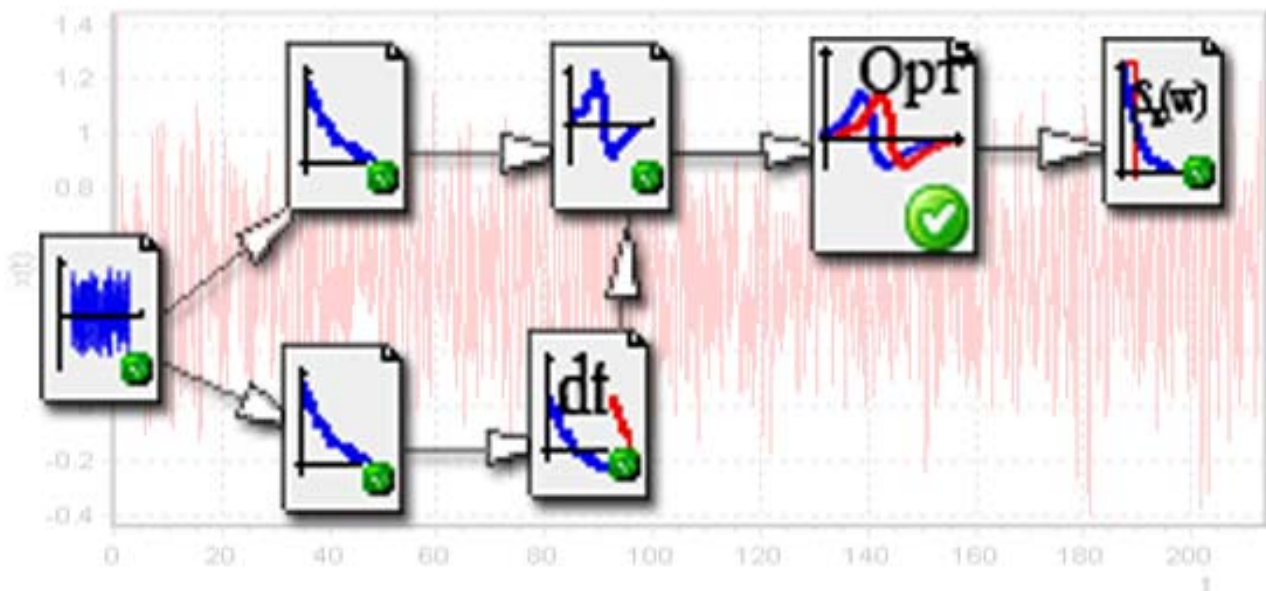


С.А. Прохоров, А.В. Графкин

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС
КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО
АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ**



Самара, 2005

Об авторах



Прохоров Сергей Антонович – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, декан факультета информатики, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 275 научных трудах, в том числе, 14 монографиях, 40 авторских свидетельствах, 6 работах, опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 80 международных, всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

Графкин Алексей Викторович – аспирант кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 11 научных трудах, в том числе 2 монографиях, выступлениях на 3 международных конференциях.



УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/
ББК 32.965я73
П55

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор Сойфер В.А.;

д.ф.-м.н., профессор Жданов А.И.

П55 Прохоров С.А., Графкин А.В. **Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах/** СИЦ РАН, 2005. 198 с., ил.

ISBN 5-93424-184-2

Анализируются алгоритмы корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах, проводится анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения в ортогональных базисах Лагерра, Лежандра, Дирихле, анализ погрешностей корреляционно-спектральных характеристик в указанных базисах, даются рекомендации по рациональному выбору параметров ортогональных моделей.

Приводится описание разработанного программного комплекса аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик с использованием ортогональных функций и лабораторного практикума.

Монография предназначена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по моделированию и аппроксимативному корреляционно-спектральному анализу случайных процессов в ортогональных базисах.

ББК 32.965я73

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

П $\frac{2402000000}{00(05) - 01}$

© С.А. Прохоров, А.В. Графкин, 2005

ISBN 5-93424-184-2

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ВВЕДЕНИЕ	10
1. АЛГОРИТМЫ АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	19
1.1. Основные понятия и определения	19
1.2. Корреляционные функции и их оценка	27
1.3. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями	34
1.4. Коэффициенты разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций	38
1.5. Алгоритм оценки параметра масштаба ортогональных функций	41
1.6. Анализ составляющих методической погрешности оценки коэффициентов разложения	47
1.7. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями при ограничениях на ее модель	53
1.8. Анализ погрешности вычисления коэффициентов разложения при ограничениях на модель корреляционной функции	59
1.9. Оценка интервалов корреляции	61
1.10. Аппроксимация взаимных корреляционных функций	66
1.11. Аппроксимация спектральной плотности мощности функциями заданного вида	71
1.12. Аппроксимация спектральной плотности мощности ортогональными функциями	77
2. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ КОМПЛЕКС АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННО- СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	84
2.1. Назначение, основные функции и требования	84
2.2. Интерфейс пользователя	91
2.2.1. Область <i>Редактирование семантической сети</i>	92
2.2.2. Область <i>Параметры</i>	94
2.2.3. Область <i>Воздействие</i>	94
2.2.4. Область <i>Реакция</i>	95
2.2.5. Область <i>Накопители и информация об ошибках</i>	95
2.3. Узлы автоматизированного комплекса	105
2.3.1. Источник СП	110
2.3.2. Фильтр	115
2.3.3. Линия задержки	117
2.3.4. Формирователь ВКФ	120
2.3.5. Ортогональный фильтр	122
2.3.6. Формирователь спектра	127
2.3.7. Звуковая карта	130
2.3.8. МФУ НВЛ-08	132

2.3.9. Накопитель	140
2.4. Меню пользователя	141
2.5. Строка статуса	143
2.6. Справочная система	143
3. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	144
3.1. Имитационное моделирование систем генерации пар случайных процессов	144
3.1.1. Содержание лабораторной работы	144
3.1.2. Задание на самостоятельную работу	148
3.1.3. Содержание отчета	148
3.1.4. Контрольные вопросы	149
3.2. Взаимный корреляционный анализ	149
3.2.1. Содержание лабораторной работы	149
3.2.2. Задание на самостоятельную работу	154
3.2.3. Содержание отчета	154
3.2.4. Контрольные вопросы	154
3.3. Аппроксимация взаимной корреляционной функции ортогональными функциями	155
3.3.1. Содержание лабораторной работы	155
3.3.2. Задание на самостоятельную работу	160
3.3.3. Содержание отчета	160
3.3.4. Контрольные вопросы	160
3.4. Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных	161
3.4.1. Содержание лабораторной работы	161
3.4.2. Задание на самостоятельную работу	166
3.4.3. Содержание отчета	166
3.4.4. Контрольные вопросы	166
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	168
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	170
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	172
ПРИЛОЖЕНИЯ	173
П.1. Алгоритмы рекурсивной фильтрации	173
П.2. Импульсные характеристики формирующих фильтров	175
П.3. Графики взаимных корреляционных функций	184
П.4. Формат файлов автоматизированного комплекса	197

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АСНИ – автоматизированная система научных исследований;
АЦП – аналого-цифровой преобразователь;
БСИ – блок связи с интерфейсом;
ВКФ – взаимная корреляционная функция;
ВНКФ – взаимная нормированная корреляционная функция;
ВР – временной ряд;
ЗР – закон распределения;
ИВК – измерительно-вычислительный комплекс;
ИИС – информационно-измерительная система;
ИП – измерительный преобразователь (датчик);
К – коммутатор;
КФ – корреляционная функция;
М – количество дифференциальных коридоров;
МУ – масштабирующее устройство;
МФУ NVL08 – многофункциональное устройство NVL08;
НКФ – нормированная корреляционная функция;
ПО – процессор обработки;
ПП – псевдослучайная последовательность;
ПРИС – процессорно-измерительное средство;
СП – случайный процесс;
СУБД – система управления базой данных;
ФБ – функциональный блок;
ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь;
ЭВМ – электронная вычислительная машина;
 A_m – значение ВКФ в точке максимума;
 $A_{\Theta} \{ \widehat{x}(t_k) \}$ – алгоритм оценки вероятностной характеристики Θ ;
 $A_s \{ \widehat{x}(t_k) \}$ – алгоритм оценки сигнала;
 b_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 c_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 $C_x(J)$ – интервальная корреляционная функция;
 $Drh_k(\tau, \alpha)$ – система ортогональных функций Дирихле;
 \widehat{D}_x – оценка дисперсии;
 d – параметр усреднения (время T, совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);
 $ent[]$ – операция взятия целой части числа;
 $F\{ \}$ – функциональное преобразование полученных оценок вероятностных характеристик;
 $F_x(x)$ – функция распределения вероятностей;
 $f_x(x)$ – плотность распределения вероятностей;
 $g[]$ – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

J_{max} – количество ординат на интервале корреляции корреляционной функции при линейной интерполяции;
 $K_{xy}(\tau)$ – аппроксимирующее выражение взаимной корреляционной функции;
 $K_a(\tau)$ – аппроксимирующее выражение корреляционной функции;
 $K_{xy}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция;
 $K_x(t, t')$ – корреляционная функция случайного процесса;
 $K_x(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 k_{xy} – корреляционный момент;
 k_a – коэффициент асимметрии;
 k_ε – коэффициент эксцесса;
 k_ϕ – коэффициент формы;
 $Lag_k(\tau, \alpha)$ – система ортогональных функций Лагерра;
 $Leg_k(\tau, \alpha)$ – система ортогональных функций Лежандра;
 M – количество отсчетов временного ряда;
 Me – медиана;
 Mo – мода;
 $M[]$ – оператор математического ожидания;
 \hat{m}_x – оценка математического ожидания;
 N – число реализаций;
 $ODBC$ (Open Database Connectivity) – открытое соединение баз данных;
 S_d – оператор усреднения;
 $Sign$ – знаковая функция;
 $S_{axy}(\omega)$ – аппроксимирующее выражение взаимной спектральной плотности мощности;
 $S_{xy}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность мощности;
 $S_{xn}(\omega)$ – нормированная спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 $S_x(\omega)$ – спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 SQL (Structured Query Language) – структурированный язык запросов;
 r_{xy} – коэффициент корреляции;
 t_{ji} – время i -ого отсчета в j -ой реализации случайного процесса;
 UML (Unified Modeling Language) – унифицированный язык моделирования;
 $W_k(j\omega)$ – частотная характеристика фильтра Лагерра k -го порядка;
 $|W_m(j\omega)|_{max}^2$ – максимум модуля частотной характеристики;
 $|W_m(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики семейства ортогональных функций;
 $x_i(t)$ – i -ая реализация случайного процесса;
 x_{ji} – i -й отсчет в j -ой реализации случайного процесса;
 $\bar{x}(\bar{\Theta}, t)$ – реализация случайного процесса;

