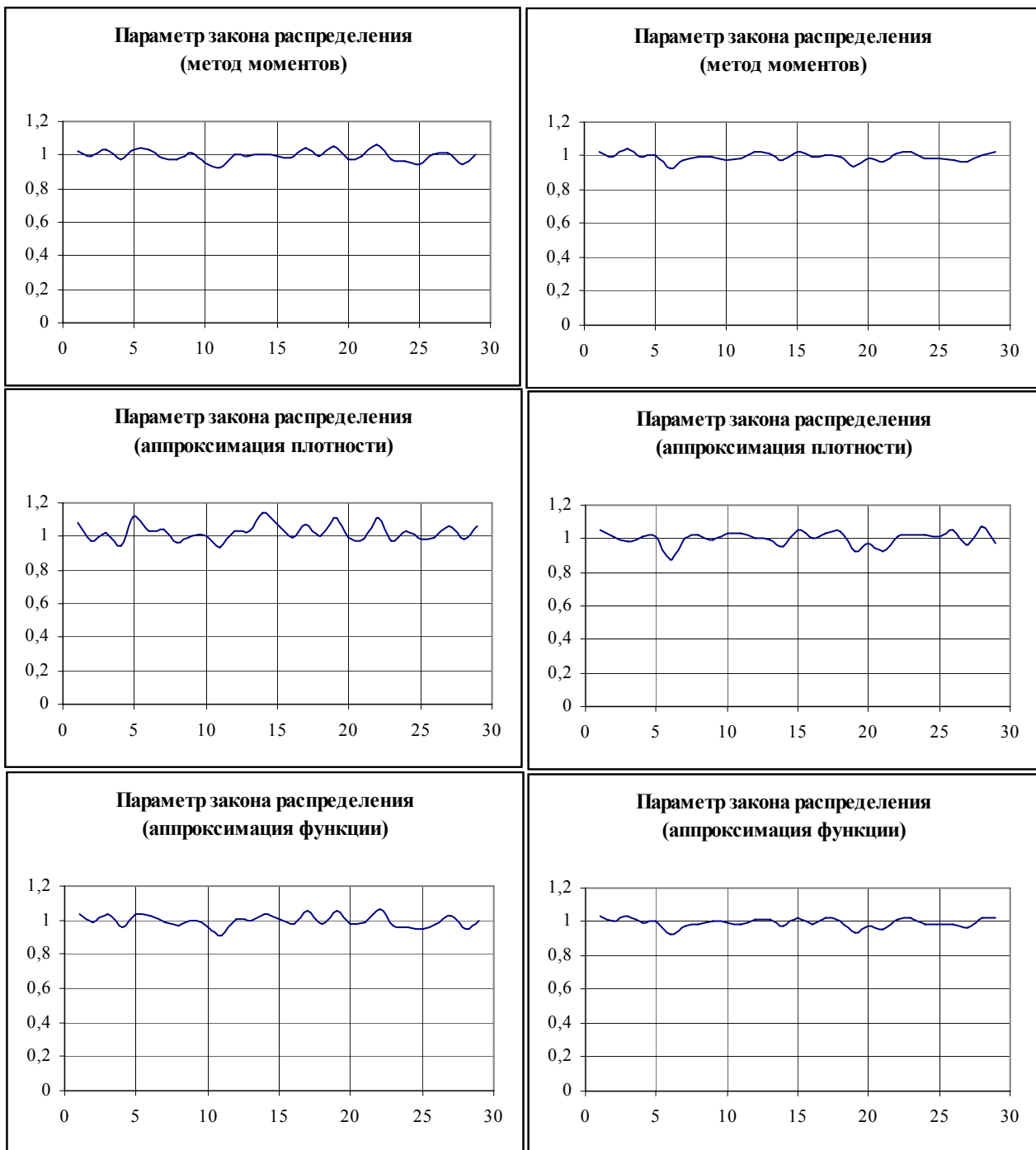
Ниже приведены результаты оценки параметра закона распределения различными аппроксимативными методами.



N=500, M=10

N=500, M=18

Рисунок 4.3. Результаты моделирования



N=1000, M=10

N=1000, M=18

Рисунок 4.4. Результаты моделирования

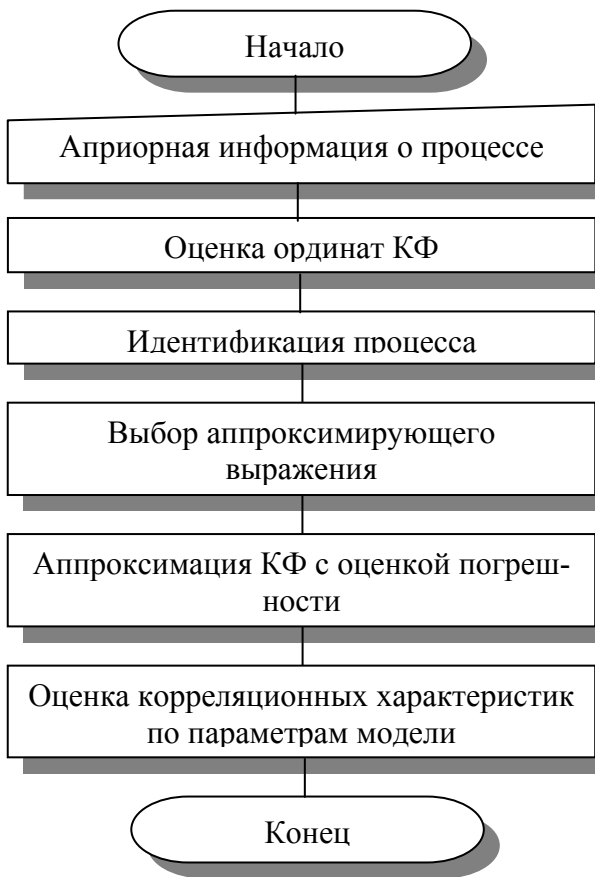
4.4. Контрольные вопросы

1. Какие численные методы применяются при аппроксимации законов распределения?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение?
3. Какой из методов аппроксимации обладает лучшей сходимостью?
4. Какой из методов аппроксимации более трудоёмкий?

5. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов.

5.1. Теоретические основы лабораторной работы



В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов.

Блок-схема алгоритма аппроксимации представлена на рис. 5.1.

С учетом того, что исходными данными, подлежащими обработке, является массив значений ординат нормированной корреляционной функции - $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0,\dots,J_{\max}}$, критерий приближения целесообразнее записать в виде:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{J_{\max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)]^2 = \min. \quad (5.1)$$

В случае, если модель содержит один параметр, задача сводится к решению одного уравнения. Найдем это уравнение. Для этого необходимо, подставив в (5.1) $\rho_a(\tau_i, \alpha)$, выполнить дифференцирование и результат приравнять нулю:

Рисунок 5.1. Алгоритм аппроксимации

$$\frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{J_{\max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)] \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.2)$$

Для решения полученного уравнения воспользуемся методом Ньютона [1]. Тогда

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left\{ R_i \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial^2 \alpha} - \left[\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 \right\} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}, \quad (5.3)$$

где $R_i = \rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)$.

Начальное приближение $\alpha_0 = \frac{\epsilon_{k \max}}{3}$ (см. таблицу 2.2). Процесс вычисления

заканчивается, когда $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \epsilon$, где ϵ - любое малое наперед заданное число.

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями.

Аналитическое выражение $\rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$ широко применяется для аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых широкополосных процессов. Параметр модели определяется в результате решения следующего уравнения [1]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J \max} R_i \tau_i e^{-\alpha_n \tau_i}}{\sum_{i=1}^{J \max} [\tau_i^2 e^{-2\alpha_n \tau_i} - R_i \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i}]}, \quad (5.4)$$

где $R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}$.

Следует подчеркнуть, что эта простая модель оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки максимального интервала корреляции. Подобные задачи возникают при создании автоматизированных систем сбора и обработки информации, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени. Часто эта модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик аппаратно-программных средств, так как существует большой класс динамических систем, для которых случайные процессы с экспоненциальной корреляционной функцией оказываются наилучшими с точки зрения помехозащитности.

Аналитическое выражение $\rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ применяется для аппроксимации корреляционных функций однократно дифференцируемых широкополосных случайных процессов. Параметр модели определяется в результате решения уравнения [1]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J \max} R_i \alpha_n \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i}}{\sum_{i=1}^{J \max} \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i} [R_i (\alpha_n \tau_i - 1) - \alpha_n^2 \tau_i^2]}, \quad (5.5)$$

где $R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i)$.

Аналитическое выражение $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$ применяется для аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых широкополосных процессов, у которых $S_x(0) = 0$. Параметр определяется в результате решения уравнения [1]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J_{\max}} R_i \tau_i e^{-\alpha_n \tau_i} (\alpha_n \tau_i - 1)}{\sum_{i=1}^{J_{\max}} \left[R_i \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i} (2 - \alpha_n \tau_i) - \tau_i^2 e^{-2\alpha_n \tau_i} (\alpha_n \tau_i - 1) \right]}, \quad (5.6)$$

где $R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i)$.

Аналитическое выражение $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ применяется при аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных процессов. Параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона [1]:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}, \end{cases} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i A_2 \tau_i; S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i A_3 \tau_i; S_3 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 A_2 (A_2 - R_i); S_4 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 A_3 (A_2 - R_i); \\ S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 (A_3^2 + R_i A_2). \end{aligned}$$

Начальные значения α и ω_0 выбираются следующим образом (см. таблицу 2.2):

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{3}{\tau_{k \max}}; \\ \omega_0 = \frac{\pi}{2 \tau'}, \end{cases} \quad (5.8)$$

где τ' - интервал времени, соответствующий первому пересечению $\hat{\rho}_x(\tau)$ оси абсцисс.

Процесс вычисления заканчивается при совместном выполнении условий:

$$\begin{cases} |\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \varepsilon; \\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (5.9)$$

При аппроксимации корреляционных функций дифференцируемых узкополосных процессов применяется аналитическое выражение

$$\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет вид (5.7).

Для рассматриваемого случая [1]

$$A_1 = e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 - \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n};$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n); \\
S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_3 (\alpha_n \tau_i + 2) / \omega_n + A_2 \tau_i) \right); \quad (5.10) \\
S_4 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n) (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n) + \right. \\
&\quad \left. + R_i (A_2 \tau_i (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n - A_3 ((\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n^2 + \tau_i^2)) \right); \\
S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n)^2 + R_i (A_2 \tau_i^2 + A_3 (\tau_i^2 + 1 / \omega_n^2) \alpha_n / \omega_n) \right).
\end{aligned}$$

При аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных случайных процессов, у которых $S_x(0) = 0$, применяют выражение

$$\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет тот же вид – (5.7). В этом случае [1]

$$\begin{aligned}
A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 + \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n}; \\
S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3); \\
S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_2 \tau_i + A_3 (2 - \alpha_n \tau_i / \omega_n)) \right); \quad (5.11) \\
S_4 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n) (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3) + \right. \\
&\quad \left. + R_i (A_2 \tau_i (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n - A_3 (\tau_i^2 + (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n^2)) \right); \\
S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3)^2 + R_i (A_3 (1 / \omega_n^2 - \tau_i^2) \alpha_n / \omega_n + \right. \\
&\quad \left. + A_2 \tau_i (\tau_i - 2 \alpha_n / \omega_n^2) \right).
\end{aligned}$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений аналогичны предыдущему случаю.

Следует отметить, что система уравнений с использованием метода Ньютона с аналитическим взятием первой и второй производных имеет достаточно сложный вид, обладает плохой сходимостью, решение сильно зависит от начального приближения. Одним из способов устранения ряда недостатков является применение конечно-разностного метода Ньютона [1].

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [1].

$$1. \rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (5.7), где

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i};$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} - e^{-\alpha_n \tau_i}}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} - 2e^{-\alpha_n \tau_i} + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i}}{h^2},$$

где h – любое достаточно малое приращение по α .

$$2. \rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (5.7), в котором:

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} (1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i)}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} (1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i) + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i} (1 + (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2};$$

$$3. \rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

Параметр определяется в результате решения уравнения (5.7), где:

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} (1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i)}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} (1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i) + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i} (1 - (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2}.$$

Для двухпараметрических моделей корреляционных функций параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left(R_i \frac{\partial^2 \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=\alpha_n}}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \Big|_{\omega_0=\omega_n}}{\sum_{i=0}^N \left(R_i \frac{\partial^2 \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} - \left(\frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \right)^2 \right) \Big|_{\omega_0=\omega_n}}. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми двухпараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [1].

4. Для модели $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i;$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(\alpha n + h) \tau_i} - e^{-\alpha n \tau_i})}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(\alpha n + h) \tau_i} - 2e^{-\alpha n \tau_i} + e^{-(\alpha n - h) \tau_i})}{h^2};$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-\alpha n \tau_i} (\cos((\omega_n + k) \tau_i) - \cos \omega_n \tau_i)}{k};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-\alpha n \tau_i} (\cos((\omega_n + k) \tau_i) - 2 \cos \omega_n \tau_i + \cos((\omega_n - k) \tau_i))}{k^2},$$

где h – любое достаточно малое приращение по α ,

k – любое достаточно малое приращение по ω_0 .

5. Для модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left(e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$S_1 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_2 = e^{-(\alpha n + h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_3 = e^{-(\alpha n - h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{S_2 - S_1}{h}; \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2};$$

$$S_4 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n + k) \tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k) \tau_i) \right);$$

$$S_5 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n - k) \tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k) \tau_i) \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \approx \frac{S_4 - S_1}{k}; \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.$$

6. Для модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left(e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right); \\
S_2 &= e^{-(\alpha n + h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right); \\
S_3 &= e^{-(\alpha n - h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right); \\
\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} &\approx \frac{S_2 - S_1}{h}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2}, \\
S_4 &= e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n + k) \tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k) \tau_i) \right); \\
S_5 &= e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n - k) \tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k) \tau_i) \right); \\
\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} &\approx \frac{S_4 - S_1}{k}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.
\end{aligned}$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений определяются по формулам (5.8) и (5.9).

При аппроксимации КФ функциями заданного вида можно также использовать метод деформированного многогранника, который является одним из прямых методов многомерного поиска и выделяется высокой эффективностью и помехозащищенностью [1].

Метод деформируемого многогранника Нелдера и Мида легко адаптируется к особенностям оптимизируемой функции, «не замечает» отдельные шероховатости функции (вызванные ошибками вычисления), а скорость сходимости алгоритма не слишком сильно зависит от регулярности целевой функции. Очень часто этот метод оптимизации конкурирует с такими мощными методами оптимизации, как метод Ньютона.

Метод деформируемого многогранника является модификацией симплексного метода. Симплексом называют регулярный многогранник в n -мерном евклидовом пространстве. Для случая 2-х переменных симплекс представляет собой равносторонний треугольник; 3-х переменных - тетраэдр и т.д. Для n -мерного пространства симплекс всегда имеет $n+1$ вершину.

Координаты вершин регулярного симплекса можно определить с помощью матрицы размером $n \times (n+1)$:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_2 \\ 0 & r_2 & r_1 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r_2 & r_2 & \dots & r_1 \end{vmatrix}, \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \left\lfloor \frac{s}{n\sqrt{2}} \right\rfloor (\sqrt{n+1} + n - 1), \\ r_2 &= \left\lfloor \frac{s}{n\sqrt{2}} \right\rfloor (\sqrt{n+1} - 1), \end{aligned} \quad (5.14)$$

s - параметр, отождествляемый с расстоянием между двумя вершинами.

Элемент r_{ij} матрицы R равен i -ой координате j -ой вершины симплекса.

Поиск минимума функции симплексным методом ведётся следующим образом:

1. В каждой вершине симплекса вычисляется значение функции $y_i = f(x_i)$.
2. Определяется вершина с наибольшим (наихудшим) значением $f(x)$.
3. Через эту вершину и центральную точку симплекса проводится прямая, на которой на некотором удалении от центра C устанавливается новая вершина (см. рис. 5.2).

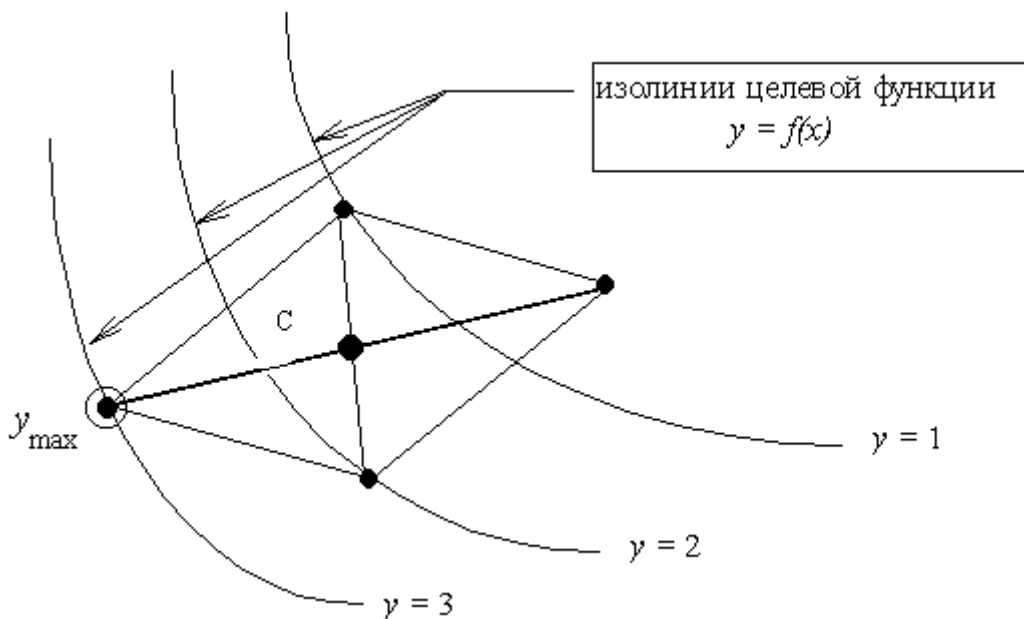


Рисунок 5.2. Геометрическая интерпретация симплексного поиска

4. Вершина с наибольшим значением $F(x)$ удаляется. Симплекс по существу «переворачивается» через грань, противоположную наихудшей вершине.

5. Далее процесс повторяется, начиная с п. 1.

Важной особенностью симплексного метода поиска является то, что для реализации каждого последующего шага итерации необходимо вычислить функцию $f(x)$ лишь в одной новой точке симплекса. Сама же оптимизация этим алгоритмом ассоциируется с процессом «кантования» симплекса вниз по поверхности функции $f(x)$ в направлении её минимума.

Регулярный метод симплексного поиска склонен к заикливанию, поэтому, Нелдер и Мид, нарушив регулярность, устранили указанный недостаток.

Обозначим X_k^A - вершину многогранника (первоначального симплекса), которая даёт максимальное значение $f(x)$ на k -ом шаге, а X_k^B - минимальную оценку функции $f(x)$. Определим вектор координат X_k^C центра многогранника по следующей формуле:

$$x_i^C = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n+1} x_i^j \right) - x_i^A \right], \quad (5.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

где i - номер координаты, j - номер вершины симплекса, k - номер шага итерации.

В методе деформируемого многогранника над многогранником выполняются операции **отражения, растяжения, сжатия и редукции**.

1. **Отражение** есть проецирование X_k^A через центр X_k^C в соответствии с соотношением:

$$X_k^0 = X_k^C + a(X_k^C - X_k^A), \quad (5.16)$$

где $a > 0$ - коэффициент отражения, X_k^0 - вектор координат новой (отражённой вершины).

2. **Растяжение** применяется в том случае, когда отражение оказалось удачным, то есть значение функции в новой точке меньше, чем в наилучшей из вершин многогранника:

$$f(X_k^0) \leq f(X_k^B),$$

при этом вектор $X_k^0 - X_k^C$ растягивается, и получается новая точка

$$X_k^P = X_k^C + \gamma(X_k^0 - X_k^C), \quad (5.17)$$

где $\gamma > 1$ - коэффициент растяжения.

3. **Сжатие** выполняется, когда в результате отражения значение функции в точке X_k^0 оказалось больше, чем во всех вершинах многогранника, кроме вершины X_k^A , то есть:

$$f(X_k^0) < f(X_k^A);$$

$$f(X_k^0) > f(X_k^j), j \neq A,$$

тогда вектор $X_k^A - X_k^C$ сжимается так, что

$$X_k^{Cж} = X_k^C + \beta(X_k^A - X_k^C), \quad (5.18)$$

где $0 < \beta < 1$ - коэффициент сжатия.

4. **Редукция**, то есть сжатие симплекса в два раза по отношению к вершине с наименьшим значением $f(x): f(x_k^B)$.

Редукция применяется, если $f(X_k^0) > f(X_k^A)$ и выполняется по формуле:

$$X_k^j = X_k^B + 0,5(X_k^j - X_k^B), \text{ при } j=1, 2, \dots, n+1.$$

На рис. 5.3 схематично показаны перечисленные операции.

Метод деформируемого многогранника прекращает свою работу, если выполняются условия:

$$\left[\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} [f(x_k^j) - f(x_k^C)]^2 \right]^{1/2} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - малое число, определяющее ε -окрестность поиска экстремума.

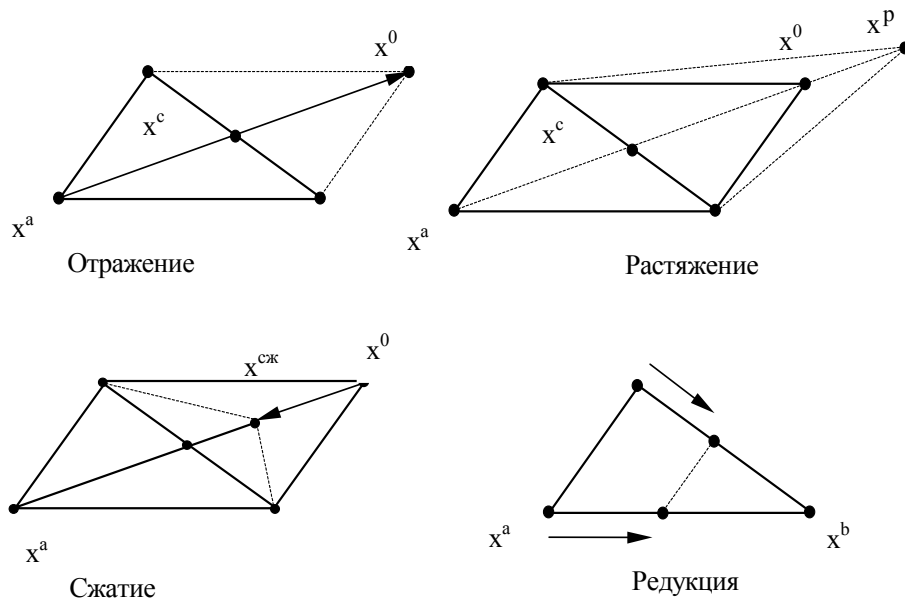


Рисунок 5.3. Основные операции метода деформированного многогранника

Рассмотрим применение метода деформированного многогранника к решению задач аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида, параметры которой удовлетворяют минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

При использовании метода деформированного многогранника задача поиска параметров, удовлетворяющих минимуму квадратичной погрешности, сводится к отысканию экстремума (минимума) следующей целевой функции:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (5.19)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – независимые переменные (входные, варьируемые параметры).

Рассмотрим примеры целевых функций, используемых для решения задачи аппроксимации КФ типовыми однопараметрическими моделями [1].

- $\rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \right]^2 \rightarrow \min.$$

- $\rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 + \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

- $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$4. \rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$5. \rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$6. \rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

При решении некоторых прикладных задач требуется знание аналитического выражения спектральной плотности мощности. Благодаря наличию аналитической связи между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности, вопросы их аппроксимации оказываются взаимосвязанными [1].

Запишем квадратичную погрешность аппроксимации спектральной плотности процесса $S_x(\omega)$ функцией заданного вида $S_a(\omega)$:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega) - S_a(\omega)]^2 d\omega. \quad (5.20)$$

Раскрыв квадратные скобки в (5.20), получим:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega - 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) S_a(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_a^2(\omega) d\omega. \quad (5.21)$$

Подставим в (5.21) значения $S_x(\omega)$ и $S_a(\omega)$, полученные из корреляционной функции при помощи преобразования Винера-Хинчина [1]:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \\ S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{cases} \quad (5.22)$$

Тогда

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau. \quad (5.23)$$

Применяя к внутренним интегралам обратное преобразование Винера-Хинчина и учитывая четность корреляционной функции, получим:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau)]^2 d\tau. \quad (5.24)$$

Из выражения (5.24) видно, что задача аппроксимации спектральной плотности мощности функциями заданного вида сводится к задаче аппроксимации корреляционной функции функциями вида:

$$K_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (5.25)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение 16).

5.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции и следующими параметрами - $M = \text{ent}[\tau_{k_{\max}} / \Delta\tau]$, $N=12,5 M$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.
4. Задать вручную начальные приближения параметров корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции, воспользовавшись методами Ньютона, Ньютона с конечно-разностными производными и деформированного многогранника. Определить погрешности аппроксимации.
5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
6. Повторить пункты 1-5 для объемов выборки $N=k M$, где $k=25, 50, 100$ (начальное приближение определить в автоматическом режиме).
7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объема выборки N .
8. Повторить пункты 1-5 для объема выборки $N=25 M_1$, где $M_1=M/2, M/3, M/4$ (начальное приближение определить в автоматическом режиме).
9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 – числа отсчетов корреляционной функции.
10. Повторить пункты - для $N=25 M$ и $\delta = 0,02; 0,05; 0,1; 0,2$.
11. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.

5.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности.
4. Пример экранной формы построения фазового портрета.
5. Зависимости погрешности оценки параметров аналитического выражения и аппроксимации от объёма выборки N.
6. Зависимости погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 .
7. Зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.
8. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации от объёма выборки для $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$, $\Delta\tau = 0,082$.

Таблица 5.1

N	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
475	0,8881	4,9225	0,1317	0,8881	4,9225	0,1317	0,8882	4,9225	0,1317
950	0,8305	5,1102	0,1	0,8305	5,1102	0,1	0,8305	5,1102	0,1
1900	1,0322	5,3253	0,0755	1,0321	5,3254	0,0755	1,0322	5,3254	0,076
3800	0,9888	5,062	0,0422	0,9888	5,062	0,0422	0,9888	5,062	0,0422

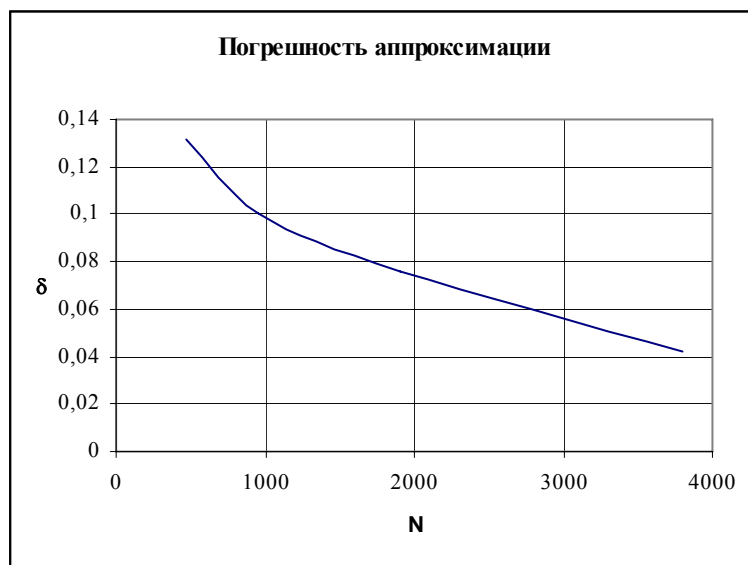


Рисунок 5.4. Зависимость погрешности аппроксимации от объёма выборки для аналитического метода Ньютона

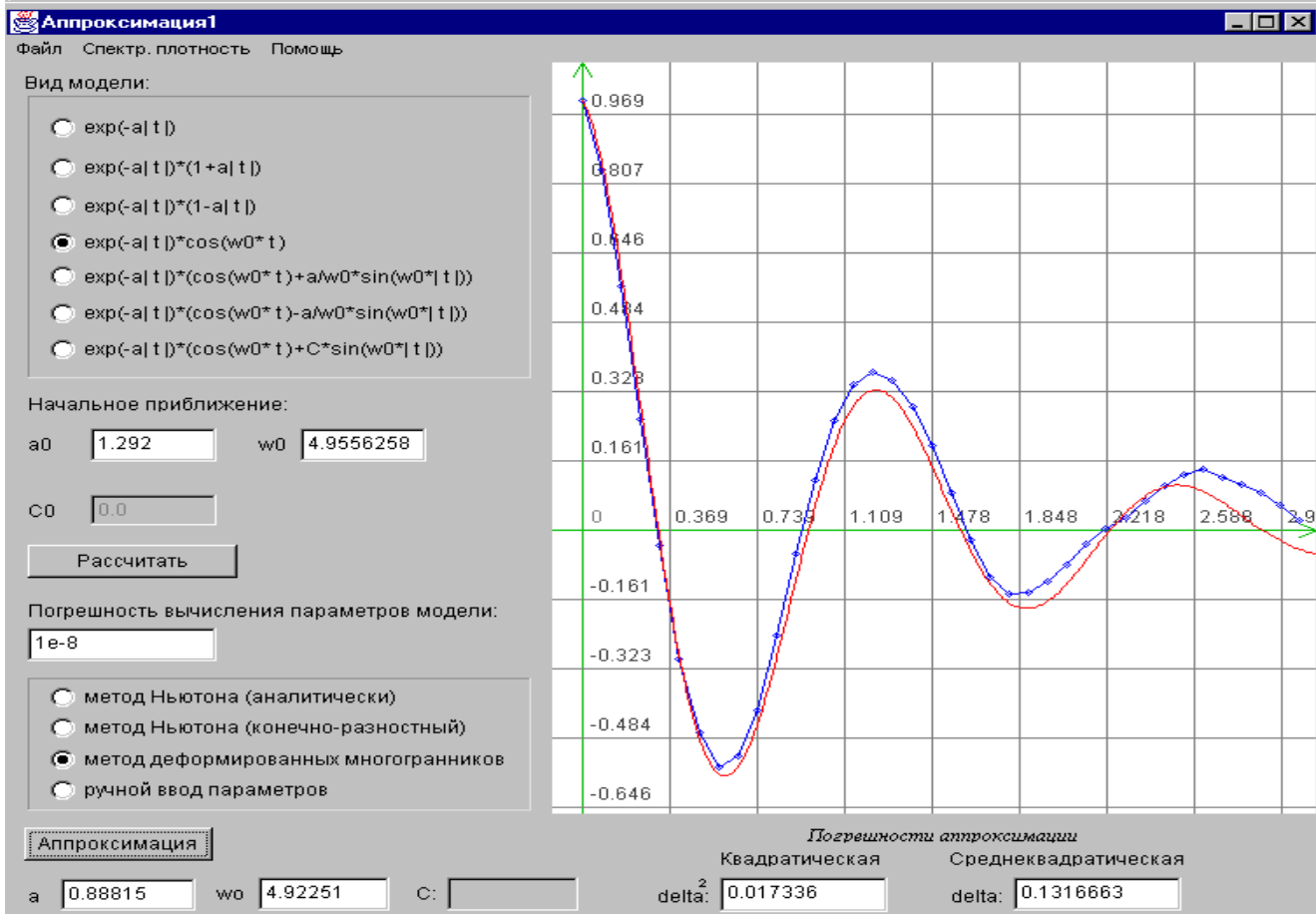
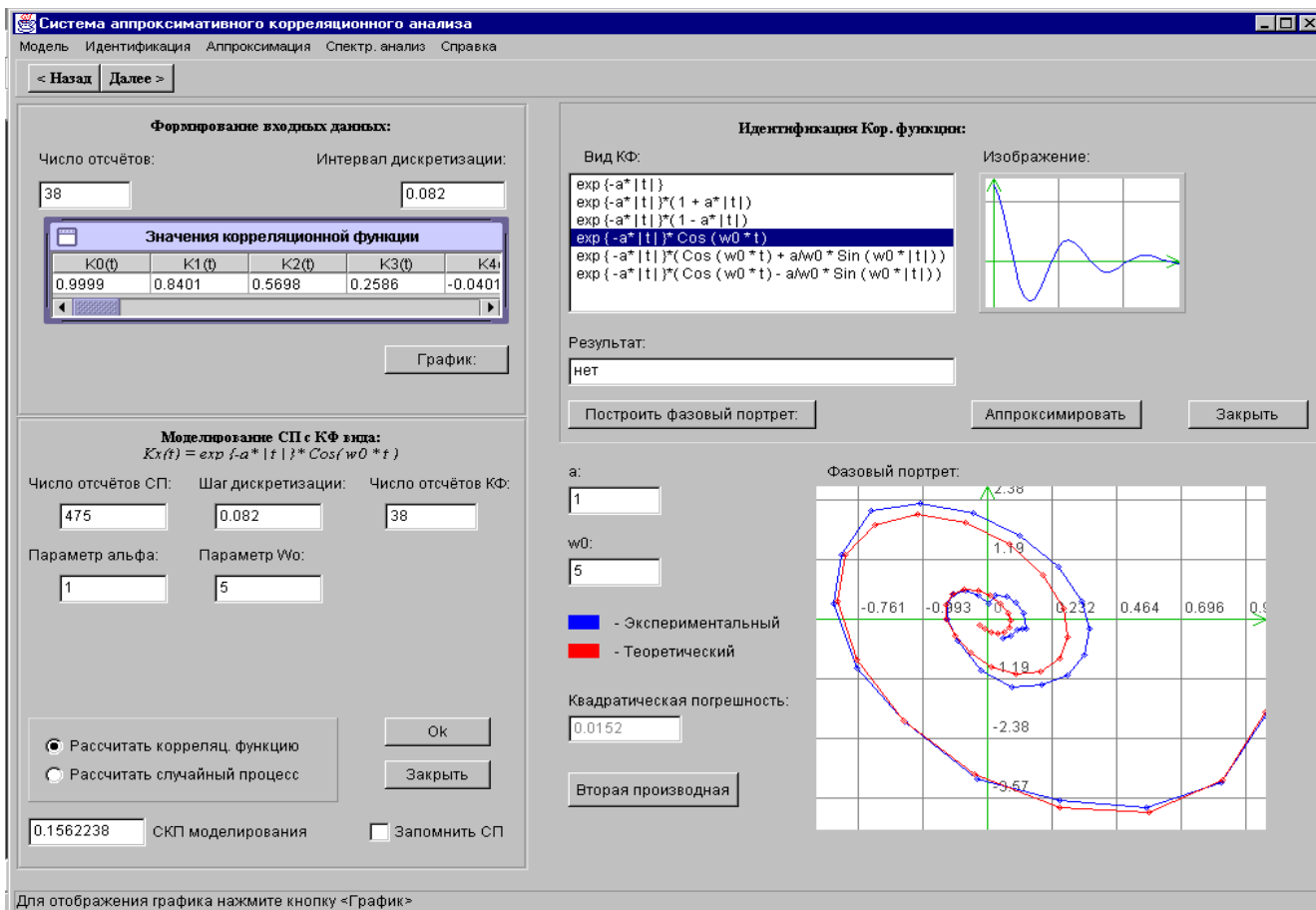


Рисунок 5.5. Пример экранных форм построения фазового портрета и аппроксимации корреляционной функции

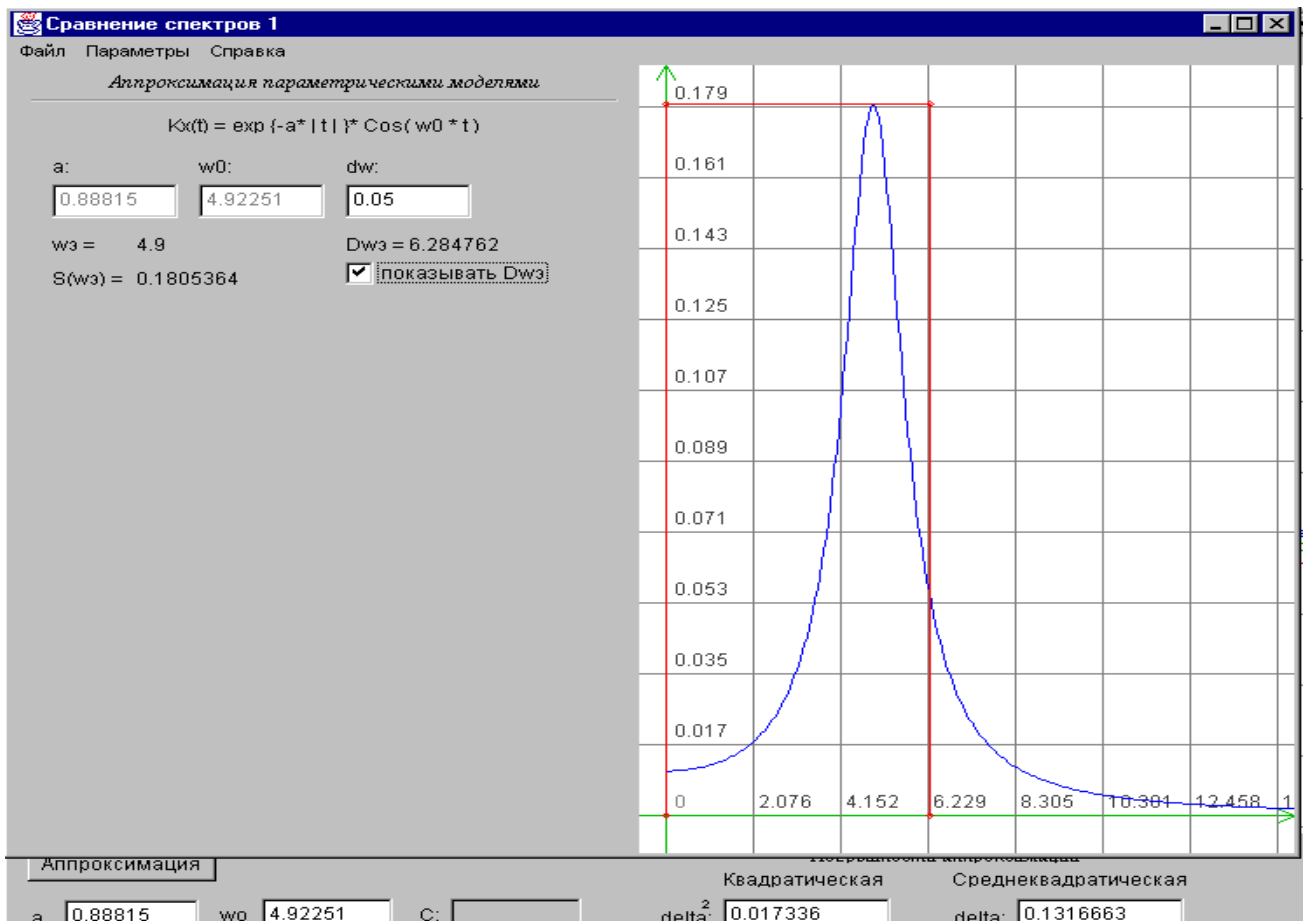


Рисунок 5.6. Пример экранной формы аппроксимации спектральной плотности мощности

5.4. Контрольные вопросы

1. Какие численные методы применяются при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности?
2. Какой участок фазового портрета является самым информативным?
3. Как отличить фазовый портрет колебательной корреляционной функции от фазового портрета монотонной корреляционной функции?
4. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями?
5. Какой метод аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями обладает лучшей сходимостью?
6. Какой метод аппроксимации проще реализовать?

6. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями Лагерра.

6.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов в тех случаях, когда для выбора аналитической модели недостаточно априорной информации о свойствах исследуемого процесса.

В этом случае, как подсказывает практика, наиболее целесообразно применять разложение корреляционной функции в ряд по той или иной системе ортогональных функций. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [1]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера, согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau), \quad (6.1)$$

где β_k - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau)$ - семейство базисных функций, ортонормированных в интервале $(0, \infty)$ с весом $\mu(\tau)$.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n; \\ 1, & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (6.2)$$

Так как ряд сходится в интервале $(0, \infty)$, то коэффициенты разложения β_k в соответствии с [1] определяются выражением:

$$\beta_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (6.3)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Хаара, Уолша и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Одной из распространенных систем ортогональных функций, широко применяемых в аппроксимативном корреляционном анализе, являются ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением:

$$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2}. \quad (6.4)$$

Ортогональные функции Лагерра удовлетворяют следующему свойству:

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (6.5)$$

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (6.1). Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели.

Тогда для модели корреляционной функции

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha), \quad (6.6)$$

имеющей ограниченное число параметров, коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (6.7)$$

определяются формулой:

$$\beta_k = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (6.8)$$

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации, с учетом свойств ортогональных функций Лагерра, равна:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (6.9)$$

Из выражений (6.8) и (6.9) видно, что значения погрешности аппроксимации Δ и коэффициентов разложения β_k зависят от численного значения параметра α .

Как показали исследования, относительная погрешность аппроксимации

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} \quad (6.10)$$

зависит от величины этого параметра, вида корреляционной функции и её показателя колебательности μ , числа членов разложения ряда m .

Таким образом, необходимо разработать алгоритм поиска параметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации.

Предложенный в работах [1] метод аппаратной аппроксимации корреляционных функций позволил свести задачу разработки алгоритма оценки параметра ортогональных функций Лагерра к задаче параметрической аппроксимации корреляционных функций. В результате получим уравнение, решив которое, определим значение параметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\beta_{m+1} = 0. \quad (6.11)$$

Величина параметра α зависит от вида корреляционной функции, показателя её колебательности, а также числа членов разложения ряда. Число корней уравнения (6.11) зависит от тех же факторов и, в общем случае, равно $m+1$, и только один из них обеспечивает наименьшую погрешность аппроксимации. При приближенном решении уравнения (6.11), например, методом Ньютона, значение α и соответствующее ему значение погрешности аппроксимации будет зависеть от начального приближения α_0 .

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра является то, что её основное свойство

$$K_x(0) = D_x = \sum_{k=0}^m \beta_k, \quad (6.12)$$

как видно из выражения

$$\sum_{k=0}^m \beta_k = D_x - \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} d\omega, \quad (6.13)$$

при произвольной величине α не выполняется при конечном m . Условие (6.12) при произвольной величине α выполняется лишь при $m \rightarrow \infty$.

Для обеспечения условия (6.12) аналитическое выражение $K_x(\tau)$ можно искать в виде:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m c_k L_k(\tau, \alpha), \quad (6.14)$$

где
$$c_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k} D_x. \quad (6.15)$$

Легко проверить, что в этом случае $K_x(0) = \sum_{k=0}^m \beta_k = D_x$. Однако коэффициенты разложения c_k , определенные по формуле (6.15), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Уравнение для определения коэффициентов разложения корреляционной функции b_k

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha), \quad (6.16)$$

обеспечивающих минимум квадратической погрешности аппроксимации при дополнительном условии

$$K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k = D_x, \quad (6.17)$$

имеет вид

$$b_k = \beta_k + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1}. \quad (6.18)$$

А для определения значения параметра α , обеспечивающего минимум погрешности необходимо решить уравнение

$$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0. \quad (6.19)$$

Таким образом, при аппроксимации корреляционной функции для обеспечения минимума квадратической погрешности требуется изменением параметра α добиться равенства нулю β_{m+1} коэффициента. Значения b_0, \dots, b_m в этом случае будут оптимальными.

Рассмотренные алгоритмы (6.8), (6.11), (6.18) и (6.19) легко реализовать на ЭВМ, однако все они, как указывалось выше, не лишены существенного недостатка - в результате решения уравнений (6.11) или (6.19) в общем случае возможно определение $(m+1)$ корней, обеспечивающих локальные минимумы погрешностей аппроксимации.

Это обстоятельство накладывает определенные неудобства при выборе диапазона изменения параметра функции Лагерра.

Для однозначного решения задачи, т.е. определения единственного корня, обеспечивающего погрешность аппроксимации, близкую к минимуму-миниморуму, необходимо анализировать сигнал, пропорциональный β_0 [1].

Рассмотрим уравнение

$$\alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_0(\tau, \alpha) d\tau - k \sigma_x^2 = 0, \quad (6.20)$$

где $L_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau/2}$ - функция Лагерра нулевого порядка;

k - постоянная величина, которая, как видно из уравнения, меньше 2.

Для $K_{x5}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau/2} \cos \omega_0 \tau$ это уравнение приведем к виду:

$$\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau/2} e^{-\lambda\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau - k = 0. \quad (6.21)$$

Разрешив уравнение относительно α , получим:

$$\alpha = 2 \frac{-\lambda(1-k) + \sqrt{\lambda^2(1-k)^2 + k(2-k)(\lambda^2 + \omega_0^2)}}{2-k}. \quad (6.22)$$

При $k=1$ выражение примет самый простой вид, а именно:

$$\alpha = 2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (6.23)$$

Решив уравнение (6.21) для корреляционных функций

$K_{x,6,7}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ при $k=1$, получим:

$$\alpha = 2 \left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right). \quad (6.24)$$

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в «дискретизации» полученных ранее уравнений, выборе численного метода для их решения, написании, отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счёта.

Проанализируем различные алгоритмы определения коэффициентов разложения ортогонального ряда и параметра функций Лагерра, которые для удобства представим в таблице 6.1.