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – параметры аппроксимирующего выражения;
 α_k – начальный момент k-го порядка;
 β_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 χ – коэффициент вариации;
 Δ – погрешность аппроксимации;
 $\Delta\omega_\varphi$ – полоса пропускания фильтра;
 Δt_{ji} – интервал дискретизации;
 Δu – шаг квантования по уровню;
 Δx – ширина дифференциального коридора;
 $\Delta\omega_c$ – эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;
 γ_m – методическая статистическая погрешность;
 $\gamma_{см доп} \succ \gamma_{м доп}$ – допустимые значения погрешностей оценки;
 $\gamma_{см}$ – погрешность от смещенности оценки;
 η – пикфактор;
 μ – показатель колебательности;
 μ_k – центральный момент k-го порядка;
 $\hat{\Theta}_j[X(t)]$ – j-текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$ – t-текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\bar{\Theta}$ – вектор информативных параметров случайного процесса;
 $\Theta[X(t)]$ – измеряемая вероятностная характеристика;
 $\hat{\Theta}[X(t)]$ – оценка измеряемой вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$ – средняя оценка вероятностной характеристики;
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;
 $\rho_x(t, t')$ – нормированная корреляционная функция случайного процесса;
 $\rho_x(\tau)$ – нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $\rho_{xy}(\tau)$ – взаимная нормированная корреляционная функция;
 $\tau_k^{(i)}$ – интервал корреляции;
 $\tau_{k \max}$ – максимальный интервал корреляции;
 τ_m – значение времени в точке максимума (разделения ветвей);
 $\bar{\Omega}$ – вектор информативных параметров объекта исследований;
 $\|\psi_k\|^2$ – норма системы ортогональных функций;
 ψ_k – система ортогональных функций;
 δ – среднеквадратическая погрешность аппроксимации;
 $\delta(t)$ – δ -функция Дирака;
 δ_{ji} – индикатор состояния.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая Вашему вниманию монография подготовлена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по аппроксимативному корреляционно-спектральному анализу случайных процессов в ортогональных базисах Дирихле, Лагерра и Лежандра и дополняет следующие монографии и методические пособия:

1. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 209 с.: ил.

2. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 375 с.: ил.

3. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 329 с.: ил.

4. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с., ил.

5. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. 191 с.: ил.

6. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с., ил.

7. Прохоров С.А., А.В. Иващенко, А.В. Графкин.; Под ред. Прохорова С.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов. - СНЦ РАН, 2003. 286 с., ил.

Материалы, представленные в монографии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ) и использовались при подготовке студентов по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в СГАУ.

Монография состоит из трех глав и приложений.

В первом разделе анализируются алгоритмы корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах, проводится анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения в том или ином ортогональном базисе, анализ погрешностей корреляционно-спектральных характеристик, даются рекомендации по рациональному выбору параметров ортогональных моделей.

Второй раздел посвящен описанию разработанного комплекса аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик с использованием ортогональных функций. При проектировании комплекса применялись CASE-технологии, в частности **Rational Rose 2000e**, которая базируется на унифицированном языке моделирования **UML**. Предлагаемый комплекс может применяться как для проведения научных исследований, так и в учебном процессе.

В третьем разделе приведено описание **лабораторного практикума**, содержащего четыре лабораторные работы, выполнение которых позволит закрепить теоретический материал, изложенный в первой главе.

Лабораторный практикум целиком поставлен на разработанном программном комплексе. В нём учтены замечания преподавателей, аспирантов и студентов, отмеченные в ходе выполнения лабораторных работ предыдущего лабораторного практикума [5-7] на кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета.

Все это, на наш взгляд, способствует улучшению наглядности при изучении базовых дисциплин, связанных с моделированием и статистической обработкой случайных процессов.

В моделировании алгоритмов, тестировании программного комплекса на разных этапах работы принимали участие студенты кафедры информационных систем и технологий: Графкин В.В., Куликовских И.М., Москаленко И.С. и многие другие, которым авторы выражают свою благодарность.

Особую благодарность авторы выражают своим учителям, всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры информационных систем и технологий СГАУ за обсуждение материалов монографии, лабораторного практикума, критические замечания которых по мере возможности были учтены.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, д.т.н., профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании монографии, а также рецензенту заведующему кафедрой прикладной математики д.ф.м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Неоценимую помощь в редактировании практикума оказала инженер кафедры информационных систем и технологий СГАУ Муравьева Е.В., которой авторы выражают свою благодарность.

Большую благодарность авторы выражают руководству СНЦ РАН: академику РАН Шорину В.П., д.т.н. Санчугову В.И., д.т.н., профессору Лазареву Ю.Н., - а также директору Западно-Казахстанского филиала ОАО «Национальный центр экспертизы и сертификации» (г. Уральск) Графкину В.Н. за дружескую поддержку и издание монографии в Казахстане.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», декану факультета информатики, заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp@smr.ru

ВВЕДЕНИЕ

При конструировании модели любого физического объекта в начале разрабатывается его физическая модель, в которой описывается принцип действия. Затем разрабатывается математическая модель, в которой устанавливаются количественные зависимости между входными и выходными параметрами объекта. На основе математической модели разрабатывается вычислительная модель, представляющая собой программу для ЭВМ. Имея вычислительную модель, можно проводить вычислительный эксперимент – исследование характеристик объекта путём многократного выполнения программы вычислительной модели при разных исходных данных.

Если движение и преобразование информации в рамках вычислительной модели имитирует физические процессы в объекте моделирования, то вычислительный эксперимент называется имитационным моделированием.

Среди методов прикладного системного анализа имитационное моделирование является самым мощным инструментом исследования сложных систем, управление которыми связано с принятием решений в условиях неопределенности. По сравнению с другими методами такое моделирование позволяет рассматривать большое число альтернатив, улучшать качество управленческих решений и точнее прогнозировать их последствия. Этими обстоятельствами и определяется та обширная область человеческой деятельности, в которой имитационное моделирование по праву занимает достойное место.

При имитационном моделировании динамические процессы системы-оригинала подменяются процессами, имитируемыми в абстрактной модели, но с соблюдением основных правил (режимов, алгоритмов) функционирования оригинала. В процессе имитации фиксируются определенные события и состояния или измеряются выходные воздействия, по которым вычисляются характеристики качества функционирования системы.

Для моделирования необходимо создать модель и провести ее исследование. Перед созданием модели требуется конкретизировать цели моделирования. После исследования производится обработка и анализ результатов моделирования.

Процесс создания моделей проходит несколько стадий. Он начинается с изучения реальной системы, ее внутренней структуры и содержания взаимосвязей между ее элементами, а также внешних воздействий, и завершается разработкой модели. В укрупненном плане имитационное моделирование предполагает наличие следующих этапов:

1. разработка концептуальной модели;
2. подготовка исходных данных;
3. выбор средств моделирования;
4. разработка программной модели;
5. проверка адекватности и корректировка модели;
6. планирование машинных экспериментов;
7. собственно моделирование;
8. анализ результатов моделирования и принятие решения.

Для одной и той же системы можно составить множество моделей. Они будут отличаться степенью детализации и учета тех или иных особенностей и режимов функционирования, отражать определенный режим работы системы, ориентироваться на исследование определенных ее свойств. Поэтому все этапы имитационного моделирования определяются заранее сформулированной целью исследования.

Очевидно, что особую важность для моделирования имеют первые три этапа. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть их более подробно.

После определения цели моделирования строится концептуальная модель исследуемой системы. Концептуальная модель (содержательная модель) – это абстрактная модель, определяющая состав и структуру системы, свойства элементов и причинно-следственные связи, присущие анализируемой системе и существенные для достижения целей моделирования. В концептуальной модели обычно в словесной форме приводятся сведения о природе и параметрах элементарных явлений исследуемой системы, о виде и степени взаимодействия между ними, о месте и значении каждого элементарного явления в общем процессе функционирования системы.

Следующим шагом на пути создания концептуальной модели служит выбор уровня детализации модели (стратификация). Модель системы представляется в виде совокупности частей (подсистем, элементов). В эту совокупность включаются все части, которые обеспечивают сохранение целостности системы, с одной стороны, с другой – достижение поставленных целей моделирования.

В дальнейшем производится окончательная детализация, локализация (выделение системы из окружающей среды), структуризация (указание и общее описание связей между выделенными элементами системы), укрупненное описание динамики функционирования системы и ее возможных состояний.

При создании концептуальной модели практически параллельно формируется область исходных данных (информационное пространство системы). На данном этапе выявляются количественные характеристики (параметры) функционирования системы и ее элементов, численные значения которых составят исходные данные для моделирования.

Очевидно, что значительная часть параметров системы – это случайные величины. Поэтому особое значение при формировании исходных данных имеют определение типовых моделей случайных величин, аппроксимация функций и т.д.

Программные и технические средства моделирования выбираются с учетом ряда критериев. Непременное условие при этом – достаточность и полнота средств для реализации концептуальной модели. Среди других критериев можно назвать доступность, простоту и легкость освоения, скорость и корректность создания программной модели.

Если выбор технических средств не вызывает особых затруднений, то выбор программных средств зачастую довольно сложен. В настоящее время известно более 500 языков моделирования. Такое множество языков частично

обусловлено разнообразием классов моделируемых систем, целей и методов моделирования. Однако желание упростить и ускорить процесс создания моделей привело к реализации идеи автоматизации программирования имитационных моделей. Создан ряд систем, которые избавляют исследователя от программирования. Программа создается автоматически по одной из формализованных схем на основании задаваемых исследователем параметров системы, внешних воздействий и особенностей функционирования. Это наиболее перспективное направление развития средств имитационного моделирования.

Успешность проведения работ на первых трех этапах моделирования создает условия для успешного выполнения всех последующих мероприятий.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Omega}, t)$ с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$: $\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta})$, используемое для построения искомой модели объекта;
5. анализирует полученные результаты;
6. если результаты его устраивают – эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3, 4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу – специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\vec{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров $\vec{\Theta}$ с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;
5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой – зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Условно имитационную модель можно представить в виде программно (или аппаратно) реализованных блоков. На рис. В.1 показана структура имитационной модели. Блок имитации внешних воздействий формирует реализации случайных или детерминированных процессов, имитирующих воздействия внешней среды на объект. Блок обработки результатов предназначен для получения информативных характеристик исследуемого объекта. Необходимая для этого информация поступает из блока математической модели объекта. Блок управления реализует способ исследования имитационной модели, основное его назначение – автоматизация процесса проведения имитационного эксперимента.



Рисунок В.1. Структура имитационной модели

Целью имитационного моделирования является конструирование имитационной модели объекта и проведение имитационного эксперимента над ней для изучения закона функционирования и поведения с учетом заданных ограничений и целевых функций в условиях имитации и взаимодействия с внешней средой. С учетом того, что в работе рассматриваются вопросы корреляционно-спектрального анализа, объект исследования заменяется инвариантным ему моделирующим алгоритмом.

К достоинствам метода имитационного моделирования могут быть отнесены:

- проведение имитационного эксперимента над математической моделью системы, для которой натурный эксперимент не осуществим, эксперимент связан с опасностью для жизни, или он дорог;
- решение задач, аналитические методы для которых неприменимы, например, в случае аппроксимации взаимных корреляционных функций случайных величин, нелинейных характеристик элементов системы и т.п.;
- возможность анализа общесистемных ситуаций и принятия решения с помощью ЭВМ, в том числе для таких сложных систем, выбор критерия сравнения стратегий поведения которых на уровне проектирования не осуществим;
- сокращение сроков и поиск проектных решений, которые являются оптимальными по некоторым критериям оценки эффективности;

- проведение анализа вариантов структуры больших систем, различных алгоритмов управления, изучения влияния изменений параметров системы на ее характеристики и т.д.

Основными методами имитационного моделирования являются: аналитический метод, метод статического моделирования и комбинированный (аналитико-статистический) метод.

Аналитический метод применяется для имитации процессов в основном для малых и простых систем, где отсутствует фактор случайности. Например, когда процесс их функционирования описан дифференциальными или интегродифференциальными уравнениями. Метод назван условно, так как он объединяет возможности имитации процесса, модель которого получена в виде аналитически замкнутого решения, или решения, полученного методами вычислительной математики.

Метод статистического моделирования первоначально развивался как метод статистических испытаний (Монте-Карло). Это – численный метод, состоящий в получении оценок вероятностных характеристик, совпадающих с решением аналитических задач (например, с решением уравнений и вычислением определенного интеграла). В последствии этот метод стал применяться для имитации процессов, происходящих в системах, внутри которых есть источник случайности или которые подвержены случайным воздействиям.

Современное толкование этого термина базируется на работе Неймана и Улама, выполненной в конце сороковых годов, где они применили специальный математический метод для решения проблемы ядерной физики, экспериментальные исследования которых очень дороги, а аналитическое решение очень сложно.

Как правило, реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;

- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков, представлена на рисунке В.2.

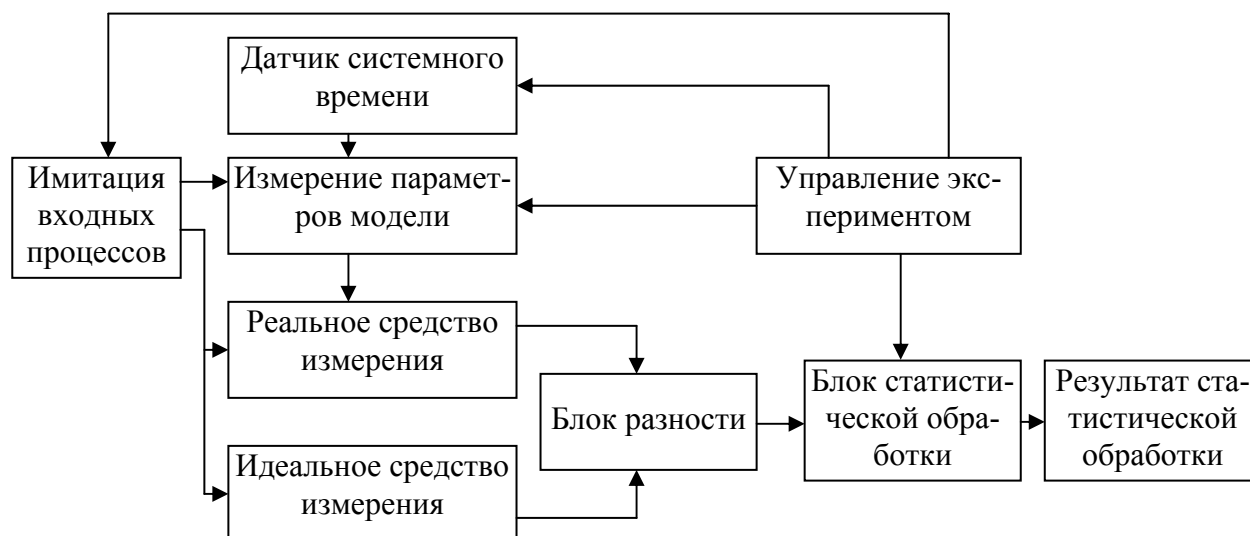


Рисунок В.2. Функциональная схема имитационного моделирования

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Комбинированный метод (аналитико-статистический) позволяет объединить достоинства аналитического и статистического методов моделирования. Он применяется в случае разработки модели, состоящей из различных модулей, представляющих набор как статистических, так и аналитических моделей, которые взаимодействуют как единое целое. Причем в набор модулей могут входить не только модули, соответствующие динамическим моделям, но и модули, соответствующие статическим математическим моделям.

Учитывая, что основным принципом проектирования АСНИ, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [16], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.
- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинствами блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [17], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки $\hat{\Theta}$:

$$\Delta = \max \{ |\Delta_j| \} j = 1, \dots, N, \quad (B.1)$$

где N – число испытаний, зависящее от доверительной информации P_d . Так, если $P_d=0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ, имитационного моделирования алгоритмов оценивания вероятностных характеристик, временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, должна состоять из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью по-

грешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий (см. рис. В.3).

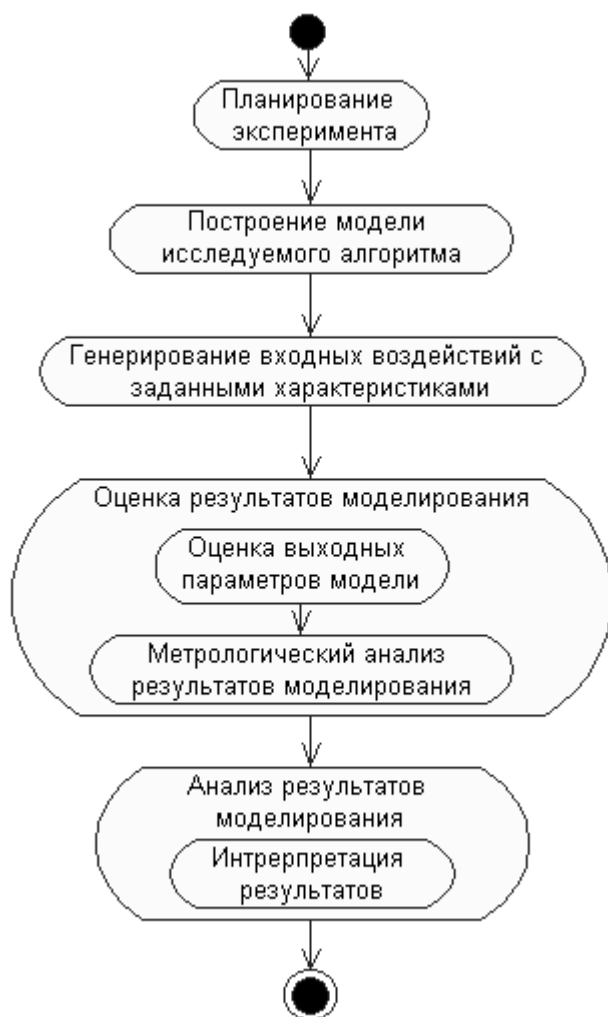


Рисунок В.3

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;

- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

В некоторых случаях, кроме случайных сигналов, возникает необходимость в применении детерминированных образцовых сигналов.

Количество входных сигналов, одновременно обрабатываемых в модели системы, определяется сложностью системы, сложностью модели, количеством каналов и т.д. Т.е. в системе моделирования должна быть предусмотрена возможность генерирования N сигналов как с одинаковыми, так и различными характеристиками.

Отметим, что используемые в работе термины «генерирование случайных процессов» и «моделирование случайных процессов» являются синонимами.

1. АЛГОРИТМЫ АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

1.1. Основные понятия и определения

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. 1.1).

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.

На основании общей теории статистических измерений [21] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (1.1)$$

где Θ – измеряемая вероятностная характеристика;

S_d – оператор идеального усреднения;

d – параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);

g – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

$x_j(t)$ – j -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (1.2)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.3)$$

3. При усреднении по времени и совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.4)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] (j = 1, 2 \dots N). \quad (1.5)$$



Рисунок 1.1. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность**, **состоятельность** и **эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\hat{\Theta}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (1.6)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P\left(|\hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon\right) = 1 \quad (1.7)$$

при любом ε .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

Эффективными называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [7].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (1.2)-(1.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (1.8)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (1.9)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.10)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от текущего времени и называется t -текущей характеристикой $\hat{\Theta}_t$ [22]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации j , вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от номера реализации и называется j -текущей характеристикой $\hat{\Theta}_j$. При усреднении и по времени, и совокупности значение $\Theta[X(t)]$ не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой – $\hat{\Theta}_{cp}$.

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство $\Theta_t = const$ выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если $\Theta_j = const$, где j – номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализаций имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис. 1.2):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание – **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

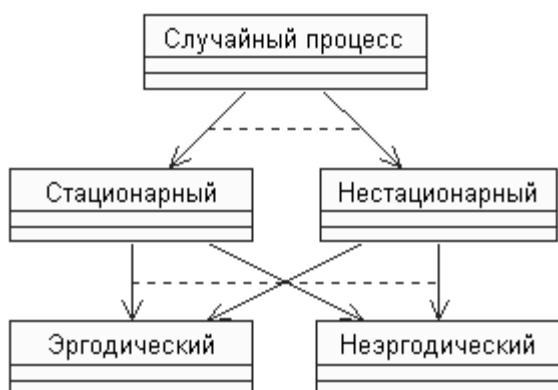


Рисунок 1.2. Классификация случайных процессов

В многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки работы.

В [21] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса $\Theta_t = \Theta_j = \Theta_{cp}$, для стационарного неэргодического процесса – $\Theta_t = \Theta_{cp}$, для нестационарного эргодического – $\Theta_j = \Theta_{cp}$, а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе S_d вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [21]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение N , M и T , т.е. объема выборочных данных.

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

Прямым методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (1.1).

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять: Θ_t , Θ_j , Θ_{cp} , – во

Косвенным методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\hat{\Theta}[z(t)] = F\{S_{d1}g_x[x_j(t_i^{(x)})], S_{d2}g_y[y_l(t_i^{(y)})]\dots\}, \quad (1.11)$$

где $F\{\}$ представляет собой функциональное преобразование полученных оценок $\hat{\Theta}[x(t)]$ и $\hat{\Theta}[y(t)]$ и т.д. с целью получения оценки $\hat{\Theta}[z(t)]$.

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\Xi_i \{S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\} = 0; \quad (1.12)$$

$$\Xi_i \{F^{(1)}\{S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})]\}, \dots, F^{(m)}\{S_{dm}g[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\}\} = 0. \quad (1.13)$$

Автоматизированные системы научных исследований дают возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов – временные ряды**.

В этом случае выражения (1.2)-(1.4) при представлении случайного процесса $X(t)$ ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (1.14)$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (1.15)$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (1.16)$$

где t_i – i -ый отсчёт j -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (В.5) примет вид:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] (j = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, M). \quad (1.17)$$

Выражения (1.8)-(1.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (1.18)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (1.19)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (1.20)$$

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** – построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик [14].