Алгоритмы подбора параметра α

Таблица 6.1

№	Алгоритм	Преимущества	Недостатки
1	$\beta_{m+1} = 0$	Минимум погрешности	$m+1$ корней
2	$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0$	Минимум погрешности, $K_x(\tau) = \sigma_x^2$	$m+1$ корней
3	$\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$	Аналитическое решение, один корень	$\delta \neq \min$
4	$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0 \\ \beta_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на глобальный минимум погрешности	Сложность реализации, увеличивается время анализа
5	$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0 \\ b_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на минимум погрешности, $K_x(\tau) = \sigma_x^2$	Сложность реализации, увеличивается время анализа
6	$\beta_0 - \beta_1 - \sigma_x^2 = 0$	Один корень	$\delta \neq \min$
7	$\sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k - \sigma_x^2 = 0$	Близок к δ_{\min}	$m+1$ корней
8	$\alpha = 2\omega_0$	Простота определения α	$\delta \neq \min$

Сравнительный анализ алгоритмов показывает, что с точки зрения минимизации вычислительных затрат, обеспечения допустимых погрешностей аппроксимации и обеспечения лучшей сходимости (уравнение имеет только один корень) наиболее целесообразно выбрать алгоритм 3. Параметр α , определенный по этому алгоритму, находится вблизи $\alpha_{\text{опт}}$ и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным.

Однако при решении уравнения (6.20) с применением для вычисления интеграла метода прямоугольников

$$\alpha \Delta \tau \sum_{i=0}^M K_x(i\Delta\tau) e^{-i\alpha\Delta\tau/2} - \sigma_x^2 = 0 \quad (6.25)$$

было обнаружено, что погрешности оценки параметра α могут достигать больших значений.

Значительно меньшие погрешности оценки параметра α наблюдались при применении формулы трапеций для вычисления интеграла в (6.20):

$$\alpha \Delta \tau \left\{ \left[K_x(0) + K_x(M \Delta \tau) e^{-M \alpha \Delta \tau / 2} \right] / 2 + \sum_{i=1}^{M-1} K_x(i \Delta \tau) e^{-i \alpha \Delta \tau / 2} \right\} - \sigma_x^2 = 0. \quad (6.26)$$

Но все же расхождение между теоретическими и определенными по формуле (6.26) значениями α существенно. Более точный результат при решении уравнения дает формула Симпсона [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \Delta \tau}{3} \left\{ K_x(0) + K_x(2n) e^{-2n \alpha \Delta \tau / 2} + 2 \left[K_x(\Delta \tau) e^{-\alpha \Delta \tau / 2} + \dots + K_x[(2n-2) \Delta \tau] e^{-(2n-2) \alpha \Delta \tau / 2} \right] + \right. \\ \left. + \left[K_x(\Delta \tau) e^{-\alpha \Delta \tau / 2} + \dots + K_x[(2n-1) \Delta \tau] e^{-(2n-1) \alpha \Delta \tau / 2} \right] \right\} - \sigma_x^2 = 0; \end{aligned} \quad (6.27)$$

где $n = J_{\max} / 2$.

Методика аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра заключается в выполнении следующих этапов:

1. определяются ординаты нормированной корреляционной функции $\{\rho_x(J \Delta \tau)\}_{J=0, \dots, J_{\max}}$;
2. определяется параметр функций Лагерра α в результате решения уравнения (6.20);
3. определяются коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ в соответствии с выражением (6.8);
4. определяются коэффициенты разложения $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$ в соответствии с выражением (6.18);
5. определяется число членов разложения ряда (6.6) m_{opt} , обеспечивающее минимальное значение погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции δ ;
6. определяются параметры аппроксимирующего выражения: α , $m = m_{\text{opt}}$, $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$, $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$, δ .

Определив параметры модели корреляционной функции β_0, \dots, β_m , α

$$K_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau) l(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(-\tau) l(-\tau), \quad (6.28)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого, подставив модель (6.28) в выражение для определения спектральной плотности мощности

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau) l(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(-\tau) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.29)$$

с учётом определения ортогональных функций Лагерра (6.4), получим:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{\alpha/2 + j\omega} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k + \frac{1}{\alpha/2 - j\omega} \left(\frac{j\omega + \alpha/2}{j\omega - \alpha/2} \right)^k \right]. \quad (6.30)$$

Введем обозначение $\text{tg} \varphi = \frac{2\omega}{\alpha}$. Тогда

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{1 + j\operatorname{tg}\varphi} \left(\frac{j\operatorname{tg}\varphi - 1}{j\operatorname{tg}\varphi + 1} \right)^k + \frac{1}{1 - j\operatorname{tg}\varphi} \left(\frac{j\operatorname{tg}\varphi + 1}{j\operatorname{tg}\varphi - 1} \right)^k \right]. \quad (6.31)$$

Или

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + j\sin\varphi} \left(\frac{j\sin\varphi - \cos\varphi}{j\sin\varphi + \cos\varphi} \right)^k + \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - j\sin\varphi} \left(\frac{j\sin\varphi + \cos\varphi}{j\sin\varphi - \cos\varphi} \right)^k \right]. \quad (6.32)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (6.32) приведем к виду:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{e^{j\varphi}} \left(\frac{-e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi}} \right)^k + \frac{1}{e^{-j\varphi}} \left(\frac{e^{j\varphi}}{-e^{-j\varphi}} \right)^k \right] = \\ &= \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \left[e^{-(2k+1)\varphi} + e^{(2k+1)\varphi} \right] = \frac{2\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \end{aligned} \quad (6.33)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha}$.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение 16).

6.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции со следующими параметрами - $M = \operatorname{ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $N=12,5 M$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Задать вручную начальное приближение параметра функции Лагерра и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции $\alpha, b_0, \dots, b_m, m$, воспользовавшись методами Симпсона, трапеций и прямоугольников. Определить погрешности аппроксимации.
4. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
5. Повторить пункты 1-4 для объемов выборки $N=k M$, где $k=25, 50, 100$.
6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объема выборки.
7. Повторить пункты 1-4 для объемов выборки $N=25 M_1$, где $M_1=M/2, M/3, M/4$.
8. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 – числа отсчетов корреляционной функции.
9. Повторить пункты 1-4 для $N=25 M$ и $\delta = 0,02, 0,05, 0,1, 0,2$.
10. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.

6.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра.
4. Зависимости погрешности оценки параметра функции Лагерра и аппроксимации от объёма выборки N.
5. Зависимости погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 .
6. Зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.
7. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации от объёма выборки $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$, $\Delta\tau = 0,082$.

Таблица 6.2

N	Симпсона			Трапеций			Прямоугольников		
	α	m	δ	α	m	δ	α	m	δ
475	13,8449	16	0,1348	9,7977	16	0,1533	7,0371	22	0,1279
950	14,0922	14	0,0746	9,8106	14	0,1184	6,942	20	0,1196
1900	14,1219	14	0,0873	9,804	12	0,1387	6,9276	20	0,1231
3800	14,1393	14	0,0837	9,9084	14	0,1293	7,0567	22	0,1237

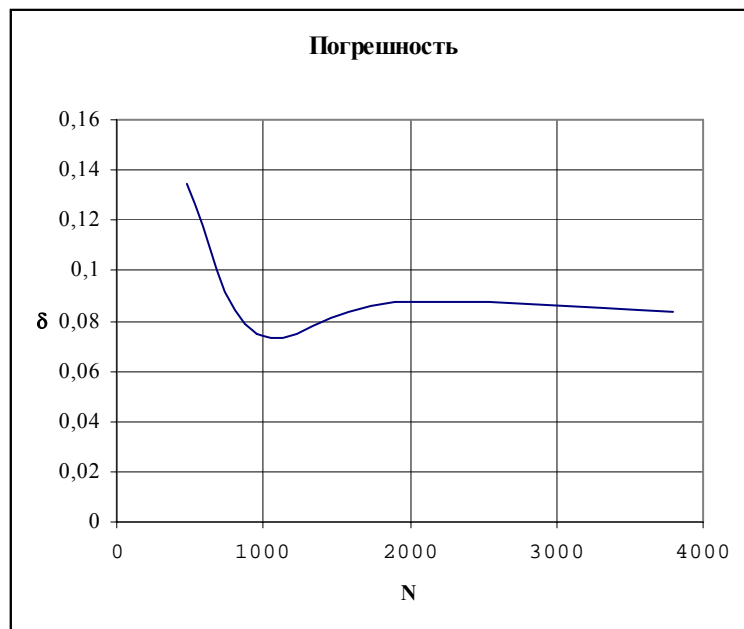


Рисунок 6.1. Зависимость погрешности аппроксимации от объёма выборки для метода Симпсона

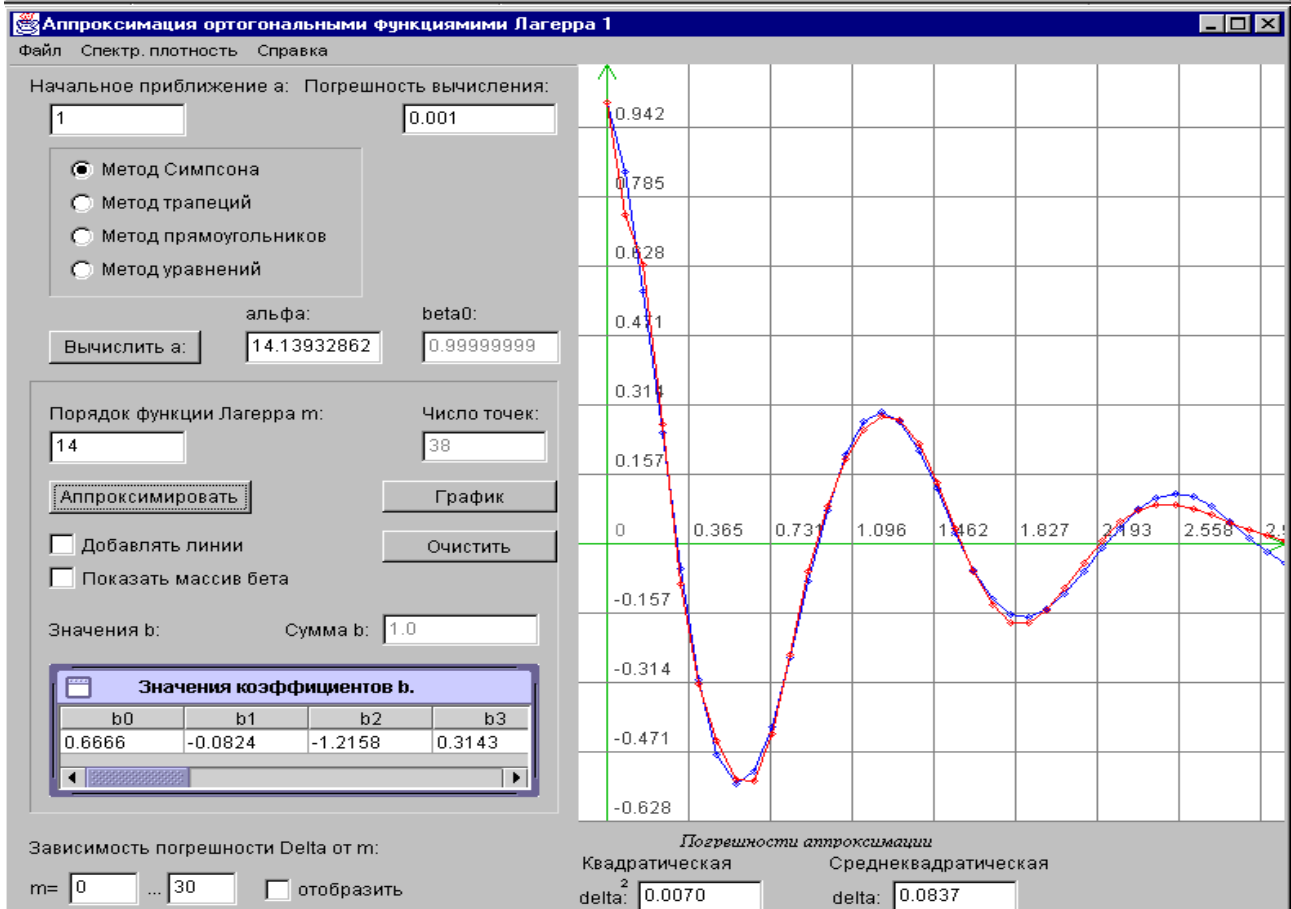
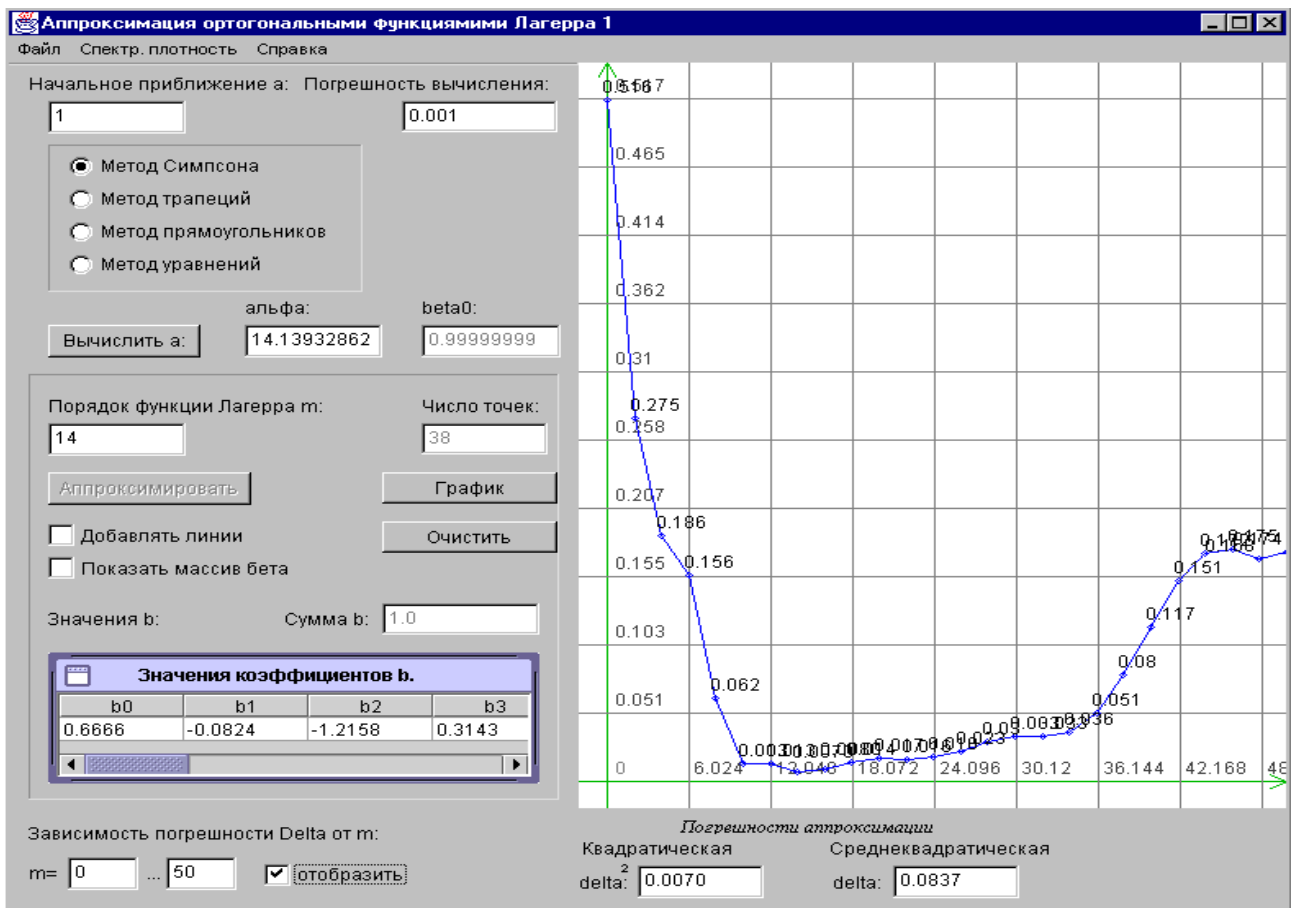


Рисунок 6.2. Экранные формы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра

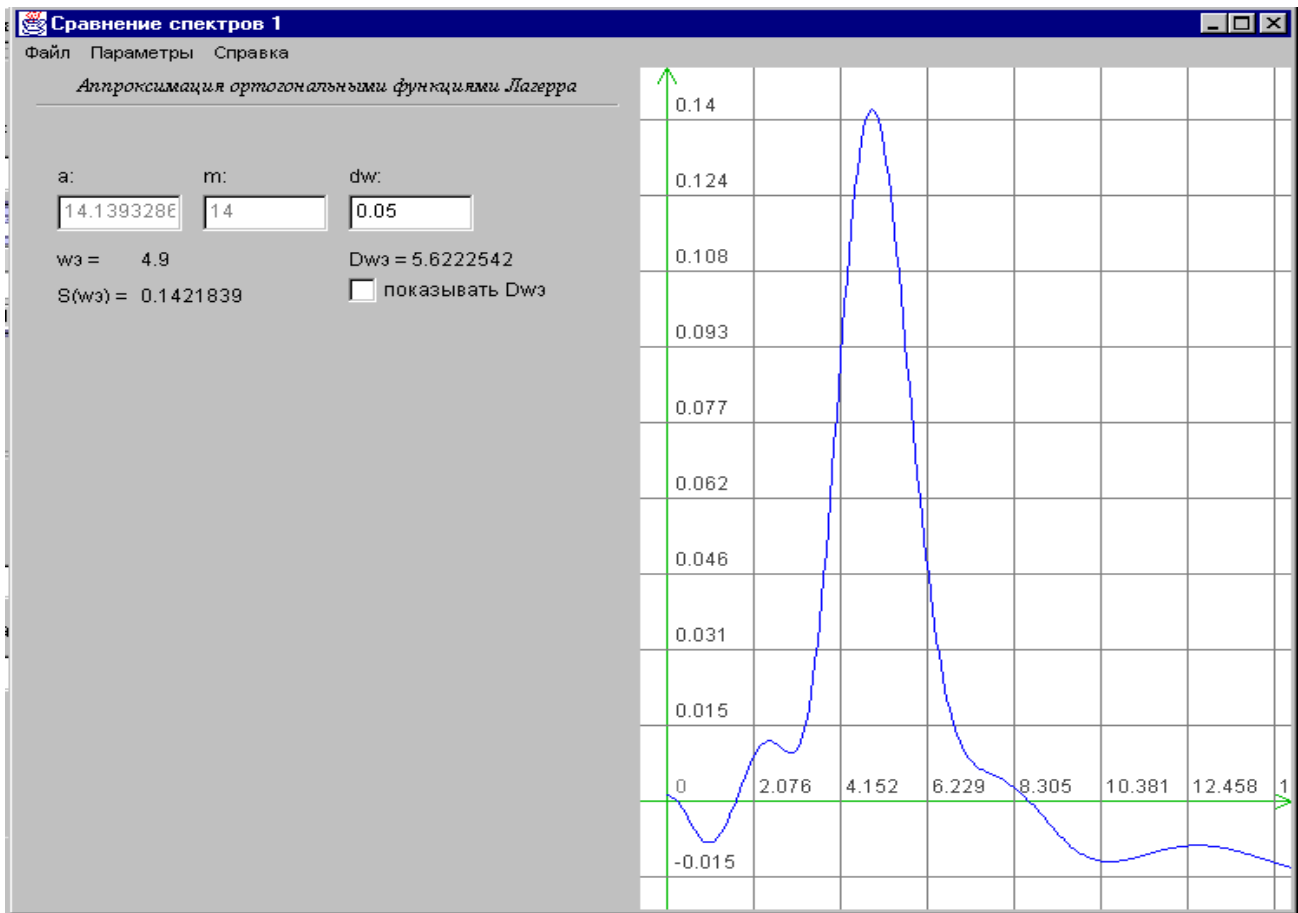


Рисунок 6.3. Экранная форма аппроксимации спектральной плотности мощности

6.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры описывают ортогональное разложение корреляционной функции и спектральной плотности мощности?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение параметра ортогональных функций Лагерра?
3. Какие методы оценки параметра функций Лагерра Вы знаете?
4. Назовите самый простой метод оценки параметра функций Лагерра.
5. Почему увеличение числа членов разложения ортогонального ряда не всегда приводит к уменьшению погрешности аппроксимации?

7. АППРОКСИМАЦИЯ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации взаимных корреляционных функций случайных процессов.

7.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей взаимных корреляционных функций. Например, при измерении скорости движения, проката, значения «мертвого» времени и т.д. исследуемый случайный сиг-

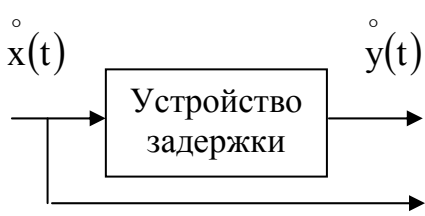


Рисунок 7.1

нал $\dot{x}(t)$ задерживается на некоторый временной интервал τ_m (см. рис. 6.1).

Выходной сигнал устройства задержки можно представить в виде $\dot{y}(t) = \dot{x}(t - \tau_m)$, и взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов будет равна

$$K_{xy}(\tau) = K_x(\tau - \tau_m). \quad (7.1)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае возможна аппроксимация взаимных корреляционных функций параметрическими моделями. Для сведения задачи аппроксимации взаимной корреляционной функции к аппроксимации корреляционных функций необходимо определить значение τ_m , соответствующее максимуму взаимной корреляционной функции. После этого можно воспользоваться результатами, представленными в лабораторной работе 5.

В общем же случае необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции. Для идентификации взаимной корреляционной функции можно воспользоваться фазовыми портретами.

Для оценки взаимной спектральной плотности мощности исследуемых процессов воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, получим

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.2)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.3)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) - j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (7.4)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) + j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (7.5)$$

Воспользовавшись соотношениями (7.4)-(7.5), получим:

$$C_{xy}(\omega) = 2 \operatorname{Re} S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega \tau \, d\tau, \quad (7.6)$$

а

$$Q_{xy}(\omega) = 2 \operatorname{Im} S_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau)] \sin \omega \tau \, d\tau. \quad (7.7)$$

Функция $C_{xy}(\omega)$ является четной, а $Q_{xy}(\omega)$ - нечетной. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega; \quad (7.8)$$

$$K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau \, d\omega. \quad (7.9)$$

Для стационарно связанных процессов часто вводят нормированную меру взаимной когерентности, являющуюся функцией частоты [1]:

$$\operatorname{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}. \quad (7.10)$$

Эта функция равна 0 для независимых процессов, 1 для линейно связанных процессов и находится в пределах от 0 до 1 во всех прочих случаях.

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Представив модель взаимной корреляционной функции в виде

$$K_{axy}(\tau) = K_{ax}(\tau - \tau_m), \quad (7.11)$$

определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ax}(\tau - \tau_m) e^{-j\omega\tau} \, d\omega = \exp(-j\omega\tau_m) S_x(\omega). \quad (7.12)$$

Из выражения (6.12) видно, что

$$\operatorname{Re} S_{axy}(\omega) = \cos \omega \tau_m S_x(\omega), \quad (7.13)$$

а

$$\operatorname{Im} S_{axy}(\omega) = -\sin \omega \tau_m S_x(\omega). \quad (7.14)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение 18).

7.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданным видом корреляционной функции со следующими параметрами: $N=5000$, $\delta = 0,02$, $\tau_m = 10$.
2. Вычислить взаимные корреляционные функции.

3. Построить фазовые портреты взаимных корреляционных функций.
4. Задать вручную начальные приближения параметров взаимной корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения взаимной корреляционной функции, воспользовавшись методом Ньютона.
5. Повторить пункты 1-4 для заданной взаимной корреляционной функции и объёмов выборки $N=kM$, где $k=12, 5, 25, 50, 100$.
6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объёма выборки.
7. Сгенерировать временной ряд (параметры задать самостоятельно) и определить спектральную плотность мощности.

7.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации взаимных корреляционных функций.
3. Пример экранной формы генерации случайных процессов.
4. Пример экранной формы вычисления взаимной корреляционной функции и построения фазового портрета.
5. Примеры экранных форм для аппроксимации взаимной корреляционных функций.
6. Пример экранной формы определения спектральной плотности мощности.
7. Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты.
8. Зависимости погрешности оценки параметров аналитического выражения взаимной корреляционной функции и аппроксимации от объёма выборки.
9. Зависимость погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции от M_1 – числа отсчётов корреляционной функции.
10. Зависимость погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции от $\Delta\tau$.
11. Выводы по работе.

7.4. Контрольные вопросы

1. В чём заключается специфика аппроксимации взаимных корреляционных функций по сравнению с аппроксимацией автокорреляционных функций?
2. Какие численные методы применяются при аппроксимации взаимных корреляционных функций?
3. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации взаимных корреляционных функций параметрическими моделями?
4. Как отличить фазовый портрет колебательной взаимной корреляционной функции?

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже $\rho_{xy}(\tau) = e^{-|\tau-\tau_m|} \cos 5(\tau - \tau_m)$, $\Delta\tau = 0,082$.

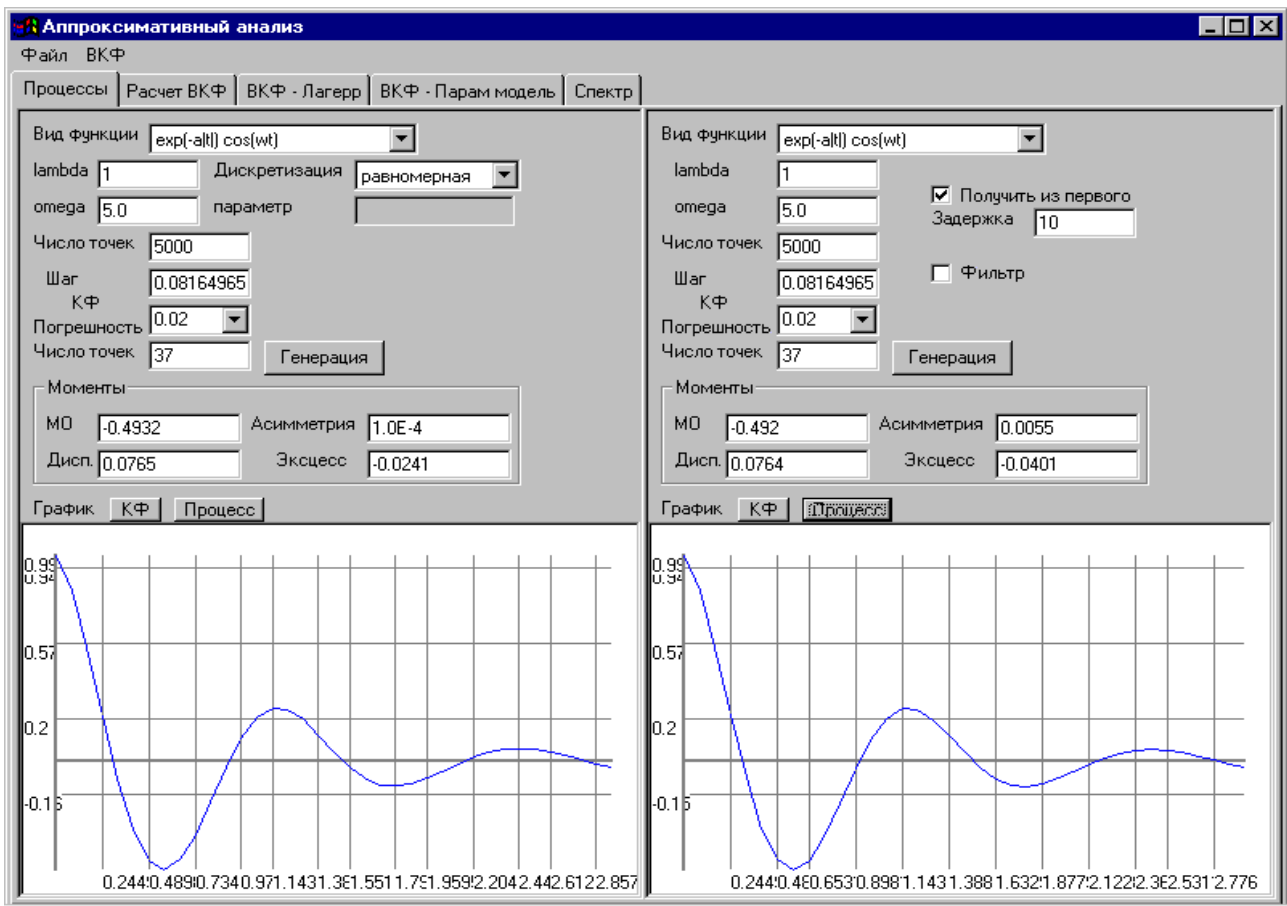


Рисунок 7.2. Экранная форма генерации и оценки характеристик случайных процессов

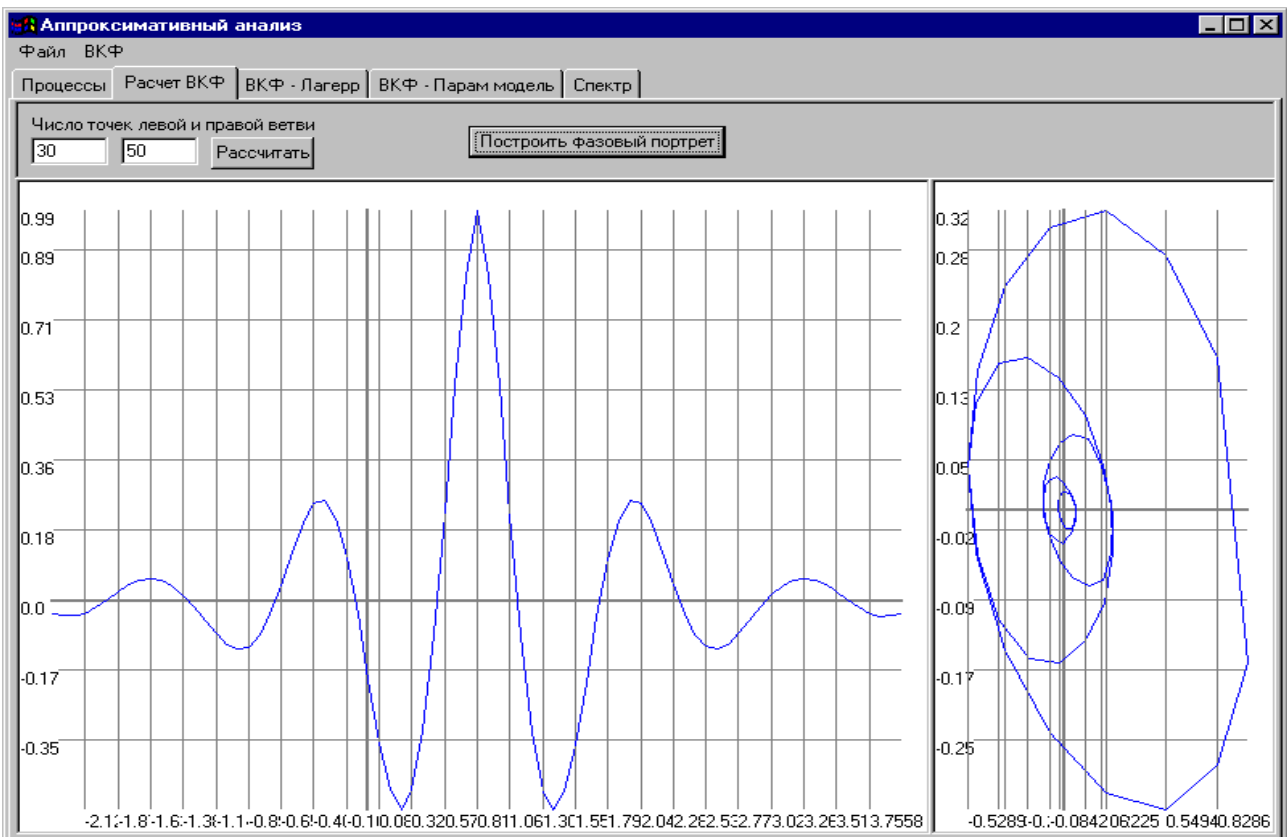


Рисунок 7.3. Экранная форма вычисления взаимной корреляционной функции и её фазового портрета

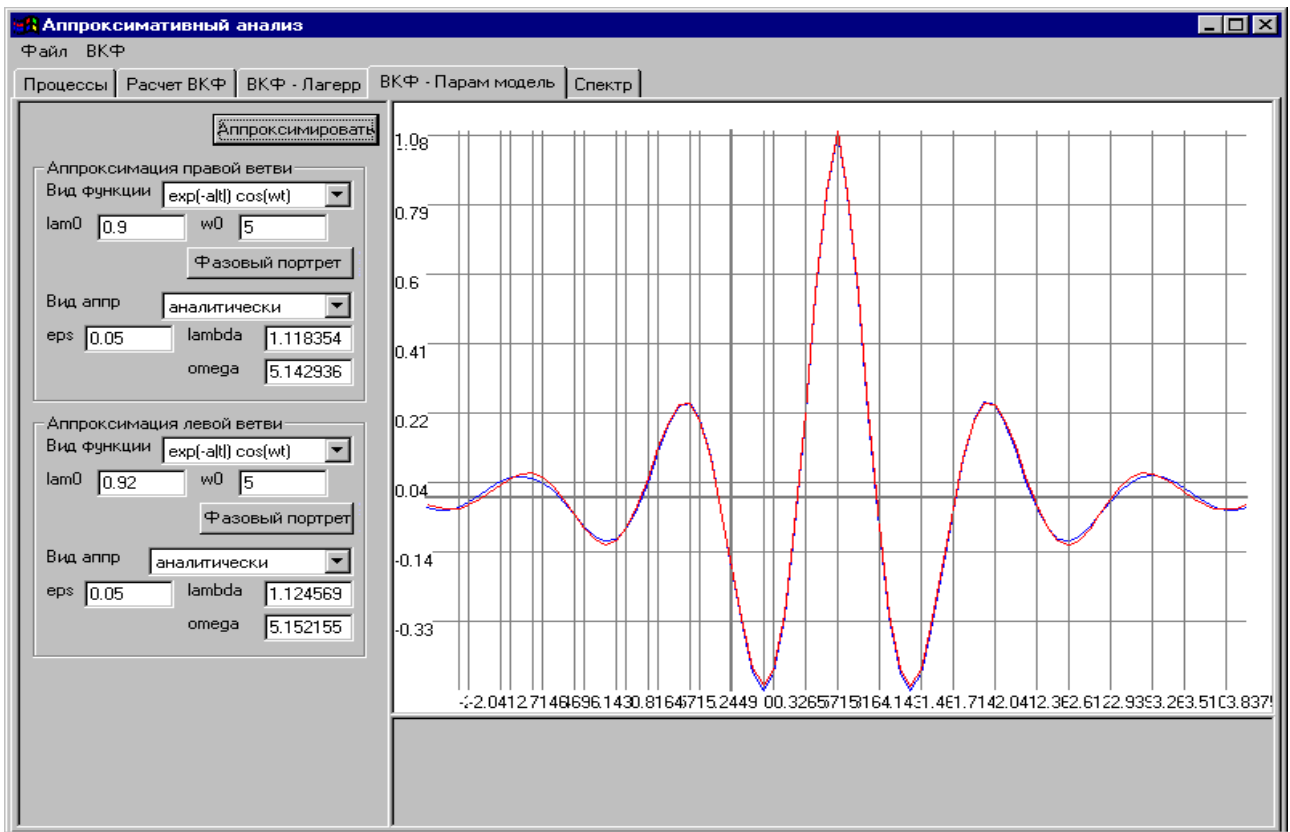


Рисунок 7.4. Экранная форма аппроксимации взаимной корреляционной функции параметрической моделью

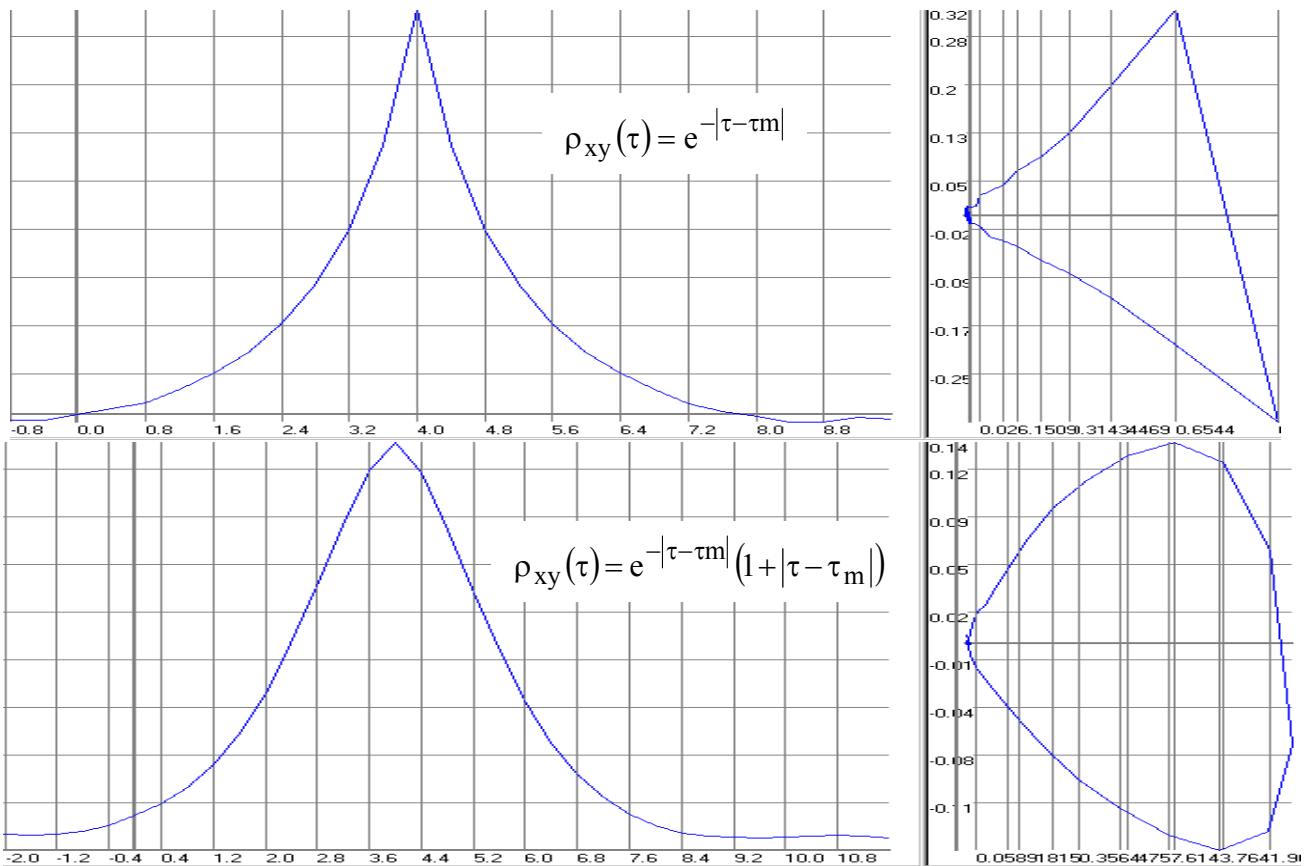


Рисунок 7.5. Взаимные корреляционные функции и их фазовые портреты

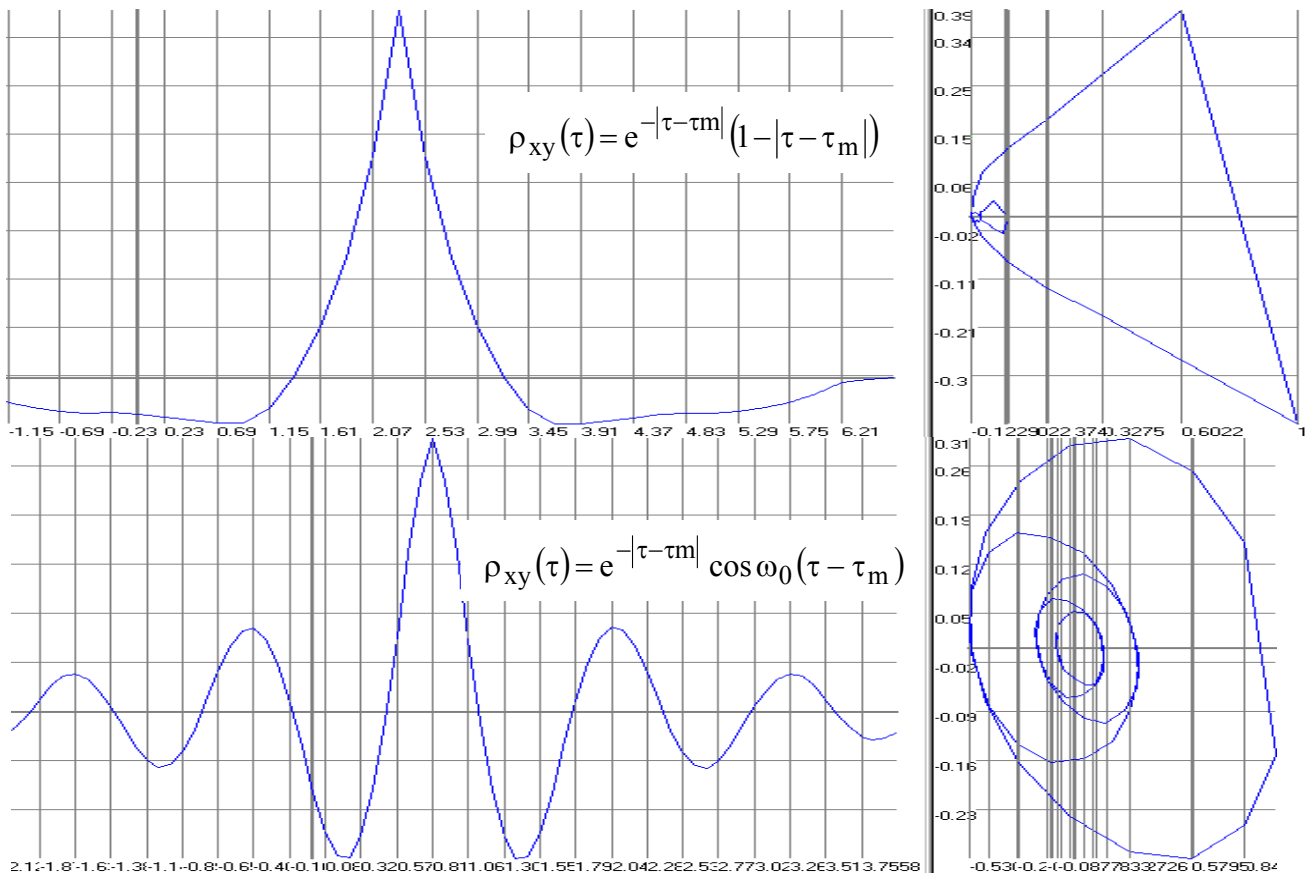


Рисунок 7.6. Взаимные корреляционные функции и их фазовые портреты

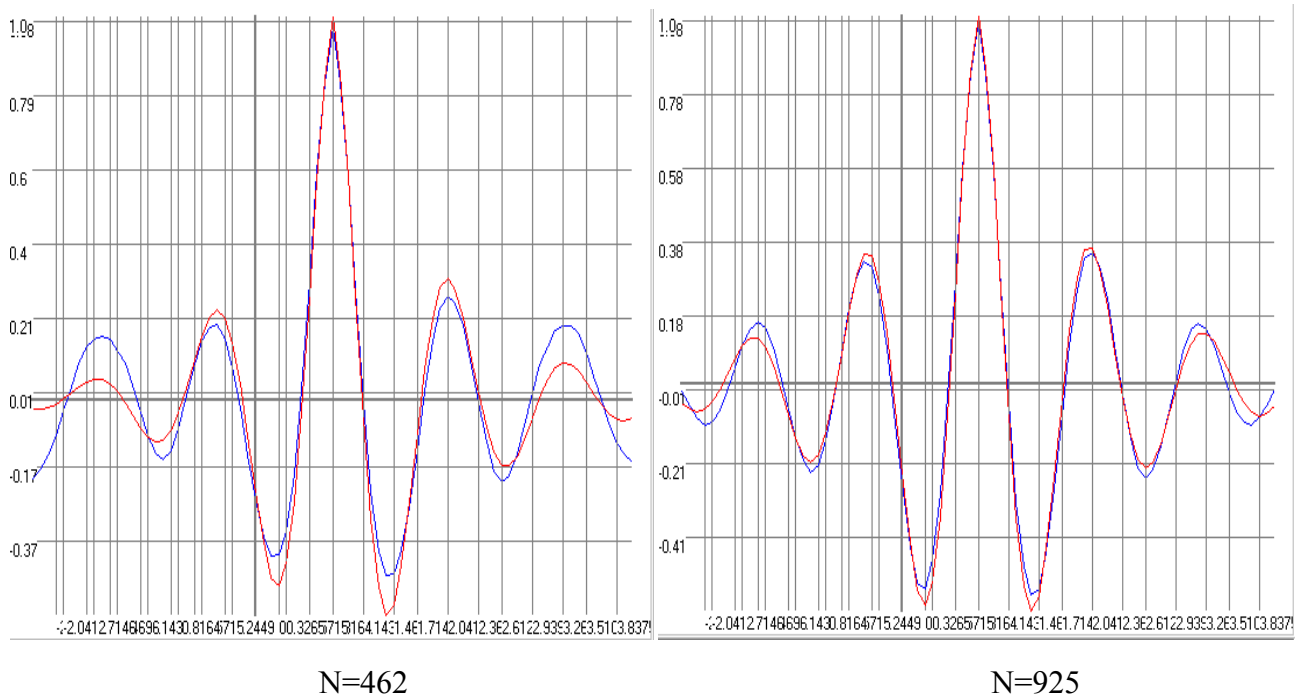
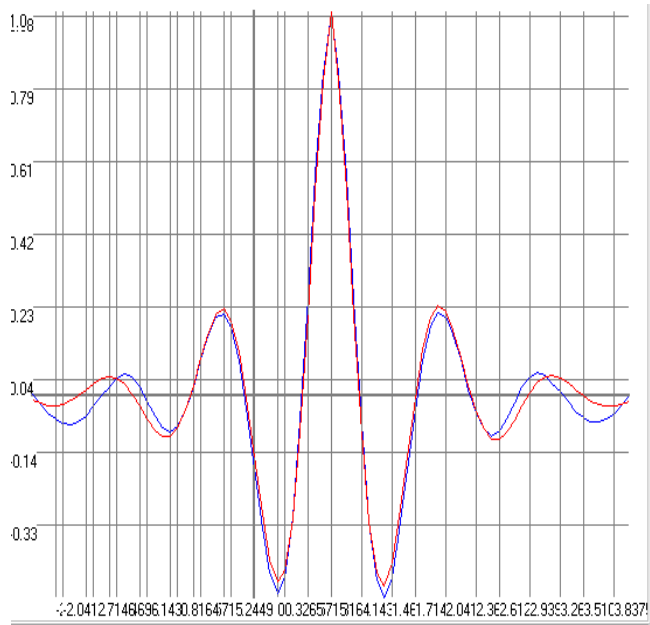
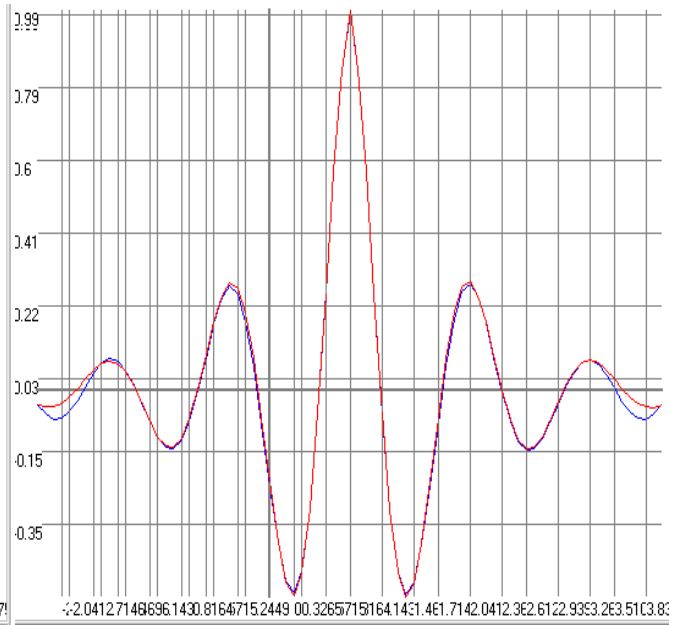


Рисунок 7.7. Результаты аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos 5\tau$



N=1850



N=3700

Рисунок 7.8. Результаты аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos 5\tau$

8. АППРОКСИМАЦИЯ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации взаимных корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями Лагерра.