Если не принимать во внимание фактор реального времени или задержку в обработке информации, то с точки зрения получения оценки по одному и тому же объему данных два подхода с методической точки зрения не отличаются друг от друга. Существенное отличие заключается в том, что работа в реальном масштабе времени накладывает жесткие ограничения на быстрдействие технических средств. Это заставляет, в свою очередь, при статистических измерениях применять упрощенные алгоритмы оценивания интересующих параметров, обладающих значительным быстрдействием. Кроме того, работа в реальном масштабе времени не дает возможности получить требуемые оценки, воспользовавшись другими алгоритмами, так как данную реализацию повторить нельзя – она **случайна**. Требуемую оценку необходимо получить за время, отводимое на эксперимент. Реализация же, записанная на промежуточный носитель или в память, становится **детерминированной**, и с ней можно экспериментировать сколь угодно долго. Это важное преимущество статистической обработки позволяет:

- с целью повышения точности оценивания осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации;
- выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию;
- с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

При исследовании сложных объектов проводят, как правило, большое число испытаний. При этом происходит и накопление большого числа массивов числовых и функциональных характеристик, что в значительной степени затрудняет хранение, анализ и интерпретацию полученных результатов.

Один из возможных способов решения этой проблемы заключается в применении аппроксимативных методов (от латинского слова **approximo** - приближаюсь), суть которых заключается в нахождении подходящего аналитического выражения $\varphi(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, с неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, удовлетворяющими заданному критерию оптимальности, которое бы описывало найденные экспериментальные результаты. Аппроксимативный подход оказывается эффективным и при обработке результатов имитационного моделирования (вычислительного эксперимента).

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек и построили график зависимости $\hat{y}_i = f(\hat{x}_i)$. Желательно обработать экспериментальные данные таким образом, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x и вместе с тем сгладить случайные отклонения, вызванные погрешностями самого эксперимента.

Наиболее эффективным методом решения этой задачи является метод наименьших квадратов [5].

Пусть задан некоторый класс функций $\varphi_j(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с одинаковым числом неизвестных параметров. Тогда наилучшей будет та функция, для которой сумма квадратов

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^M [\hat{y}_i - \varphi_j(\hat{x}_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 = \min. \quad (1.21)$$

Если в сравнении участвуют функции с различным числом неизвестных параметров, это приводит к увеличению числа связей и к уменьшению числа степеней свободы $m-l$, что, в свою очередь, может ухудшить дисперсию [5].

$$D_j = \frac{\Delta_j}{m-r}. \quad (1.22)$$

Под числом связей r понимают число неопределенных выражений, входящих в аналитическое выражение.

Так как Δ_j является функцией $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ то, как известно [5], необходимыми условиями минимума дифференцируемой функции многих переменных является система нормальных уравнений:

$$\frac{\partial S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (1.23)$$

решив которую с помощью того или иного численного метода, найдем искомые параметры $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Классификация методов аппроксимации функциональных характеристик случайных процессов и последовательностей представлена на рис. 1.3.

Основными преимуществами аппроксимативного подхода являются:

- наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;
- возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований, с целью получения обобщенных вероятностных характеристик;
- сокращение объёма хранимых данных.

К недостаткам метода следует отнести наличие методической погрешности, возникающей при замене полученных экспериментальных данных или другой функции более простым аналитическим выражением.

В общем случае, для реализации аппроксимативного подхода необходимо выполнить следующие этапы:

1. на основании анализа решаемой задачи определить требования к реализации входного процесса (последовательности): длине реализации (объёму выборки), интервалу дискретизации, числу уровней квантования и т.д. с целью получения оценок вероятностных характеристик для последующей аппроксимации с допустимыми погрешностями;

2. по измеренным значениям входного процесса (последовательности) оценить значения функциональной характеристики в заданных точках;

3. проанализировать полученный результат и выбрать подходящее аналитическое выражение, по возможности, с минимальным количеством неизвестных параметров, подлежащих определению, так как количество параметров

в значительной мере определяет сложность аппаратуры или вычислений, его сходимость и устойчивость;

4. выбрать и обосновать критерий приближения;

5. составить и решить систему уравнений относительно неизвестных параметров аналитического выражения и определить погрешность приближения;

6. разработать структурную схему аппаратуры (программы) и рассчитать её параметры;

7. изготовить и отладить аппаратуру (написать и отладить программное обеспечение);

8. провести экспериментальные исследования (обработать полученные экспериментальные данные);

9. аналитически определить все интересующие обобщённые вероятностные характеристики.

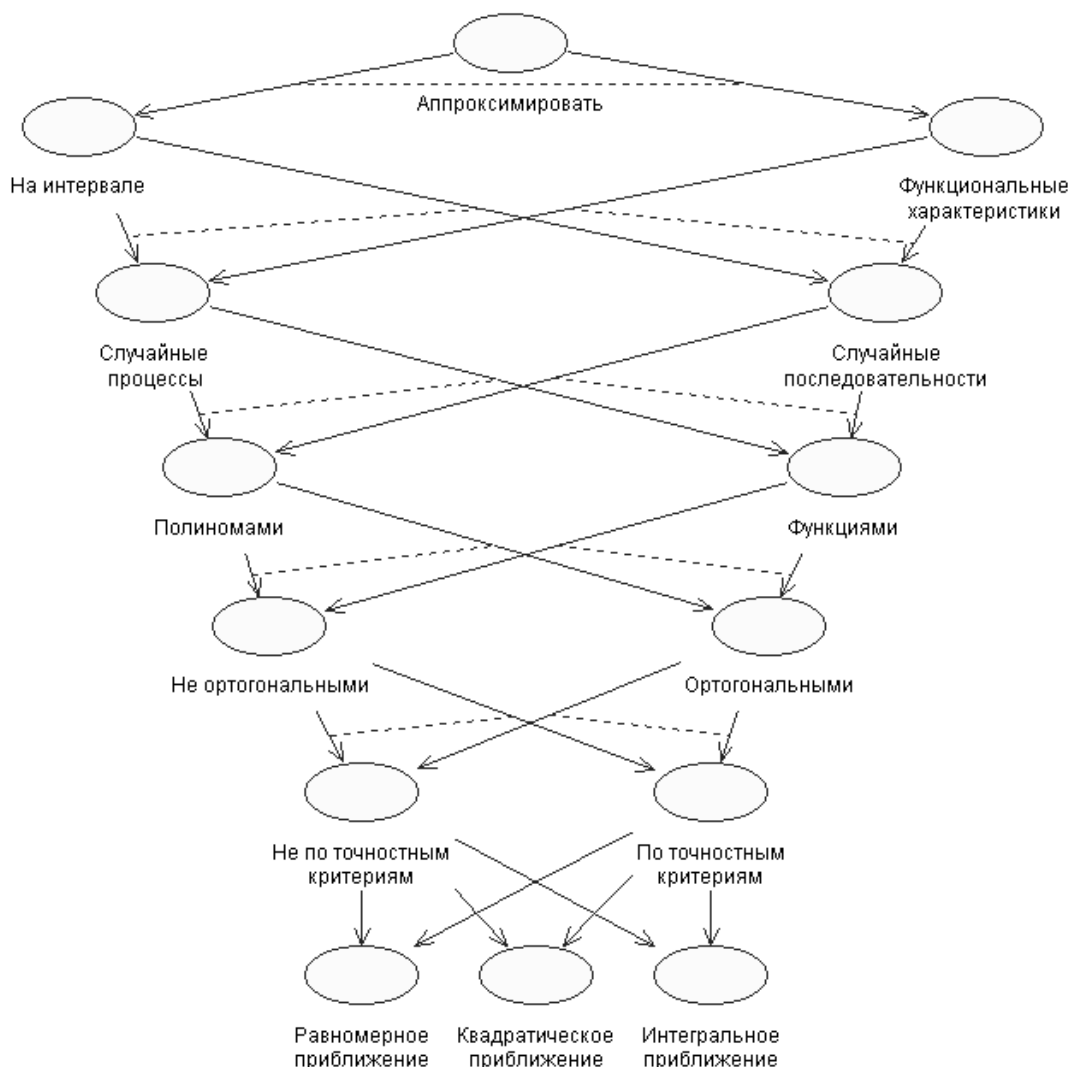


Рисунок 1.3. Классификация методов аппроксимации случайных процессов

Следует отметить, что определять аналитические выражения возможно как при анализе стационарных, так и нестационарных процессов. В первом случае анализируются функциональные характеристики, во втором – и моментные, являющиеся функциями времени.

Определять параметры аналитических выражений возможно как с помощью **статистических измерений**, так и в результате **статистической обработки**.

Под **статистическими измерениями с аппроксимацией** будем понимать измерение (оценку) параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени. Самыми популярными среди таких технических средств являются **коррелометры** и **спектроанализаторы** с аппроксимацией параметрическими моделями. В литературе их часто называют **статистическими анализаторами**. Статистические анализаторы, как правило, специализированные аппаратно-программные средства, определяющие **параметры реального процесса** (см. рис. 1.4).

Под **статистической обработкой с аппроксимацией** будем понимать оценку параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью ЭВМ, записанных на промежуточный носитель или память. При этом происходит временная задержка в обработке информации.

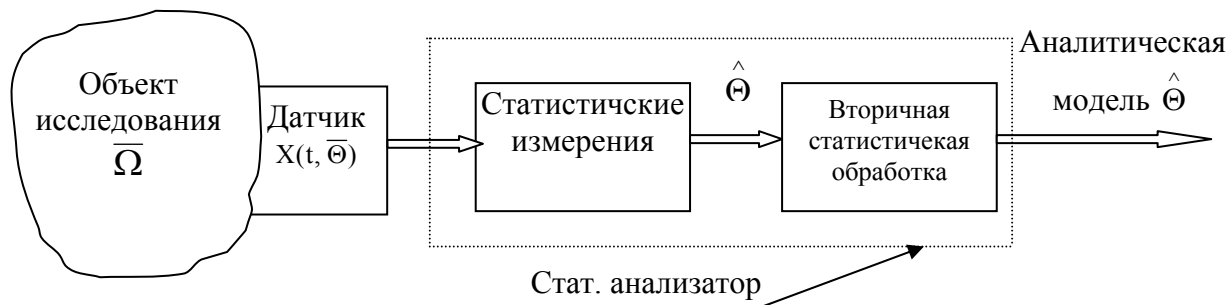


Рисунок 1.4. Аппаратно-программные средства статистических измерений и обработки информации

Аппроксимативные методы, основанные на применении ЭВМ, можно отнести к методам **вторичной обработки** информации.

1.2. Корреляционные функции и их оценка

В различных приложениях статистического анализа одну из ключевых позиций занимают задачи корреляционного анализа. В процессе решения этих задач выявляется наличие и характер линейной взаимосвязи между сечениями процессов, вычисляются оценки коэффициентов и интервалов корреляции. На основании результатов корреляционного анализа может делаться вывод о нали-

чи и характере функциональной зависимости или о предпочтительности для описания исследуемого объекта регрессионной модели того или иного вида.

Знание корреляционных функций позволяет решать задачи идентификации динамических систем, выбирать оптимальный интервал дискретизации исследуемого процесса, оценивать погрешности средств измерений, определять скорость проката, строить корреляционные приёмники и т.д. [4, 17]. Для экспериментального определения корреляционных функций применяются как специализированные вычислительные средства – коррелометры, так и универсальные электронно-вычислительные машины.

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент ее значений при двух значениях аргумента t и t' , рассматриваемый как функция [10]:

$$K_x(t, t') = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t') \right], \quad (1.24)$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, а $m_x(t)$ – математическое ожидание случайного процесса в сечении t .

Корреляционная функция характеризует степень линейной связи между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_x(t')}}. \quad (1.25)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией [12 стр. 36]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau), \quad \tau = t - t'. \quad (1.26)$$

Это позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале $[0, \infty)$.

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.25), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (1.27)$$

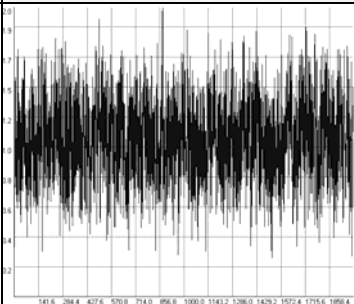
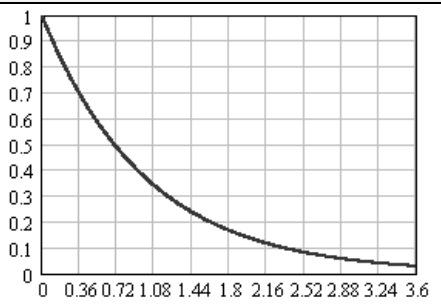
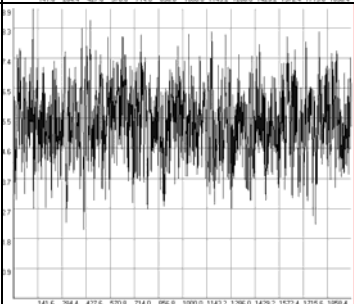
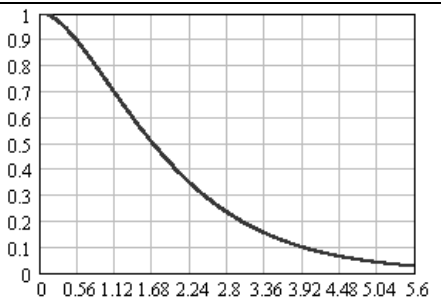
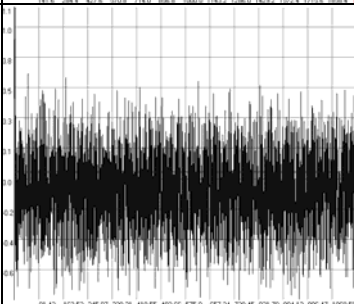
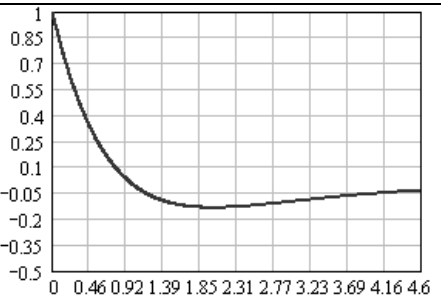
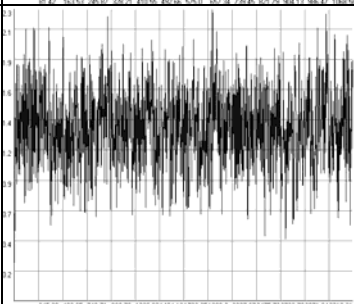
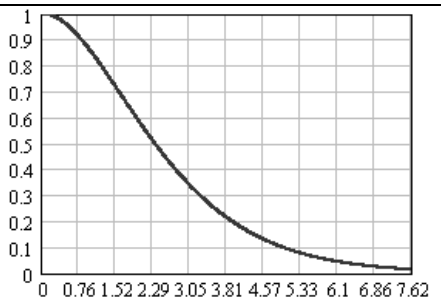
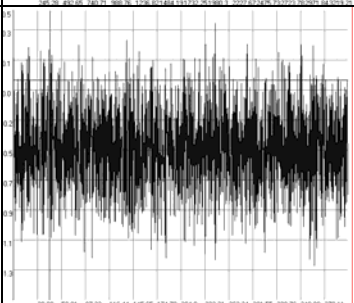
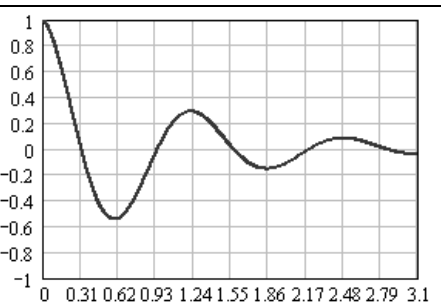
Отсюда видно, что

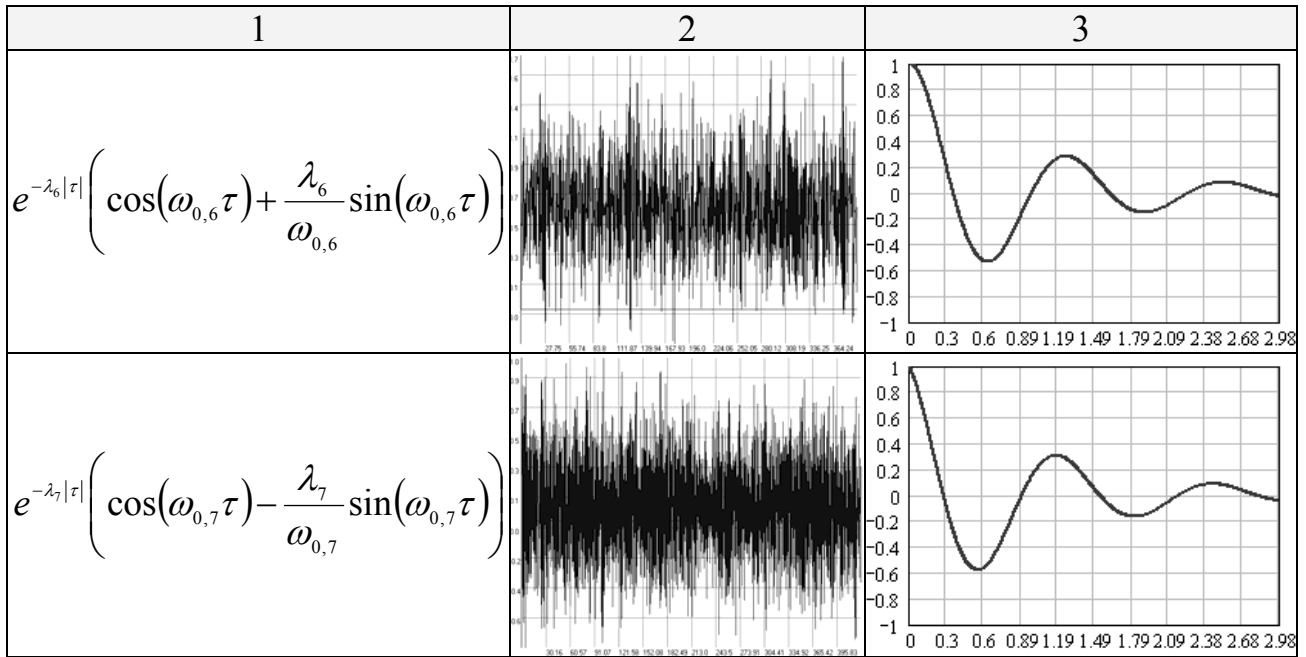
$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (1.28)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 1.1, а их классификация – в [12]. В таблице 1.1 приведены типовые модели для значения параметров $\lambda_i = 1$ и $\omega_{0,i} = 5$.

Типовые модели корреляционных функций

Таблица 1.1

Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	Случайный процесс	Корреляционная функция
1	2	3
$e^{-\lambda_1 \tau }$		
$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau)$		
$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau)$		
$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$		
$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$		



Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $x(t)$ и $y(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t' , которая при каждой паре значений t и t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции $x(t)$ и случайной функции $y(t)$:

$$K_{xy}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t') \right]. \quad (1.29)$$

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, случайные процессы называются коррелированными, в противном случае они называются некоррелированными.

При одновременной перестановке аргументов и индексов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \quad (1.30)$$

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_y(t')}}. \quad (1.31)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов [22] корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов $\tau = t - t'$.

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.25), равна:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (1.32)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1. \quad (1.33)$$

Из свойства (1.30) взаимной корреляционной функции следует, что две взаимные корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций $x(t)$ и $y(t)$, взятых в различных порядках, связаны соотношением

$$\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(-\tau). \quad (1.34)$$

Графически это означает, что кривая $\rho_{yx}(\tau)$ является зеркальным отражением кривой $\rho_{xy}(\tau)$ относительно оси ординат (рис. 1.5).

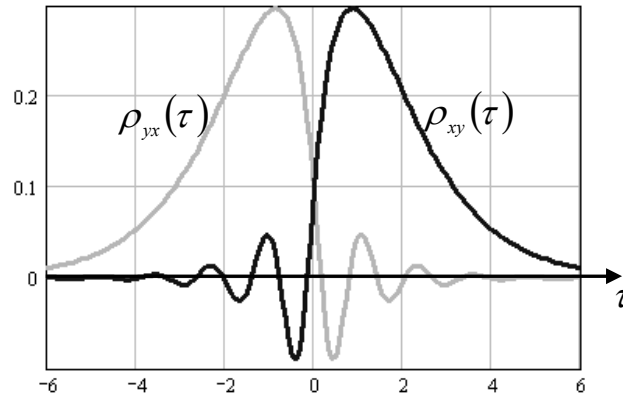


Рисунок 1.5. Взаимные корреляционные функции

Результаты эксперимента с помощью информационно-измерительных систем, автоматизированных систем научных исследований, либо в ходе цифрового моделирования того или иного процесса или явления могут быть представлены в виде случайной последовательности:

$$\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{i=1, \dots, M}^{j=1, \dots, N}, \quad (1.35)$$

где x_{ji} – i -й отсчет в j -ой реализации случайного процесса;

t_{ji} – время i -ого отсчета в j -ой реализации;

M – количество отсчетов временного ряда;

N – число реализаций.

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}. \quad (1.36)$$

При $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 = \text{const}$ исследователь имеет дело с регулярной временной последовательностью – регулярным временным рядом.