8.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей взаимных корреляционных функций в том случае, когда не удастся идентифицировать модель взаимной корреляционной функции.

Полученные в подразделе 6 результаты можно обобщить на аппроксимацию взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра. При этом необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции, т. е. необходимо искать модель в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,p} l(\tau) L_k(\tau, \alpha_1) + \sum_k^m \beta_{k,l} l(-\tau) L_k(-\tau, \alpha_2). \quad (8.1)$$

Исследования показали, что это будет справедливо, если максимум взаимной корреляционной функции будет находиться в **нуле**. В противном случае в нулевой точке будет наблюдаться выброс. Из анализа результатов видно, что даже при аппроксимации простейших моделей взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра для обеспечения допустимых погрешностей необходимо определять большое число членов разложения ряда. Кроме того, после аппроксимации необходима нормировка, так как значение модели корреляционной функции в нуле не равно 1. Эти обстоятельства без модификации модели затрудняют её применение.

Для устранения этих недостатков необходимо, в первую очередь, определить τ_m и искать модель взаимной корреляционной функции в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,p} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^m \beta_{k,l} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_2). \quad (8.2)$$

После модификации модели можно воспользоваться методикой оценки параметров ортогонального ряда, представленной в лабораторной работе 6.

Если аналитическую модель взаимной корреляционной функции представить в общем виде

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,p} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m2} \beta_{k,l} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_2), \quad (8.3)$$

то аналитическое выражение взаимной спектральной плотности мощности с учётом свойств ортогональных функций Лагерра примет вид:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \exp[-j(2k+1)\varphi_1] + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \exp[j(2k+1)\varphi_2] \right], \quad (8.4)$$

где $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_1}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_2}$.

С учётом (8.4), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\operatorname{Re}S_{axy}(j\omega) = \frac{\cos\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \cos(2k+1)\varphi_2 \right] - \frac{\sin\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \sin(2k+1)\varphi_1 - \right. \\ \left. - \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \sin(2k+1)\varphi_2 \right]; \quad (8.5)$$

$$\operatorname{Im}S_{axy}(j\omega) = \frac{\cos\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \cos(2k+1)\varphi_2 - \right. \\ \left. - \frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 \right] - \frac{\sin\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \cos(2k+1)\varphi_2 \right]. \quad (8.6)$$

С целью упрощения модели взаимной корреляционной функции, представим её в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,\pi} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha) + \sum_k \beta_{k,\lambda} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha). \quad (8.7)$$

Тогда модель взаимной спектральной плотности мощности будет равна:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_{k,\pi} \exp[-j(2k+1)\varphi] + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_{k,\lambda} \exp[j(2k+1)\varphi] \right]. \quad (8.8)$$

С учётом (8.8), выражения для оценки вещественной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\operatorname{Re}S_{axy}(j\omega) = \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \left[\cos\omega\tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\pi} + \beta_{k,\lambda}) \cos(2k+1)\varphi - \right. \\ \left. - \sin\omega\tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\pi} - \beta_{k,\lambda}) \sin(2k+1)\varphi \right]; \quad (8.9)$$

$$\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) = \frac{\cos \varphi}{\alpha \pi} \left[\cos \omega \tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,l} - \beta_{k,p}) \cos(2k+1)\varphi - \right. \\ \left. - \sin \omega \tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,p} - \beta_{k,l}) \sin(2k+1)\varphi \right]. \quad (8.10)$$

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение 18).

8.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции - $M = \text{ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $N=12,5 M$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Определить оптимальные значения параметров аналитического выражения корреляционной функции $\alpha, b_0, \dots, b_m, m$, воспользовавшись методом Симпсона. Определить погрешности аппроксимации (пункты 1-3 повторить 29 раз, результаты занести в таблицу).
4. Повторить пункты 1-3 29 раз для объемов выборки $N=k M$, где $k=25, 50, 100$, результаты занести в таблицу.
5. Проанализировать зависимость максимальной погрешности аппроксимации корреляционной функции от объема выборки.
6. Сгенерировать временной ряд (параметры задать самостоятельно) и определить спектральную плотность мощности.

8.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритмы аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.
3. Зависимости погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра от объема выборки N в табличной, а максимальной погрешности аппроксимации - в графической формах.
4. Примеры экранной формы для аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.
5. Примеры экранной формы определения погрешности аппроксимации.
6. Пример экранной формы определения спектральной плотности мощности.
7. Выводы по работе.

8.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры описывают ортогональное разложение взаимной корреляционной функции?
2. Из каких соображений выбираются значения параметров ортогональных функций Лагерра?
3. Почему увеличение числа членов разложения ортогонального ряда не всегда приводит к уменьшению погрешности аппроксимации?

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже $\rho_{xy}(\tau) = e^{-|\tau-\tau_m|} \cos 5(\tau - \tau_m)$, $\Delta\tau = 0,082$.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации от объёма выборки $N=475$ (привести все таблицы).

Таблица 8.1

J	Правая ветвь			Левая ветвь		
	$\alpha_{п}$	$m_{п}$	$\delta_{п}$	$\alpha_{л}$	$m_{л}$	$\delta_{л}$
1	10,8956	21	0,0080	10,3719	21	0,0073
2	10,2529	20	0,0100	9,9948	21	0,0106
3	10,256	19	0,0050	10,0457	20	0,0057
4	10,0191	19	0,0067	9,5700	19	0,0820
5	10,9860	19	0,0080	10,7839	19	0,0080
6	10,5202	21	0,0066	10,2023	21	0,0076
7	10,3557	18	0,0039	10,0630	18	0,0045
8	10,7277	18	0,0094	10,3339	18	0,0109
9	10,2881	20	0,0154	10,0305	21	0,0126
10	11,5087	21	0,0126	11,0286	22	0,0130
11	10,3389	20	0,0101	9,9639	21	0,0136
12	10,6692	19	0,0050	10,3534	20	0,0058
13	10,7333	20	0,0066	10,3681	21	0,0068
14	10,2973	21	0,0063	10,0819	21	0,0063
15	10,4606	20	0,0055	10,2267	21	0,0056
16	11,0406	19	0,0056	10,5952	20	0,0060
17	9,5721	20	0,0056	9,2248	21	0,0060
18	10,6600	18	0,0059	10,3943	18	0,0065
19	9,9506	19	0,0049	9,6469	19	0,0050
20	10,7140	22	0,0151	10,4237	22	0,0166
21	11,0327	19	0,0074	10,7046	20	0,0067
22	10,1177	19	0,0081	9,7541	20	0,0084
23	10,8952	17	0,0150	10,3909	18	0,0103
24	10,0951	18	0,0072	9,7777	19	0,0068
25	10,9876	17	0,0053	10,5444	19	0,0059
26	9,3986	21	0,0092	9,1282	22	0,0094
27	10,1227	21	0,0071	9,8558	21	0,0062
28	9,5225	22	0,0071	9,2200	22	0,0062
29	10,1745	20	0,0066	9,8830	21	0,0068

Определить и построить графическую зависимость максимальной погрешности аппроксимации от объёма выборки.

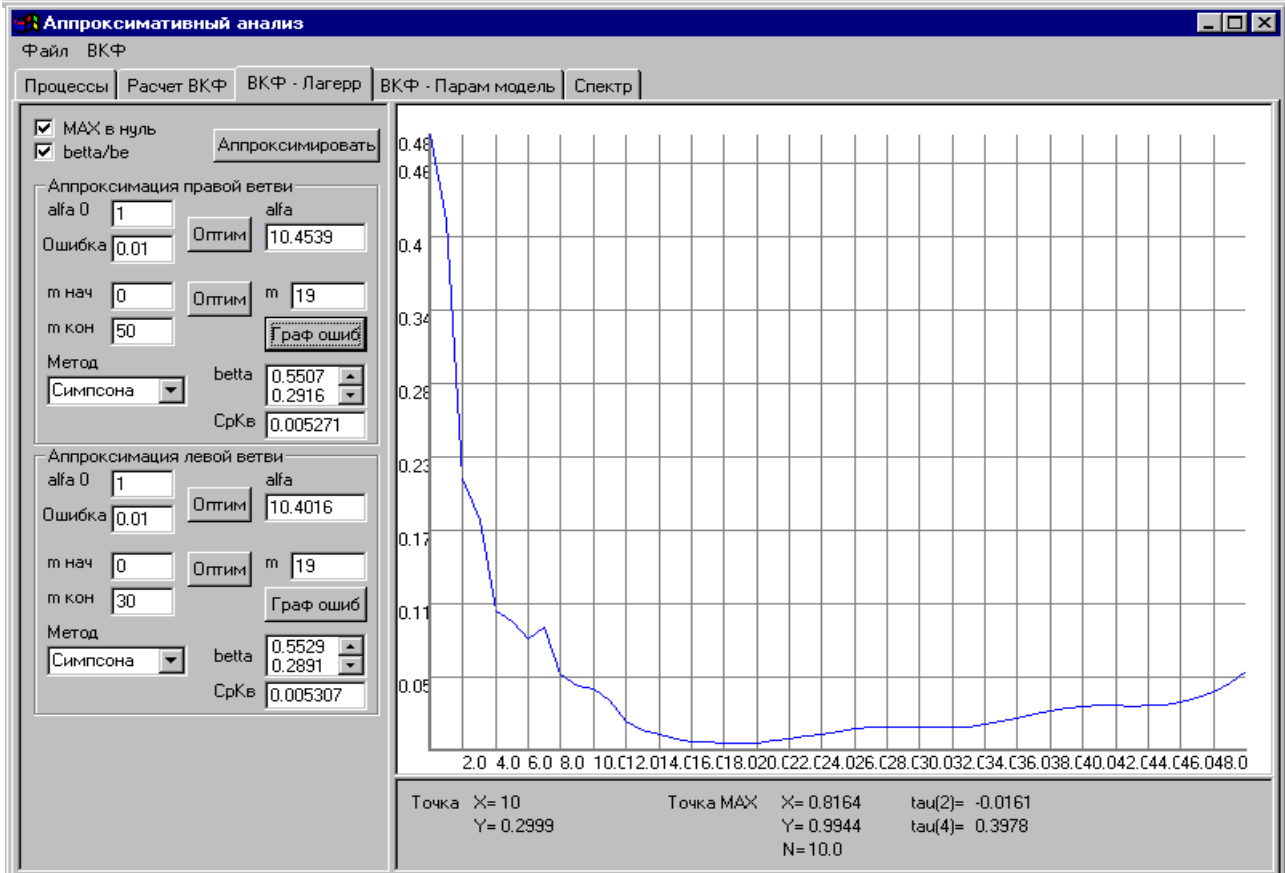
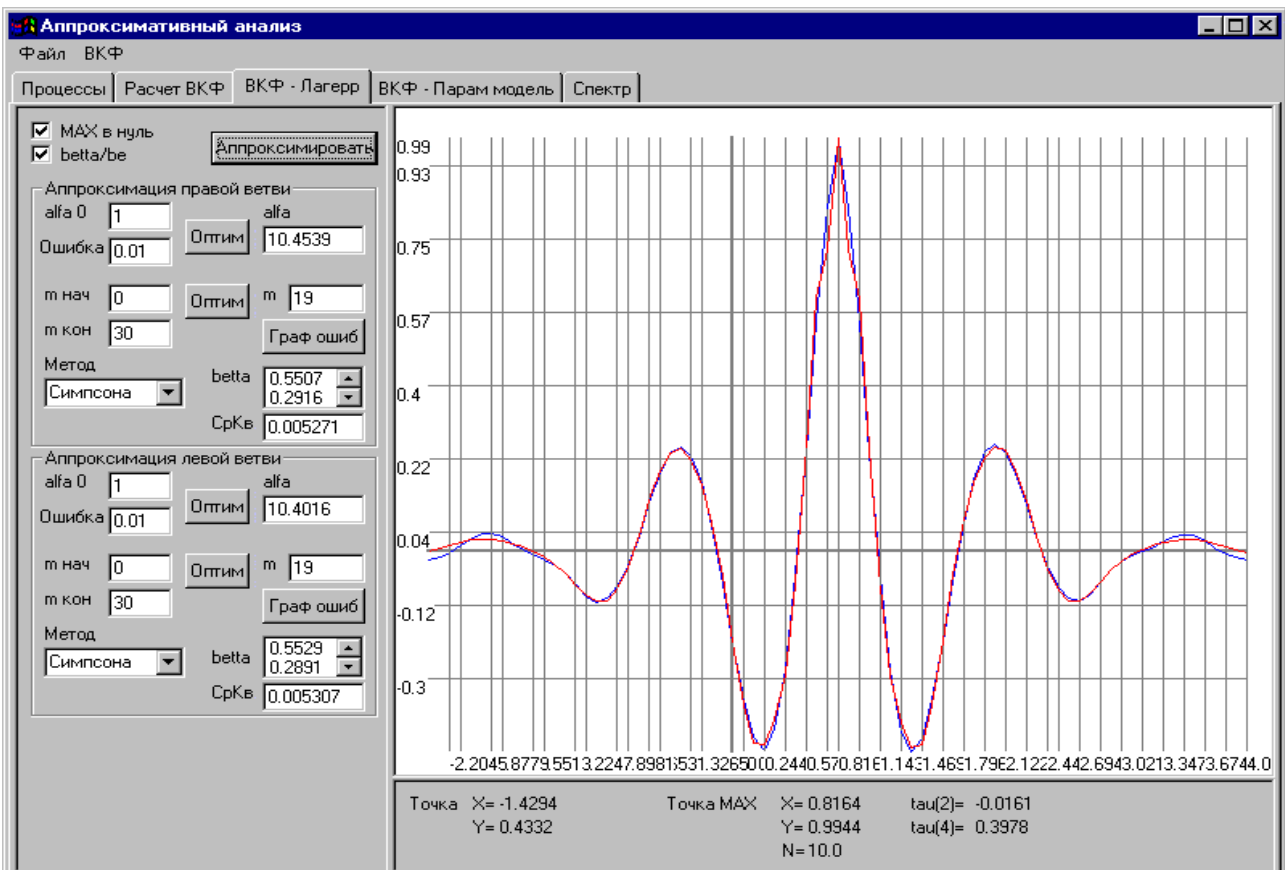


Рисунок 8.1. Экранные формы аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра и определения погрешности аппроксимации

9. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов параметрическими моделями.

9.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов.

Специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов заключается в следующем:

1. пропуски наблюдений, «дрожание» приводят к увеличению дисперсии оценки ординат корреляционной функции, особенно при небольшой выборке;
2. увеличение дисперсии оценки ординат корреляционной функции затрудняет её идентификацию по фазовым портретам;
3. при небольшой выборке теряет смысл понятие погрешности приближения, так как корреляционная функция оценивается с большой погрешностью;
4. минимальное значение погрешности аппроксимации позволяет убедиться, что выбрана лучшая модель из рассматриваемого класса моделей.

Исходной информацией для решения задачи аппроксимации является корреляционная функция неэквидистантного временного ряда, алгоритм оценивания которой при усреднении по времени с использованием интервальной корреляции имеет вид [1]:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{s=0}^{L} x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^{L} \delta_{j,i+s}}, \quad (9.1)$$

где j – номер реализации;

i – метка времени;

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{ent} \left[\frac{t_{j,i+s} - t_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9.2)$$

Оценка параметров аналитического выражения возможна различными методами: Ньютона, Ньютона с конечно-разностными производными и деформированного многогранника и т. д. [1].

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение 16).

9.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать неэквидистантный временной ряд с заданными видом корреляционной функции и моделью нерегулярной дискретизации со следующими параметрами - $M = \text{ent}[\tau_{k_{\max}} / \Delta\tau]$, $N=1000$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.
4. Задать вручную начальные приближения параметров корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции, воспользовавшись методами Ньютона, Ньютона с конечно-разностными производными и деформированного многогранника. Определить погрешности аппроксимации.
5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
6. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=5000$, задав начальные значения параметров в автоматическом режиме (остальные параметры остаются без изменения).
7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации.
8. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=1000$, $M_1=M/2$, где M_1 - число отсчётов корреляционной функции.
9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции при заданном M_1 от параметра нерегулярной дискретизации.

9.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций.
3. Пример экранной формы построения фазового портрета.
4. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности.
5. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.
6. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации корреляционной функции от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.
7. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже для $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$, $\Delta\tau = 0,082$.

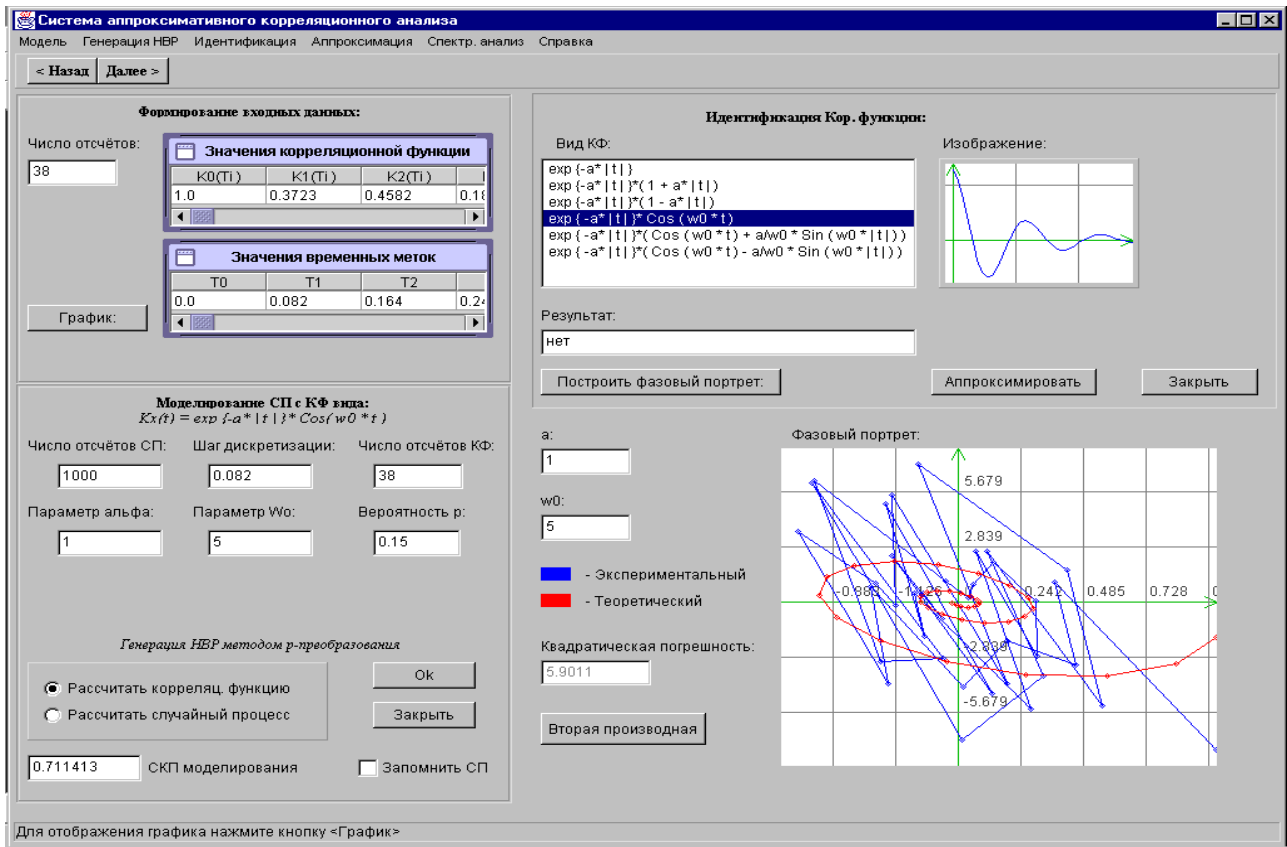


Рисунок 9.1. Фазовый портрет корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta_0 \tau$, $N=1000$, $p=0,15$

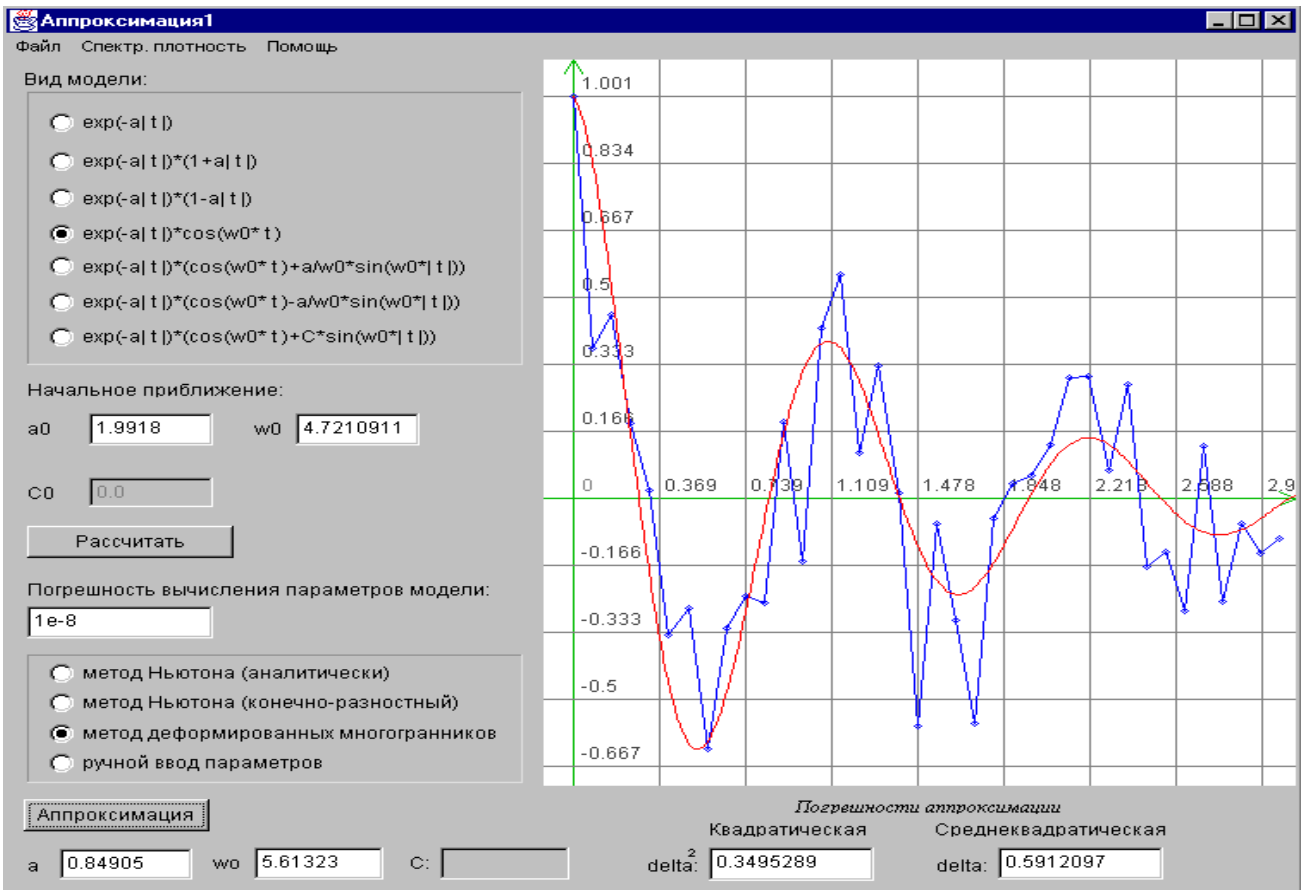


Рисунок 9.2. Результаты аппроксимации $N=1000$, $p=0,15$, $M=38$

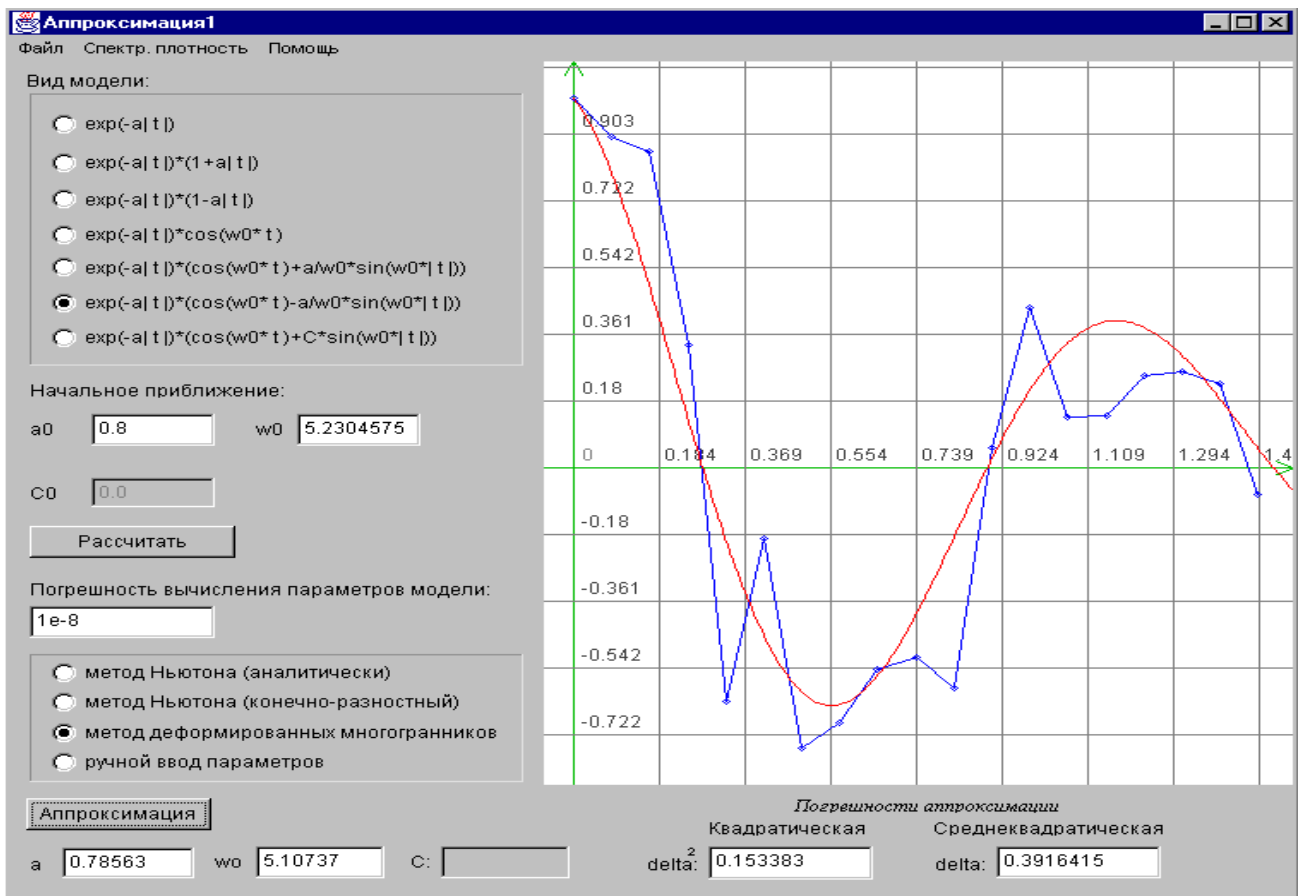


Рисунок 9.3. Результаты аппроксимации $N=1000$, $p=0,15$, $M=19$

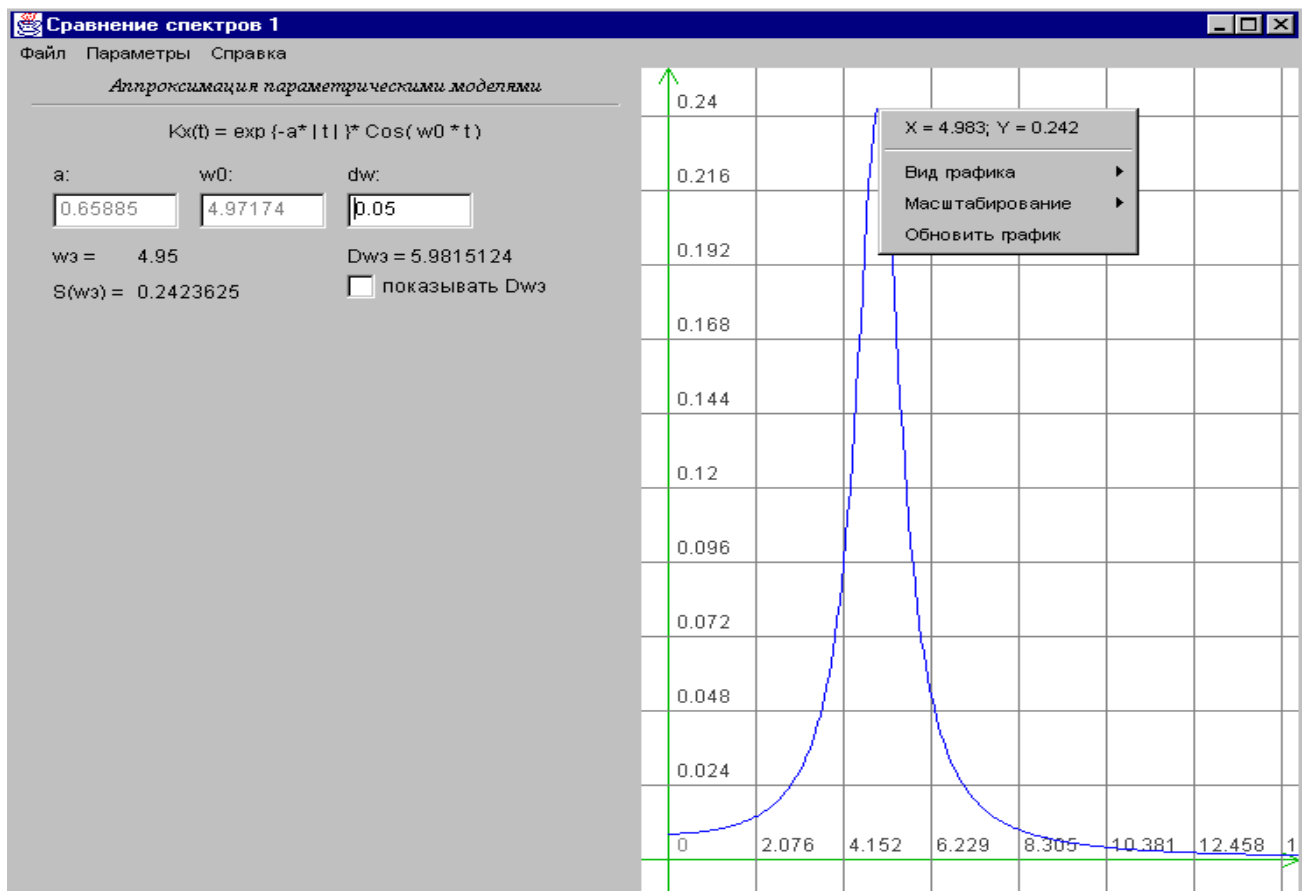


Рисунок 9.4. Спектральная плотность мощности неэквиливантного временного ряда $\mu = 5$

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta_0 \tau$ различными колебательными моделями $N=1000, M=38$.

Таблица 9.1

p	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
0,15	0,7497	4,656	0,5566	0,7527	4,7883	0,5646	0,74	4,5918	0,5612
0,3	0,953	5,3336	0,2162	0,96	5,5258	0,2314	0,9398	5,2408	0,2524
0,45	0,9488	5,0682	0,1901	0,9521	5,275	0,1953	0,9386	4,9658	0,2387
0,6	0,7603	4,8694	0,1285	0,7551	4,9992	0,1841	0,7545	4,8048	0,1457
0,75	0,7481	5,0549	0,0559	0,7511	5,1787	0,0783	0,7389	4,995	0,1376
0,9	0,8951	5,1822	0,1384	0,8897	5,3533	0,137	0,8882	5,0968	0,2068

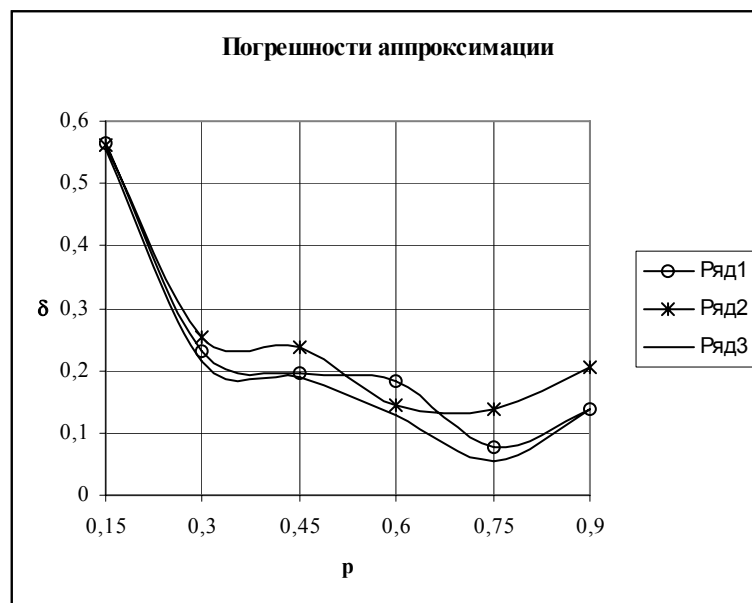


Рисунок 9.5. Зависимость погрешности аппроксимации от значения параметра p-преобразования

На рисунке 9.5 ряд 1 соответствует нормированной корреляционной функции $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, ряд 2 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$, ряд 3 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta_0 \tau$ различными колебательными моделями $N=5000, M=38$.

Таблица 9.2

p	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
0,15	0,9216	5,1423	0,266	0,914	5,3079	0,2573	0,912	5,0614	0,3199
0,3	0,871	4,8448	0,1338	0,8744	5,0102	0,1739	0,8581	4,7653	0,1836
0,45	0,8781	4,8542	0,0825	0,8775	5,016	0,1245	0,8662	4,7759	0,165
0,6	0,9561	5,132	0,0441	0,9549	5,3198	0,1197	0,9447	5,0402	0,1362
0,75	1,042	5,1247	0,05	1,042	5,3374	0,115	1,0269	5,0221	0,1624
0,9	0,9416	5,0552	0,0568	0,9417	5,2322	0,1177	0,9283	4,9701	0,1524

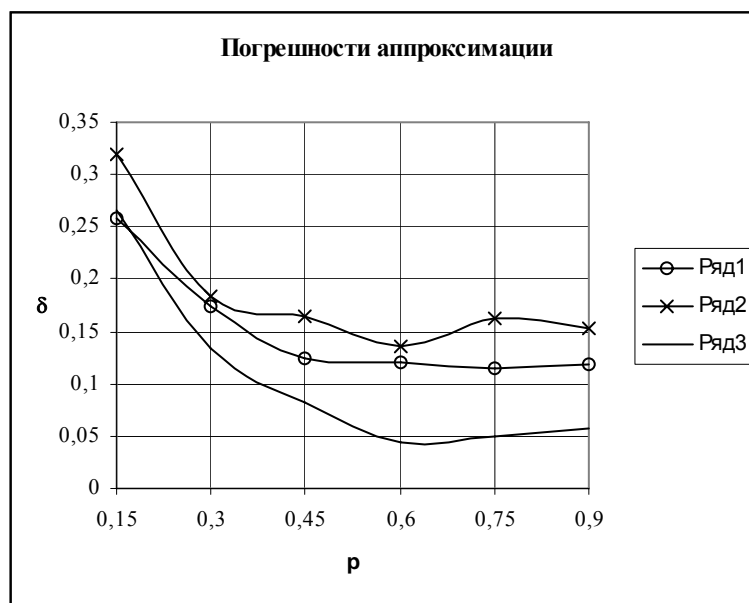


Рисунок 9.6. Зависимость погрешности аппроксимации от значения параметра p-преобразования

На рисунке 9.6 ряд 1 соответствует нормированной корреляционной функции $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, ряд 2 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$, ряд 3 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$.

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta_0 \tau$ различными колебательными моделями $N=1000, M=19$.

Таблица 9.3

p	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
0,15	0,7957	5,2124	0,3802	0,7909	5,4186	0,3828	0,7856	5,1074	0,3916
0,3	1,3591	5,0029	0,1514	1,3751	5,4569	0,2156	1,3265	4,77	0,1955
0,45	0,8242	4,6374	0,1376	0,8099	4,8729	0,2013	0,8126	4,5158	0,1309
0,6	1,1761	4,94	0,0881	1,1671	5,288	0,1472	1,1512	4,7633	0,1769
0,75	1,046	5,0577	0,0482	1,0387	5,3396	0,0923	1,0236	4,9177	0,162
0,9	1,0679	5,0044	0,0559	1,0601	5,2993	0,138	1,0461	4,8559	0,1352

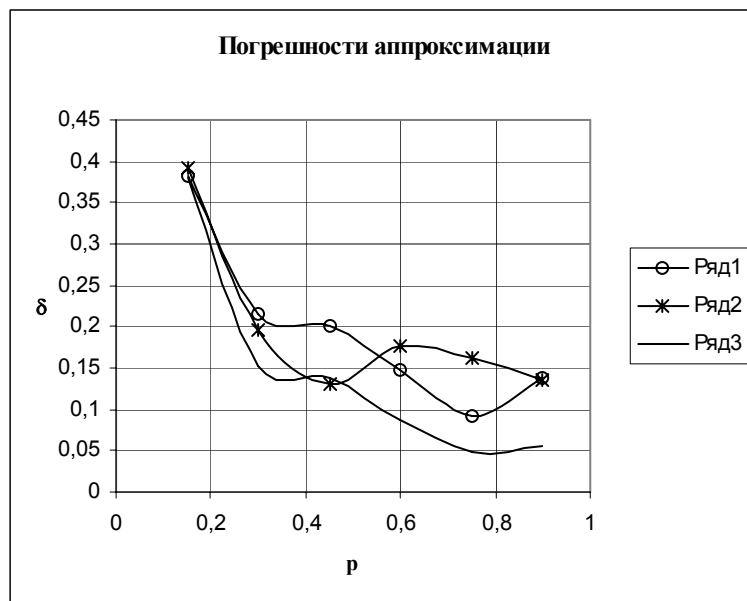


Рисунок 9.7. Зависимость погрешности аппроксимации от значения параметра p-преобразования

На рисунке 9.7 ряд 1 соответствует нормированной корреляционной функции $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, ряд 2 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$, ряд 3 - $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$.

9.4. Контрольные вопросы

1. Назовите методы оценки корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.
2. Можно ли идентифицировать модель корреляционной функции неэквидистантного временного ряда по фазовому портрету?
3. Как образом производится идентификация модели корреляционной функции неэквидистантного временного ряда?
4. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда параметрическими моделями?
5. В чём заключается специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда параметрическими моделями?
6. Каким образом производится аппроксимация спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов?

10. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра.

10.1. Теоретические основы лабораторной работы

В решении этой задачи возникает необходимость при обработке результатов научных исследований, комплексных испытаний с целью построения аналитических моделей корреляционных функций и спектральных плотностей неэквидистантных временных рядов, когда априори неизвестен вид модели корреляционной функции или погрешность аппроксимации не устраивает исследователя.

Теоретическое обоснование метода описано в лабораторной работе 6, а специфика аппроксимации корреляционно-спектральных характеристик – в лабораторной работе 9.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. приложение 16).

10.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать неэквидистантный временной ряд с заданными видом корреляционной функции и моделью нерегулярной дискретизации со следующими параметрами - $M = \text{ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $N=1000$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.
4. Определить оптимальные значения параметров аналитического выражения корреляционной функции $\alpha, b_0, \dots, b_m, m$, воспользовавшись методами Симпсона. Определить погрешности аппроксимации.
5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
6. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=5000$ (остальные параметры остаются без изменения).
7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации.
8. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=1000$, $M_1=M/2$.
9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции при заданном M_1 от параметра нерегулярной дискретизации.

10.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.
3. Пример экранной формы построения фазового портрета.
4. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра.
5. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.
6. Выводы по работе.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы приведен ниже для $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$.

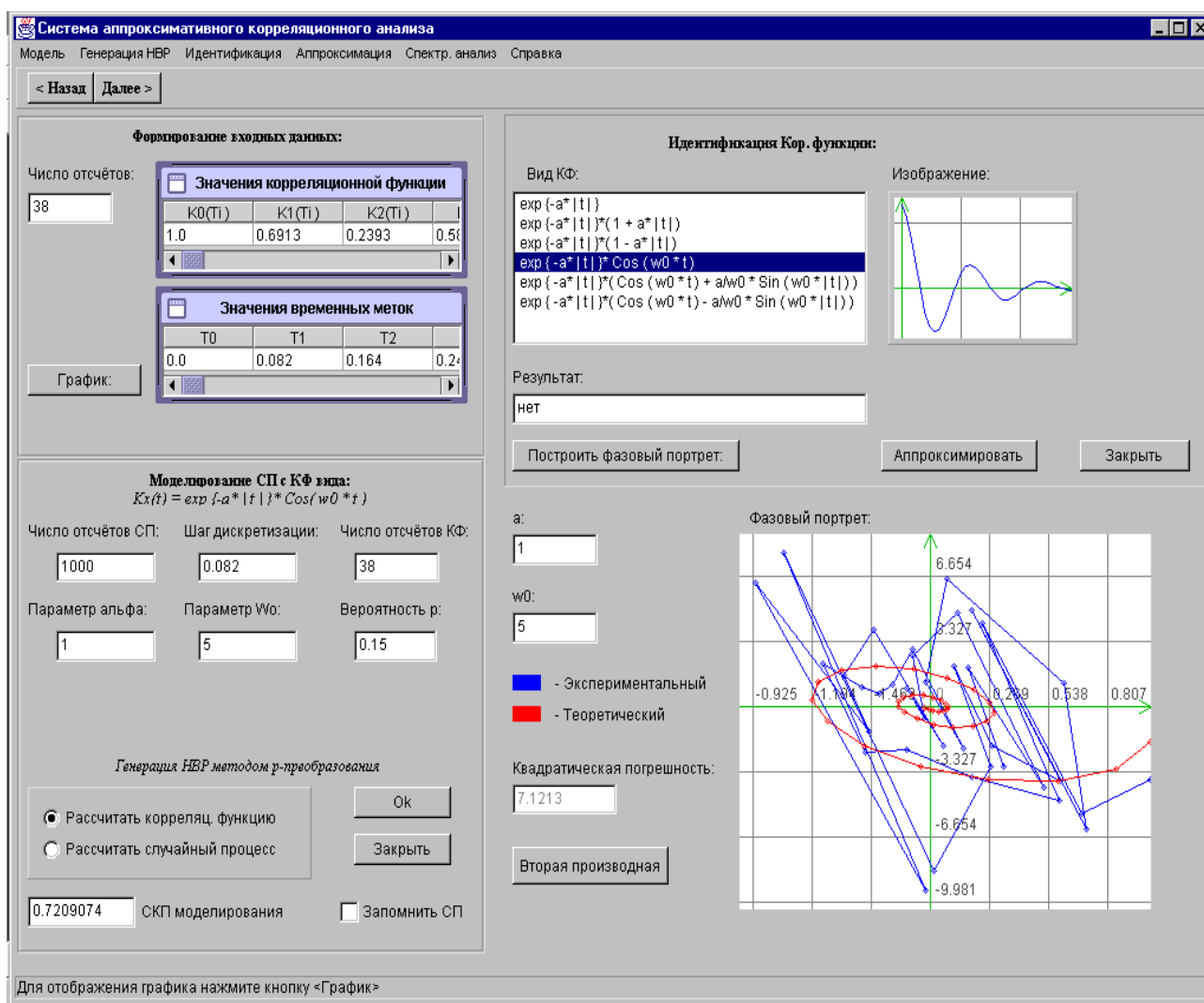


Рисунок 10.1. Экранная форма фазового портрета корреляционной функции неэквидистантного временного ряда $N=1000$, $p=0,15$

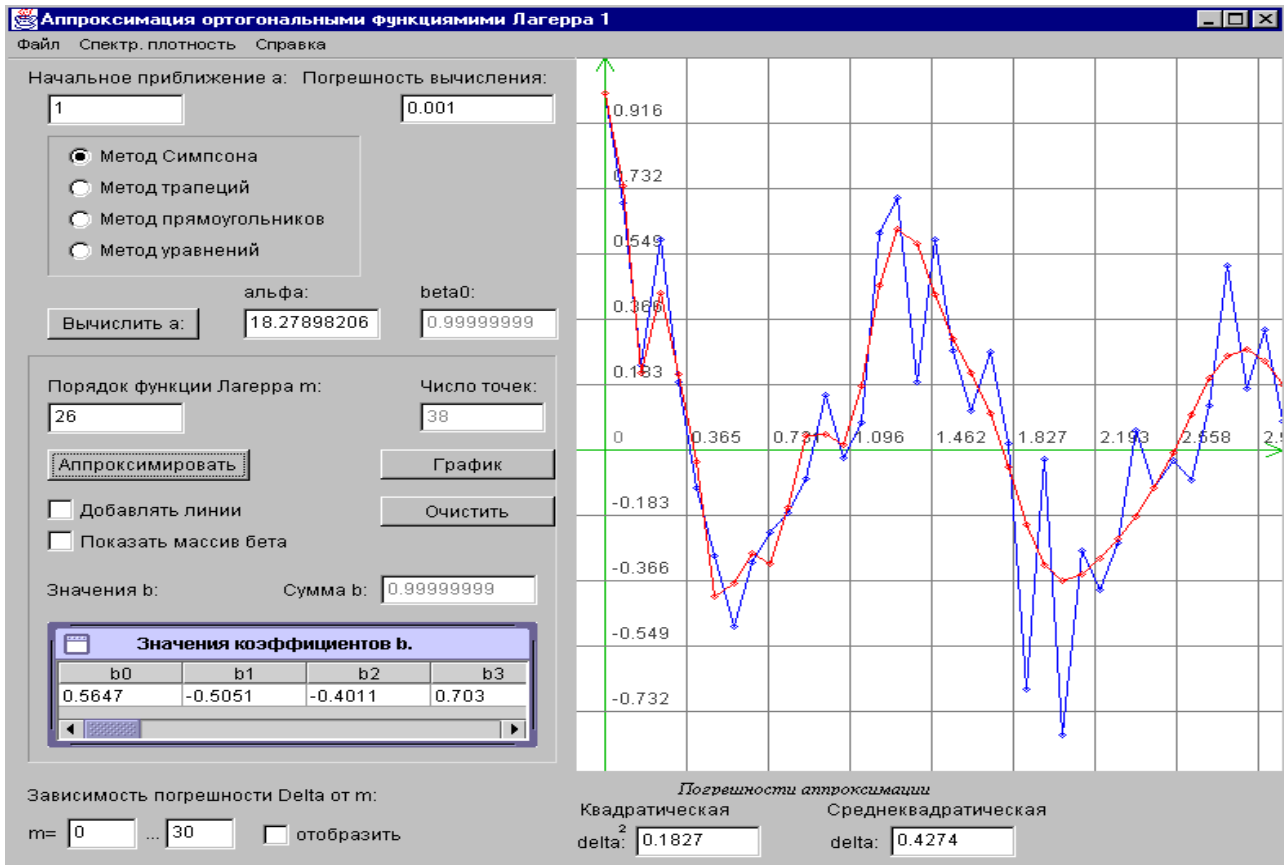


Рисунок 10.2. Экранная форма аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра $N=1000$, $\rho=0,15$

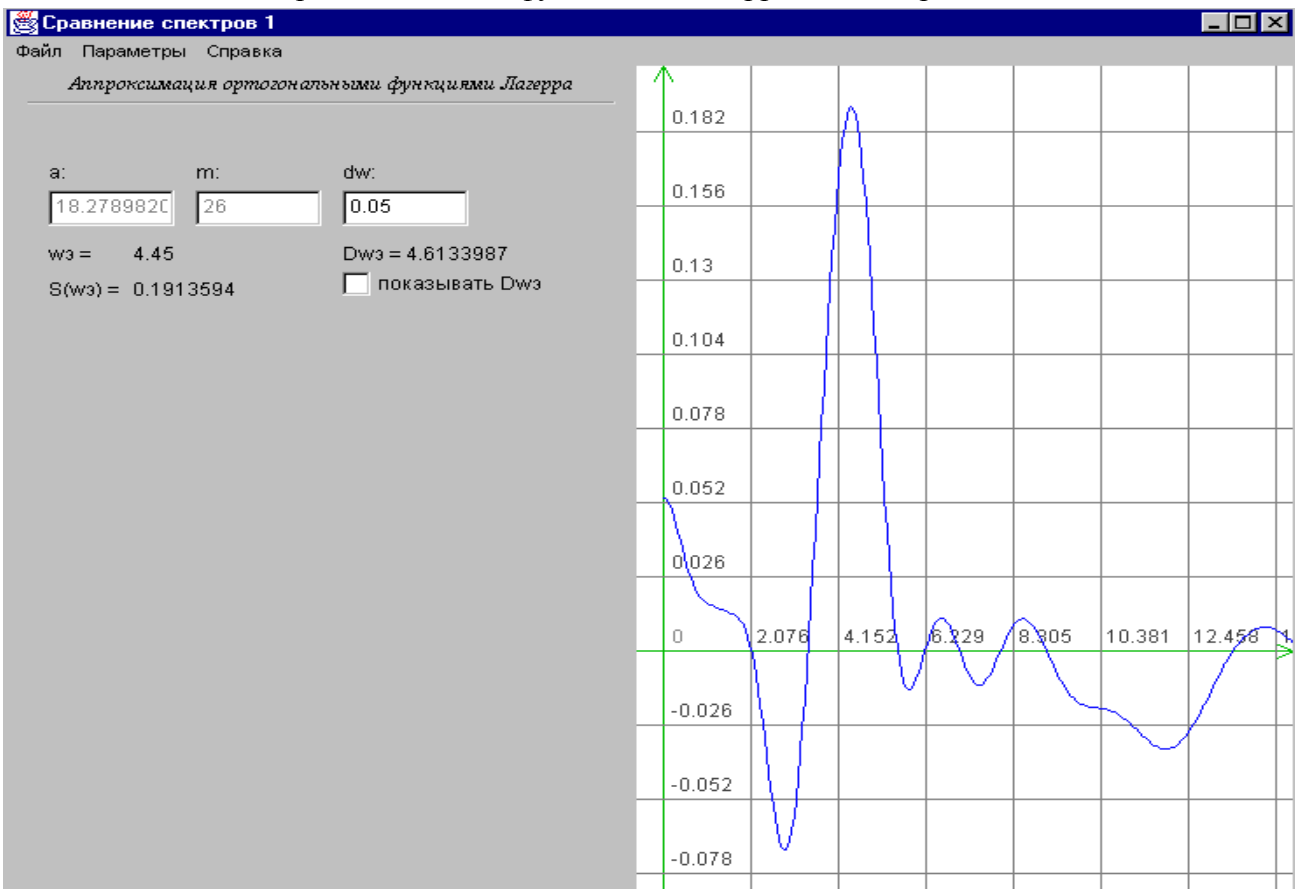


Рисунок 10.3. Экранная форма аппроксимации спектральной плотности ортогональными функциями Лагерра $N=1000$, $\rho=0,15$

Зависимость параметров аппроксимирующего выражения и погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$ различными колебательными моделями.

Таблица 10.1

p	N=1000, M=38			N=5000, M=38			N=1000, M=19		
	α	m	δ	α	m	δ	α	m	δ
0,15	21,4748	24	0,4861	21,4748	18	0,2256	18,7769	14	0,2273
0,3	12,0806	16	0,1783	13,7151	14	0,132	14,8735	14	0,1978
0,45	13,4674	14	0,1296	13,6259	14	0,0923	13,3098	14	0,0716
0,6	13,8032	24	0,137	13,9906	14	0,076	14,3205	16	0,111
0,75	13,7007	14	0,085	13,9279	14	0,0726	14,7539	14	0,1186
0,9	13,0102	14	0,0712	14,2312	14	0,073	14,0854	14	0,0764

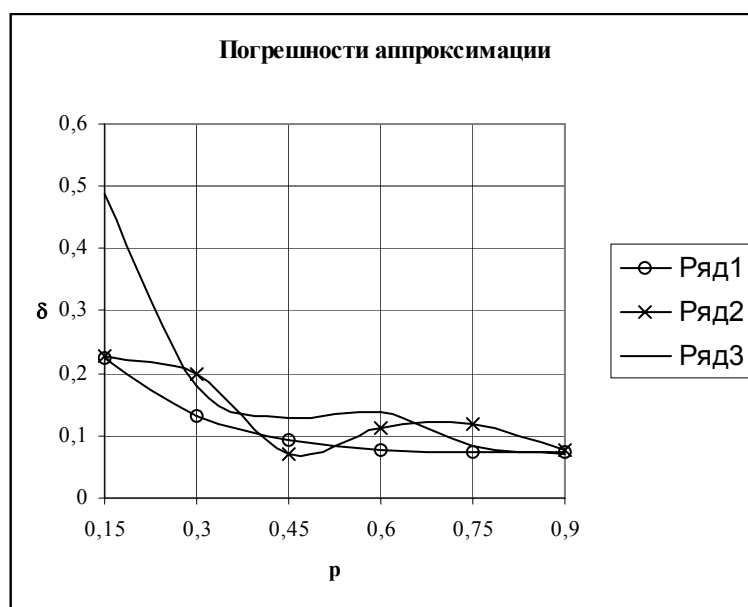


Рисунок 10.4. Погрешности аппроксимации

На рис. 10.4. ряд 1 соответствует следующим параметрам: $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$ N=5000, M=38, ряд 2 – N=1000, M=19, ряд 3 – N=1000, M=38.

10.4. Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется аппроксимация корреляционных функций неэквилидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение параметра α при аппроксимации корреляционных функций неэквилидистантного временного ряда ортогональными функциями Лагерра?
3. В чём заключается специфика аппроксимации корреляционных функций неэквилидистантного временного ряда ортогональными функциями Лагерра?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом лабораторном практикуме рассмотрены вопросы:

1. описания и моделирования случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками, а также проверки качества моделирования с использованием фазовых портретов;

2. аппроксимативного анализа базовых функциональных вероятностных характеристик временных рядов:

- функций и плотностей распределения вероятностей;
- корреляционных функций;
- спектральных плотностей мощности, -

параметрическими моделями, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

3. аппроксимативного анализа базовых функциональных вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов.

Все лабораторные работы выполняются с помощью трёх разработанных автоматизированных информационных систем для моделирования и аппроксимативного анализа вероятностных характеристик временных рядов, включая неэквидистантные.

Учитывая разнообразие случайных процессов, естественно, работу в этой области нельзя считать решенной в полной мере. Однако автор полагает, что предлагаемый базовый вариант лабораторных работ предоставляет возможность для обучения научных сотрудников, аспирантов и студентов методам имитационного моделирования и обработки случайных процессов. Кроме этого, разработанные автоматизированные системы могут применяться для решения разнообразных задач науки и техники методом имитационного моделирования, а так же обработки результатов экспериментальных исследований объектов различной природы. Т.е. предлагаемые системы можно использовать в качестве вспомогательных систем при выполнении лабораторных работ по другим курсам, например связанным с испытаниями объектов авиационно-космической техники.

Отметим, что предлагаемый перечень лабораторных работ отражает лишь опыт и точку зрения автора и может быть существенно расширен как по номенклатуре работ, так и по количеству пунктов исследований в каждой работе. Тем не менее, тридцатилетний опыт преподавания и научно-исследовательской работы позволяет мне рекомендовать в качестве **обязательного варианта лабораторные работы № 1, 2, 4-6**. Аппроксимация взаимных корреляционно-спектральных характеристик (лабораторные работы № 7-8) базируется на аппроксимации авто корреляционно-спектральных характеристик и легче воспринимается студентами, если выполнены лабораторные работы № 5-6.

Вопросы, связанные с моделированием и анализом вероятностными характеристиками неэквидистантных временных рядов (лабораторные работы № 4, 9-10), как правило, выходят за рамки обычных университетских курсов и представляют интерес для специалистов, занимающихся разработкой адаптивных систем сбора обработки информации, обработкой данных с пропусками наблюдений самого разнообразного характера.

Результаты моделирования и обработки данных могут быть запомнены в соответствующих базах данных, что позволяет объединить ряд лабораторных работ, например:

- первую работу с четвертой;
- вторую – с пятой и шестой;
- третью – с девятой и десятой.

В этом случае один исследователь генерирует временные ряды с заданными вероятностными характеристиками, запоминает и передает их другому исследователю, который осуществляет первичную и вторичную обработку и определяет их аналитические модели. Затем полученные в первом и втором случае результаты сравниваются и обсуждаются в ходе дискуссии между собой двумя исследователями, что позволяет сделать более точные выводы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 329 с.: ил.
2. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 209 с.: ил.
3. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 375 с.: ил.
4. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74//Минприбор. – 1974. – 76 с.

Типовые законы распределения

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{x-a}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции рас- пределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	0; 0;	$(b-a)^4/80;$ -1,2;	$a = \alpha_1 - \sqrt{3\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{3\mu_2};$	
2	Симпсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции рас- пределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/24$	0; 0;	$(b-a)^4/240;$ -0,6;	$a = \alpha_1 - \sqrt{6\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{6\mu_2};$	
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & (-a < x < a), \\ 1, & (a < x < \infty), \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции рас- пределения	
	0	$a^2/2$	0; 0;	$3a^4/8;$ -1,5;	$a = \sqrt{2\mu_2}$	
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$			$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-\mu}{a} + \frac{1}{2}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$		
	Начальных и центральных моментов не существует, так как соответствующие интегралы расходятся					

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$		
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, & (-\infty < x < \mu), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, & (\mu < x < \infty), \end{cases}$		
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	μ	$2/\lambda^2$	$6/\lambda^3;$ $\approx 2,1;$	$24/\lambda^4;$ $3;$	
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha \beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); & \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0), \\ 1 - \exp(-\beta x^\alpha), & (0 < x < \infty) \end{cases}$		
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\Gamma(1+1/\alpha)\beta^{-1/\alpha}$	$\left[\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma^2(1+1/\alpha) \right] \times \beta^{-2/\alpha}$	$\left[\Gamma(1+3/\alpha) - 3\Gamma(1+1/\alpha) \times \Gamma(1+2/\alpha) + 2\Gamma^3(1+1/\alpha) \right] \times \beta^{-3/\alpha};$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$	$\left[\Gamma(1+4/\alpha) - 4\Gamma(1+3/\alpha) \times \Gamma(1+1/\alpha) + 6\Gamma(1+2/\alpha) \times \Gamma^2(1+1/\alpha) - 3\Gamma^4(1+1/\alpha) \right] \times \beta^{-4/\alpha};$ $\mu_4 / \mu_2^2 - 3;$	
7	Рэлея	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$		
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1,25\sigma$	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2 \approx 0,43 \sigma^2$	$\frac{(\pi-3)\sqrt{\pi}}{2} \times \sigma^3 \sqrt{2};$ $\approx 0,63;$	$\frac{32-3\pi^2}{4} \sigma^4;$ $\approx -0,3;$	
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$		
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3;$ $2;$	$9/\alpha^4;$ $6;$	

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$			$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	0	$\frac{\pi^2}{12a^2}$	0; 0;	$\frac{7\pi^4}{240a^4};$ 4,2;	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\mu_2}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$			$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	a	σ^2	0; 0;	$3\sigma^4;$ 0;	$a = \alpha_1;$ $\sigma = \sqrt{\mu_2};$
11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right), x > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^x \exp\left(-t^2/2\sigma^2\right) dt, x > 0 \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\approx 0,8\sigma$	$\approx 0,36\sigma^2$	$\approx 0,22\sigma^3;$ $\approx 1;$	$\approx 0,54\sigma^4;$ $\approx 0,85;$	$\sigma = 1,25\alpha_1$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 \quad (n = 1, 2, \dots)$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \frac{\Gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	λ/α	λ/α^2	$2\lambda/\alpha^3;$ $2/\sqrt{\lambda};$	$3\lambda(\lambda+2)/\alpha^4;$ $6/\lambda;$	$\alpha = \alpha_1/\mu_2;$ $\lambda = \alpha_1^2/\mu_2;$

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$
13	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}} \right]; \\ 0 (0 \leq x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, (0 \leq x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	$\frac{\sigma \sqrt{2\pi} (n-1)!!}{2^{n/2} \Gamma(n/2)};$ $\frac{\sigma \sqrt{2\pi} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma(n/2)};$ $(n = 2k)$ $(n = 2k + 1)$	$\sigma^2 \left[n - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$	$\sigma_3 \sqrt{2} \left[(1-2n) \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 4 \frac{\Gamma^3\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{n}{2}\right)} \right];$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$
14	Усечённый нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{B(x) - B(x_1)}{B(x_2) - B(x_1)}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$
	α_1	μ_2	
	$a + E\sigma;$ $D(x) = \frac{x-a}{\sigma}; C(x) = \exp\left(-\frac{D^2(x)}{2}\right);$ $E = \frac{C(x_1) - C(x_2)}{B(x_2) - B(x_1)};$		$\sigma^2 \left\{ 1 - E^2 - \frac{A}{\sqrt{2\pi}} [D(x_2)C(x_2) - D(x_1)C(x_1)] \right\}$

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
15	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x} (\beta x)^k}{k!}, \\ (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	α/β	α/β^2	$2\alpha/\beta^3;$ $2/\sqrt{\alpha};$	$3\alpha(\alpha+2)/\beta^4;$ $6/\alpha;$	$\alpha = \alpha_1^2/\mu_2;$ $\beta = \alpha_1/\mu_2;$
16	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma\left(\alpha+1; \frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$2(\alpha+1)\beta^3;$ $\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}};$	$3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4$ $\frac{6}{\alpha+1};$	$\alpha = \frac{\alpha_1^2}{\mu_2} - 1;$ $\beta = \frac{\mu_2}{\alpha_1};$
17	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma(m+1, x)}{\Gamma(m+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$m+1$	$m+1$	$2(m+1);$ $\frac{2}{\sqrt{m+1}};$	$3(m+3)(m+1);$ $\frac{6}{m+1};$	$m = \alpha_1 - 1$
18	Максвелла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\approx 1,6\sigma$	$\approx 1,73\sigma^2$	$\approx 0,15\sigma^3;$ $\approx 0,07;$	$\approx 13,5\sigma^4;$ $\approx 1,55;$	$\sigma \approx 0,625\alpha_1$

Характеристические функции

№	Название закона	$f_x(x)$	$\varphi_x(u)$
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$
2	Симпсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	$-\frac{4}{u^2(b-a)^2} (e^{iub/2} - e^{iua/2})$
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{e^{iux}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$	$\exp[iu\mu - a u]$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$	$\frac{\exp(iu\mu)}{1+u^2/\lambda^2}$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^2}{k!} \beta^{-k/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$1 - \frac{u\sigma}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} (u\sigma\sqrt{2})^{2k+2} + i \frac{u\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \exp(-u^2\sigma^2/2)$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{i\pi}{2a \operatorname{sh} \frac{u\pi}{2a}}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\exp(iua - u^2\sigma^2/2)$

11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp(-x^2 / 2\sigma^2), x > 0 \end{cases}$	$\exp(u^2\sigma^2 / 2) \times$ $\times \left[1 + \Phi\left(\frac{iu\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right];$ $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(1 - iu/\alpha)^\lambda}$
13	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}$
14	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - iu\beta)^{\alpha+1}}$
15	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - iu)^{m+1}}$

Обратные функции законов распределения

Закон распределения	Обратная функция
Симпсона	$\begin{cases} a, y = 0 \\ (b - a) * \sqrt{\frac{y}{2}} + a, (0 < y < \frac{1}{2}) \\ b - \sqrt{\frac{1-y}{2}} * (b - a), [\frac{1}{2} < y < 1) \\ b, y = 1 \end{cases}$
Арксинуса	$\begin{cases} -a, y = 0 \\ -a * \cos(\pi y), (0 < y < 1) \\ a, y = 1 \end{cases}$
Коши	$a * \operatorname{tg}(\pi y - \frac{\pi}{2}) + \mu$
Лапласа	$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} * \ln(2y) + \mu, (0 < y < \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(2 * (1 - y)) + \mu, [\frac{1}{2} < y < 1) \end{cases}$
Вейбулла	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ \sqrt[\alpha]{-\frac{1}{\beta} \ln(1 - y)}, (0 < y < 1) \end{cases}$
Рэля	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ \sqrt{-2 * \sigma^2 \ln(1 - y)}, (0 < y < 1) \end{cases}$
Экспоненциальный односторонний	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y), (0 < y < 1) \end{cases}$
Равномерный	$y(b - a) + a$
$\operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{1}{2 * a} \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right)$

Характеристики типовых законов распределения (Рд=0,999)

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
1	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2}}$	$6,8 \sigma_x$
2	Односторонний нормальный	$\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2}}$	$3.4 \sigma_x$
3	Усечённый нормальный	$\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i - a}{\sigma_x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^2} e^{-\frac{1}{2}}$	$(x_2 - x_1) \sigma_x$
4	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	X_3 определяется из уравнения $\left(x^2 + a^2 - \sigma_x^2\right) \operatorname{ch} \frac{ax}{\sigma_x^2} - 2ax \operatorname{sh} \frac{ax}{\sigma_x^2} = 0;$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^3} \left[(x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} + (x+a) e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	$3,15 \sigma_x$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
5	Логарифмический нормальный	$\frac{1}{x\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$-\frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}x^2} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}} (\sigma_x^2 + \ln x - a)$ $x = e^{a-1,5\sigma_x^2 \mp \sqrt{0,25\sigma_x^4 + 1}}$	$e^{3,085\sigma_x + a}$
6	Экспоненциальный	$\alpha e^{-\alpha x}$	α^2	$\frac{6,9078}{\alpha}$
7	Пирсона	$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \lambda = \frac{n}{2}, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{\alpha^2 \sqrt{\lambda-1} (\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda)} e^{-(\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})}$	$\frac{4}{\alpha}$
8	Гамма-распределение	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, \alpha > -1, \beta > 0$	$\frac{\sqrt{\alpha}(\alpha-\sqrt{\alpha})^{\alpha-1}}{\beta^2\Gamma(\alpha+1)} e^{-(\alpha-\sqrt{\alpha})}$	$9,5\beta$
9	Максвелла	$\frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{4,1357\sigma_x}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} e^{-0,2192}$	$4,1\sigma_x$
10	Распределение модуля многомерного вектора	$\frac{2x^{n-1}}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{[\sigma_x \sqrt{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}]^{n-2}}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} [\sqrt{8n-7}-1] \times$ $\times e^{-\frac{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}{2}}$	$3,8\sigma_x$
11	«m- распределение» (Накагами)	$\frac{2m^m x^{2m-1}}{\Gamma(m)\sigma_x^{2m}} e^{-\frac{mx^2}{\sigma_x^2}}, m \geq 1/2$	$m = 1/2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-1/2}}{\sigma_x^2}$ $m = 1, \frac{6}{\sigma_x^2} e^{-3/2}$	$\frac{2,33\sigma_x}{\sqrt{m}}$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
12	Показательно-степенной	$\frac{x^m}{m!} e^{-x}$	$\sqrt{m} \frac{(m - \sqrt{m})^{m+1}}{m!} e^{-(m - \sqrt{m})}$	
13	Эрланга	$\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} e^{-\beta x}, \alpha = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{\beta^2 \sqrt{\alpha - 1} (\alpha - 1 - \sqrt{\alpha - 1})^{\alpha-2}}{(\alpha - 1)!} e^{-(\alpha - 1 - \sqrt{\alpha - 1})}$	
14	Гиперэкспоненциальный	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n e^{-\lambda_n x}$	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n^2$	

Таблица χ^2 распределения

r\p	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10
1	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60
3	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25
4	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78
5	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24
6	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64
7	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02
8	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36
9	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68
10	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99
11	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28
12	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55
13	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81
14	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,10
15	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,30
16	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,50	23,50
17	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,60	24,80
18	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,80	26,00

Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова

$\delta \backslash N$	500	1000	2000	5000	8000	10000
0,0025	0,0559	0,0790	0,1118	0,1767	0,2236	0,25
0,005	0,1118	0,1581	0,2236	0,3535	0,4472	0,5
0,01	0,2236	0,3162	0,4472	0,7071	0,8944	1
0,02	0,4472	0,6324	0,8944	1,4142	1,7889	2
0,03	0,6708	0,9486	1,3416	2,1213	2,6833	3
0,04	0,8972	1,2648	1,7888	2,8284	3,5777	4
0,05	1,1208	1,5810	2,2360	3,5355	4,4721	5

Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации

$K_x(\tau)$	$h(\tau)$	K
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$k\alpha e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$k\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$k\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{3\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} - \alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{k\alpha \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$k\alpha e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$

Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации

Вид модели	Моделирующий алгоритм	Параметры алгоритма
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; a_0 = \sqrt{1 - p^2}; b_1 = p$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p^3(1 + \gamma) - p(1 - \gamma); \alpha_1 = 1 - 4p^2\gamma - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0; \alpha_1 = 1 - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2};$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 + 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2};$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$

Параметрические модели корреляционных функций

На рис П. 9.1. графики соответствуют (сверху вниз): $\rho_{x4}(\tau)$ (ряд1), $\rho_{x2}(\tau)$ (ряд 2), $\rho_{x1}(\tau)$ (ряд 3), $\rho_{x3}(\tau)$ (ряд 4).

На рис. П. 9.2 и далее верхняя кривая соответствует модели

$$\rho_{6x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\tau} \sin \omega_0 |\tau| \right), \text{ средняя - } \rho_{5x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \text{ нижняя -}$$

$$\rho_{7x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\tau} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

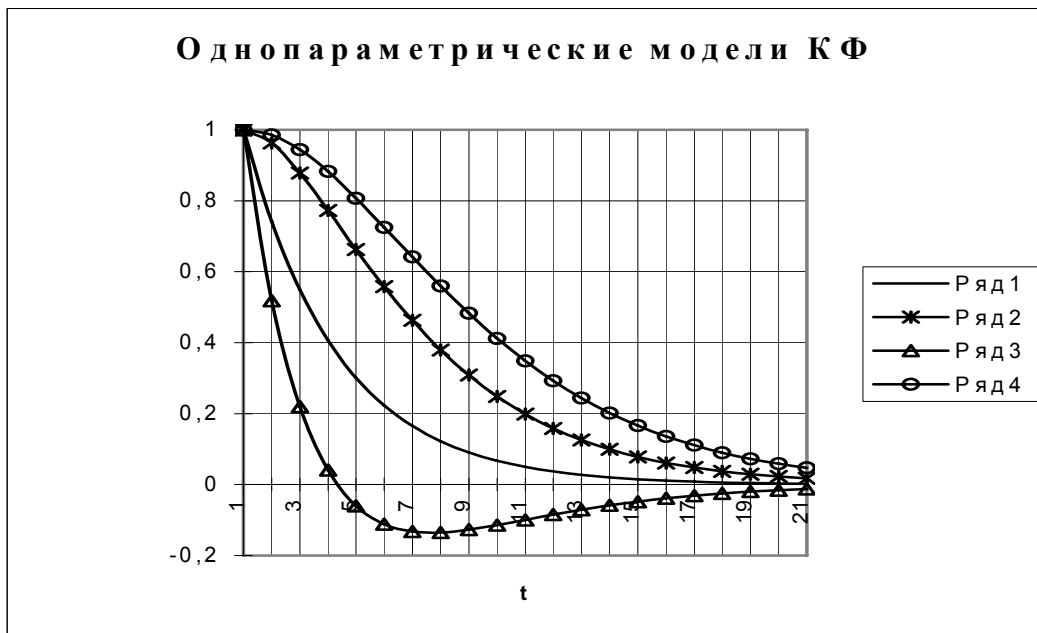


Рисунок П.9.1

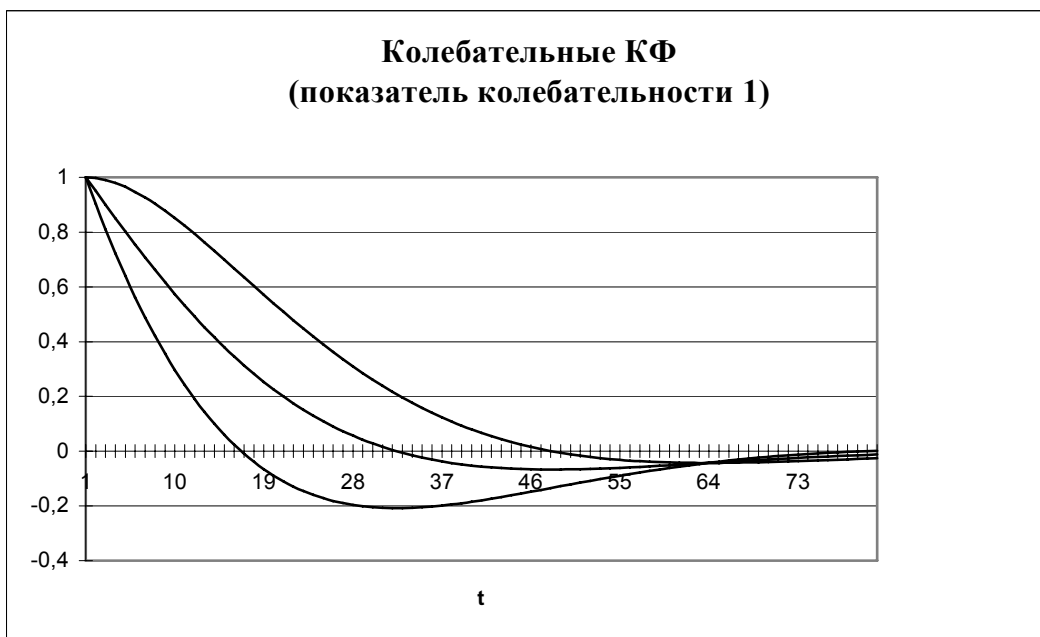


Рисунок П.9.2

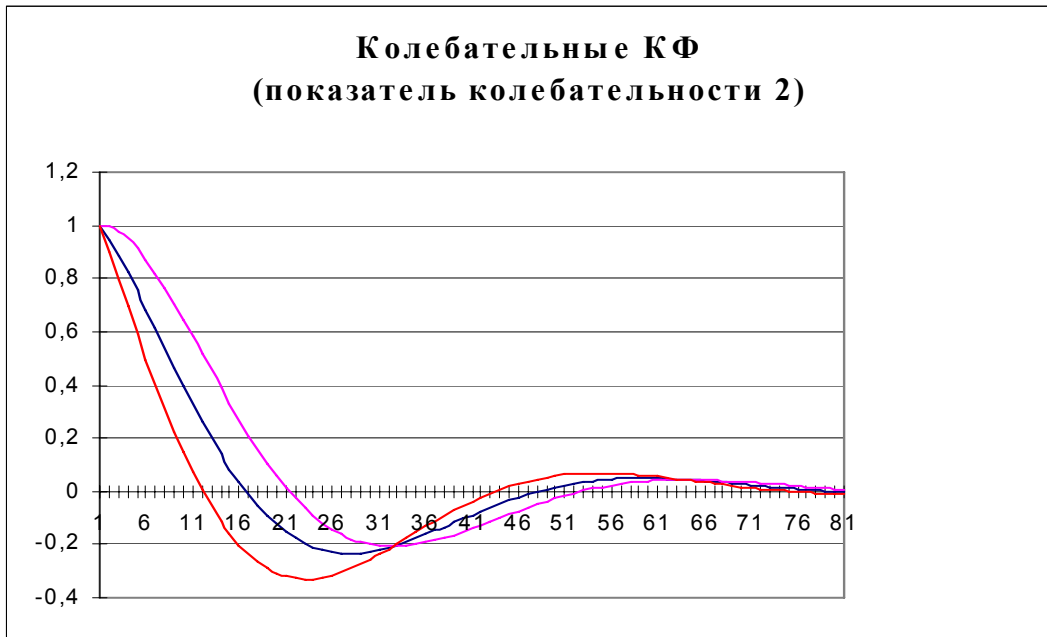


Рисунок П.9.3

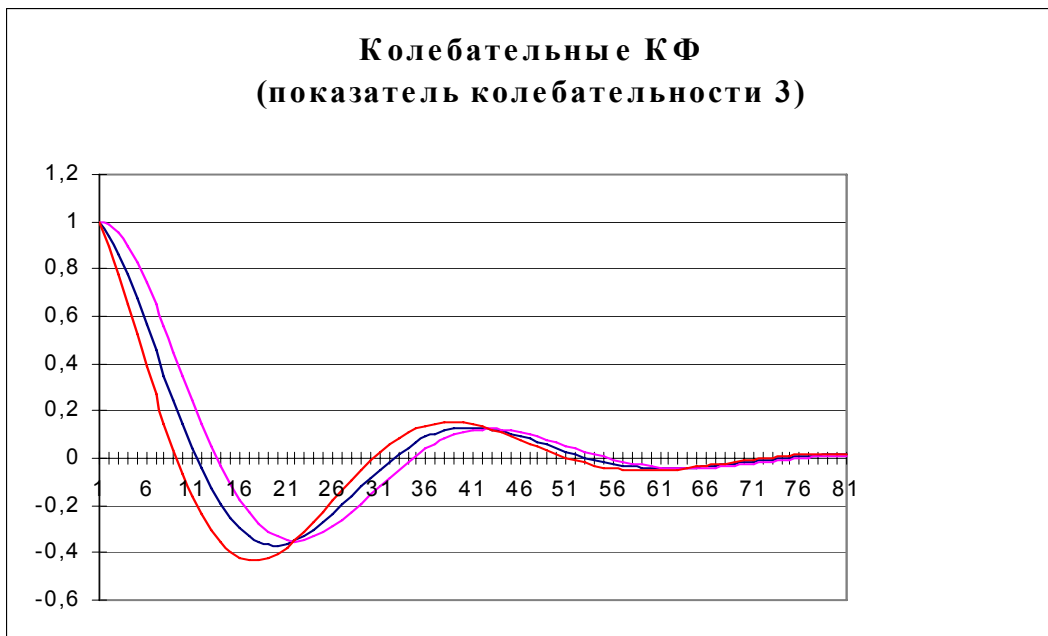


Рисунок П.9.4

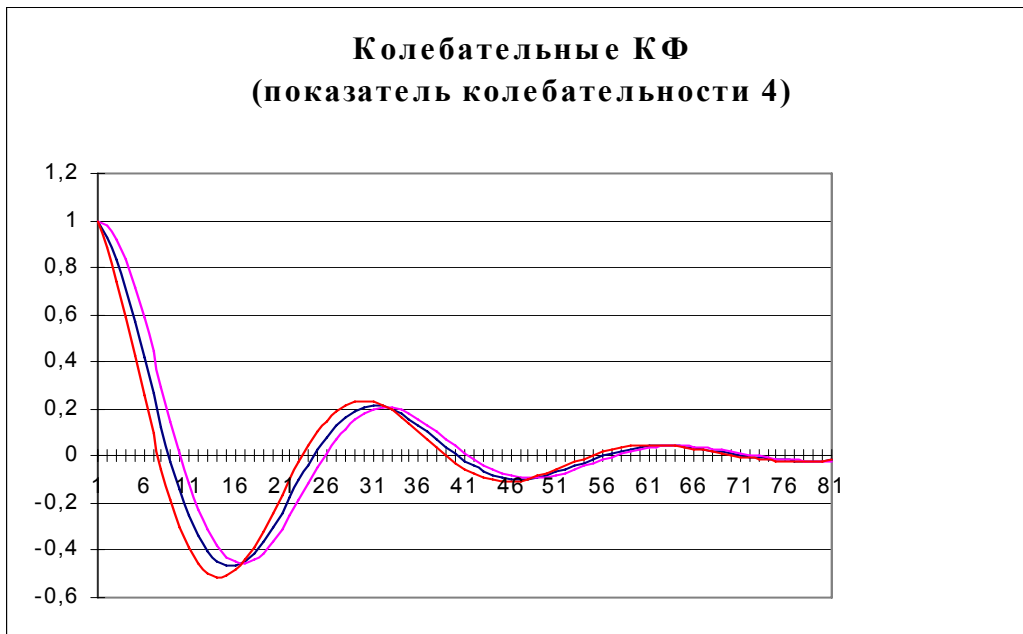


Рисунок П.9.5



Рисунок П.9.6

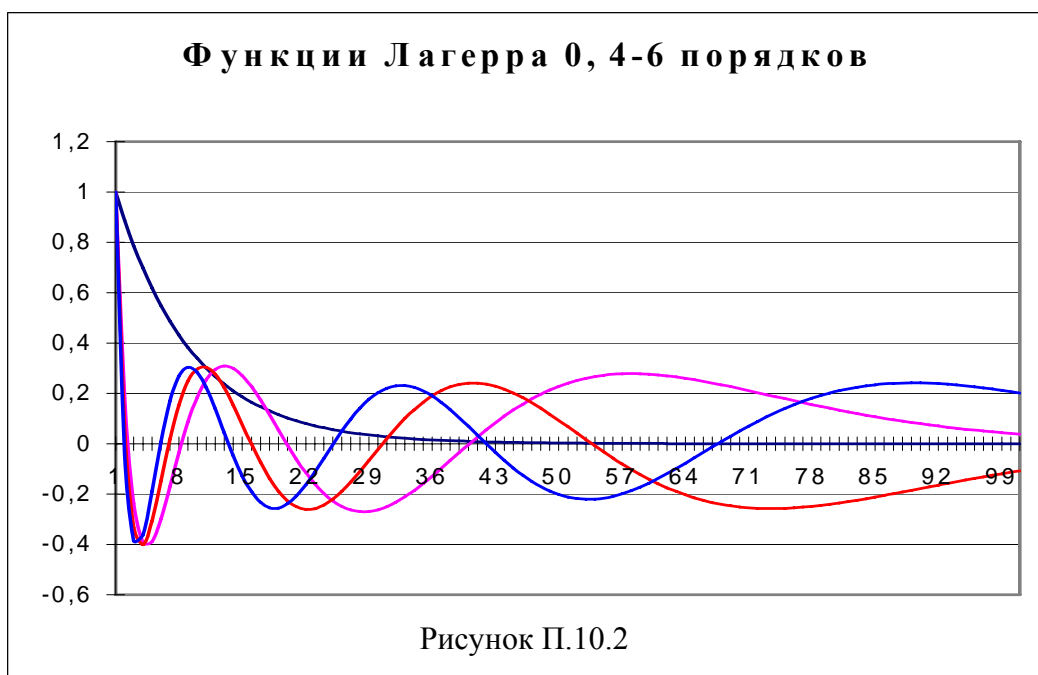
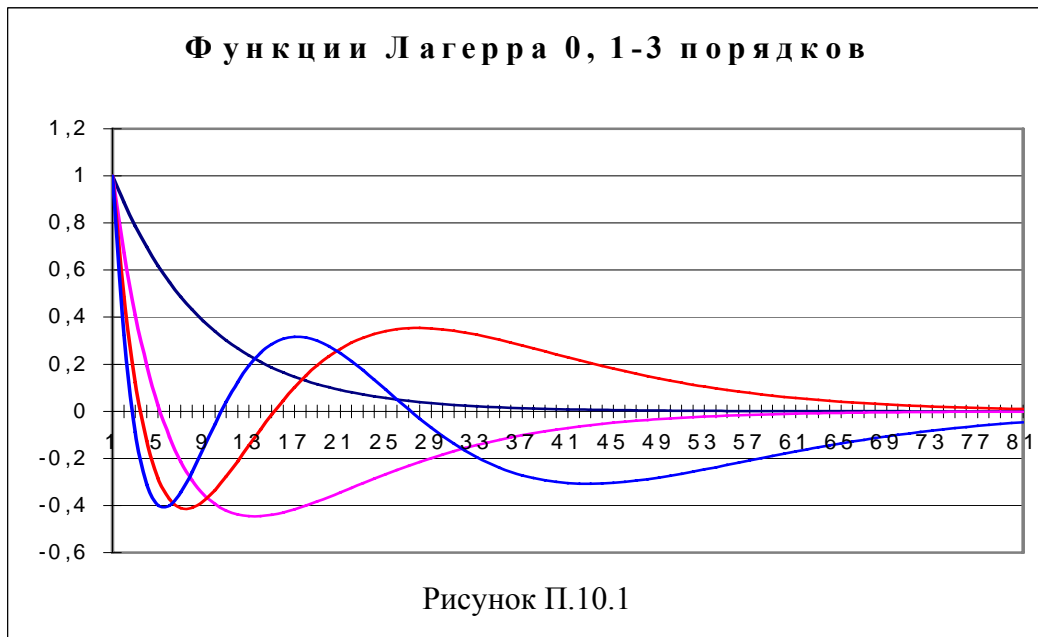
Ортогональные функции Лагерра

Ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением

$$L_k(\tau) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2},$$

удовлетворяют следующему свойству: $\int_0^{\infty} L_k(\tau) L_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{при } k = n. \end{cases}$

Вид первых 6 ортогональных функций Лагерра приведен ниже.



Приложение 11

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

№	Наименование	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha$	$1/2\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	$2/\alpha$	$5/4\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	0	$1/4\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8/3\alpha$	$7/4\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	0	$\frac{1}{4\alpha}$

Приложение 12

Моменты для типовых моделей корреляционных функций

№	Наименование	μ_1	μ_2	μ_3
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3$	$6/\alpha^4$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	$3/\alpha^2$	$8/\alpha^3$	$30/\alpha^4$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	$-1/\alpha^2$	$-4/\alpha^3$	$-18/\alpha^4$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$5/\alpha^2$	$16/\alpha^3$	$70/\alpha^4$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{2(\alpha^3 - 3\alpha\omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6\frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{3\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{8\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6\frac{5\alpha^4 - 10\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-\frac{4\alpha}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-6\frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2\omega_0^2 - \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$

Спектральные плотности мощности

$K_X(\tau)$	$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3})$	$\frac{\sigma_X^2 8\alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } \cos\omega_0\tau$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin\omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos\omega_0\tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin\omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos\omega_0\tau + C \sin\omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + C\omega_0(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

Обобщенные спектральные характеристики

№	$K_x(\tau)$	ω_3	$S_x(\omega_3)$
1	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	0	$\frac{\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	0	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{2\sigma_x^2}{9\pi\alpha}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	0	$\frac{8\sigma_x^2}{3\pi\alpha}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\sqrt{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - (\omega_0^2 + \alpha^2)}$	$\frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2}{[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]} \right\}$
6	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \omega_0^2}{\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \omega_0^2}{\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}$

№	$\Delta\omega'_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega_3)}$	$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \frac{\Delta\omega'_3}{2}$
1	$\frac{\pi\alpha}{2}$	$\frac{\pi\alpha}{2}$
2	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
3	$\frac{9\pi\alpha}{4}$	$\frac{\alpha(2\sqrt{2} + 9\pi)}{4}$
4	$\frac{3\pi\alpha}{16}$	$\frac{3\pi\alpha}{16}$
5	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{2\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$	$\omega_3 + \frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$
6	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов

АИС состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [1]. Для удобства использования в учебном процессе в систему включен блок генерирования случайных процессов с заданными законами распределения вероятностей.

Технические требования, предъявляемые к системе, состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

Описание подсистем

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. П.15.1. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных (см. рис. П.15.2):

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

Блок получения статистических данных делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из N отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

Блок оценки статистических характеристик состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности



Рисунок П.15.1. Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов

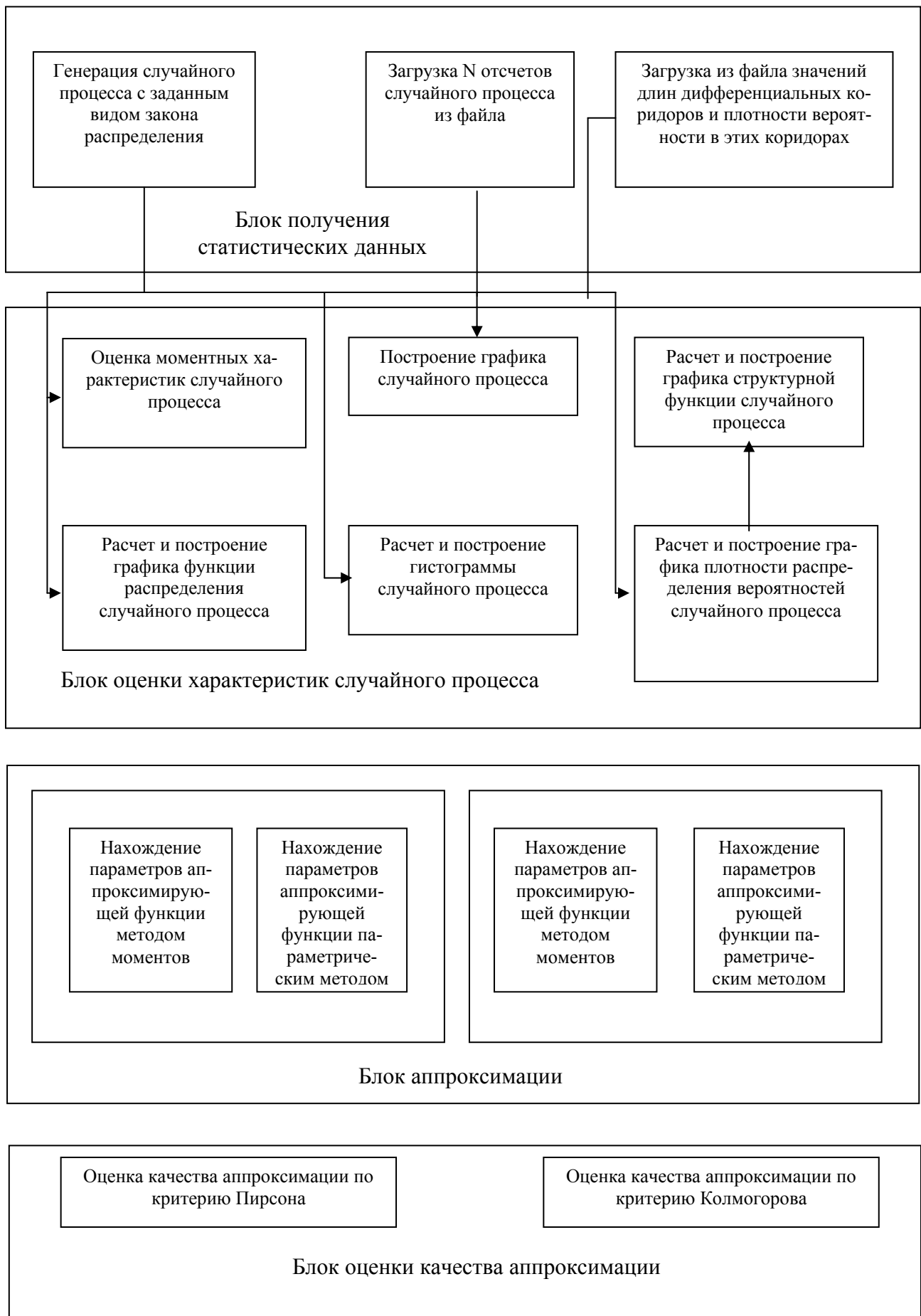


Рисунок П.15.2. Блоки пакета прикладных программ и их взаимодействие

распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.