Для оценки корреляционной функции при анализе последовательностей, с усреднением по времени, используют выражение:

$$\hat{K}_{xy}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji}^{\circ} x_{j,i+J}^{\circ}, \quad (1.37)$$

где x_{ji}° – центрированный отсчет в реализации случайного процесса;

$J\Delta\tau$ – интервал сдвига (максимальное значение J не должно превышать M).

Центрированные значения отсчетов определяются по формуле:

$$x_{ji}^{\circ} = x_{ji} - \hat{m}_x, \quad (1.38)$$

где \hat{m}_x – оценка математического ожидания (2.1) случайного процесса в сечении $i\Delta\tau$, j -ой реализации.

Для оценки взаимной корреляционной функции используют выражение:

$$\hat{K}_{xyj}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}, \quad (1.39)$$

где y_{ji} – центрированный отсчет в реализации случайного процесса.

Как показали исследования [11], для получения достоверных оценок (статистическая погрешность 0,02-0,05), количество отсчетов временного ряда M должно составлять 5000-2000 соответственно.

В тех случаях, когда исследователь располагает только одной реализацией, при проведении корреляционного анализа, как правило, используется мультипликативный алгоритм, инвариантный к закону распределения случайного процесса [7]. При этом интервал дискретизации корреляционной функции, как правило, выбирают равным $\Delta\tau = \Delta t_0$.

Значение интервала дискретизации $\Delta\tau$ зависит от вида корреляционной функции, значения ее параметров, допустимой погрешности δ и способа восстановления корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции J_{\max} при линейной интерполяции и различных погрешностях ее восстановления представлено в таблице 2.1.

При аналитическом исследовании поведения реальных динамических систем важным является обоснование математических моделей процессов, протекающих в этих системах. В ходе формирования методов анализа и синтеза эти модели, с одной стороны, должны наиболее адекватно отражать свойства реальных сигналов, с другой – допускать исследования этих процессов известными теоретическими методами. Выход следует искать на основе компромиссных решений в части выбора наиболее простых и в то же время содержательных (продуктивных) моделей при решении интересующих задач. Рассматриваемые в данной работе модели случайных процессов являются наиболее типичными в практике исследований динамических систем с учетом реальных режимов, возмущений и помех и во многих случаях могут служить базовыми при формировании более сложных процессов.

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации определяются параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений ее параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т. д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объем хранимой информации, так как вместо

большого числа отсчетов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения ее параметров.

В общем виде задача аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями состоит из этапов, представленных на рис. 1.6.

Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет зависеть точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

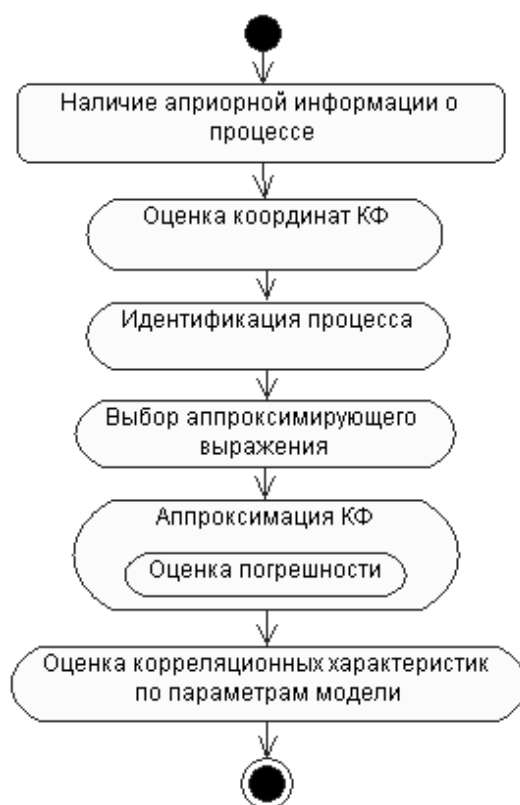


Рисунок 1.6. Диаграмма деятельности (UML). Аппроксимация КФ

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [14];
- бесконечный (или конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [14, 19].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего неизвестно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [14]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсерера [13], согласно которой симметричная и положительно

определенная функция, которой является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выбирать конкретный вид модели, желательно с меньшим числом параметров. От числа неизвестных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя.

Многочисленные исследования [11, 19] показали, что при анализе случайных процессов часто встречаются затухающие экспоненциальные и экспоненциально-косинусные корреляционные функции.

Например, экспоненциальная модель корреляционной функции оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки интервала корреляции и т. д. Подобные задачи возникают при создании информационно-измерительных систем, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени, постоянные времени сглаживающих устройств при получении оценок сигнала. Часто данная модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик реальных объектов, так как существует большой класс динамических систем, для которых процессы с экспоненциальной корреляционной функцией являются наихудшими с точки зрения помехозащищенности. Кроме того, при теоретических исследованиях часто делается допущение о том, что анализируемый случайный процесс является марковским [5 стр. 537].

В качестве критерия приближения, как правило, применяют точностные критерии [14]:

- минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \beta_0, \dots, \beta_m)]^2 d\tau = \min; \quad (1.40)$$

- минимум экспоненциально-взвешенной аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \beta_0, \dots, \beta_m)]^2 e^{-\frac{\tau}{T_k}} d\tau = \min; \quad (1.41)$$

- критерий равномерного приближения:

$$|K_x(\tau) - K_a(\tau, \beta_0, \dots, \beta_m)| < \varepsilon. \quad (1.42)$$

При этом наиболее часто применяют минимум квадратической погрешности приближения.

1.3. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями

Аппроксимация корреляционных функций в этом случае производится путем разложения в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_x(\tau) = A_m \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha), \quad (1.43)$$

где β_k – коэффициент ряда Фурье;

A_m – значение КФ в точке максимума;

$\psi_k(\tau, \alpha)$ – семейство базисных функций, ортогональных на интервале $[0, \infty)$.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \cdot \psi_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, \text{при } k \neq n; \\ \|\psi_k\|^2, \text{при } k = n, \end{cases} \quad (1.44)$$

где $\|\psi_k\|^2$ – весовая функция ортогонального базиса.

Выберем в качестве критерия приближения критерий минимума квадратической погрешности аппроксимации (1.40):

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min. \quad (1.45)$$

Для того, чтобы найти минимальное значение квадратической погрешности (1.45), необходимо определить частную производную $\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_n} = 0$ при $n = 0..k$.

Так как ряд сходится в интервале $[0, \infty)$, то коэффициенты разложения β_k в соответствии с [14] определяются выражением:

$$\beta_k = \frac{1}{A_m \|\psi_k\|^2} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (1.46)$$

где $K_x(\tau)$ – оцениваемая КФ.

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом m членов ряда (1.43). В таком случае получается приближенное значение функции корреляции:

$$\hat{K}_x(\tau) = A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha), \quad (1.47)$$

но при этом возникает методическая погрешность аппроксимации.

Определим погрешность, вызванную конечным числом членов ряда:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.48)$$

На основе формул (1.46) и (1.47) проектируются алгоритмы аппроксимации, причем в качестве базисных функций могут быть применены функции Лагерра, Лежандра, Дирихле, Чебышева, Эрмита, Хаара, Уолша и др. Наиболее часто применяются ортогональные функции Лагерра [7, 13], другие базисы рассматриваются редко. Целью данной работы явилось стремление сравнить базисы ортогональных функций Лежандра и Дирихле с базисом функций Лагерра, и выработать рекомендации по применению того или иного ортогонального базиса.

Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от физической реализуемости, возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, простоты определения других функционально связанных характеристик (например, спектральная плотность мощности), удобством в работе.

Системы ортогональных функций

Таблица 1.2

Система ортогональных функций	Аналитическое выражение $\psi_k(\tau, \alpha)$	Норма $\ \psi_k\ ^2$	Значение в нуле $\psi_k(0, \alpha)$
Лагерра	$Lag_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!(-\alpha\tau)^s}{(k-s)!(s!)^2} \cdot e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}$	1
Лежандра	$Leg_k(\tau, \alpha) = \exp(-\alpha\tau)P_k[1 - 2\exp(-2\alpha\tau)]$, где $P_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{s=0}^{k \text{ div } 2} (-1)^s \frac{(2k-2s)!}{s!(k-s)!(k-2s)!} x^{k-2s}$ – ортогональные полиномы Лежандра	$\frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (2k+1)}$	$(-1)^k$
Дирихле	$Drh_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \cdot e^{-(s+1)\alpha\tau} \cdot \prod_{i=0}^{s-1} \frac{2(2 \cdot i + 3)}{i+2} \cdot \prod_{j=s+1}^k \frac{s+j+1}{j-s}$. Замечание: $\prod_{i=a}^b f(i) = 1$, если $a > b$	$\frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (k+1)}$	1

Для определения значений ортогональных функций могут использоваться рекурсивные алгоритмы (см. таблицу 1.3). Они обладают лучшими временными характеристиками по сравнению с алгоритмами таблицы 1.2 и позволяют избежать ошибок, связанных с переполнением. Накопление ошибок удастся устранить посредством использования переменных двойной точности.

Рекуррентные формулы

Таблица 1.3

Система ортогональных функций	Рекуррентное соотношение
1	2
Лагерра	$Lag_0(\tau, \alpha) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}};$ $Lag_1(\tau, \alpha) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}(1 - \alpha\tau);$ $Lag_k(\tau, \alpha) = \frac{2k-1-\alpha\tau}{k} \cdot Lag_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{k} \cdot Lag_{k-2}(\tau, \alpha)$

1	2
Лежандра	$Leg_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau};$ $Leg_1(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau} - 2e^{-3\alpha\tau};$ $Leg_k(\tau, \alpha) = \frac{2k-1}{k} \cdot (1 - 2e^{-2\alpha\tau}) \cdot Leg_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{k} \cdot Leg_{k-2}(\tau, \alpha)$
Дирихле	$Drh_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau};$ $Drh_1(\tau, \alpha) = 3e^{-2\alpha\tau} - 2e^{-\alpha\tau};$ $Drh_k(\tau, \alpha) = \frac{2k+1}{k+1} \cdot \left[\left(2e^{-\alpha\tau} - \frac{4k^2}{4k^2-1} \right) Drh_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{2k-1} Drh_{k-2}(\tau, \alpha) \right]$

Вид ортогональных функций приведен в таблице:

Таблица 1.4

Ортогональный базис	Вид ортогональных функций начальных порядков
1	2
Лагерра	
Лежандра	

1	2
Дирихле	

1.4. Коэффициенты разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций

Использование параметрических методов, к которым относится аппроксимация КФ ортогональными функциями, подразумевает наличие некоторой математической модели анализируемого случайного процесса. Корреляционный анализ сводится в данном случае к решению оптимизационной задачи, то есть поиску таких параметров модели, при которых она наиболее близка к реально наблюдаемому сигналу.

Данный метод корреляционного анализа сводится к определению параметра масштаба ортогональных функций, коэффициентов модели β_k заданного порядка n . Определение коэффициентов производится из условия минимизации дисперсии (или среднеквадратического значения) погрешности приближения, а также правильности оценки модельных корреляционных функций.

Далее приводятся зависимости, позволяющие определять коэффициенты аппроксимирующего выражения для различных ортогональных базисов.

Лагерра:

Для определения выражений коэффициентов разложения для типовых моделей нормированных корреляционных функций, представленных в таблице 1.5, необходимо ввести следующие обозначения:

$$\varphi_{i1} = \arctg \left(\frac{\omega}{\lambda_i + \frac{\alpha}{2}} \right); \varphi_{i2} = \arctg \left(\frac{\omega}{\lambda_i - \frac{\alpha}{2}} \right); \quad (1.49)$$

$$B_{ik} = \frac{\alpha}{2\lambda_i + \alpha} \left(\frac{2\lambda_i - \alpha}{2\lambda_i + \alpha} \right)^k \left(\frac{\cos(\varphi_{i1})}{\cos(\varphi_{i2})} \right)^k. \quad (1.50)$$

Коэффициенты разложения β_k для типовых моделей (базис Лагерра)

Таблица 1.5

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	β_k
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\frac{\alpha}{\lambda_1 + \alpha/2} \left(\frac{\lambda_1 - \alpha/2}{\lambda_1 + \alpha/2} \right)^k$
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$\frac{\alpha}{\lambda_2 + \alpha/2} \left(\frac{\lambda_2 - \alpha/2}{\lambda_2 + \alpha/2} \right)^{k-1} \left(\frac{\lambda_2 - \alpha/2}{\lambda_2 + \alpha/2} \cdot \frac{2\lambda_2 + \alpha/2}{\lambda_2 + \alpha/2} - \frac{k\alpha\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha/2} \right)$
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$\frac{\alpha^2/2}{(\lambda_3 + \alpha/2)^2} \left(\frac{\lambda_3 - \alpha/2}{\lambda_3 + \alpha/2} \right)^{k-1} \left(\frac{\lambda_3 - \alpha/2}{\lambda_3 + \alpha/2} + \frac{2k\lambda_3}{\lambda_3 + \alpha/2} \right)$
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3} \right)$	$\frac{4\alpha \cdot (2\lambda_4 - \alpha)^{k-2}}{3 \cdot (2\lambda_4 + \alpha)^{k+3}} \left[\alpha\lambda_4(3\alpha^2 - 28\lambda_4^2) \cdot (1 + 2k) + \right.$ $\left. + 2\alpha^2\lambda_4^2(4k(k+1) - 7) + 64\lambda_4^4 + \frac{3\alpha^4}{2} \right]$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$2B_{5k} \cos(\varphi_{51}) \cos(k\varphi_{52} - (k+1)\varphi_{51})$
6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau) \right)$	$2B_{6k} \cos(\varphi_{61}) \left(\cos(k\varphi_{62} - (k+1)\varphi_{61}) - \frac{\lambda_6}{\omega} \sin(k\varphi_{62} - (k+1)\varphi_{61}) \right)$
7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau) \right)$	$2B_{7k} \cos(\varphi_{71}) \left(\cos(k\varphi_{72} - (k+1)\varphi_{71}) + \frac{\lambda_7}{\omega} \sin(k\varphi_{72} - (k+1)\varphi_{71}) \right)$

Лежандра:

Чтобы найти выражение оценки коэффициентов разложения для типовых моделей нормированных корреляционных функций, введем обозначение:

$$A_{k,s} = (-1)^s \frac{(k+s)!}{(k-s)!(s!)^2}. \quad (1.51)$$

Выражения для оценки коэффициентов разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций приведены в таблице 1.6.

Коэффициенты разложения β_k для типовых моделей (базис Лежандра)

Таблица 1.6

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	β_k
1	2	3
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{1}{(2s+1)\alpha + \lambda_1}$
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha + 2\lambda_2}{((2s+1)\alpha + \lambda_2)^2}$

1	2	3
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha}{((2s+1)\alpha + \lambda_3)^2}$
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{8\lambda_4^2 + 9\lambda_4(2s+1)\alpha + 3(2s+1)^2 \alpha^2}{3((2s+1)\alpha + \lambda_4)^3}$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha + \lambda_5}{((2s+1)\alpha + \lambda_5)^2 + \omega_{0,5}^2}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau) \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha + 2\lambda_6}{((2s+1)\alpha + \lambda_6)^2 + \omega_{0,6}^2}$
7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau) \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha}{((2s+1)\alpha + \lambda_7)^2 + \omega_{0,7}^2}$

Дирихле:

Чтобы найти выражения для оценки коэффициентов разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций, введем обозначение:

$$A_{k,s} = (-1)^{k-s} \frac{(k+s+1)!}{(k-s)!(s+1)!s!}. \quad (1.52)$$

Выражения для оценки коэффициентов разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций приведены в таблице 1.7.

Коэффициенты разложения β_k для типовых моделей (базис Дирихле)

Таблица 1.7

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	β_k
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{1}{(s+1)\alpha + \lambda_1}$
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha + 2\lambda_2}{((s+1)\alpha + \lambda_2)^2}$
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha}{((s+1)\alpha + \lambda_3)^2}$
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{8\lambda_4^2 + 9\lambda_4(s+1)\alpha + 3(s+1)^2 \alpha^2}{3((s+1)\alpha + \lambda_4)^3}$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha + \lambda_5}{((s+1)\alpha + \lambda_5)^2 + \omega_{0,5}^2}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau) \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha + 2\lambda_6}{((s+1)\alpha + \lambda_6)^2 + \omega_{0,6}^2}$

7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau) \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha}{((s+1)\alpha + \lambda_7)^2 + \omega_{0,7}^2}$
---	--	--

Определим погрешность аппроксимации различными ортогональными функциями, вызванную конечным числом членов ряда, при этом в выражении (1.48) используется величина нормы $\|\psi_k\|^2$, а также выражения (1.46) и (1.44). Полученные значения погрешности аппроксимации различными ортогональными функциями приведены в таблице 1.8.

Погрешность аппроксимации ортогональными функциями

Таблица 1.8

Ортогональный базис	Погрешность ограниченного числа членов Δ
Лагерра	$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$
Лежандра	$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$
Дирихле	$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$

1.5. Алгоритм оценки параметра масштаба ортогональных функций

Для построения модели КФ необходимо определить: число членов аппроксимирующего ряда; коэффициенты разложения ортогонального ряда – β_k ; параметр масштаба – α .

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ПЭВМ заключается в «дискретизации» полученных ранее уравнений, выборе численного метода для их решения, написании и отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счета.

При этом при вычислении определенного интеграла, что требуется при определении коэффициентов β_k , используют формулы численного интегрирования. В результате анализа различных формул было обнаружено, что, при использовании метода прямоугольников и метода трапеций для вычисления интеграла, расхождение между теоретическими значениями и определенными по формуле (1.46) – существенно. Более точный результат при решении дает формула Симпсона [6]

$$J = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})]. \quad (1.53)$$

Определив β_k для обеспечения минимальной погрешности аппроксимации (таблица 1.8) в виде (1.46), необходимо решить вопрос об определении значения параметра α , обеспечивающего минимальную (допустимую) погрешность аппроксимации. Для ортогональных функций Лагерра эта задача решена.

В книге [14] рассматриваются различные алгоритмы решения этой задачи для случая аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, приводится сравнительный анализ алгоритмов. Показано, что с точки зрения минимизации вычислительных затрат, обеспечения допустимых погрешностей аппроксимации и обеспечения лучшей сходимости наиболее целесообразно выбирать алгоритм, при котором вводится ограничение $\beta_0 = \sigma_x^2$. Параметр α , определенный по этому алгоритму, находится вблизи оптимального значения α_{opt} и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным значениям.

Для однозначного решения задачи, т.е. определения единственного корня, обеспечивающего погрешность аппроксимации, близкую к минимуму-минимуму, необходимо анализировать сигнал, пропорциональный β_0 [14].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cdot \psi_0(\tau, \alpha) d\tau - k\sigma_x^2 = 0, \quad (1.54)$$

где $\psi_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau/2}$ – функция Лагерра нулевого порядка;

k – постоянная величина, которая, как видно из уравнения, меньше 2.

Для модели $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_s|\tau|} \cos(\omega_{0,5}\tau)$ это уравнение приведем к виду:

$$\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau/2} e^{-\lambda_s\tau} \cos(\omega_{0,5}\tau) \cdot d\tau - k = 0. \quad (1.55)$$

Разрешив уравнение относительно α , получим:

$$\alpha = 2 \frac{-\lambda_s(1-k) + \sqrt{\lambda_s^2(1-k)^2 + k(2-k)(\lambda_s^2 + \omega_{0,5}^2)}}{2-k}. \quad (1.56)$$

При $k=1$ выражение примет самый простой вид, а именно:

$$\alpha = 2\sqrt{\lambda_s^2 + \omega_{0,5}^2}. \quad (1.57)$$

Заметим, что зависимость параметра α от параметров корреляционной функции в выражении (1.57) совпадает с выражением, полученным в [19] для условия минимума погрешности в равномерном смысле. Однако в [19] приведен лишь результат, а не алгоритм поиска параметра α , алгоритм приводится в [14].

Как показали исследования, относительная погрешность аппроксимации (1.92) зависит от величины параметра масштаба, вида корреляционной функции

и ее показателя колебательности $\mu_i = \frac{\omega_{0,i}}{\lambda_i}$, числа членов разложения ряда m . В

таблице 1.9 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции вида $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_s|\tau|} \cos(\omega_{0,5}\tau)$ при разных значениях m , в зависимости от отношения параметра ортогональных функций к показателю затухания исследуемых корреляционных функций –

$$\chi_5 = \frac{\alpha}{\lambda_s}.$$

Методическая погрешность аппроксимации

Таблица 1.9

Ортогональный базис	График методической погрешности ($\mu_5=3,4,5; m=2$)	График методической погрешности ($\mu_5=5; m=3,4,5$)
Лагерра		
Лежандра		
Дирихле		

Видно, что при выбранной модели корреляционной функции, $\mu = const$, $m = const$, погрешность существенным образом зависит от χ , т.е. α . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от m [15]. Следует отметить, что исследователя интересует значение па-

раметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

Приведенный в книге [14] метод аппаратурной аппроксимации корреляционных функций позволил свести задачу разработки алгоритма оценки параметра ортогональных функций к задаче параметрической аппроксимации корреляционных функций.

Импульсная характеристика ортогонального фильтра k -ого порядка имеет вид:

$$H_k(\tau) = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \psi_k(\tau, \alpha). \quad (1.58)$$

Частотная характеристика фильтра k -ого порядка семейства ортогональных функций определяется по формуле прямого преобразования Фурье:

$$W_k(j\omega) = \int_0^{\infty} H_k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.59)$$

Частотные характеристики для ортогональных функций Лагерра, Лежандра и Дирихле приведены в таблице 1.10.