Данные в этот блок попадают из блока получения статистических данных. В первом и втором случае на основе отсчетов случайного процесса рисуется график процесса, определяются частоты попадания в дифференциальные коридоры, и формируется гистограмма, оцениваются числовые характеристики случайного процесса. Данные о частотах попадания в дифференциальные коридоры передаются в блоки формирования функции распределения и плотности распределения вероятности. Значения плотности распределения вероятности передаются в блок формирования фазового портрета случайного процесса.

Блок аппроксимации состоит из четырех частей: аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения по методу моментов, аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения параметрическим методом.

В блок аппроксимации передаются из блока получения статистических данных число дифференциальных коридоров и номер закона распределения, а из блока оценки статистических характеристик - значения плотности распределения вероятностей и значения функции распределения, значения математического ожидания и дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия используется в методе моментов, значение плотности вероятности и функции распределения используется в параметрическом методе.

Используя переданные значения и выбранный для аппроксимации закон распределения, в данном блоке вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующего закона.

Блок оценки качества аппроксимации состоит из двух частей:

- оценки по критерию Пирсона;
- оценки по критерию Колмогорова.

В блок оценки качества аппроксимации передаются:

- из блока получения статистических данных - значения частот попадания в дифференциальные коридоры, число отсчетов случайного процесса, число дифференциальных коридоров;
- из блока оценки статистических характеристик - значения функции распределения;
- из блока аппроксимации - значения неизвестных параметров аппроксимирующего закона распределения.

Благодаря такому блочному построению структуры программы можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Трудоемкость таких изменений будет определяться только сложностью программной реализации самих изменений, а не перестройкой структуры системы.

Описание интерфейса системы

Основу интерфейса системы составляют две основные экранные формы, с которыми работает пользователь:

- экранная форма задания случайного процесса и оценивания его характеристик;
- экранная форма аппроксимации случайных процессов и оценки качества аппроксимации.

Первая форма, показанная на рис. П.15.3, представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы:

«Горячие» кнопки, при помощи которых осуществляется работа с системой

Панель 2 - задания параметров выбранного случайного процесса

Панель 1 – выбор закона распределения, генерируемого случайного процесса

Панель 6 - отображение функциональных характеристик

Выбор Переход

Числовые характеристики процесса, распределенного по закону Симпсона

Выберите закон распределения :
Симпсона

Параметры закона распределения :
 a : b :

Начальные моменты :
 Статистические : Теоретические :
 $\alpha_1=5,49102$ $\alpha_1=5,500$
 $\alpha_2=31,21109$
 $\alpha_3=183,02321$
 $\alpha_4=1103,56450$

Центральные моменты :
 Статистические : Теоретические :
 $\mu_2=1,05968$ $\mu_2=1,042$
 $\mu_3=0,00427$ $\mu_3=0,000$
 $\mu_4=2,65651$ $\mu_4=2,604$

Прочие характеристики :
 Статистические : Теоретические :
 $Ka=0,00392$ $Ka=0,000$
 $Ke=-0,63429$ $Ke=-0,600$
 $Kf=0,81986$
 $\gamma=7,73860$
 $\chi=0,18747$
 $\sigma=1,02941$

Гистограмма распределения

Гистограмма Функция распределения
 Плотность вероятности Процесс

Четов N : Коридоров M :

Панель 4 - отображение числовых характеристик выбранного закона распределения

Панель 5 - выбор отображаемой функциональной характеристики случайного процесса

Панель 3 - задание числа отсчетов генерации случайного процесса и числа дифференциальных коридоров гистограммы

Рисунок П.15.3. Интерфейс экранной формы генерирования и оценки статистических характеристик случайного процесса

На главной форме присутствуют следующие элементы:

- панель «горячих» клавиш, с помощью которой осуществляется управление работой системы;
- панель 1 – выбор закона распределения для генерации процесса, в случае его программного задания;
- панель 2 появляется после выбора закона распределения и позволяет задать значение одного или (в зависимости от закона) двух параметров данного закона распределения;
- панель 3 позволяет указать число отсчетов программно-генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного с заданным видом закона распределения случайного процесса;
- панель 5 позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

На рис. П.15.4 более подробно показана панель «горячих» кнопок. Она состоит из следующих кнопок:

- расчетов – генерирует случайный процесс с заданным видом закона распределения и параметром;
- загрузки из файла – требует указать файл и вызывает для работы экранную форму приема статистических данных, эта экранная форма показана на рис. П.15.5;
- отображения расчетов – считает и отображает числовые характеристики случайного процесса;
- отображения функциональных характеристик – рассчитывает и показывает на панели 6 выбранную на панели 5 функциональную характеристику случайного процесса;
- справки – вызывает справочную систему, содержащую основные сведения об основных видах законов распределения;
- печати – позволяет вызвать стандартный диалог печати под Windows;
- настройки принтера – вызывается стандартное окно настройки параметров принтера;
- перехода к экранной форме структурной функции – при нажатии вызывается экранная форма, отображающая структурную функцию случайного процесса, экранная форма структурной функции показана на рис. П.15.7;
- перехода к экранной форме аппроксимации случайного процесса;
- выхода из программы.

На рис. П.15.5 показана экранная форма загрузки данных из файла.

На панели 1 выбирается вид данных: отсчеты случайного процесса или частоты попадания в дифференциальные коридоры. В том случае, если выбраны отсчеты на панели 2, задается их число. В случае выбора частот на панели 3 следует указать число дифференциальных коридоров, а также минимальную и максимальную границу диапазона.

После этого, по нажатию кнопки 1, происходит чтение данных из указанного перед этим файла.

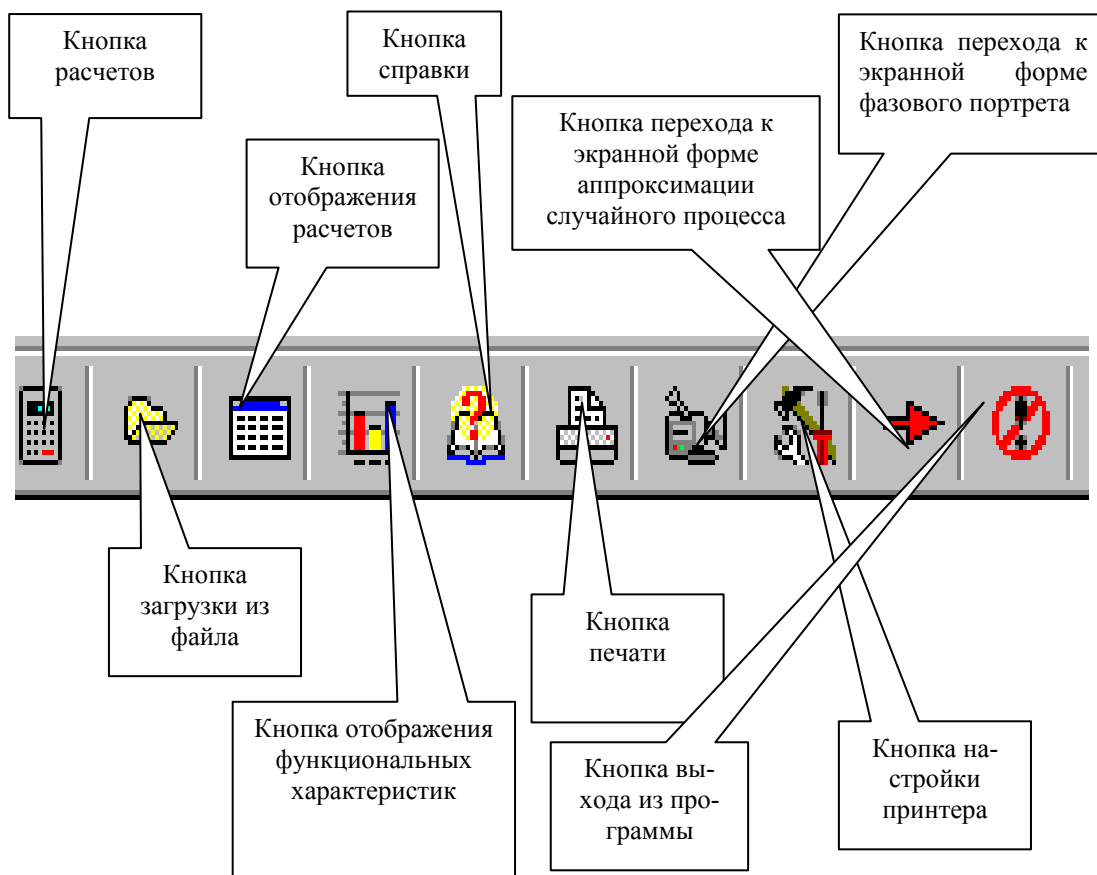


Рисунок П.15.4. Панель «горячих» кнопок

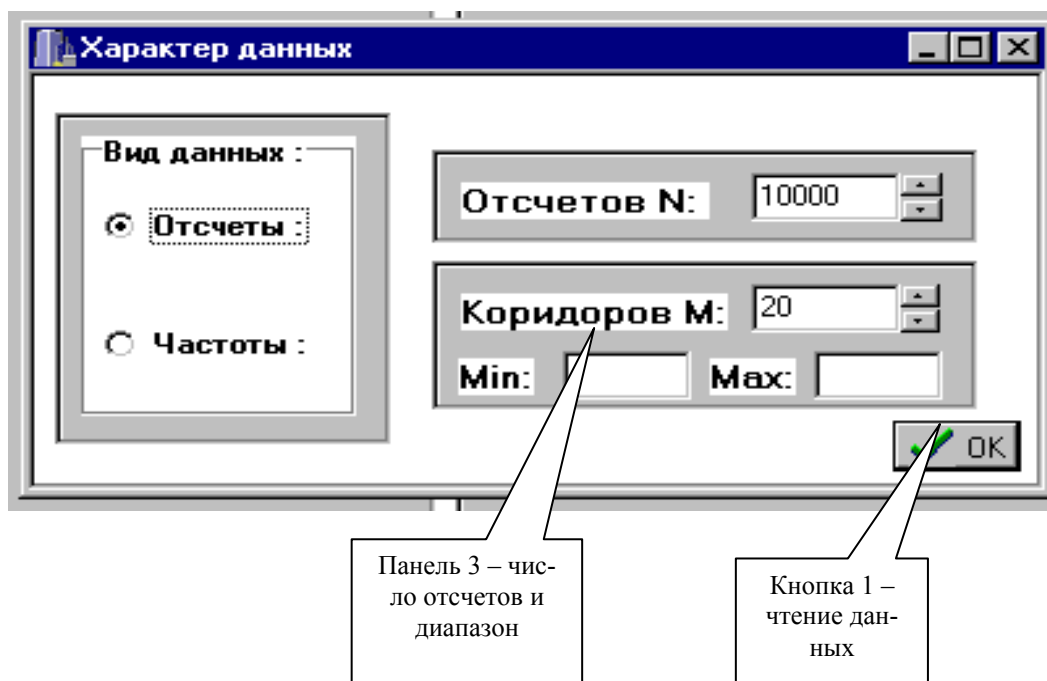


Рисунок П.15.5. Экранная форма загрузки данных из файла

На рис. П.15.7 показана экранная форма отображения графика случайного процесса. Она появляется на экране после выбора кнопки с названием «Процесс» на панели 5 основной экранной формы. На экранной форме отображения графика присут-

ствуют панель «горячих» кнопок, панель отображения графика и панель задания числа отсчетов. На панели «горячих» кнопок (рис. П.15.6) четыре кнопки: настройки принтера, печати формы, возвращения на основную экранную форму и отображения графика, которая перерисовывает график после изменения числа отображаемых отсчетов случайного процесса. Число отсчетов задается на панели 2. На панели 3 отображается график случайного процесса.

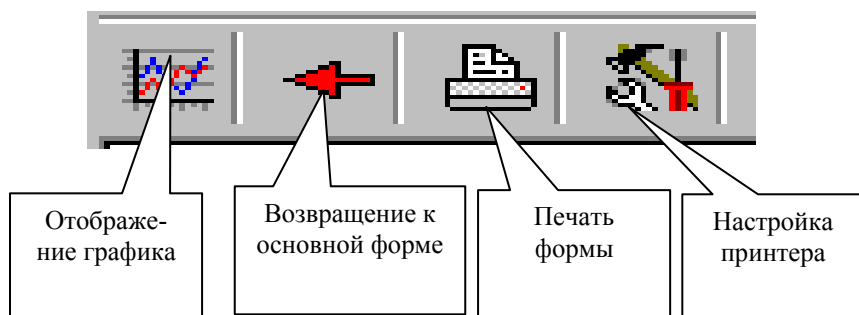


Рисунок П.15.6. Панель «горячих» кнопок экранной формы отображения случайного процесса

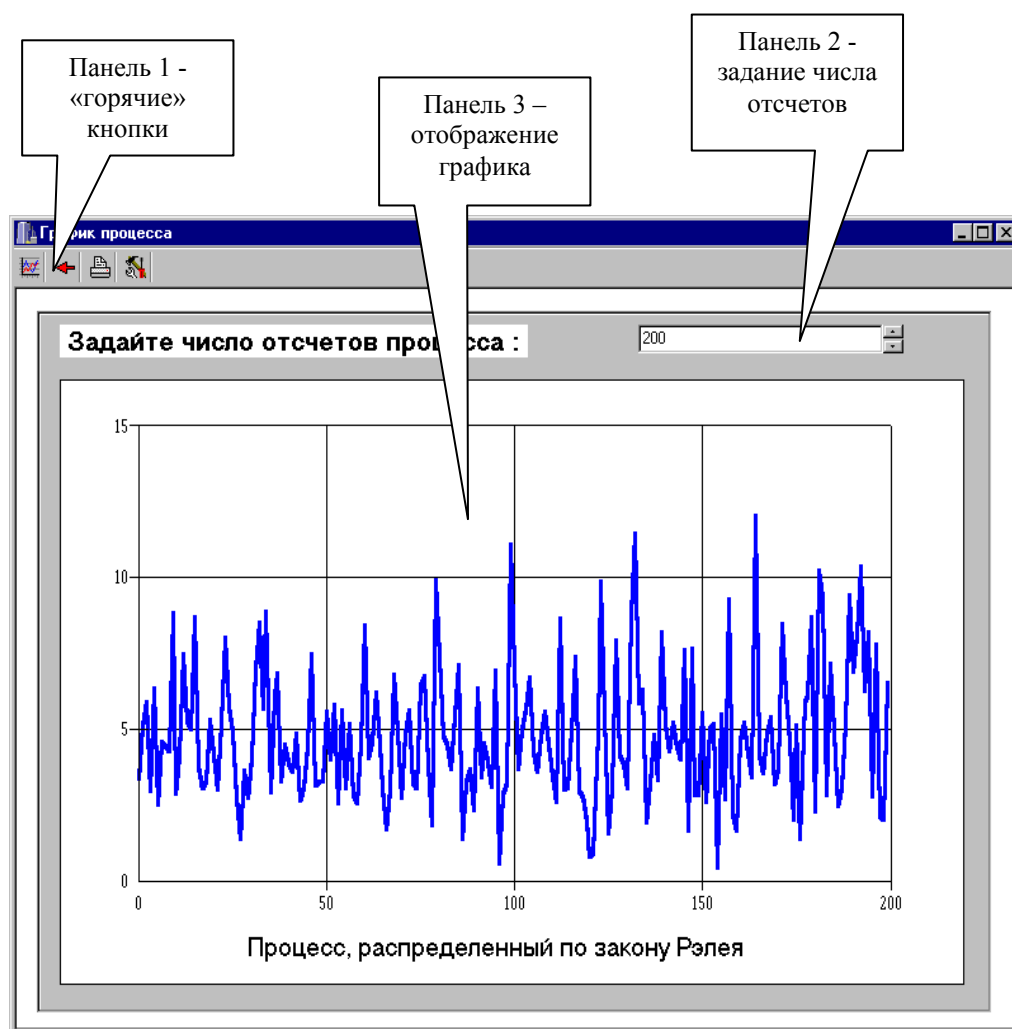


Рисунок П.15.7. Экранная форма отображения случайного процесса

На рис. П.15.8 показана экранная форма расчета и отображения структурной функции. На этой форме присутствуют панель «горячих» кнопок и панель отображения графика структурной функции. На панели «горячих» кнопок есть три кнопки: по-

строения структурной функции, возвращения на основную экранную форму и вызова справки.

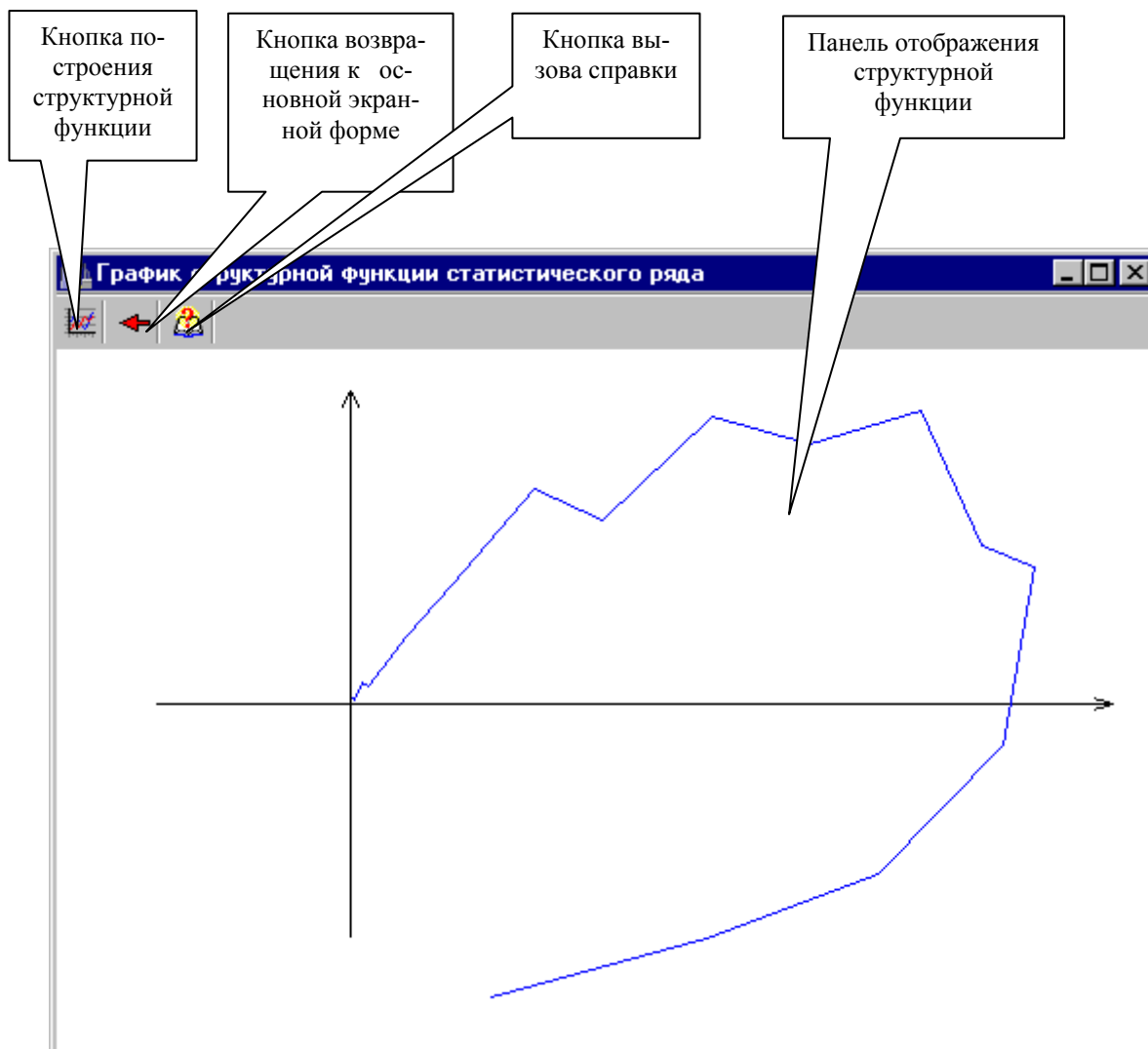


Рисунок П.15.8. Экранная форма расчета и отображения структурной функции случайного процесса

Вторая экранная форма предназначена для реализации блока аппроксимации. Сама форма, показанная на рис. П.15.9, представляет собой панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы. На рис. П.15.10-П.15.12 представлены укрупненные изображения используемых инструментов.

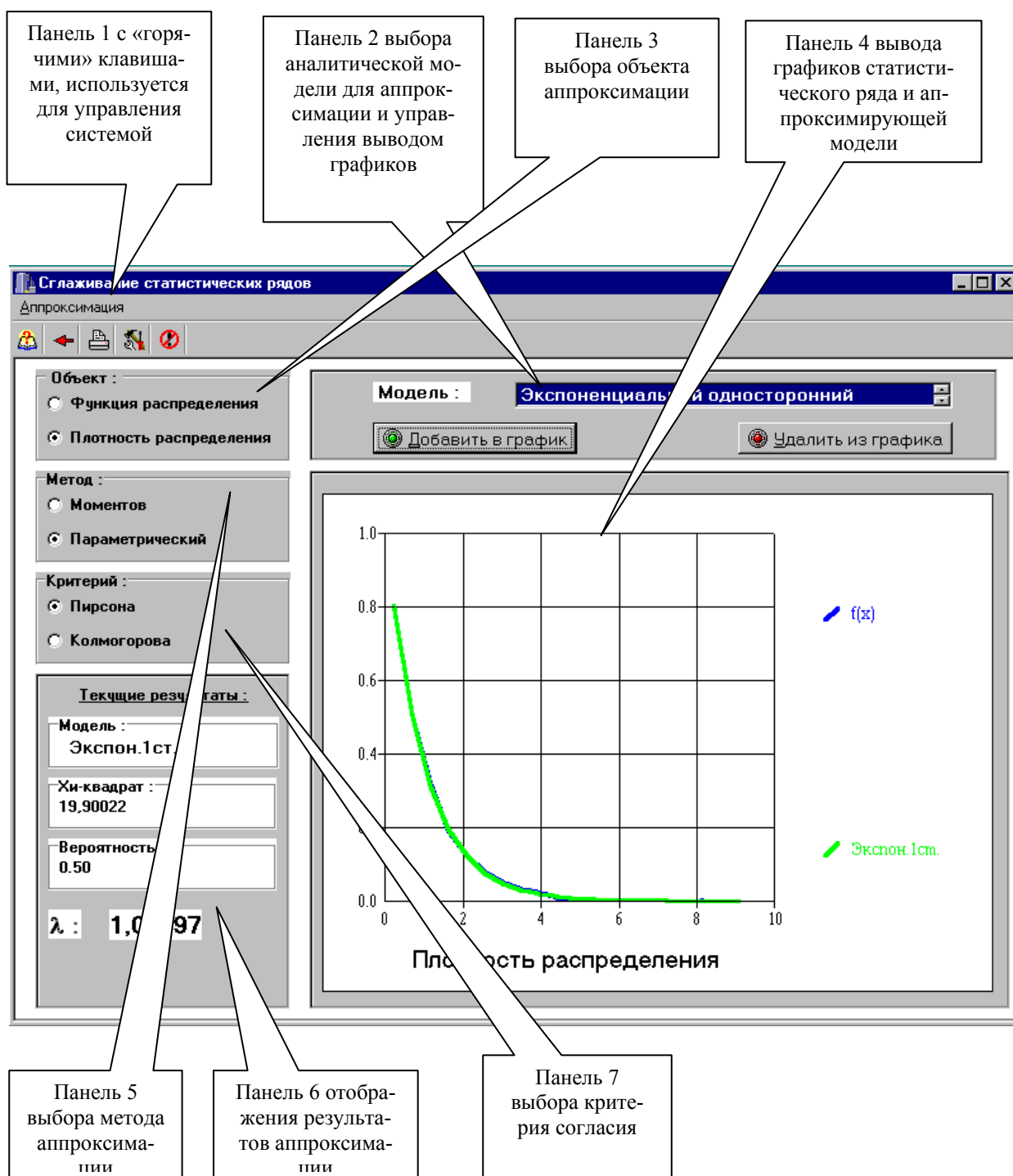


Рисунок П.15.9. Общий вид формы блока аппроксимации

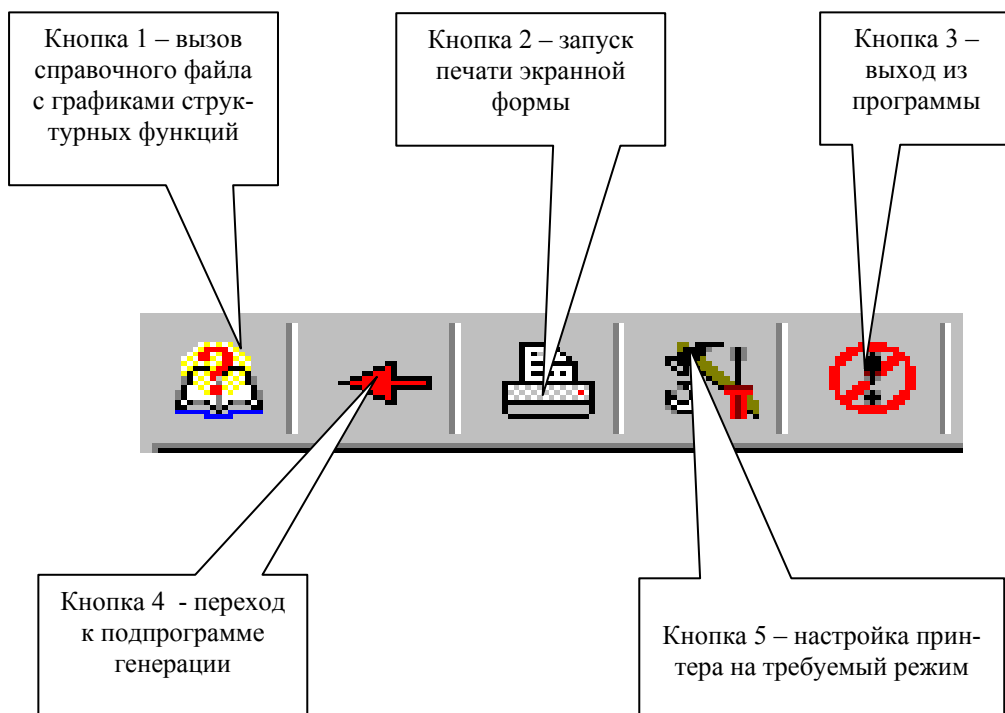


Рисунок П.15.10. Панель инструментов

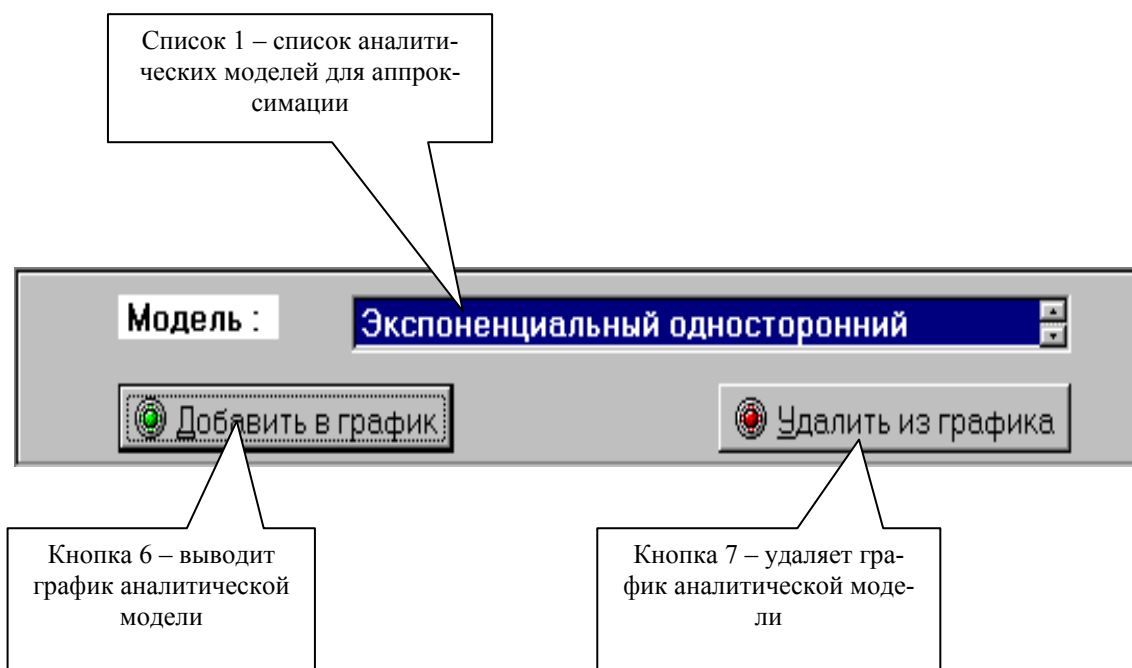


Рисунок П.15.11. Панель выбора аналитической модели

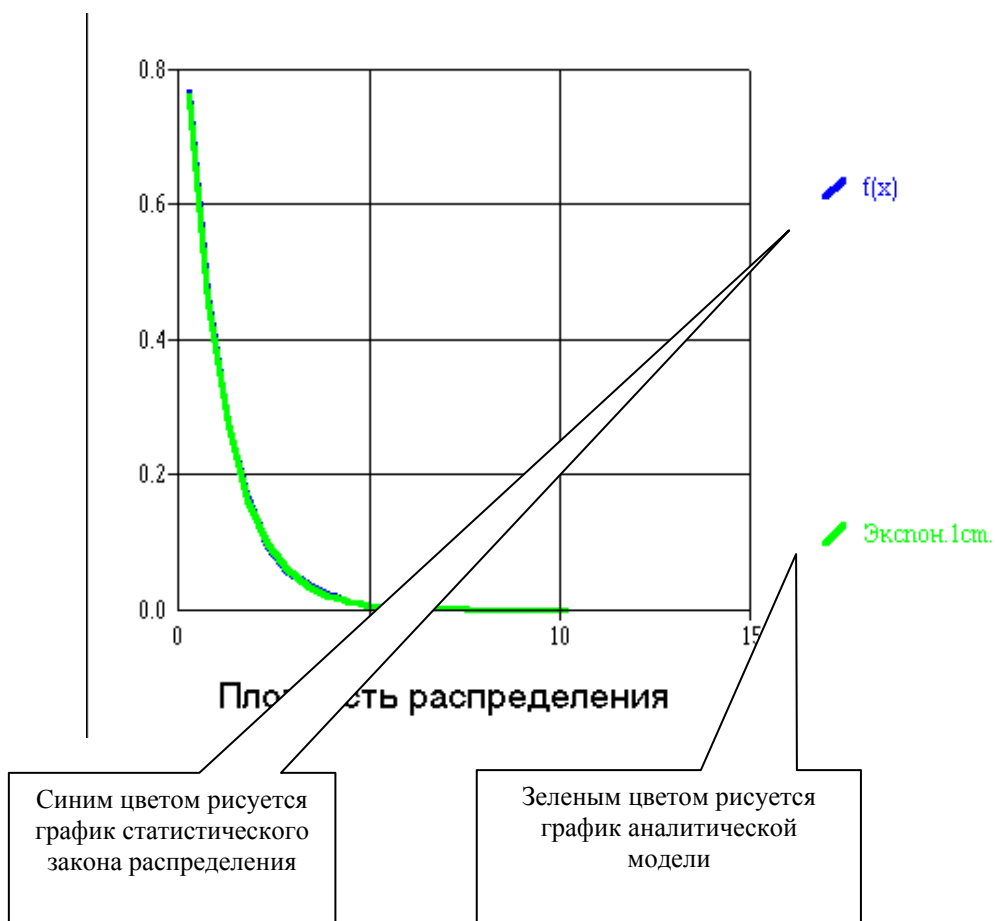
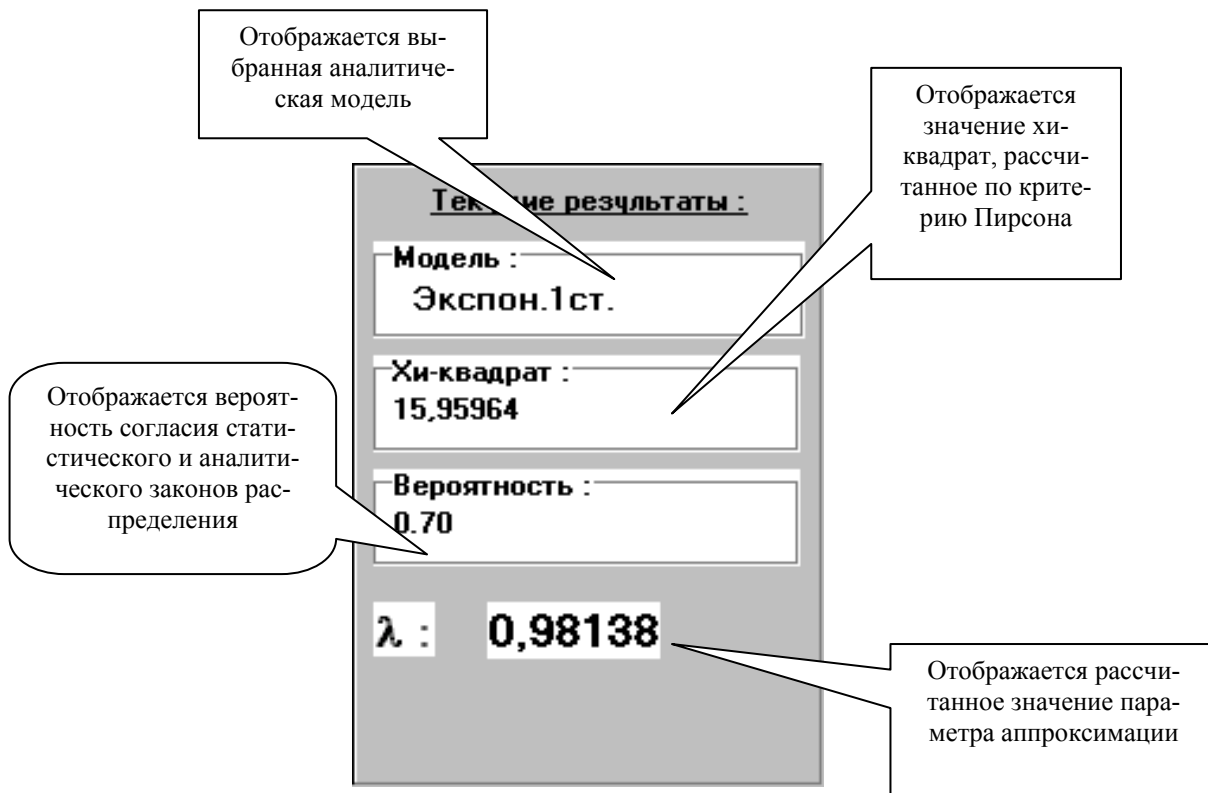


Рисунок П.15.12. Панели вывода результатов

Порядок работы с системой

После загрузки основной экранной формы следует решить, будет ли проведена генерация процесса в самой системе, или будут загружены данные извне. В первом случае на панели 1 основной экранной формы следует выбрать закон распределения из списка законов, с которым будет сгенерирован данный процесс (см. рис. П.15.3). На экранной форме появится панель 2, на которой, в зависимости от закона, следует задать значения одного или двух параметров. На панели 3 нужно задать значения числа отсчетов генерируемого процесса и числа дифференциальных коридоров. После нажатия на кнопку расчетов панели «горячих» кнопок основной экранной формы будет произведен расчет N отсчетов процесса.

Для экспорта данных в программу следует нажать кнопку загрузки из файла на основной экранной форме. Пользователю будет предложено указать загружаемый файл в стандартном диалоговом окне Windows. После указания файла появится экранная форма загрузки данных из файла, в которой следует указать тип передаваемых данных.

На первом этапе задаются данные процесса. На втором этапе оцениваются различные характеристики этого процесса. При нажатии на кнопку отображения расчетов на экране появляются числовые характеристики случайного процесса. На панели 5 нажатием кнопки можно выбрать график одной из трех функциональных характеристик или график самого процесса.

При нажатии на кнопку отображения фазового портрета, загружается экранная форма, позволяющая рассчитать и построить график (см. рис. П.15.8).

В начале работы с экранной формой аппроксимации случайного процесса пользователь уже должен иметь гипотезу о виде закона распределения исследуемого процесса. Этот гипотетический закон распределения выбирается из общего списка законов распределения на панели 2 (см. рис. П.15.9).

После чего, на панели 3 следует выбрать ту функциональную характеристику случайного процесса, по которой будет проводиться аппроксимация: функцию распределения или плотность распределения вероятностей. Выбранная функциональная характеристика графически отображается на панели 4.

На панели 5 выбирается метод нахождения неизвестных параметров теоретического закона распределения:

- метод моментов;
- параметрический метод.

Указав на панели 7 метод оценки качества аппроксимации, следует нажать кнопку 6 на панели 2. По нажатию этой кнопки происходит нахождение неизвестных параметров теоретического закона распределения, и результаты отображаются на панелях 4 и 6.

На панели 4 рисуется выбранная функциональная характеристика теоретического закона распределения, а на панели 6 показывается рассчитанное значение χ^2 (критерий Пирсона) или λ (критерий Колмогорова) и значение вероятности того, что расхождение между статистическим и теоретическим законами распределения можно объяснить случайными причинами.

Если вычисленное значение вероятности не удовлетворяет пользователя, то, нажав кнопку 7, он может убрать график функциональной характеристики теоретического закона распределения с панели 4 и повторить результаты расчёта.

Для примера, на рис. П.15.13 приведены результаты определения параметров распределения закона Вейбулла.

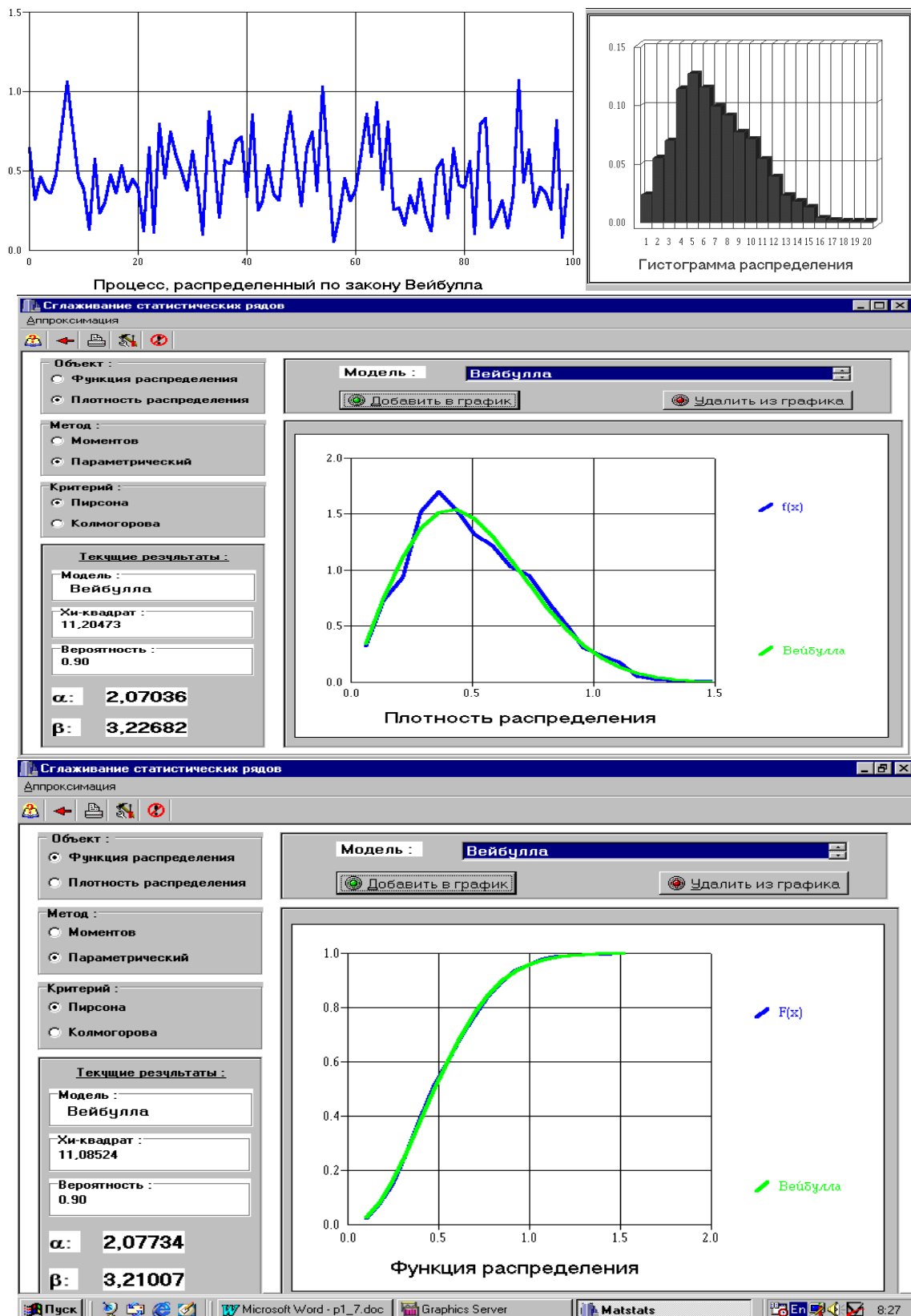


Рисунок П.15.13. Результаты определения параметров закона распределения Вейбулла

АИС для аппроксимативного анализа автокорреляционно-спектральных характеристик

Автоматизированная система состоит из следующих подсистем:

- задания входных воздействий;
- генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР);
- первичной и вторичной статистической обработки;
- идентификации КФ;
- аппроксимативного корреляционного анализа;
- аппроксимативного спектрального анализа.

Рассмотрим функции каждой подсистемы в отдельности.

Подсистема задания входных воздействий состоит из двух частей: генерирования псевдослучайной последовательности (ПСП) с заданным видом КФ [2] и ввода данных из файла.

Данные, получаемые в первой подсистеме, поступают на вход подсистемы генерирования НВР, а также на вход подсистемы первичной статистической обработки. В обоих случаях передается объем выборки N , интервал дискретизации Δt_0 и массив отсчетов СП.

Подсистема генерирования НВР включает в себя следующие способы получения НВР: p -преобразование, адаптивно-временная дискретизация, дискретизация с «дрожанием» и их комбинации [3]. А на выход поступают два массива: массив времен (меток времени) и массив соответствующих им отсчетов СП, а также объем выборки N и интервал дискретизации Δt_0 .

Подсистема первичной статистической обработки включает в себя оценку числовых характеристик, центрирование и нормирование СП и оценку КФ. В данную подсистему передаются массивы меток времени и соответствующих им отсчетов СП, объем выборки N и интервал дискретизации Δt_0 . При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции (ИКФ) [3]. Выходными данными данной подсистемы являются количество отсчетов КФ, интервал дискретизации Δt_0 и массив отсчетов КФ. Эти данные поступают на входы подсистем идентификации КФ и аппроксимации КФ.

Подсистема идентификации КФ состоит из двух частей: построения и анализа фазовых портретов и проверки качества идентификации. Данные в эту подсистему поступают из подсистемы первичной статистической обработки.

Используя переданные значения отсчетов КФ, в данной подсистеме производится построение фазового портрета данной КФ, а затем его последовательное сравнение с фазовыми портретами типовых КФ, используемых в системе. На основании результатов сравнения выбирается одна из типовых моделей КФ, при помощи которой в следующей подсистеме производится аппроксимация исходной КФ. Проверка качества идентификации производится на основании расчета квадратической погрешности фазового портрета.



Рисунок П.16.1. Структура автоматизированной системы

Подсистема аппроксимативного анализа состоит из двух частей: аппроксимация КФ функциями заданного вида и функциями Лагерра с возможностью построения спектральной плотности мощности по параметрам модели.

На вход подсистемы аппроксимативного анализа поступают отсчеты КФ и вид аппроксимирующей функции (для случая аппроксимации функциями заданного вида) или количество членов разложения (при аппроксимации функциями Лагерра).

Используя переданные значения, в данной подсистеме вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации. Затем, по желанию исследователя, возможно построение спектральной плотности мощности по параметрам модели.

Благодаря такому блочному построению структуры программы в систему можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Схема алгоритма приведена в приложении П.9.

Программные требования системы: Microsoft Windows'98-2000; необходимые библиотеки поддержки Java.

Аппаратные требования системы: Процессор Pentium-166-MMX и выше; ОЗУ 32Мб; свободное место на диске 50Мб, разрешение монитора 1024×768 точек.

Программная реализация

Начало работы

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис. П.16.2. В первую очередь следует выбрать тип дискретизации СП (регулярная или нерегулярная) и нажать кнопку «**Новая модель**» для генерирования случайного процесса. Или же нажать кнопку «**Загрузить КФ из файла**» и выбрать нужный файл с данными.



Рисунок П.16.2. Вид формы начала работы в системе

Генерирование СП с заданным видом КФ

На рис.П.16.3 можно увидеть вид формы генерирования СП с заданным видом КФ при регулярной дискретизации.

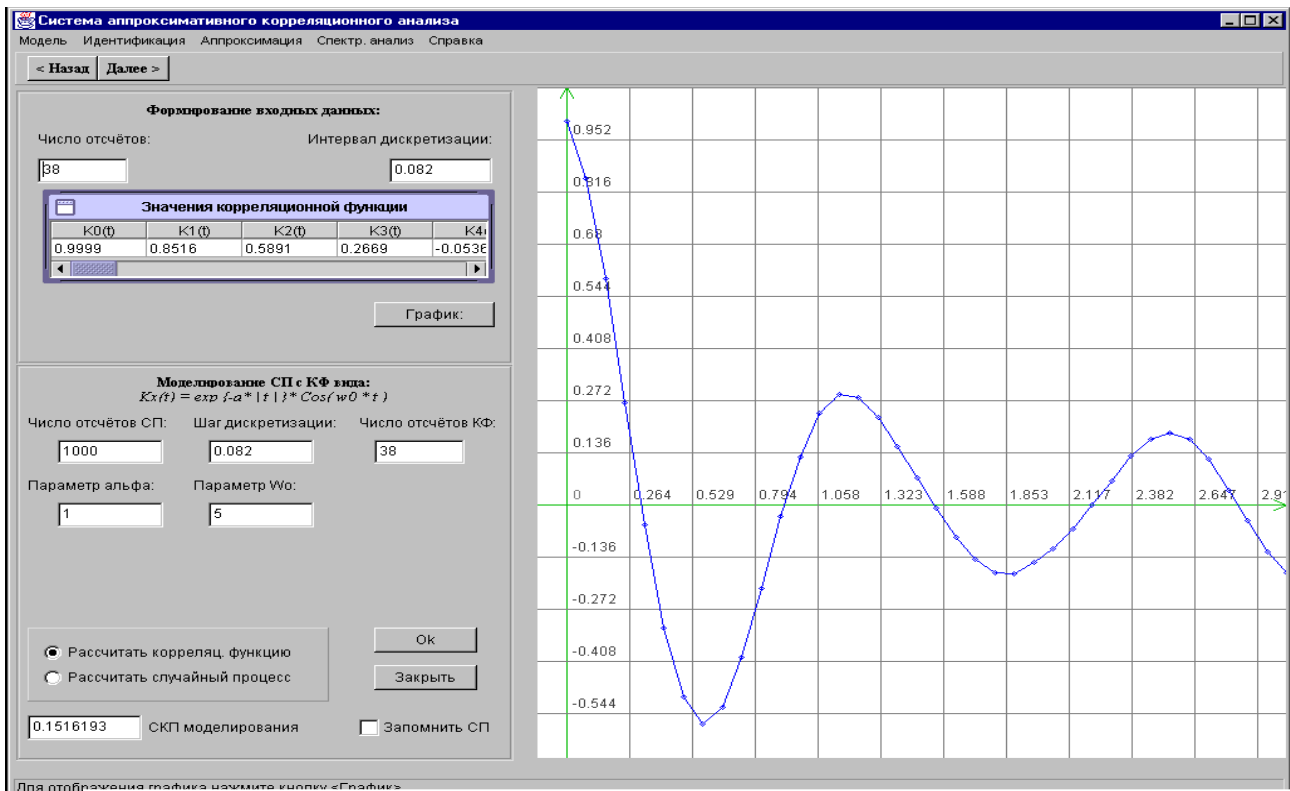


Рисунок П.16.3. Вид формы генерирования СП с заданным видом КФ

Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет регулярную дискретизацию в форме начала работы в системе.

Основными элементами формы расчета КФ при регулярной дискретизации СП являются:

- панель главного меню,
- кнопки движения по программе,
- панель данных,
- панель задания параметров моделируемого СП,
- панель графиков функций.

Перечислим функции, которые выполняют нижеследующие пункты главного меню:

Модель – выбор вида КФ моделируемого СП (один из шести), работа с файлами (запись в файл и открытие файла), завершение работы с программой;

Идентификация – выбор способа идентификации (автоматическая – позволяет строить фазовые портреты КФ и на основании их схожести с фазовыми портретами стандартных КФ выбирать вид аппроксимирующей модели, аналитическая – позволяет выбирать вид КФ на основании визуальных представлений стандартных КФ);

Аппроксимация – выбор способа аппроксимации (функциями заданного вида – при схожести исследуемой КФ с одним из стандартных ее видов, функциями Лагерра – в случае, если КФ не похожа ни на один из предложенных ее видов);

Справка – предоставление справки о программе.

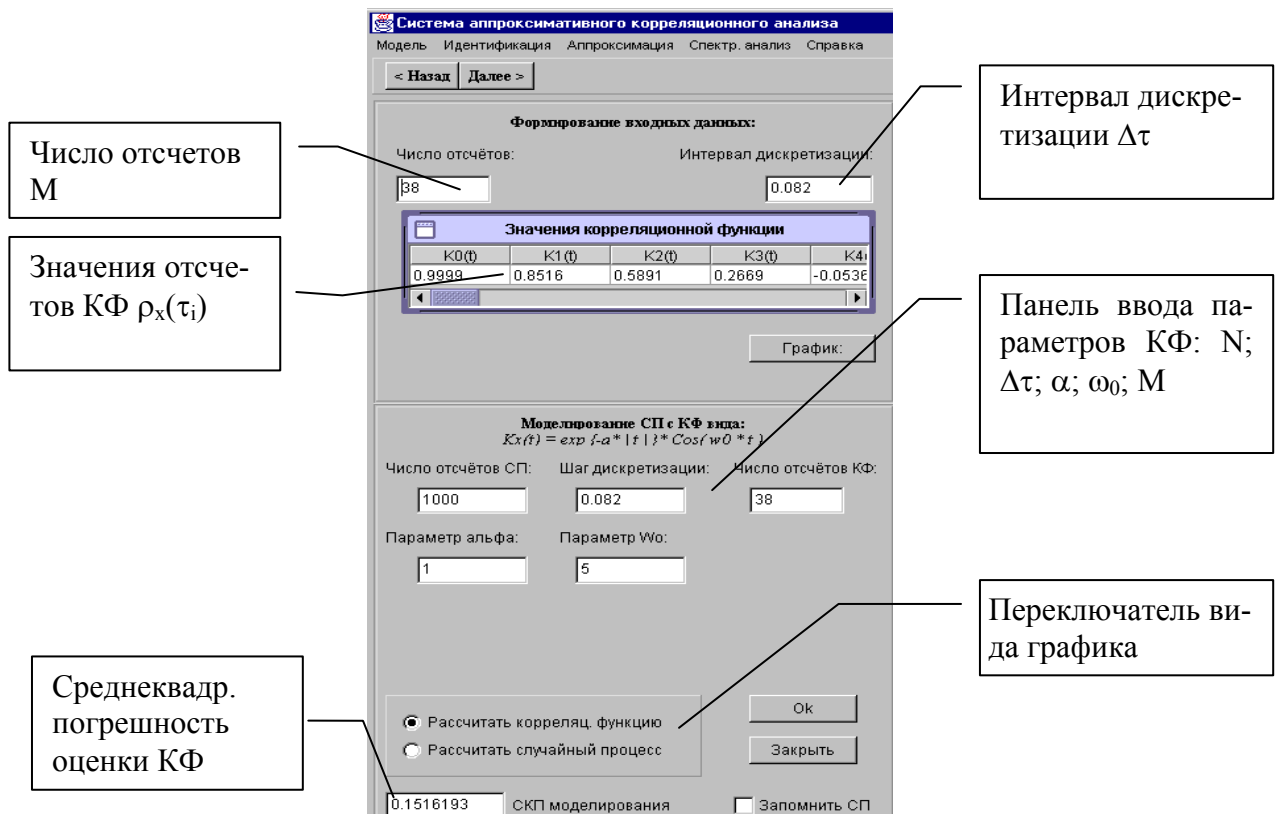


Рисунок П.16.4. Описание основной формы

Кнопки движения по программе играют роль «гида», то есть позволяют пользователю, не знакомому с программой, двигаться в нужном направлении, которое соответствует последовательности действий, приведенных в схеме алгоритма (см. приложение П.17).

Панель данных предназначена для ввода и хранения отсчетов СП или отсчетов КФ (в зависимости от того, в каком положении находится переключатель вида графика). Отсчеты КФ (или СП) хранятся в таблице на панели данных (см. рис. П.16.3). Данные в эту таблицу заносятся автоматически после того, как выбран вид КФ и смоделирован СП. В этом случае график КФ (или СП) строится автоматически. При желании пользователь может вручную задать значения отсчетов, тогда ему придется нажать на кнопку «График» для того, чтобы отобразить график функции, построенный по введенным отсчетам.

На панели задания параметров моделируемого СП находятся поля ввода следующих параметров:

- число отсчетов СП,
- шаг дискретизации,
- число отсчетов КФ,
- параметр α ,
- параметр ω_0 .

Для корректного расчета шага дискретизации и минимального числа отсчетов КФ необходимо щелкнуть по панели задания параметров правой клавишей «мыши» и после появления всплывающего меню выбрать нужную погрешность моделирования, после чего вышеуказанные параметры автоматически будут пересчитаны для конкретного случая.

Итак, для начала работы в данной форме необходимо выбрать в пункте меню «Модель» (подменю «Моделировать СП с КФ заданного вида:») нужный вид СП.

Затем, задав необходимые параметры модели и скорректировав шаг дискретизации и число отсчетов КФ, моделировать СП. Для этого нужно нажать кнопку «ОК».

После окончания моделирования на панели графиков появится изображение СП или соответствующей ему КФ, в таблице на панели данных будут занесены отсчеты СП (или КФ), а в поле вывода погрешности занесется среднеквадратическая погрешность моделирования.

Генерирование НВР с заданным видом КФ

Общий вид формы генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР) с заданным видом КФ дан на рис. П.16.5. Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет нерегулярную дискретизацию в форме начала работы системы.

Для начала работы в данной форме необходимо сначала выбрать вид КФ моделируемого СП (пункт меню «Модель»). Задать параметры модели (α , ω_0), число отсчетов СП, интервал дискретизации и число отсчетов КФ. Далее выбрать модель и параметры нерегулярной дискретизации, например, значение вероятности p – преобразования. После данных приготовлений следует нажать кнопку «ОК» для моделирования СП с заданным видом КФ.

Идентификация вида КФ

Форму для идентификации КФ можно вызвать из пункта «Идентификация» – «Автоматически» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов представлен на рис. П.16.6. Для идентификации КФ, необходимо сравнивать саму КФ (в простейшем случае) с шестью основными видами КФ, приведенными в списке, и ее фазовый портрет с типовыми фазовыми портретами. При выборе одной из КФ списка (щелчком мыши), появляется ее схематическое изображение. Затем, после нажатия кнопки «Построить фазовый портрет:», в области построения отобразятся портреты исходной (экспериментальной) и выбранной из списка (теоретической) КФ, синим и красным цветами соответственно. В поле «Погрешность» отобразится квадратическая погрешность сравнения фазовых портретов.

Определив примерный вид КФ, можно провести его уточнение. Задавая параметры α и ω_0 для теоретической модели КФ в полях « α :» и « ω_0 :», можно подобрать их таким образом, чтобы квадратическая погрешность была минимальной. В этом случае будет определен не только вид экспериментальной КФ, но и ее параметры, что особенно важно при аппроксимации параметрическими моделями.

Если результаты идентификации удовлетворительны, и вид КФ определен однозначно, то, нажав кнопку «Аппроксимировать», мы перейдем в форму аппроксимации КФ параметрическими моделями, где будет производиться аппроксимация КФ моделью, выбранной при идентификации.

Отметим, что по найденным параметрам модели корреляционной функции можно более точно построить теоретический фазовый портрет. Это, в свою очередь, даст возможность наглядно убедиться в качестве аппроксимации.

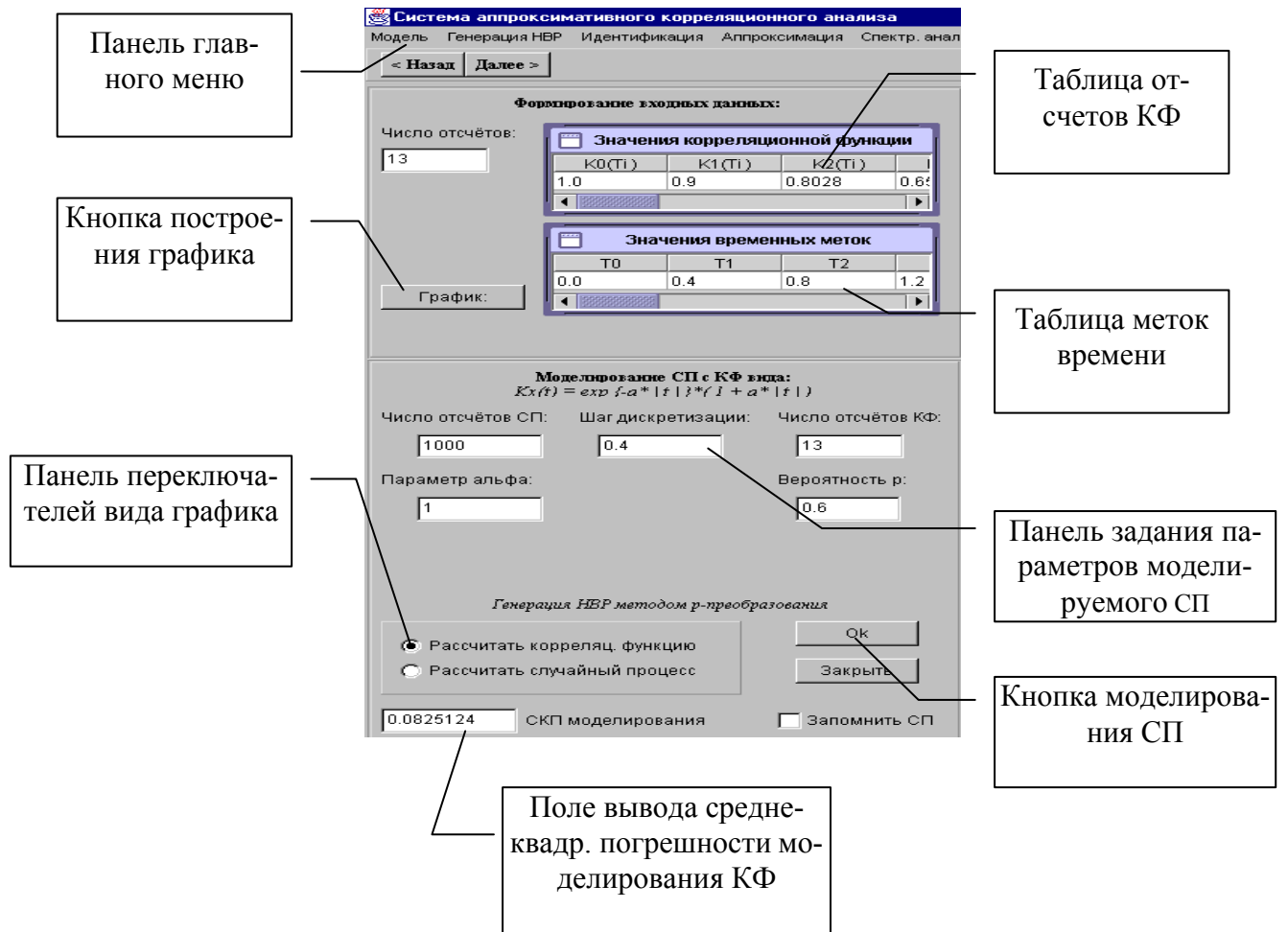
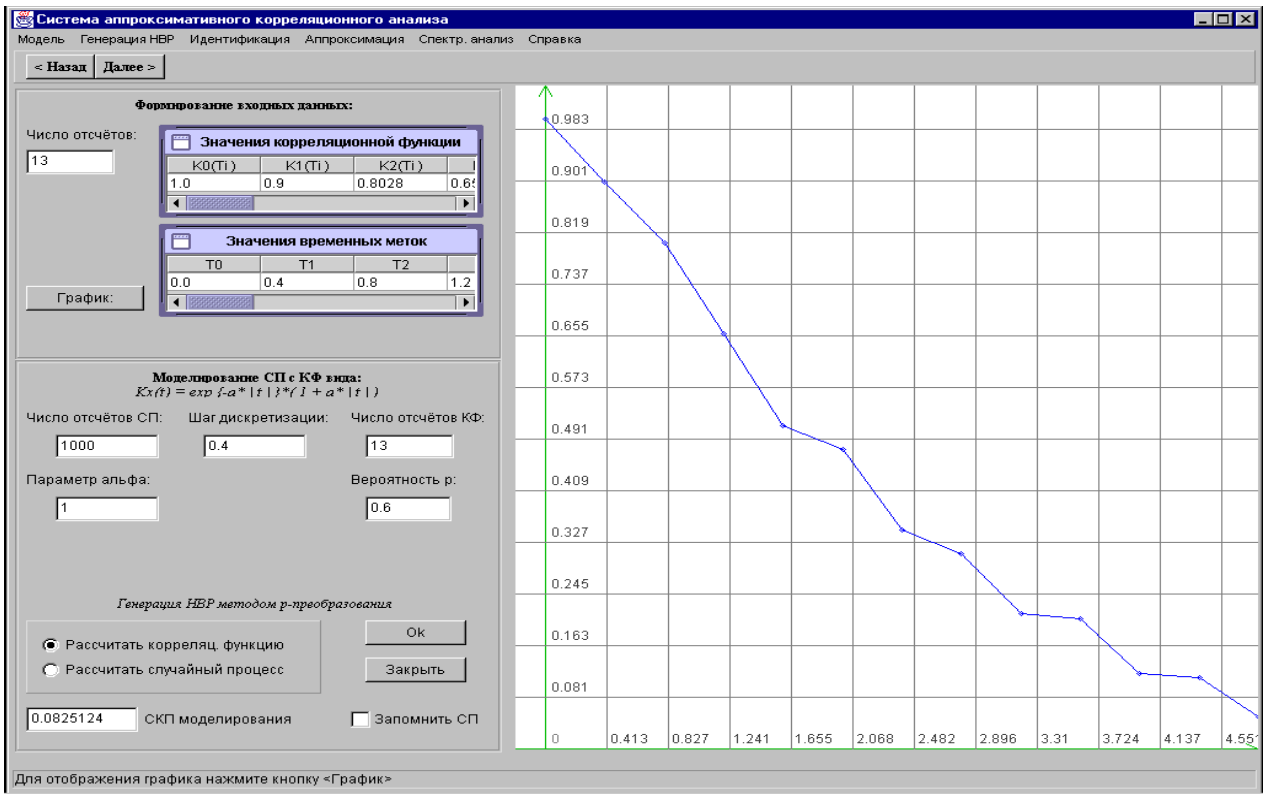


Рисунок П.16.5. Вид формы генерирования НВР с заданным видом КФ



Рисунок П.16.6. Окно идентификации КФ при помощи анализа фазовых портретов

В случае, если идентифицировать КФ не удалось, необходимо закрыть форму и производить аппроксимацию КФ ортогональными функциями Лагерра.

Аппроксимация КФ функциями заданного вида

В том случае, когда вид КФ известен или его удалось идентифицировать, следует аппроксимировать КФ функциями заданного вида.

Форму для аппроксимации КФ функциями заданного вида можно вызвать из пункта «Аппроксимация» главного меню, а также нажатием кнопки «Аппроксимация» на панели идентификации КФ после выбора вида аппроксимирующей функции.

Общий вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида представлен на рис П.16.7.

При работе в данной форме в первую очередь нужно задать вид аппроксимирующей функции при помощи переключателей на панели выбора вида аппроксимирующей модели (рис. П.16.8). Затем рассчитать начальные приближения параметров модели автоматически или задать вручную. Для автоматического расчета начальных приближений необходимо нажать кнопку «Рассчитать» на панели управления ходом аппроксимации. В некоторых случаях, особенно при аппроксимации методом Ньютона, процесс может не сойтись из данных точек. В таком случае следует вручную подкорректировать начальные приближения в их полях ввода (рис.П.16.8).

Иногда эту процедуру приходится выполнять многократно.

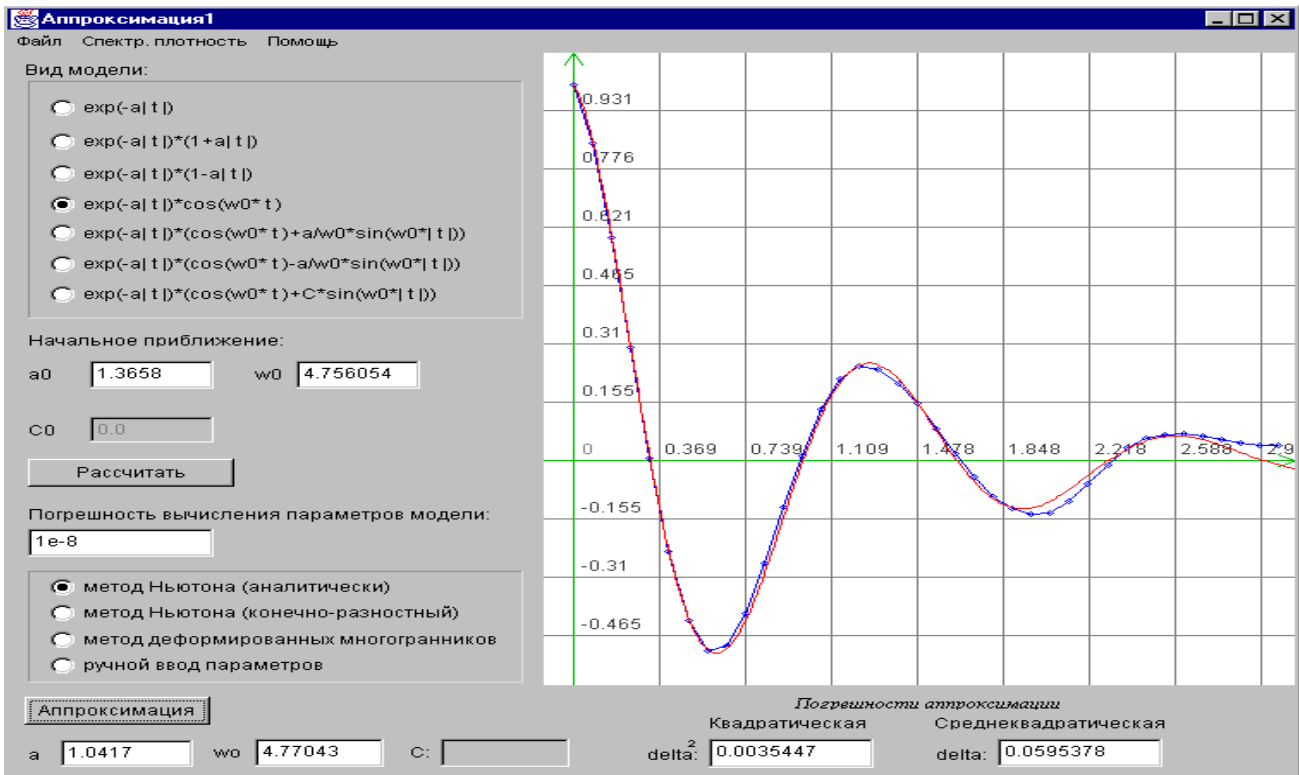


Рисунок П.16.7. Вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида

Далее следует задать значение погрешности вычислений параметров модели (критерия сходимости) в соответствующем поле (рис. П.16.8). Данное значение используется как критерий окончания вычислений при аппроксимации – ϵ .

После задания всех вышеуказанных числовых параметров следует выбрать метод аппроксимации на соответствующей панели. На панели выбора метода аппроксимации присутствуют следующие опции:

- метод Ньютона (аналитический),
- метод Ньютона (конечно-разностный),
- метод деформированного многогранника,
- ручной ввод параметров.

При выборе опции ручного ввода параметров после нажатия кнопки «**Аппроксимация**» происходит простой перенос значений полей ввода начальных приближений в поля вывода рассчитанных параметров и строится соответствующий график аппроксимирующей функции. Таким образом, предоставляется возможность пользователю самостоятельно подбирать значения параметров аппроксимирующего выражения.

При нажатии кнопки «**Аппроксимация**» (рис. П.16.5 или П.16.6) производится запуск алгоритма аппроксимации. В поля вывода рассчитанных параметров модели заносятся значения α и ω_0 , которые были вычислены одним из методов. В поля вывода погрешности аппроксимации заносятся значения среднеквадратической и квадратической погрешности.

Отметим, что по «умолчанию» система выбирает метод деформированного многогранника, обладающий лучшей сходимостью. Выбрав в качестве начального приближения параметров найденные значения модели указанным методом, возможно дальнейшее уточнение параметров модели. Для этого необходимо воспользоваться одним из методов Ньютона.

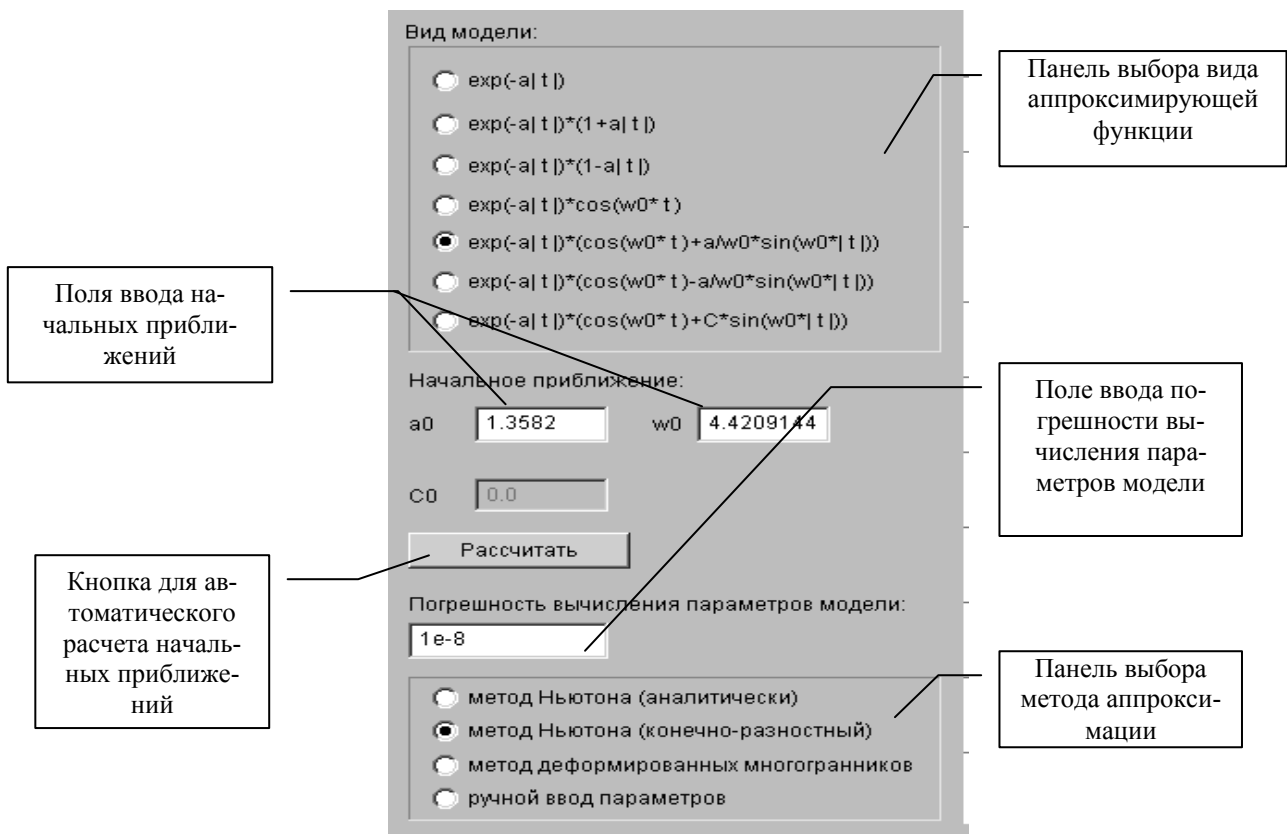


Рисунок П.16.8. Панель управления параметрами аппроксимации

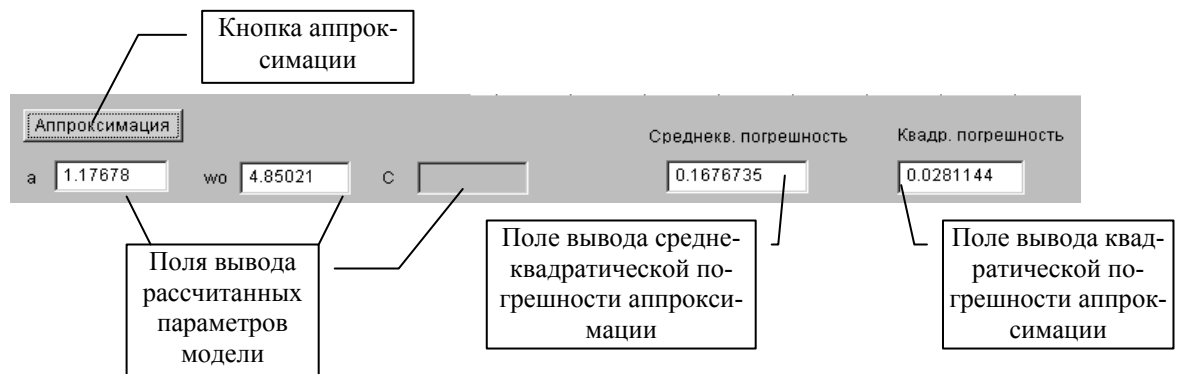


Рисунок П.16.9. Панель вывода результатов аппроксимации

Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

После получения массива отсчетов КФ, производится ее аппроксимация. Форму для аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра можно вызвать из пункта «Аппроксимация» - «Ортогональными ф-ми Лагерра» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра представлен на рис. П.16.10.

Для проведения аппроксимации необходимо вычислить параметр α функции Лагерра (рис. П.16.11.) Для этого требуется задать начальное приближение параметра α (по умолчанию оно равно 1), которое необходимо для реализации расчета методом Ньютона, точность вычисления этого параметра (по умолчанию она равна 0.001) и выбрать один из методов численного интегрирования (метод Симпсона, трапеций или прямоугольников). После этого, нажав кнопку «Вычислить α », получим значение вычисленного параметра в поле « α » (в это поле можно занести произвольное значе-

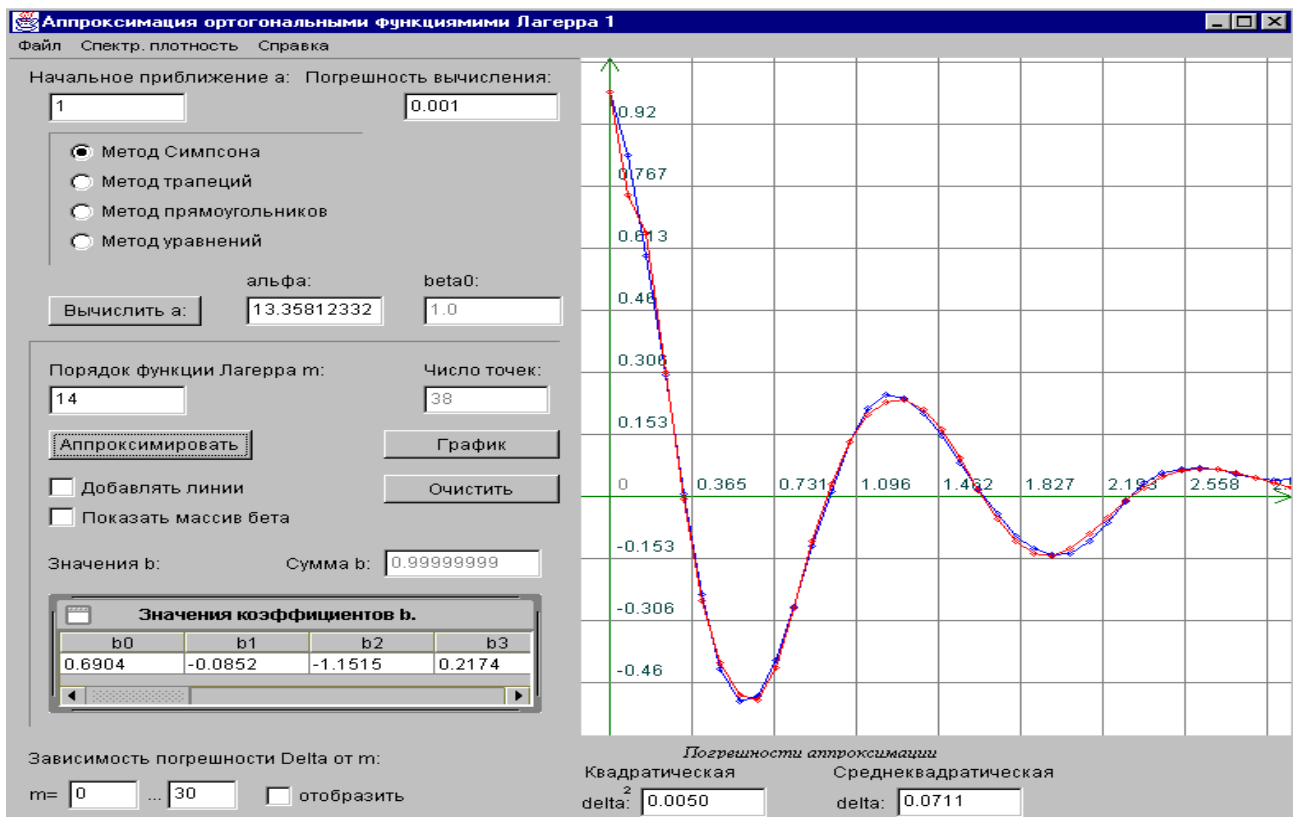


Рисунок П.16.10. Окно аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

Методы численного интегрирования для расчета параметров α и β

Погрешность вычисления параметра α

Разрешить / Отменить наложение линий на графике

Показывать массив b / β

Значения коэффициентов b полинома Лагерра

Проверка выполнения условия $\beta_0=1$

Проверка выполнения условия $\sum b=1$

Рисунок П.16.11. Описание параметров окна аппроксимации

ние вручную), а в поле «**beta0:**» появится значение коэффициента b_0 которое должно быть равно 1 и является проверкой качества расчета α .

После того, как параметр α будет вычислен (либо установлен вручную), необходимо установить порядок аппроксимирующей функции Лагерра m . (В соседнем поле указывается число точек, по которым будет проводиться аппроксимация - оно равно числу отсчетов поступившей на вход КФ). После нажатия кнопки «**Аппроксимировать**», в таблицу «**Значения b:**» будут занесены вычисленные значения коэффициентов функции, в поле для построения графика к исходной КФ (она рисуется **синим цветом**) добавится график аппроксимирующей функции, а так же будут вычислены и отображены в специальном поле (рис. П.16.11) квадратическая и среднеквадратическая погрешности аппроксимации δ^2 и δ . Так же отобразится значение суммы коэффициентов b , которая должна быть равной 1.

Расставляя или убирая соответствующие флажки, пользователь может либо наслаивать графики один на другой, сравнивая результаты аппроксимации несколькими функциями не только по значению погрешности δ , но и визуально, либо отображать только одну функцию, а так же показывать, либо скрывать значения аппроксимирующей функции в каждой точке.

Задавая начальное и конечное значение m (рис. П.16.12) и устанавливая флажок «**отобразить**», пользователь может построить график зависимости квадратической погрешности аппроксимации δ^2 от порядка m функции Лагерра для данной КФ. Анализ этого графика позволит найти оптимальное значение m , при котором $\delta^2 \rightarrow \min$. (График строится с шагом по m , равным 2 (см. рис. П.16.13)).

Завершение работы с формой производится ее стандартным закрытием или с помощью кнопки «**Закреть**».

По определенной модели корреляционной функции исследователь может построить график спектральной плотности мощности. Для этого необходимо нажать кнопку «**Спектр. анализ**» в форме «**Аппроксимация**» при аппроксимации параметрическими моделями (см. рис П.16.4), а при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра - в соответствующем окне (см. рис.П.16.10) кнопку «**Спектр**», а в окне «**Спектральный анализ**» - кнопку «**Добавить**».

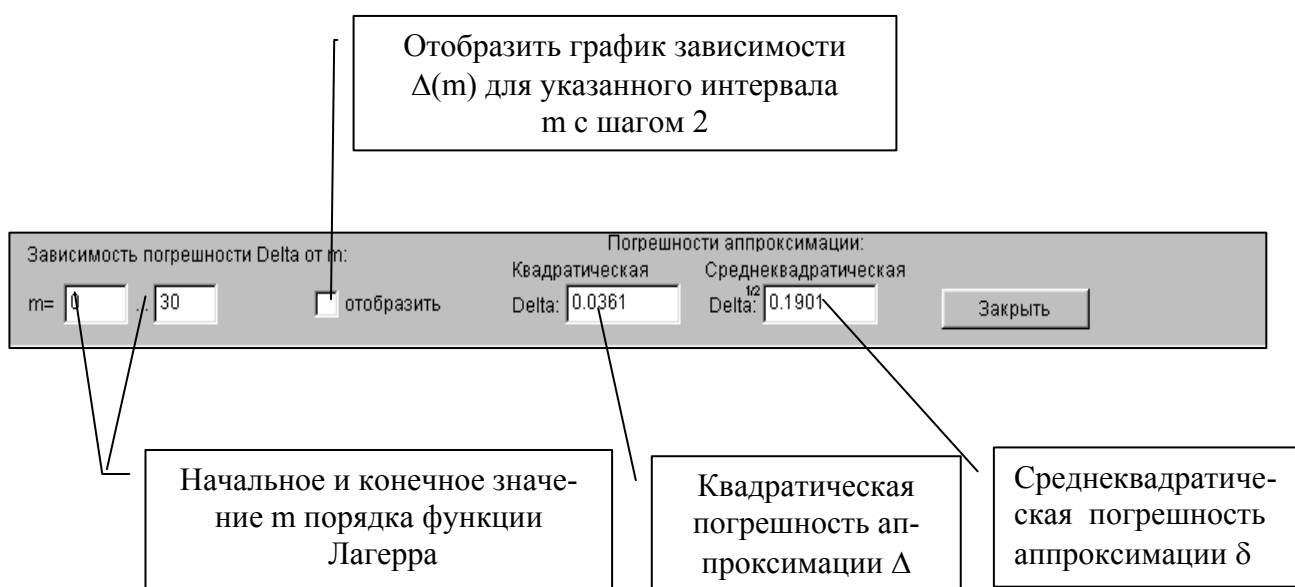


Рисунок П.16.12. Окно аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

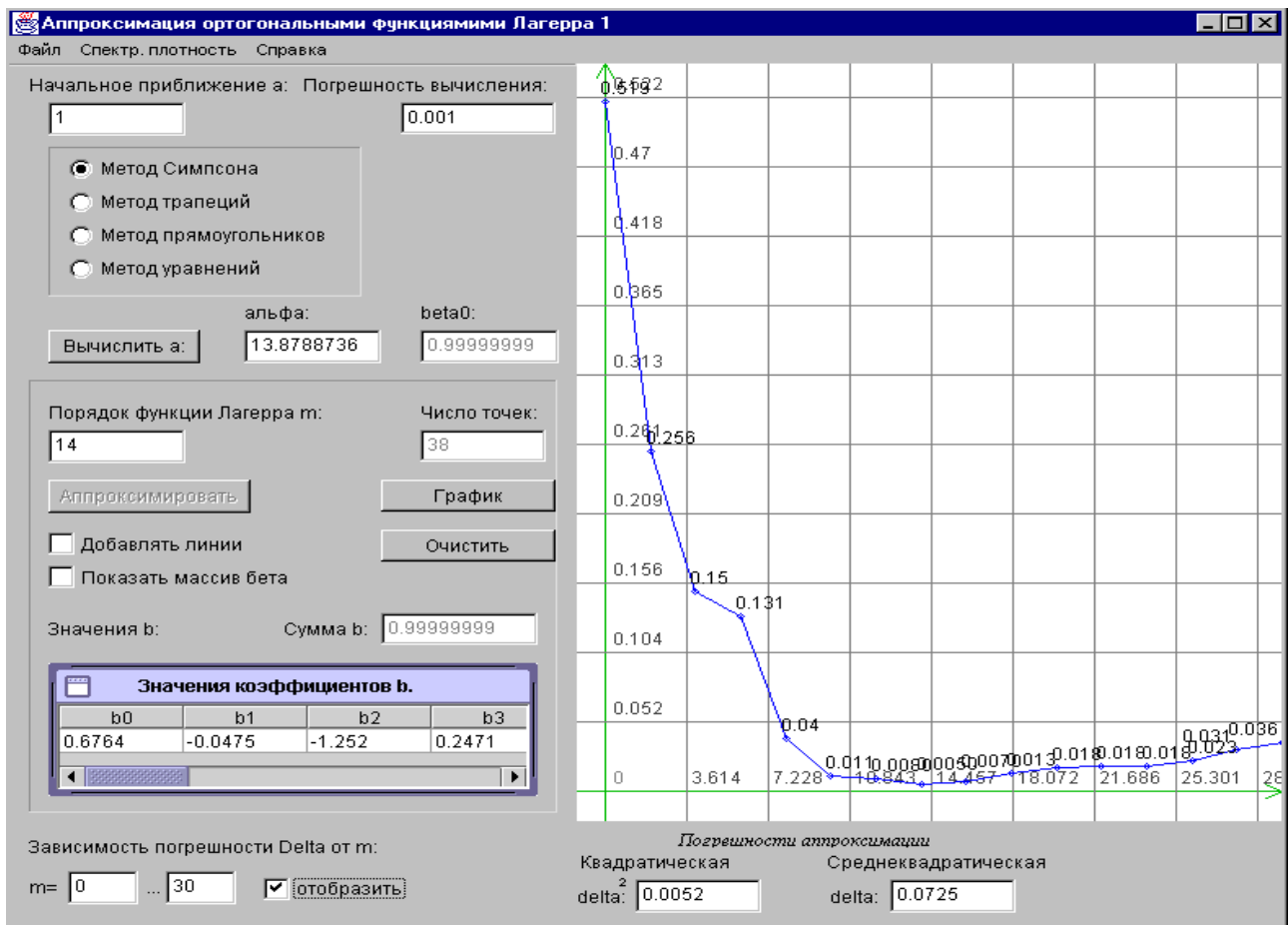


Рисунок П.16.13. Поиск оптимального числа членов разложения ряда

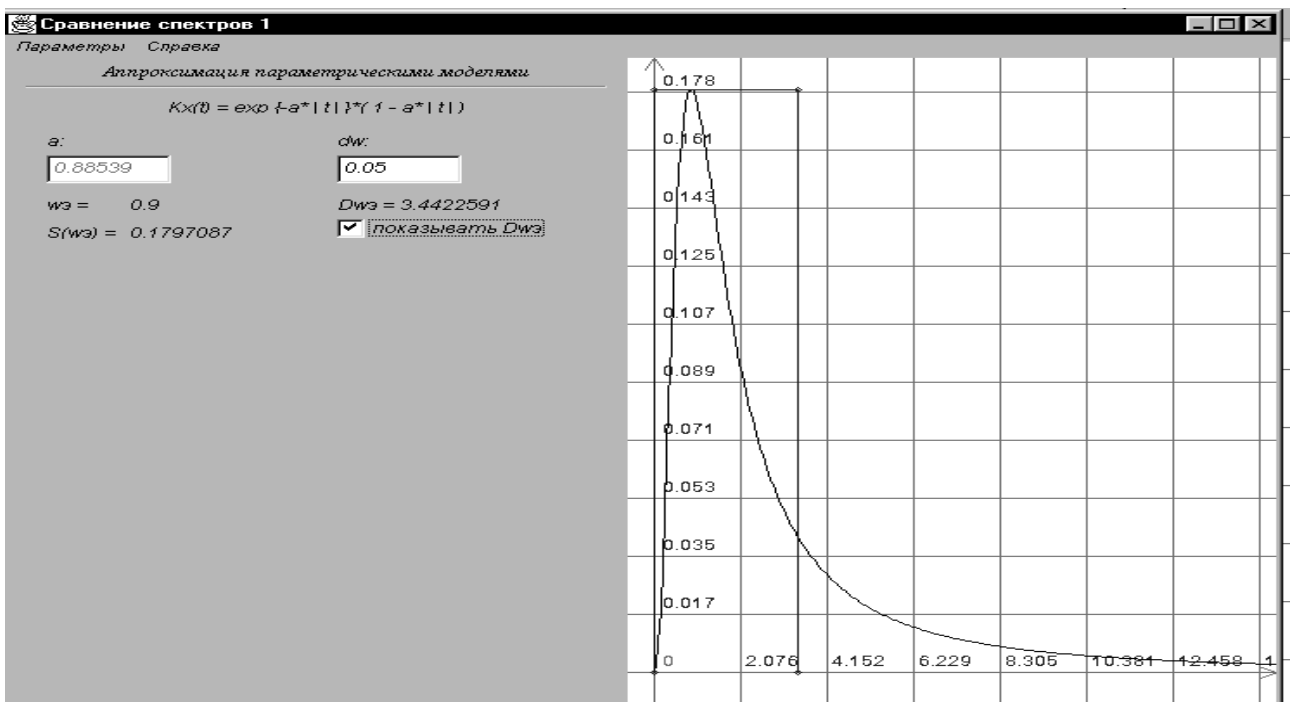


Рисунок П.16.14. Форма окна спектрального анализа

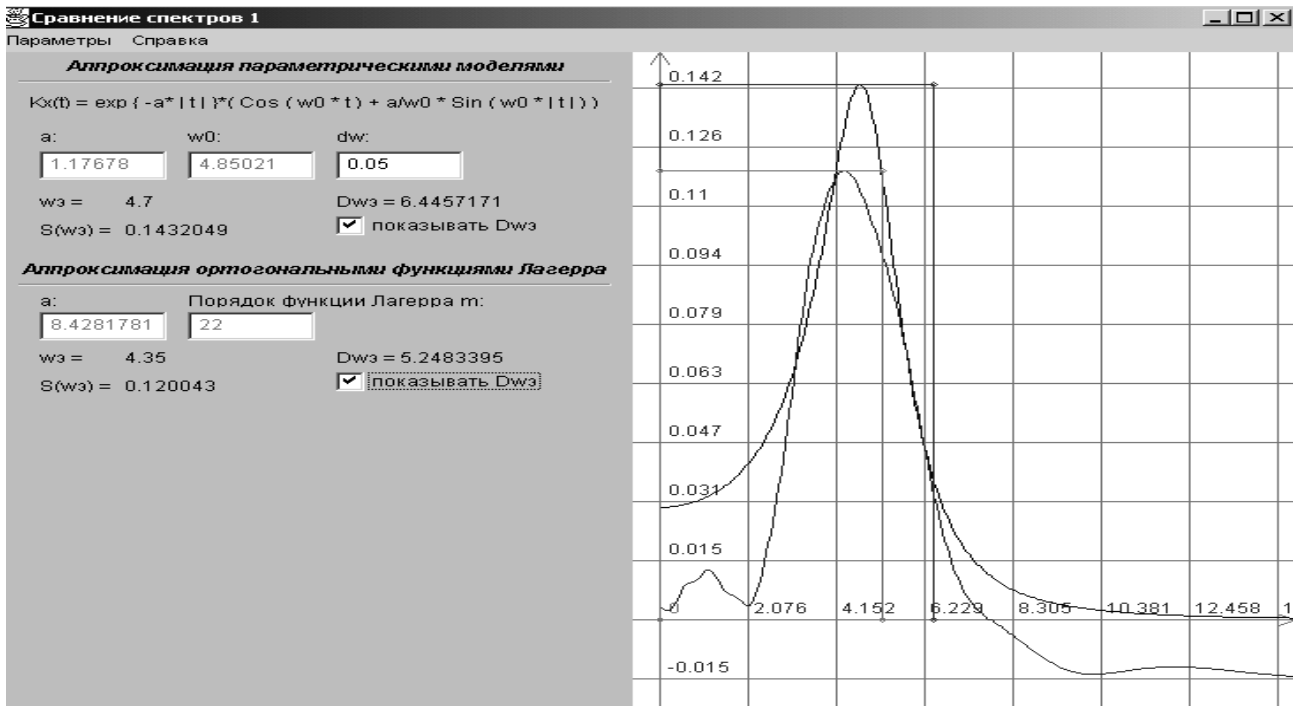


Рисунок П.16.15. Форма окна спектрального анализа при аппроксимации спектра ортогональными функциями Лагерра

Отметим, что для удобства пользователей в системе предусмотрены следующие возможности:

1. при моделировании СП возможно изменение интервала дискретизации, обеспечивающего восстановление корреляционной функции с заданной погрешностью (см. рис. П.16.16 а)).
2. При отображении графической информации возможно изменение формы представления результатов (см. рис. П.16.16 б)).

Для этого необходимо нажать правую кнопку «мыши», поместив курсор в соответствующее окно.

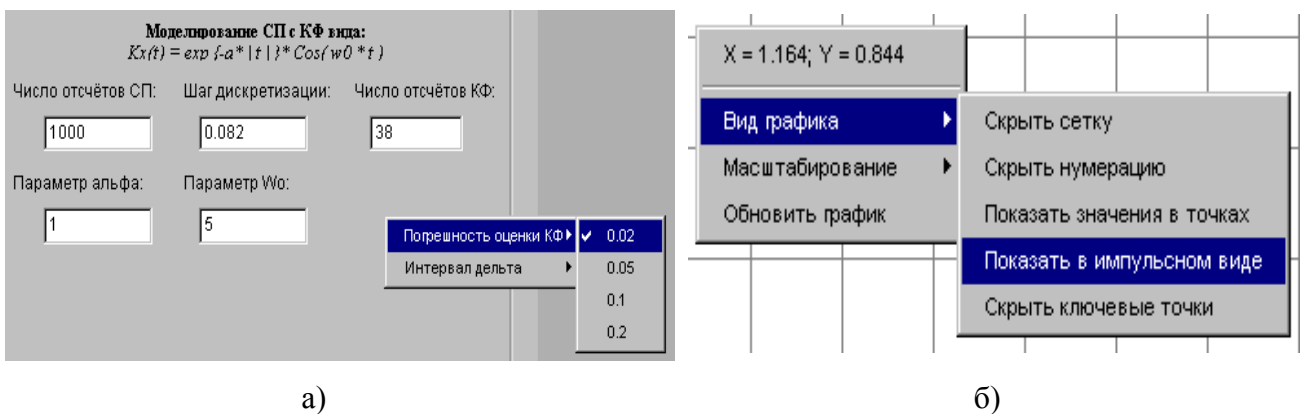


Рисунок П.16.16

Пример результатов обработки представлен на рис. П.16.17, где последовательно представлены: процесс, результаты идентификации и аппроксимации параметрической моделью, уточнение идентификации, аппроксимация ортогональными функциями Лагерра и построение спектральной плотности мощности по параметрической модели и в ортогональном базисе Лагерра.

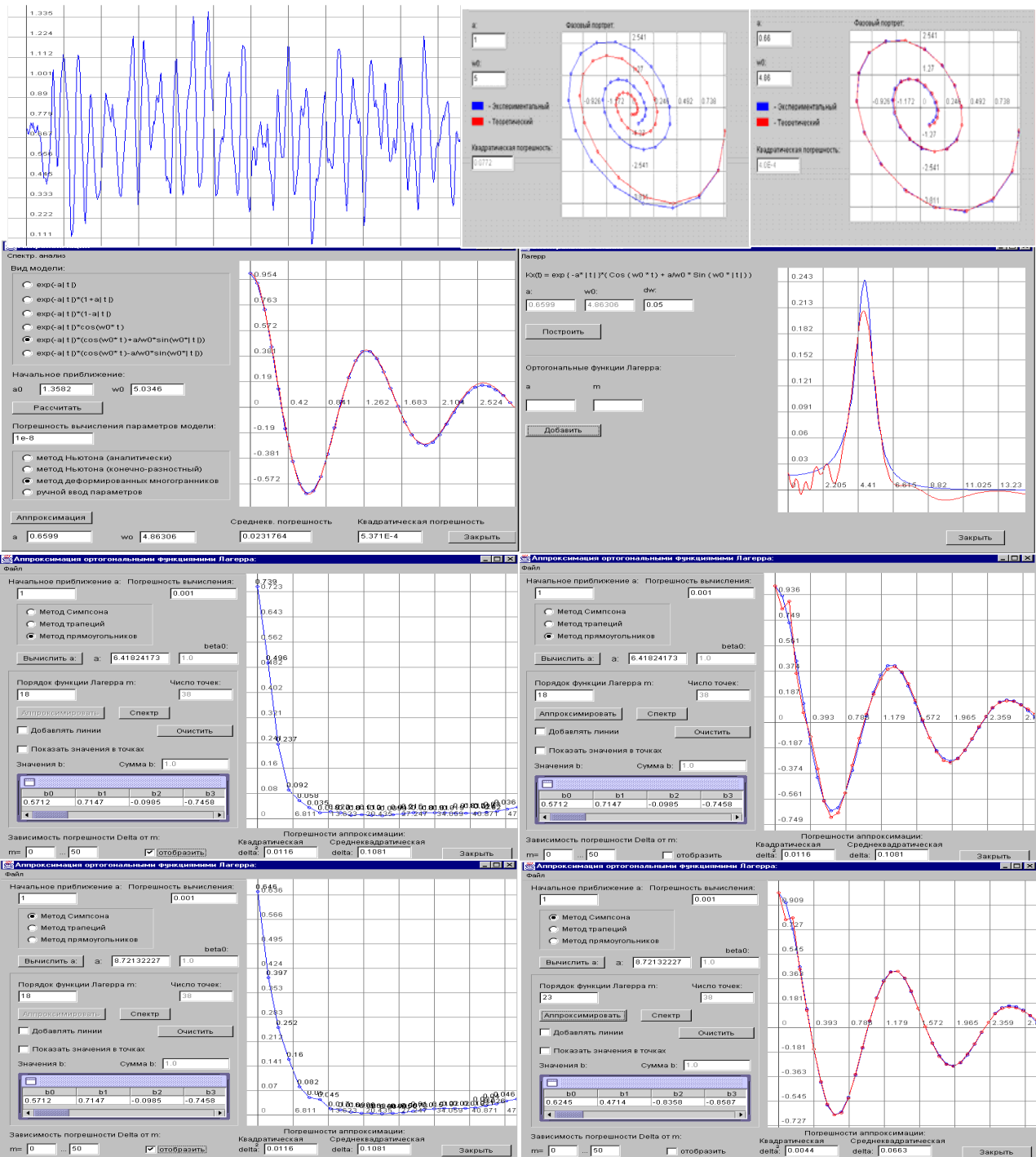


Рисунок П.16.17. Результаты обработки

Пример результатов обработки представлен на рис. П.16.18-П.16.21, где последовательно представлены: неквадрантный временной ряд, результаты идентификации и аппроксимации параметрической моделью, аппроксимация ортогональными функциями Лагерра и построение спектральной плотности мощности по параметрической модели и в ортогональном базисе Лагерра.

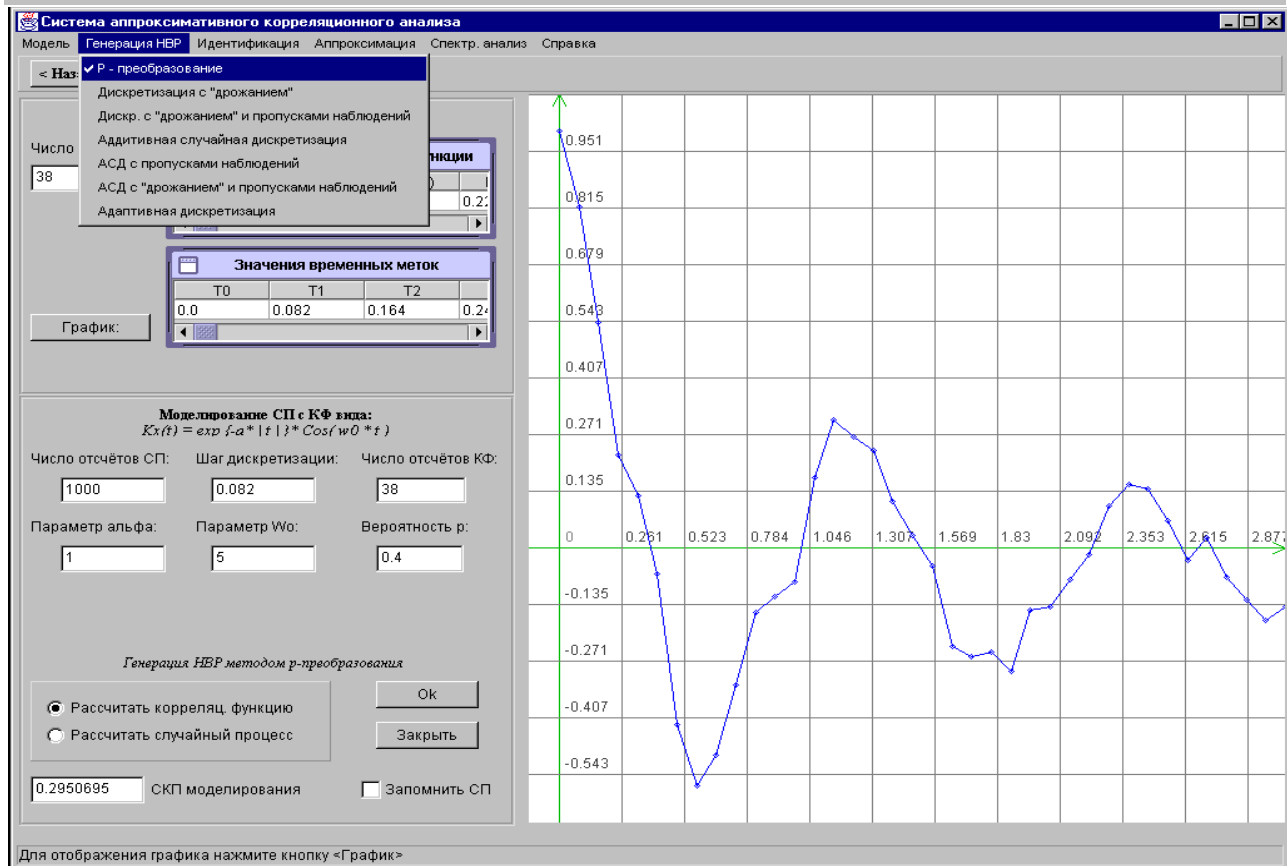
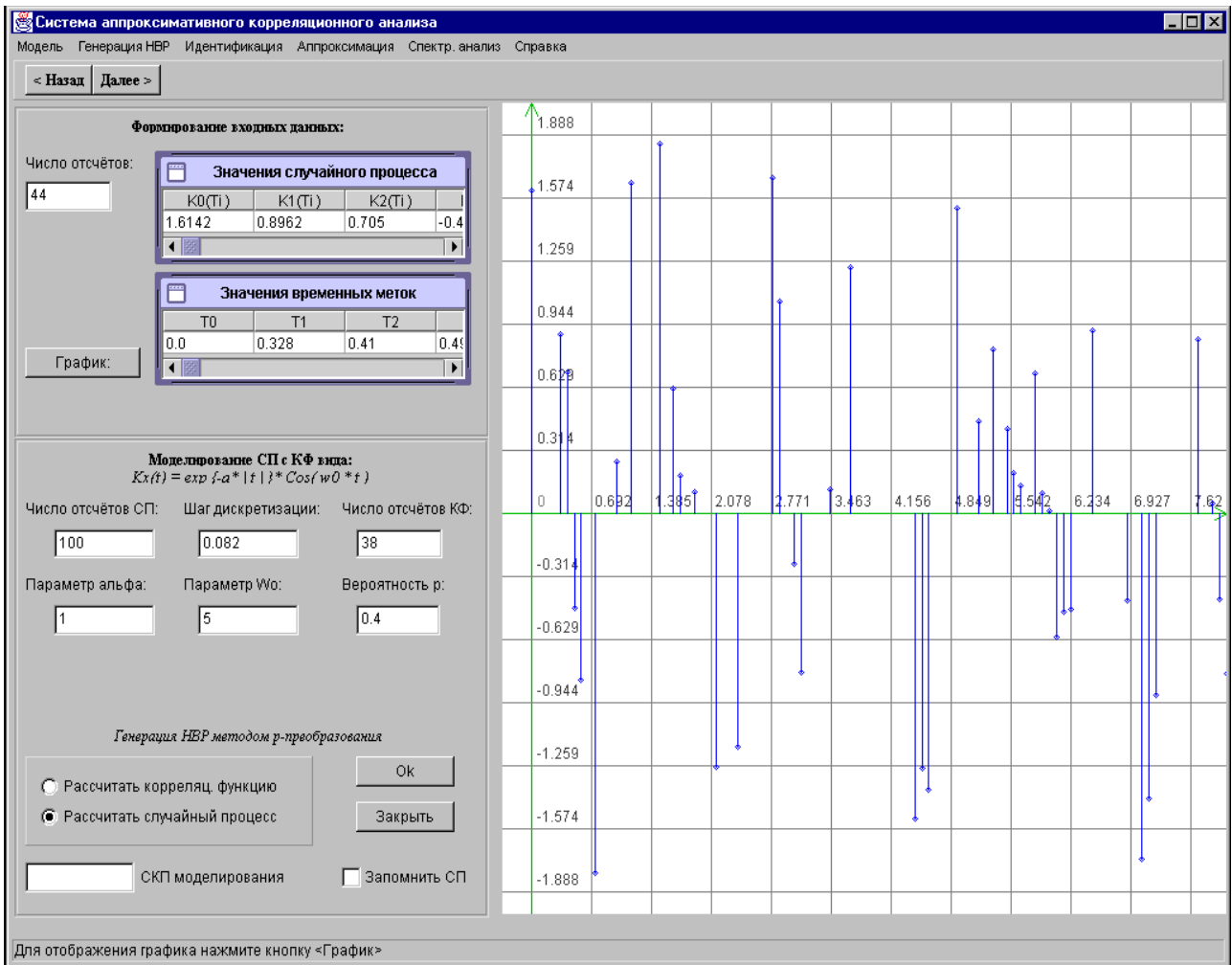


Рисунок П.16.18

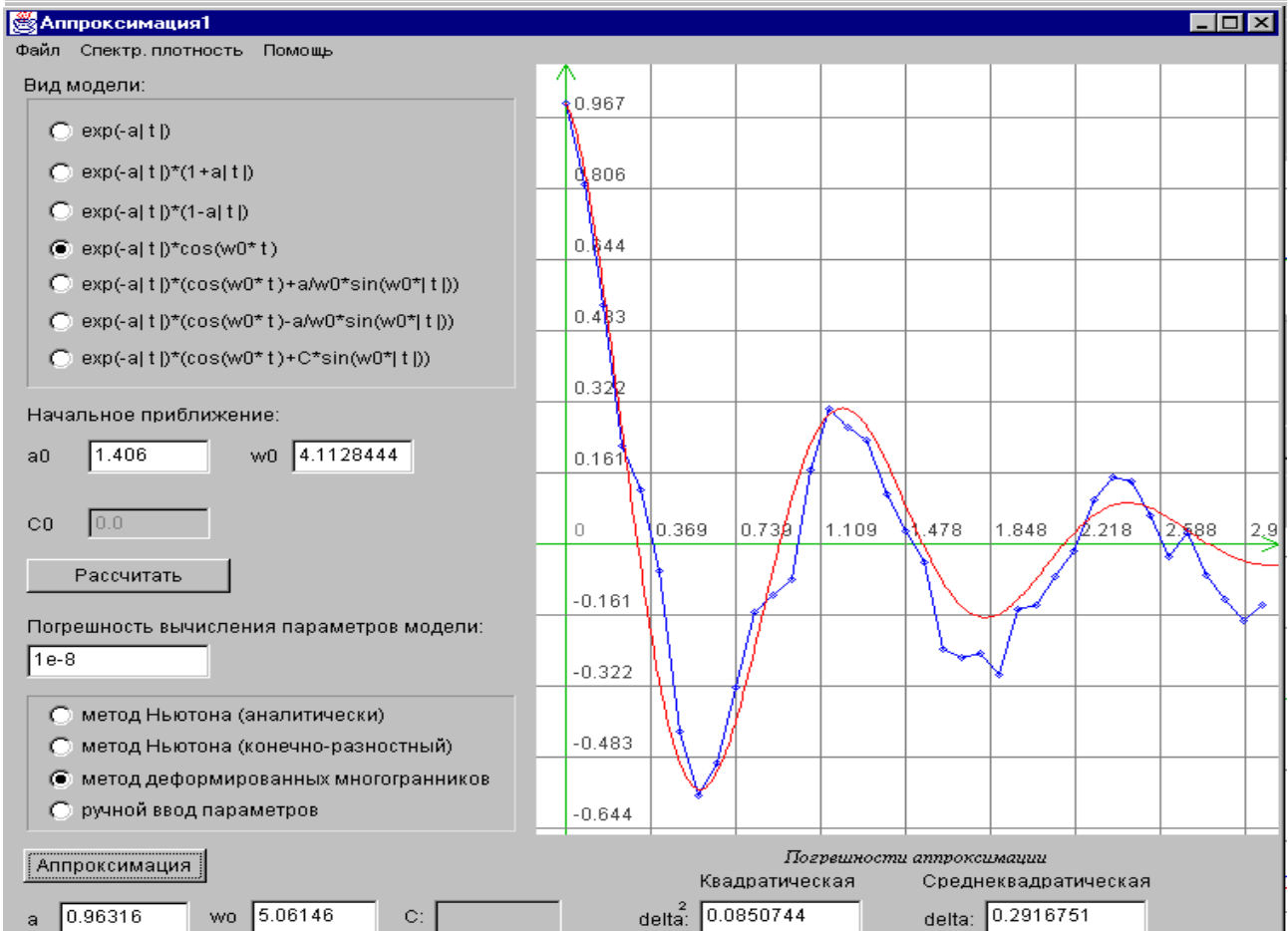
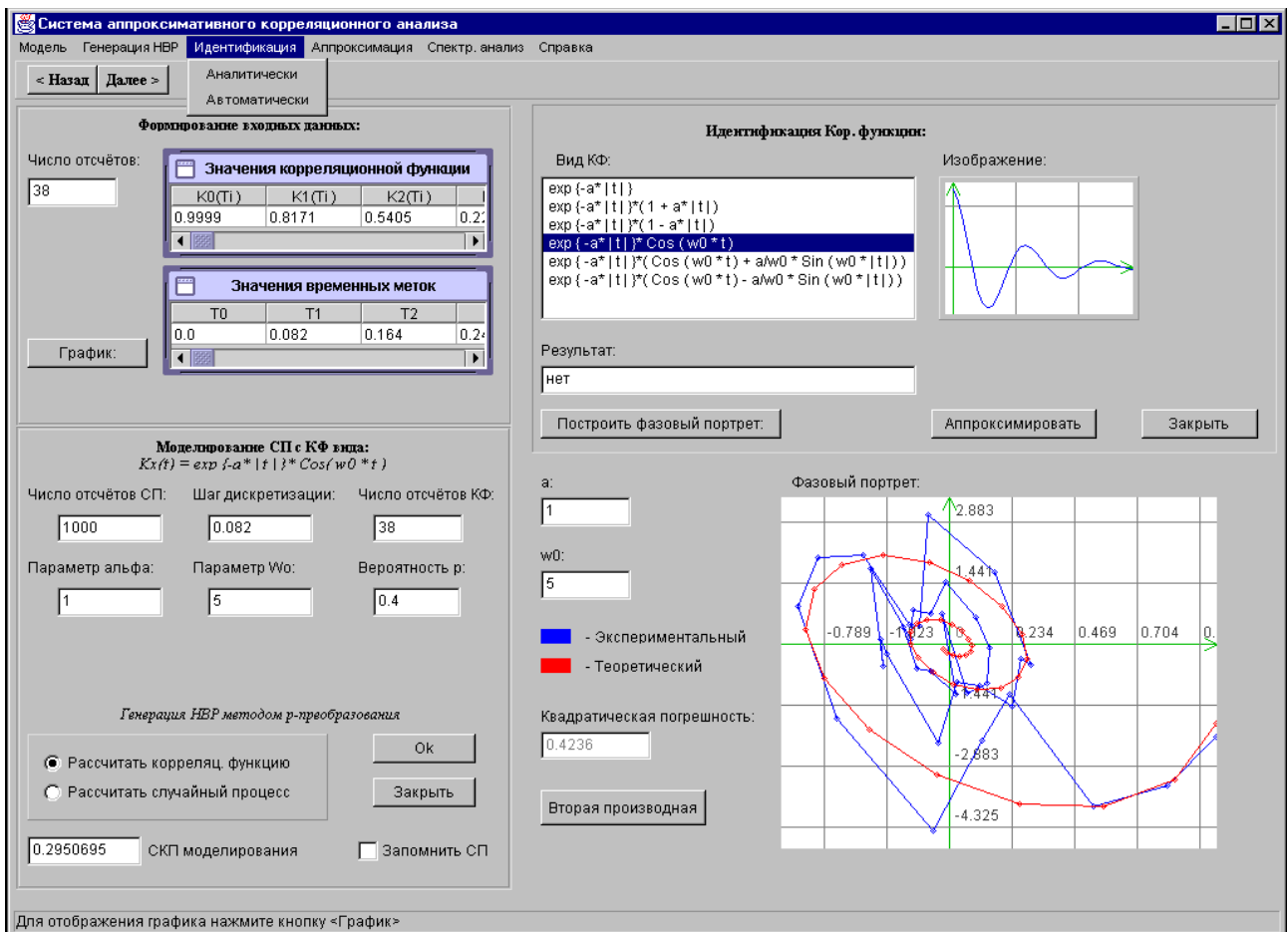


Рисунок П.16.19

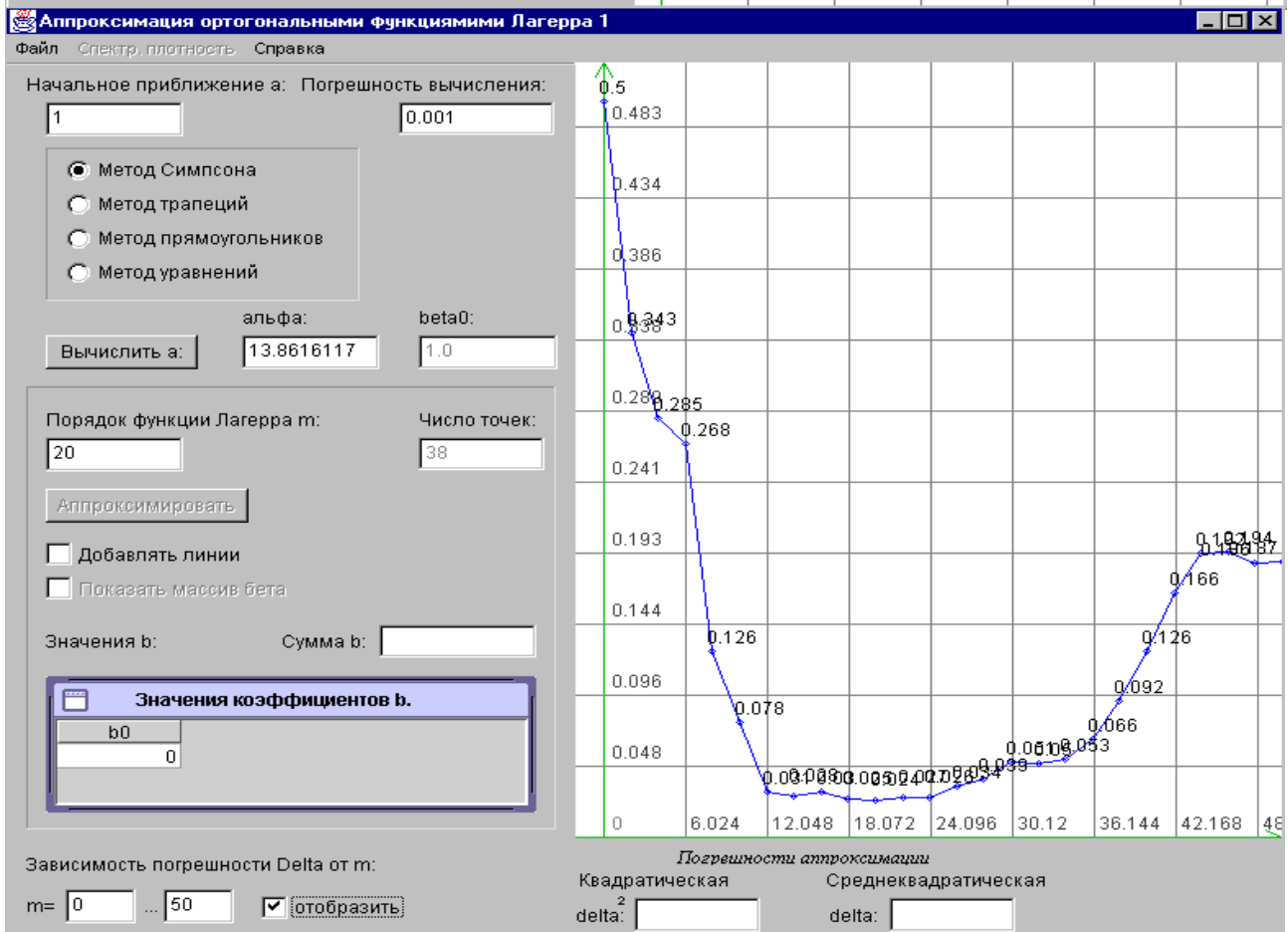
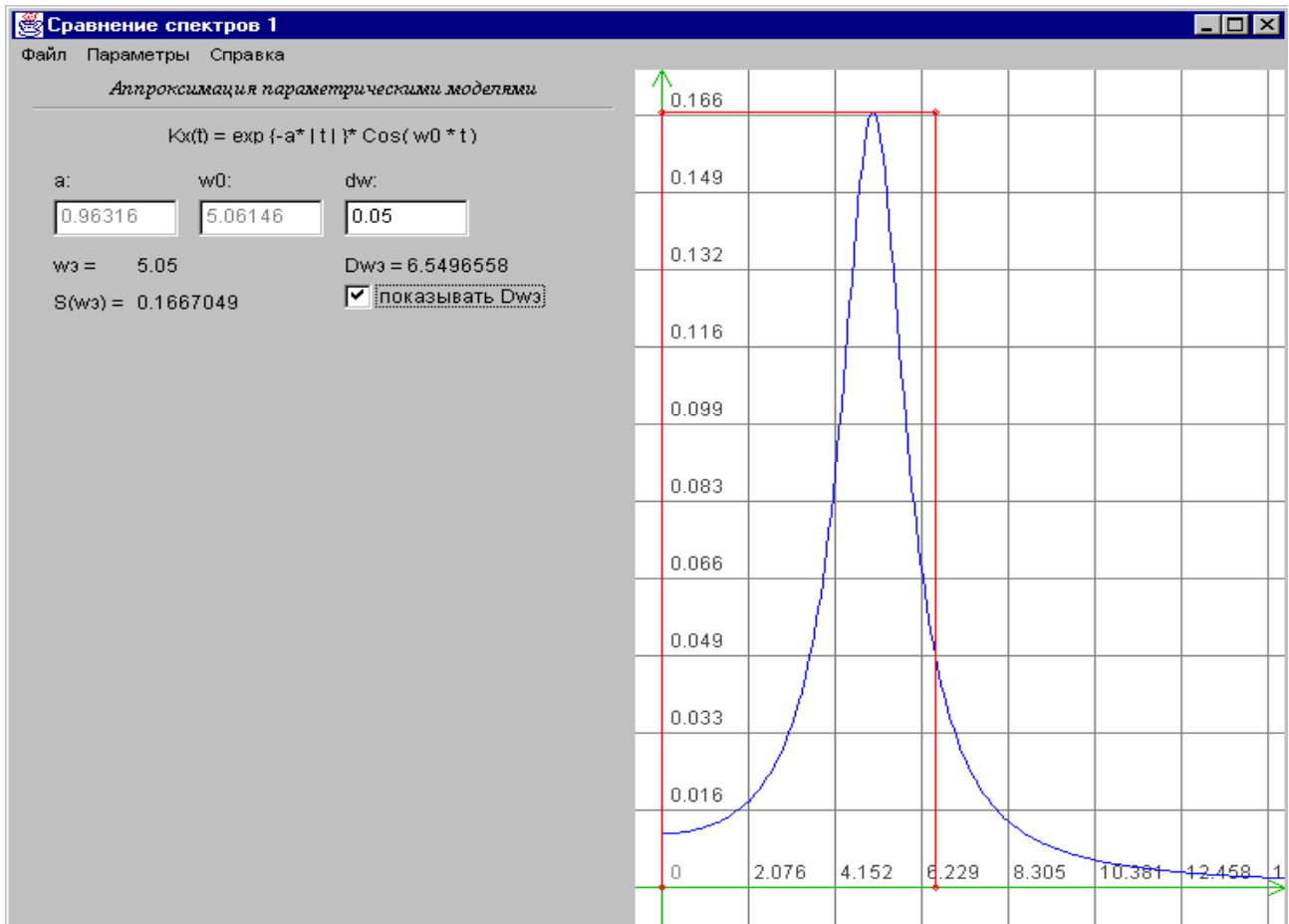


Рисунок П.16.20

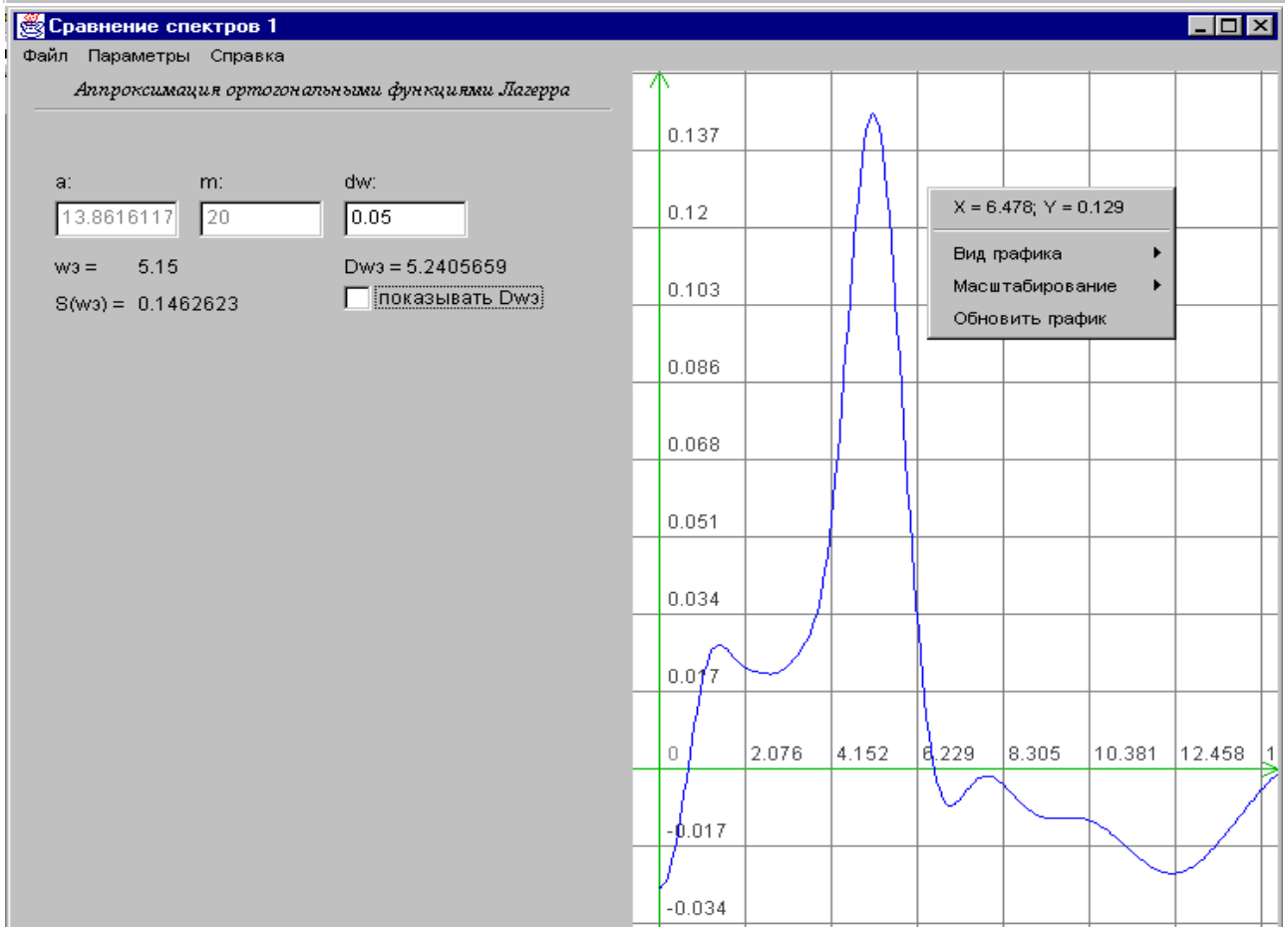
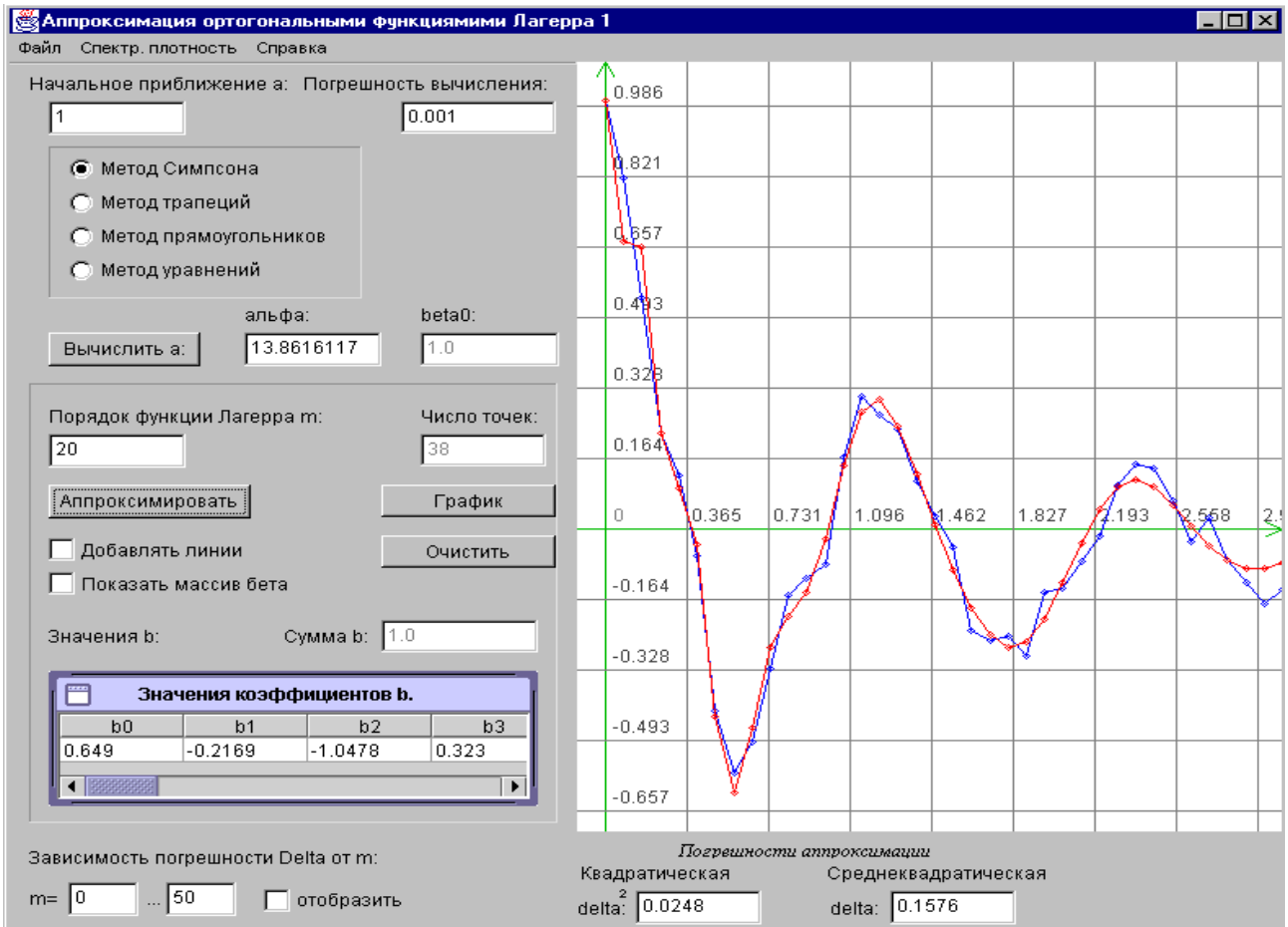
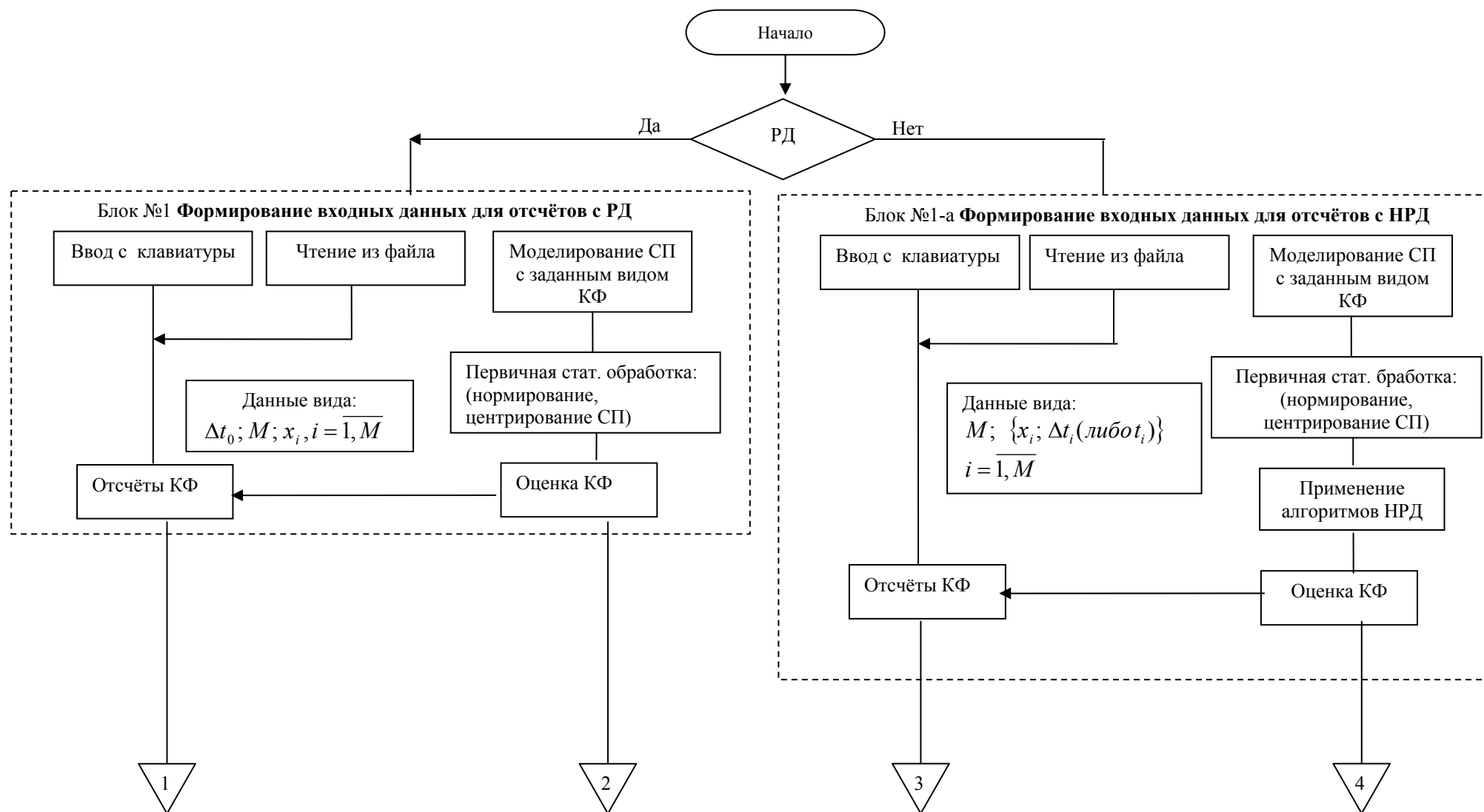
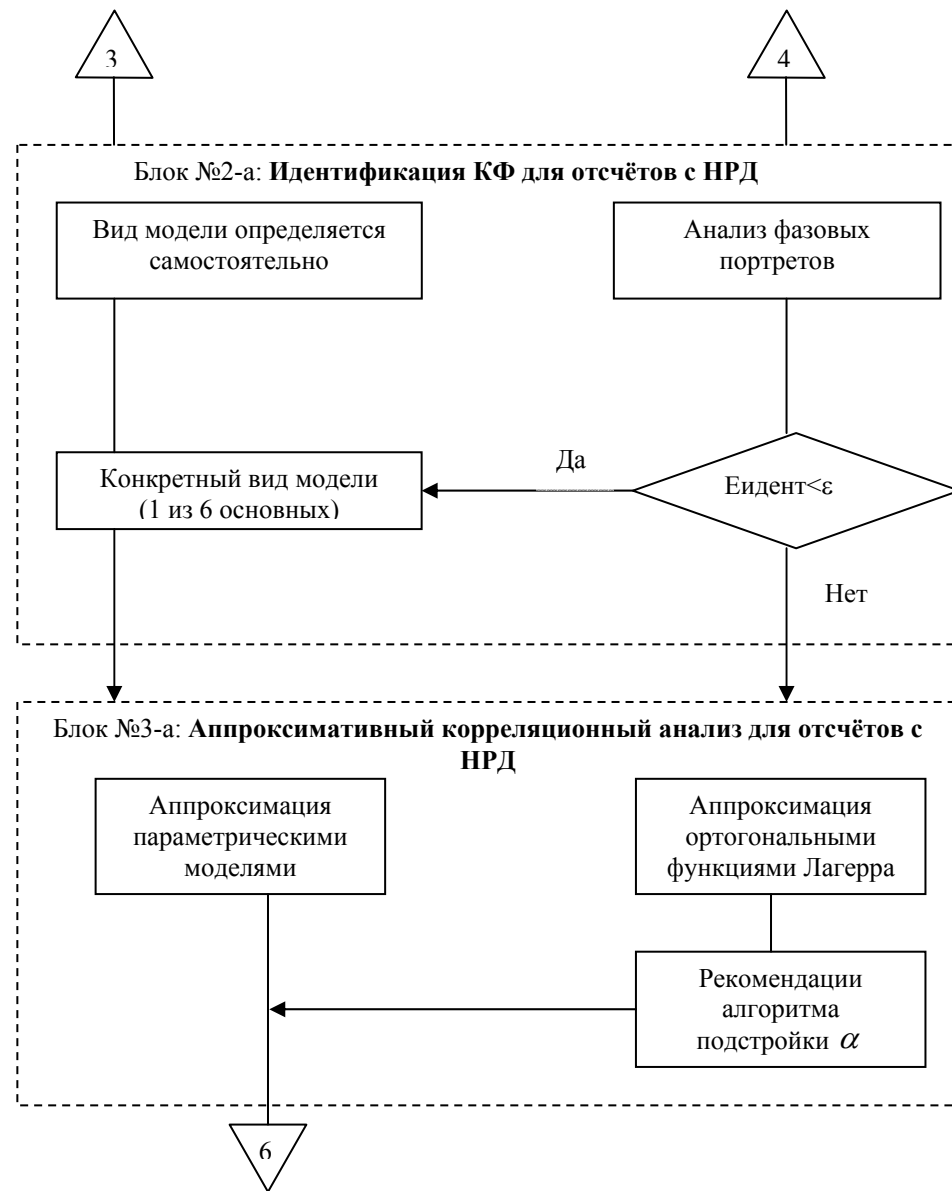
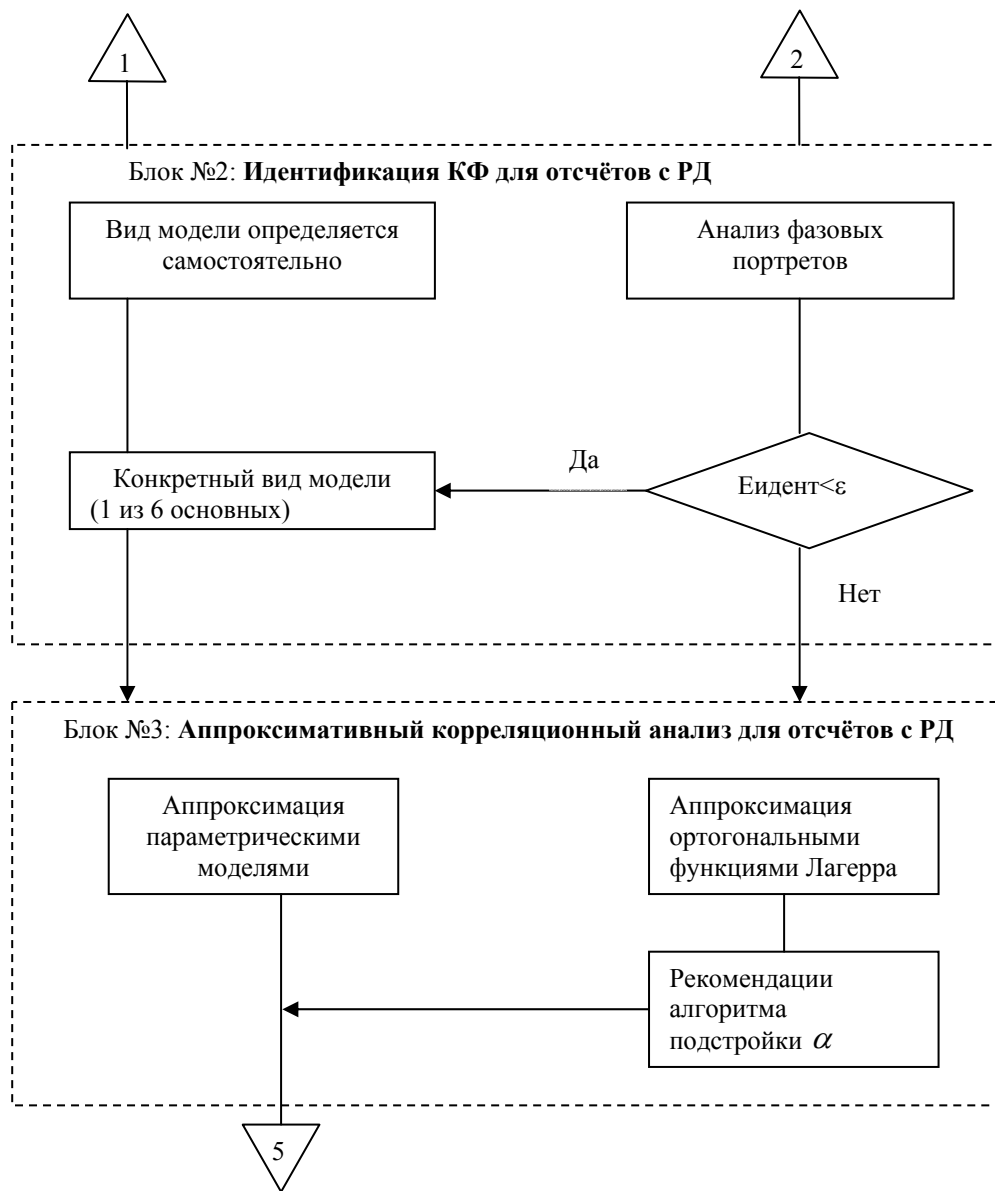


Рисунок П.16.21

Блок- схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа.





5

Блок №4: **Обобщённый анализ корреляционных характеристик для отсчётов с РД**



Блок №5: **Аппроксимативный спектральный анализ для отсчётов с РД**



Блок №6: **Обобщённый анализ спектральных характеристик для отсчётов с РД**

6

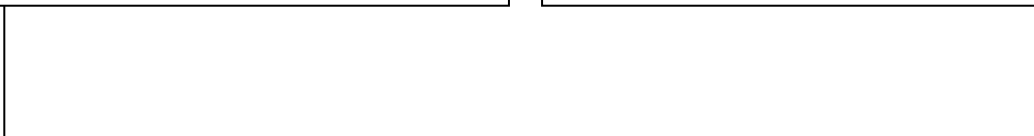
Блок №4-а: **Обобщённый анализ корреляционных характеристик для отсчётов с НРД**



Блок №5-а: **Аппроксимативный спектральный анализ для отсчётов с НРД**



Блок №6-а: **Обобщённый анализ спектральных характеристик для отсчётов с НРД**



Конец

АИС для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик

Разработанная система служит для проведения аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов [1]. Структурная схема системы приведена на рис П.18.1. В соответствии с выполняемыми функциями можно выделить следующие подсистемы:

1. задания входных воздействий и генерирования НВР;
2. первичной статистической обработки;
3. аппроксимации взаимной корреляционной функции;
4. аппроксимации спектральной плотности мощности.

Подсистема задания входных воздействий и генерирования НВР состоит из двух модулей.

В первом модуле производится генерирование псевдослучайной последовательности с заданным видом корреляционной функции (КФ) и получение НВР. Полученные данные: массив меток времени и соответствующие им отсчеты СП, объем выборки M и интервал дискретизации Δt_0 , - поступают на вход подсистемы первичной статистической обработки, могут служить для получения второго СП и являются входными данными для подсистемы аппроксимации взаимной корреляционной функции.

Во втором модуле производится генерирование новой псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ или обработка первого СП.

Получаемые в результате работы первой подсистемы данные поступают на вход следующих двух подсистем.

Подсистема первичной статистической обработки производит оценку числовых характеристик, центрирование, нормирование случайных процессов, оценку и построение фазового портрета КФ. При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции.

Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции состоит из двух частей: оценки ВКФ и аппроксимации ВКФ функциями Лагерра или типовыми параметрическими моделями. На вход этой подсистемы кроме данных, полученных в подсистеме 1, поступает число членов разложения и интервал, на котором производится оценка ВКФ, или начальные значения параметров параметрической модели. Затем вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации как для положительной, так и отрицательной областей определения ВКФ. Полученные аппроксимирующие выражения поступают в подсистему 4.

Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности. На основе данных, полученных в подсистеме 3, производится построение взаимной спектральной плотности мощности как в ортогональном базисе Лагерра, так и с использованием параметрических моделей.

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис. П.18.2.

Основными элементами формы является панель главного меню и страницы, выбирая которые пользователь переходит между частями программы.

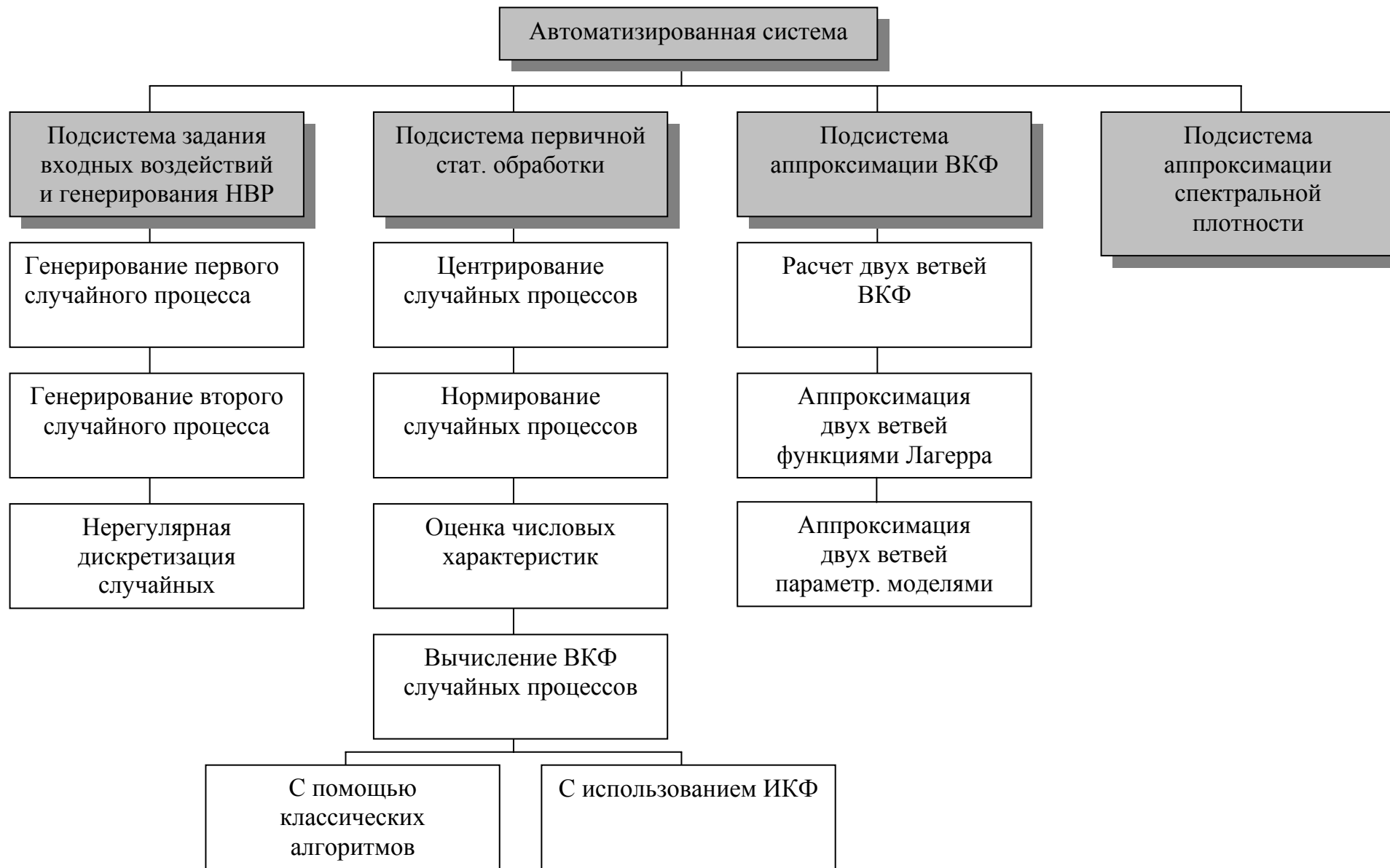


Рисунок П.18.1. Структура автоматизированной системы

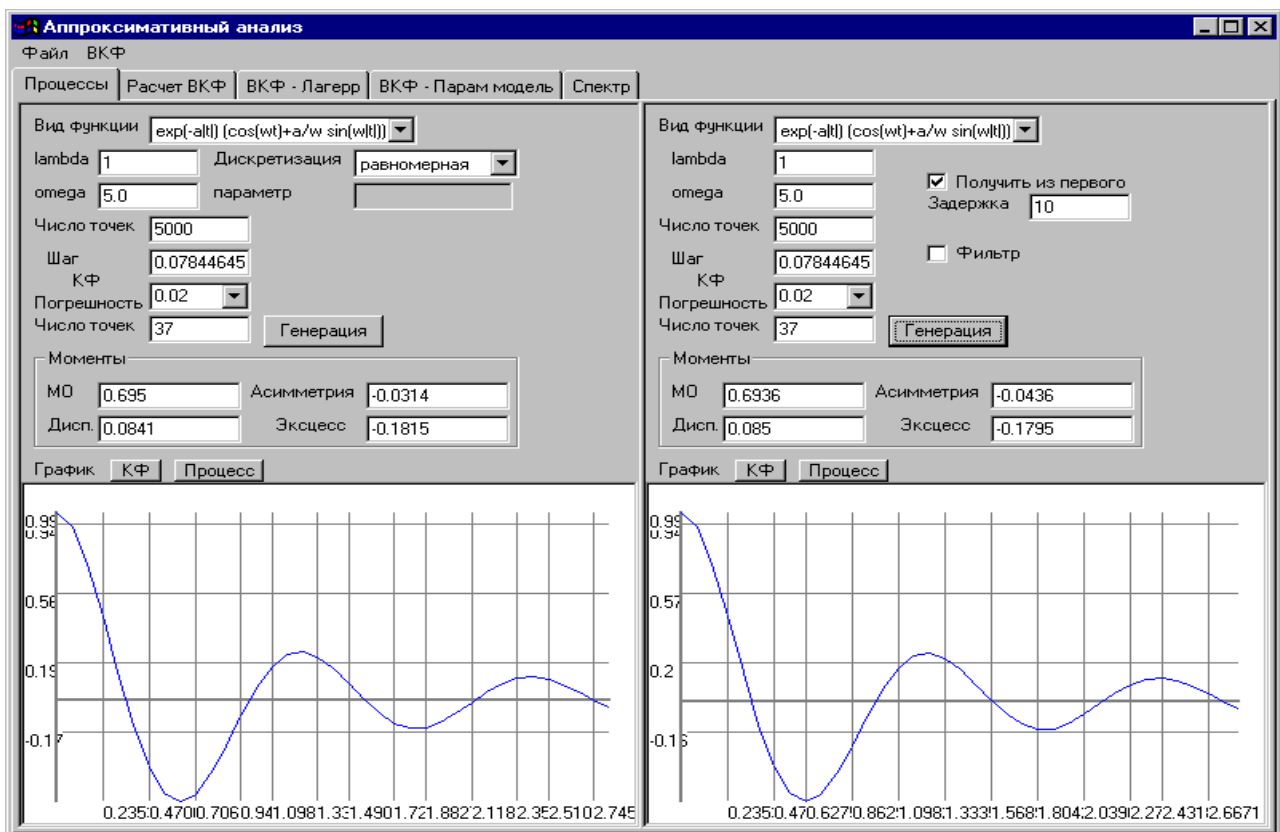


Рисунок П.18.2

Задание входных воздействий и генерирование НВР

С помощью первой страницы осуществляется задание входных воздействий, генерирование НВР и первичная статистическая обработка. Она содержит две панели: **левую** - для генерирования и первичной обработки первого процесса и **правую** - для генерирования и первичной обработки второго процесса. На левой панели необходимо ввести следующие параметры:

- число отсчетов СП;
- шаг дискретизации;
- параметры α , ω_0 ;
- погрешность моделирования.

В случае генерирования НВР необходимо ввести параметры нерегулярной дискретизации.

После нажатия на кнопку «Генерация» СП будет смоделирован. Сразу же будут рассчитаны математическое ожидание, дисперсия, коэффициент асимметрии, эксцесс и КФ процесса и отображены на панели. Предусмотрена возможность отображения КФ и самого СП. Для этого нужно нажать на соответствующие кнопки над графиком.

Генерирование второго процесса производится на правой панели. Для этого необходимо сгенерировать СП с заданным видом КФ аналогично рассмотренному выше или установить флаг «получить из первого». При этом второй процесс будет получен из первого с помощью задержки на указанное число отсчетов.

Характеристики процесса расположены в нижней половине панели.

После генерирования двух процессов можно перейти на страницу 2, выбрав закладку «ВКФ» в левом верхнем углу формы.

Для расчета ВКФ двух сгенерированных процессов необходимо ввести количество точек левой и правой ветвей и нажать на кнопку «Рассчитать» (см. рис. П.18.3).

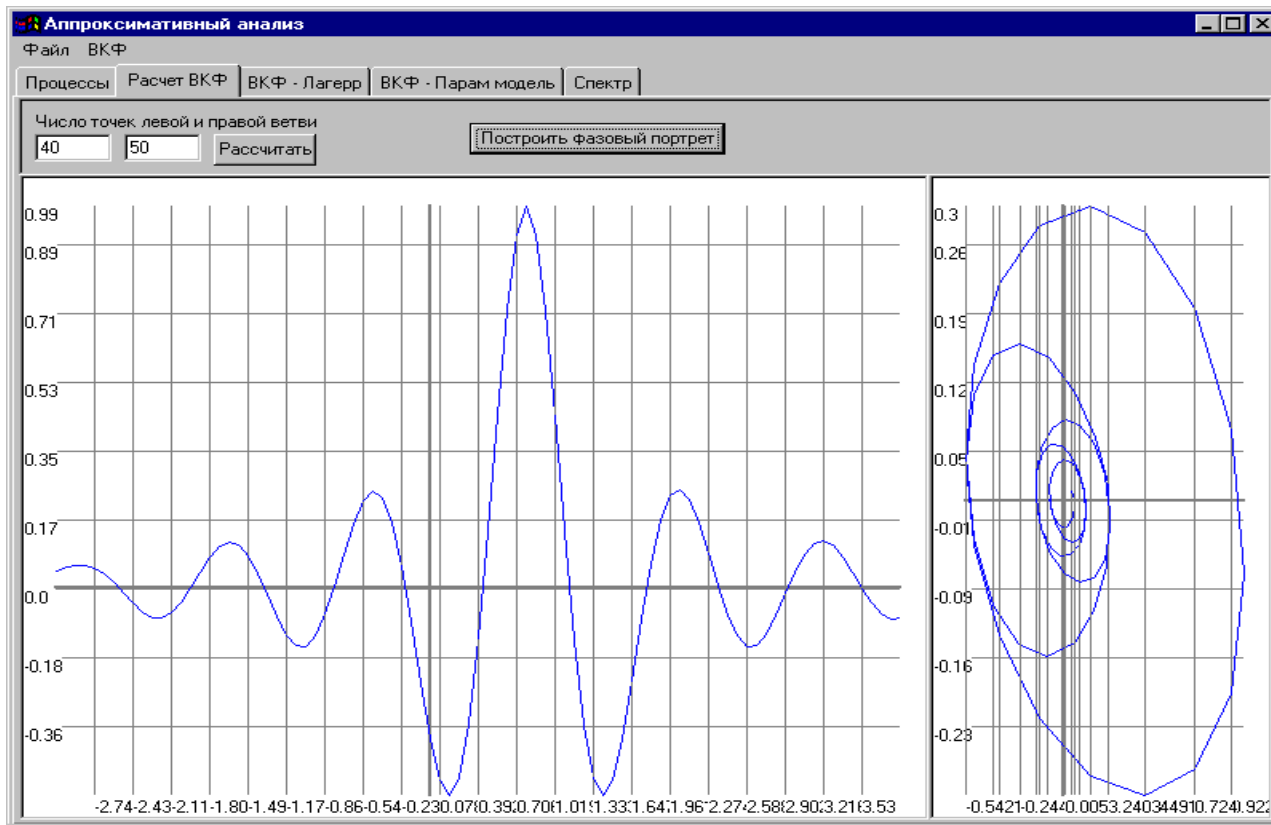


Рисунок П.18.3

Исследователь по своему усмотрению в ручном режиме может установить требуемое количество точек правой и левой ветвей взаимной корреляционной функции. Кроме этого возможно построение её фазового портрета.

После определения вида модели возможен переход либо на третью, либо четвертую страницы.

Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями Лагерра

Страница 3 состоит из двух панелей. Левая служит для ввода параметров, правая - для отображения построенных графиков. Эта страница приведена на рис. П.18.4.

Для проведения аппроксимации рассчитанной ВКФ необходимо вычислить параметр α функции Лагерра. Для этого требуется задать начальное приближение параметра α , которое необходимо для расчета методом Ньютона, точность вычисления этого параметра, выбрать один из методов численного интегрирования (прямоугольников, трапеций или Симпсона) и нажать кнопку « $b_1=0$ » или задать параметр α вручную в поле «*alfa*». Затем необходимо установить порядок аппроксимирующей функции Лагерра в поле «**Число членов ряда**». Эту операцию необходимо выполнить для правой и левой ветви. После нажатия кнопки

«Аппроксимировать» в список «**beta**» будут занесены вычисленные значения коэффициентов функции, причем вид этих коэффициентов (β или b) зависит от состояния флажка «**beta/be**», а в поле графика будут отображены синим цветом ВКФ и красным аппроксимирующая функция. В поле «**СрКв**» будет отображена среднеквадратическая погрешность аппроксимации.

Установив максимальное значение порядка аппроксимирующей функции в поле «**Число членов ряда**» и нажав на кнопку «**Погрешность**», справа или слева в поле графика можно получить зависимость среднеквадратической погрешности аппроксимации для правой или левой ветви. Анализ этого графика позволяет найти оптимальное значение порядка аппроксимирующей функции. Пример графика приведен на рис П.18.5.

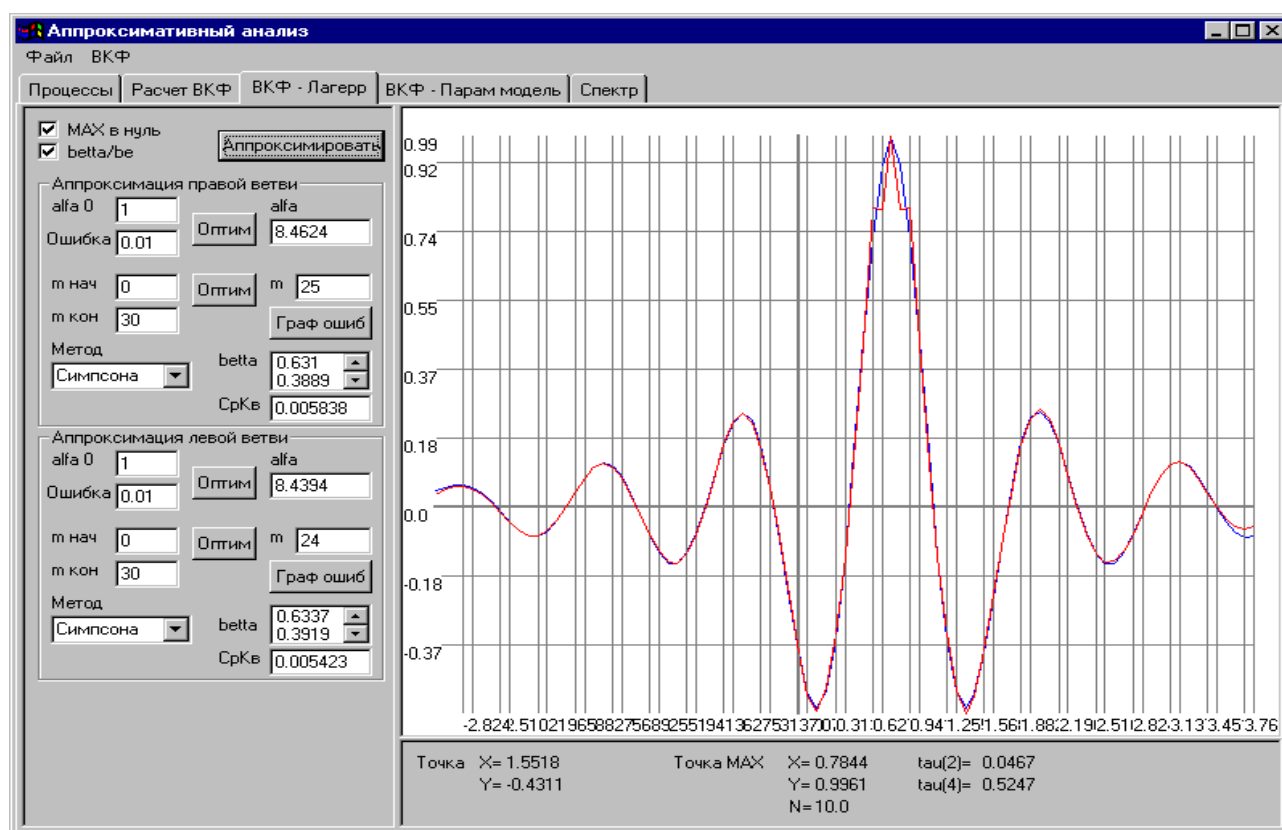


Рисунок П.18.4

Аппроксимация ВКФ параметрическими моделями

Если модель взаимной корреляционной функции в результате идентификации по фазовому портрету определена, наиболее целесообразно использовать метод аппроксимации ВКФ параметрическими моделями. Для этого необходимо вызвать на экран четвертую страницу (см. рис. П.18.6).

При аппроксимации ВКФ необходимо:

1. выбрать вид модели;
2. задать начальные значения её параметров (отдельно для правой и левой ветвей ВКФ);
3. установить значения погрешности оценки параметров модели;
4. если для заданных начальных значений уточнить параметры модели не удалось, необходимо ввести новые начальные значения.

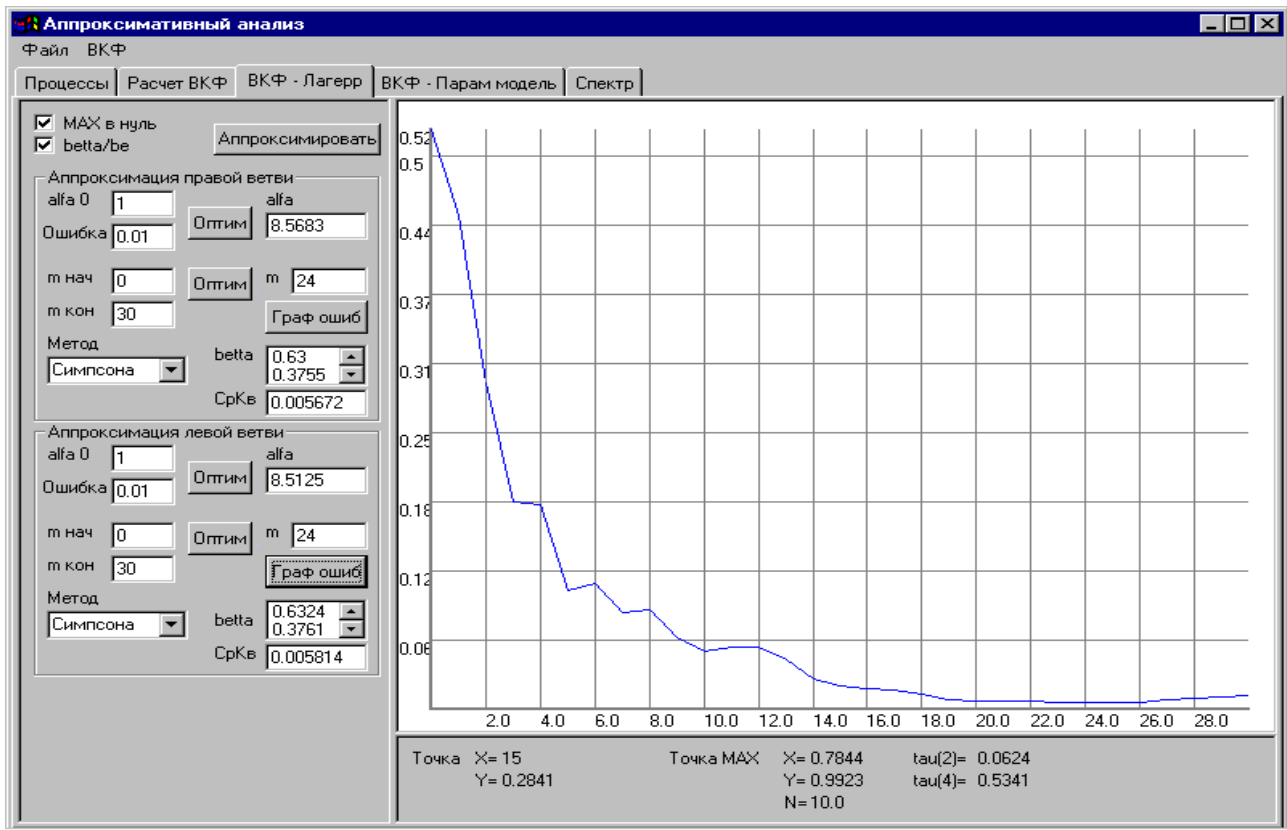


Рисунок П.18.5

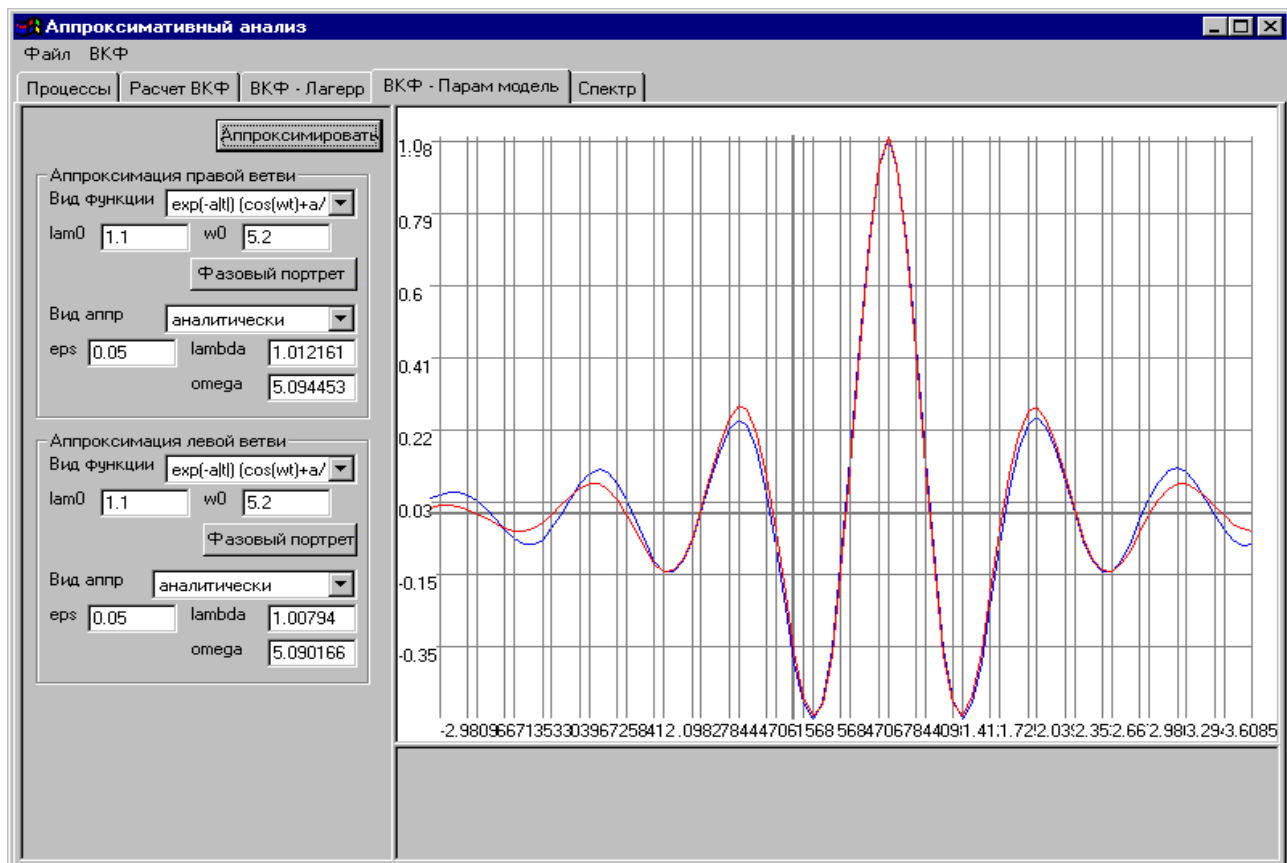


Рисунок П.18.6

В случае необходимости, после аппроксимации ВКФ с помощью этой страницы можно уточнить фазовые портреты правой (см. рис. П.18.7) и левой ветвей ВКФ (см. рис. П.18.8).

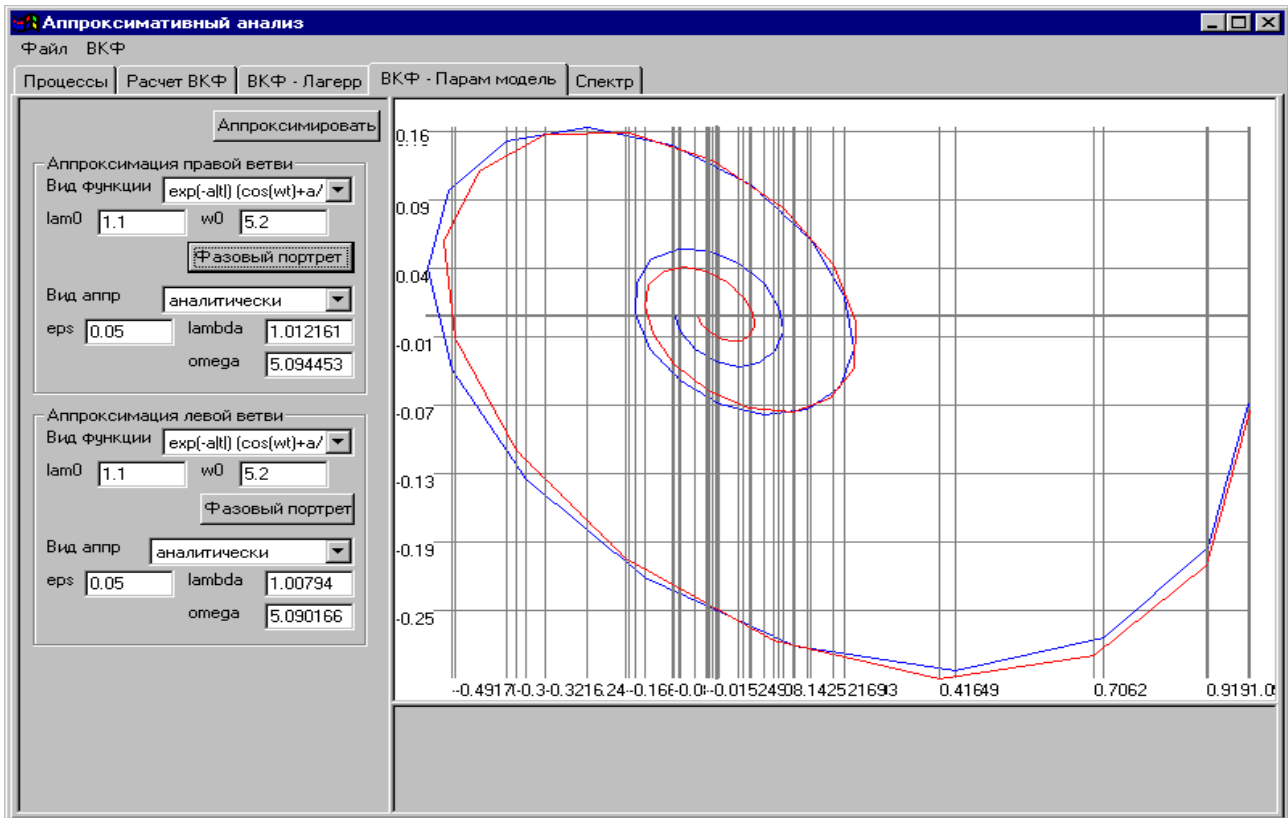


Рисунок П.18.7. Фазовый портрет правой ветви ВКФ

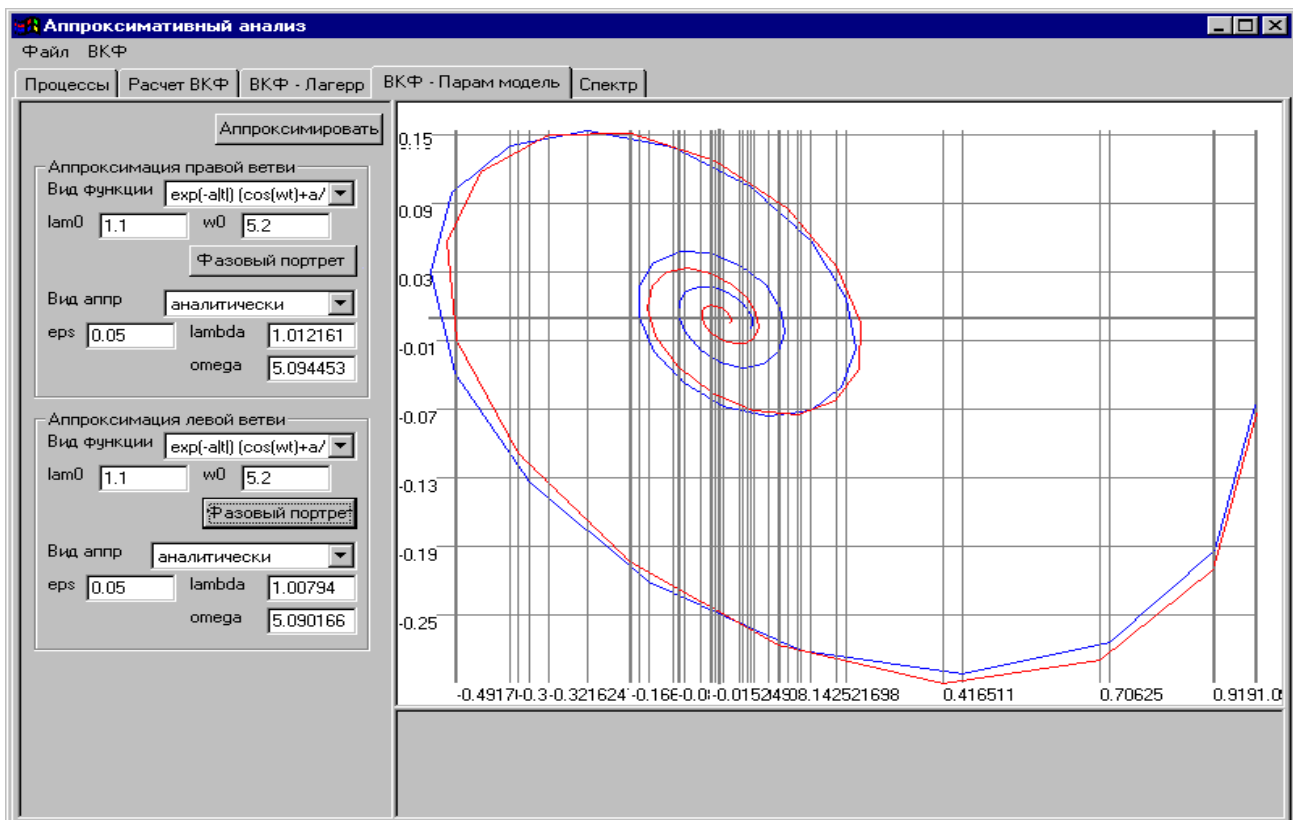


Рисунок П.18.8. Фазовый портрет левой ветви ВКФ

Аппроксимация взаимной спектральной плотности мощности

На странице 5 по параметрам ортогональной функции Лагерра или параметрической модели может быть построена спектральная плотность мощности. Для этого необходимо перейти на эту страницу, выбрав закладку «Вспектр» и нажать на кнопку «Спектр» (см. рис. П.18.9-П.18.10).

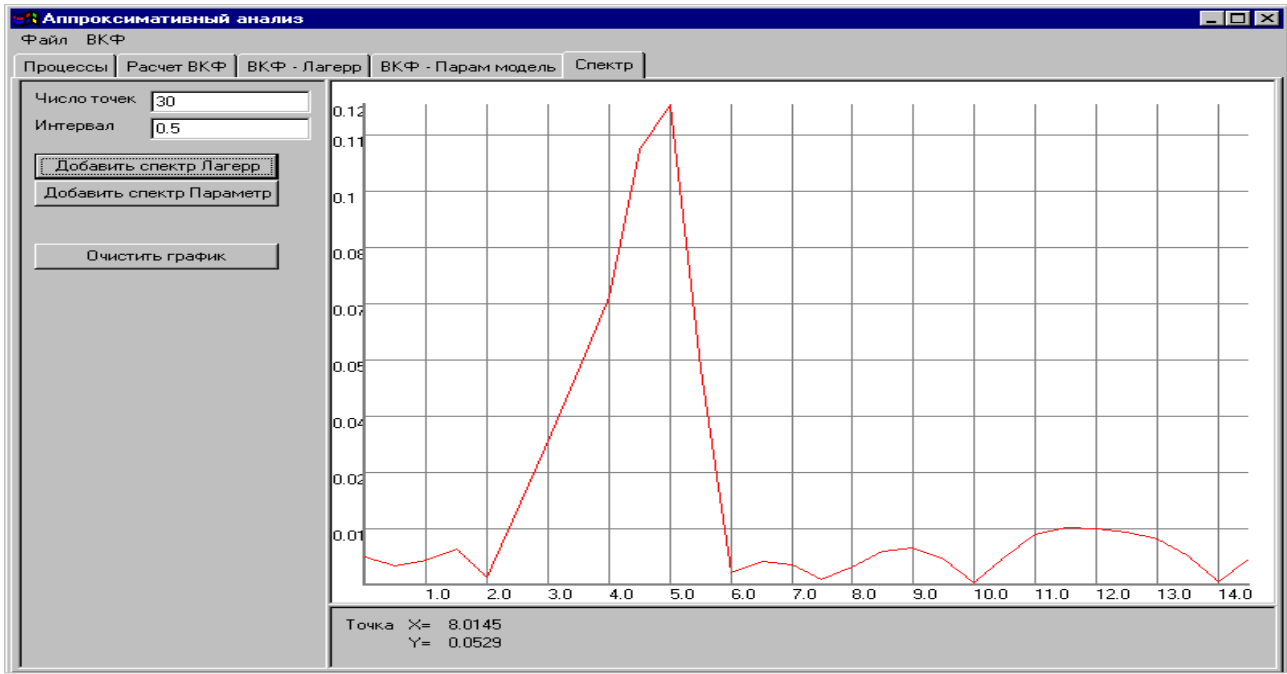


Рисунок П.18.9. Модель взаимной спектральной плотности мощности в ортогональном базисе Лагерра

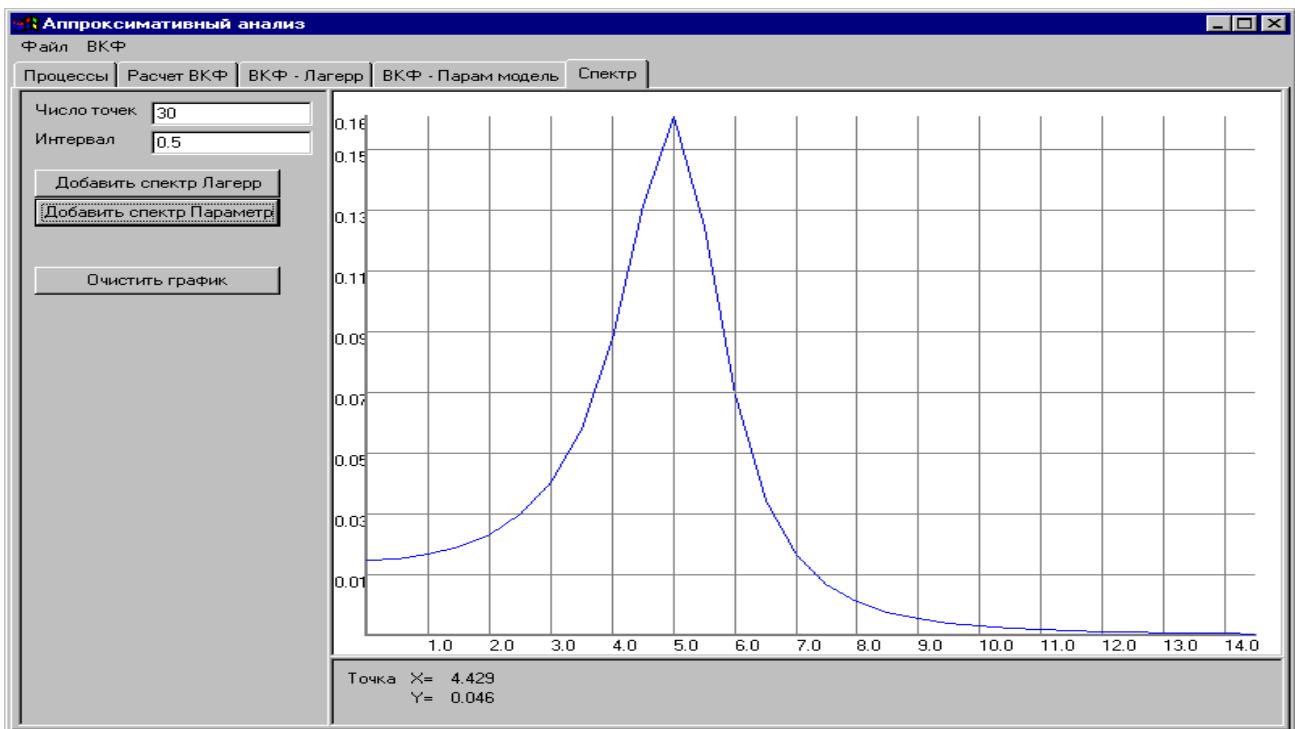


Рисунок П.18.10. Параметрическая модель взаимной спектральной плотности мощности

Минимальные аппаратные требования: Процессор Pentium 100, ОЗУ 16 Мб, разрешение монитора 600x800, HighColor, Microsoft Windows 95.

Прохоров Сергей Антонович

Моделирование и анализ случайных процессов.
Лабораторный практикум.

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров

Подписано в печать 23.08.2001 г.
Формат 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 33. Тираж 1000 экз.

Отпечатано в типографии ТОО «Экспо»
417000, г. Уральск, пр. Ленина, 244/1