Частотные характеристики ортогональных функций

Таблица 1.10

Ортогональный базис	Частотная характеристика
Лагерра	$W_k(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{j\omega - \frac{\alpha}{2}}{j\omega + \frac{\alpha}{2}} \right)^k = \left(\frac{j\omega - \frac{\alpha}{2}}{j\omega + \frac{\alpha}{2}} \right) W_{k-1}(j\omega);$ $W_0(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \frac{\alpha}{2}}$
Лежандра	$W_k(j\omega) = \frac{(2k+1)\alpha}{j\omega + (2k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{(2n+1)\alpha - j\omega}{j\omega + (2n+1)\alpha}$
Дирихле	$W_k(j\omega) = \frac{(k+1)\alpha}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{j\omega - (n+1)\alpha}{j\omega + (n+1)\alpha}$

Введем понятие полосы пропускания линейной динамической системы [13]:

$$\Delta\omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega}{|W_m(j\omega)|_{\max}^2}, \quad (1.60)$$

где $W_m(j\omega)$ – частотная характеристика семейства ортогональных функций;
 $|W_m(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики семейства ортогональных функций.

При этом квадрат модуля частотной характеристики определяется по формуле:

$$|W_m(j\omega)|^2 = W_m(j\omega) \cdot W_m(-j\omega). \quad (1.61)$$

Графически полоса пропускания показана на рисунке 1.7.

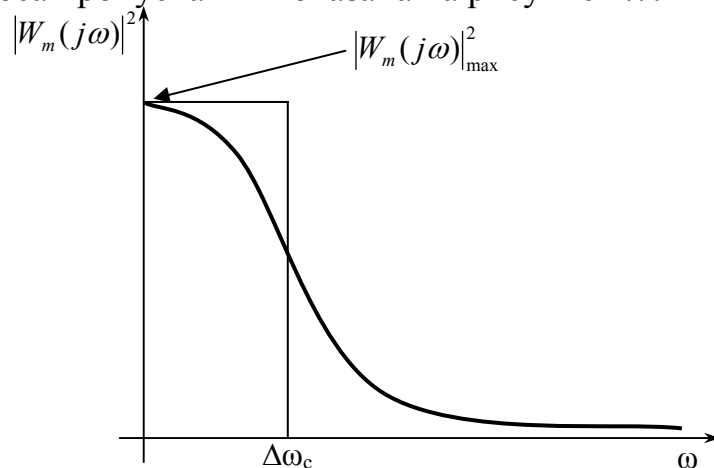


Рисунок 1.7. Полоса пропускания линейной динамической системы

Очевидно, квадрат модуля частотной характеристики примет максимальное значение при $\omega = 0$.

Квадраты модулей частотных характеристик Лагерра, Лежандра и Дирихле, а также максимумы частотных характеристик приведены в таблице 1.11.

Квадраты модулей частотных характеристик и их максимумы

Таблица 1.11

Ортогональный базис	$ W_m(j\omega) ^2$	$ W_m(j\omega) _{\max}^2$
Лагерра	$\frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^2}{4} + \omega^2}$	4
Лежандра	$\frac{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	1
Дирихле	$\frac{(m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	1

Чтобы определить полосу пропускания линейной динамической системы, необходимо определить значение интеграла $\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega$. Далее представлены выражения для определения значений интегралов в различных ортогональных базисах.

Лагерра:

$$\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^2}{4} + \omega^2} d\omega = \pi\alpha. \quad (1.62)$$

Лежандра:

$$\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi\alpha(2m+1)}{2}. \quad (1.63)$$

Дирихле:

$$\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{(m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi\alpha(m+1)}{2}. \quad (1.64)$$

Значения полосы пропускания линейной динамической системы для различных ортогональных функций, вычисленные на основе формул (1.60), (1.62), (1.63), (1.64) и содержимого таблицы 1.11, приведены в таблице 1.12.

Таблица 1.12

Ортогональный базис	$\Delta\omega_c$
Лагерра	$\frac{\pi\alpha}{4}$
Лежандра	$\frac{\pi\alpha(2m+1)}{2}$
Дирихле	$\frac{\pi\alpha(m+1)}{2}$

Воспользовавшись понятием $\Delta\omega_c$, можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. В книге [12] доказывается, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса. Введем соотношение неопределенности:

$$\Delta\omega_c \cdot \tau_u^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad (1.65)$$

где $\tau_u^{(2)}$ – длительность импульсной характеристики линейной динамической системы.

$$\tau_{uk}^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} H_k(\tau) d\tau}{H_k(\tau)_{\max}}. \quad (1.66)$$

Учитывая, что длительность импульсной характеристики фильтров нижних частот, к которым относятся ортогональные фильтры, с погрешностью $\delta = 0,02$ равна $\frac{\Delta\tau}{0.4}$, соотношение неопределенности примет вид:

$$\Delta\omega_c = \frac{0,4 \cdot \pi}{2 \cdot \Delta\tau} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau}. \quad (1.67)$$

Определим значение параметра масштаба для различных ортогональных базисов (при определении параметра используется содержимое таблицы 1.12 и формула 1.67) при $k = m$.

Лагерра:

$$\frac{\pi\alpha}{4} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau} \Rightarrow \alpha = \frac{0,8}{\Delta\tau}. \quad (1.68)$$

Лежандра:

$$\frac{\pi\alpha(2m+1)}{2} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau} \Rightarrow \alpha = \frac{0,4}{\Delta\tau(2m+1)}. \quad (1.69)$$

Дирихле:

$$\frac{\pi\alpha(m+1)}{2} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau} \Rightarrow \alpha = \frac{0,4}{\Delta\tau(m+1)}. \quad (1.70)$$

Значения параметров масштаба ортогональных функций сведены в таблицу 1.13.

Параметр масштаба ортогональных функций

Таблица 1.13

Система ортогональных функций	α
Лагерра	$\frac{0,8}{\Delta\tau}$
Лежандра	$\frac{0,4}{\Delta\tau(2m+1)}$
Дирихле	$\frac{0,4}{\Delta\tau(m+1)}$

1.6. Анализ составляющих методической погрешности оценки коэффициентов разложения

На практике приходится ограничиваться конечным интервалом наблюдения корреляционной функции:

$$\hat{\beta}_k^{(1)} = \frac{I}{A_m \|\psi_k\|^2} \int_0^{\tau_m} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau) d\tau. \quad (1.71)$$

При этом появляется дополнительная составляющая методической погрешности, вызванная конечным верхним пределом интегрирования:

$$\Delta_{\beta_k}^{(1)} = \hat{\beta}_k^{(1)} - \beta_k = \frac{I}{A_m \|\psi_k\|^2} \int_{\tau_m}^{\infty} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau) d\tau. \quad (1.72)$$

Необходимо отметить, что $\lim_{\tau_m \rightarrow \infty} \Delta_{\beta_k}^{(1)} = 0$.

Также на точность вычисления коэффициентов разложения влияет тот факт, что интегрирование производится численными методами:

$$\hat{\beta}_k^{(2)} = \Phi\left(\hat{K}_x(\Delta\tau \cdot i) \cdot \psi_k(\Delta\tau \cdot i), \tau_m\right), \quad (1.73)$$

где $i = 1..M$;

$$M = \text{ent}\left[\frac{\tau_m}{\Delta\tau}\right];$$

τ_m – интервал корреляции;

$\Delta\tau$ – шаг дискретизации.

Таким образом, возникает составляющая методической погрешности:

$$\Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_k^{(1)}. \quad (1.74)$$

В связи с конечностью выборки значений КФ, возникает еще одно ограничение:

$$\hat{\beta}_k^{(3)} = \Phi\left(\hat{K}_x(\Delta\tau \cdot i) \cdot \psi_k(\Delta\tau \cdot i), \tau_m, N\right), \quad (1.75)$$

где $i = 1..M$;

N – объем выборки.

Соответственно:

$$\Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}. \quad (1.76)$$

Следовательно, методическая погрешность вычисления коэффициентов разложения β_k определяется выражением:

$$\Delta_{\beta_k} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} + \Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \beta_k. \quad (1.77)$$

Обозначив $\hat{\beta}_k^{(3)}$ через $\hat{\beta}_k$, формула (1.77) примет вид:

$$\Delta_{\beta_k} = \hat{\beta}_k - \beta_k. \quad (1.78)$$

Конечность интервала корреляции КФ и интегрирование численными методами будут вносить в результирующую погрешность систематическую составляющую, а ограниченность выборки значений КФ – случайную составляющую.

Необходимо отметить, что для типовых моделей КФ при различных значениях Δ (1.131), в частности, когда аппроксимация производится с помощью ортогональных функций Лагерра, Лежандра или Дирихле, погрешность определения коэффициентов разложения Δ_{β_k} возрастает с увеличением порядка k (рисунки 1.8, 1.9, 1.10).

В свою очередь, коэффициенты разложения β_k должны обеспечивать минимум квадратической погрешности аппроксимации [13].

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left(K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau) \right)^2 d\tau = \min, \quad (1.79)$$

которая при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю (рисунок 1.11).

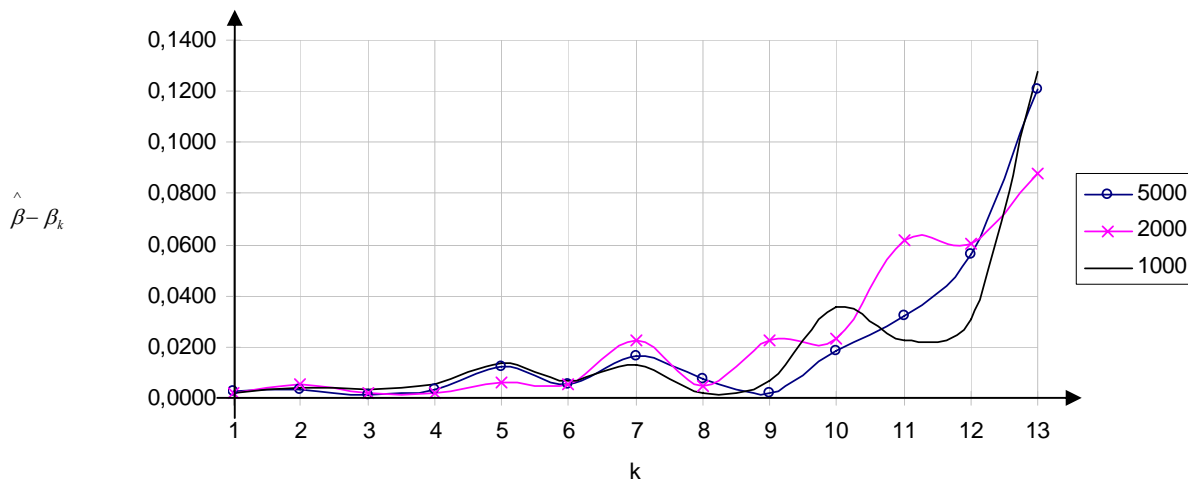


Рисунок 1.8. Отклонение оценок (Лагерра, $K_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0\tau)$)

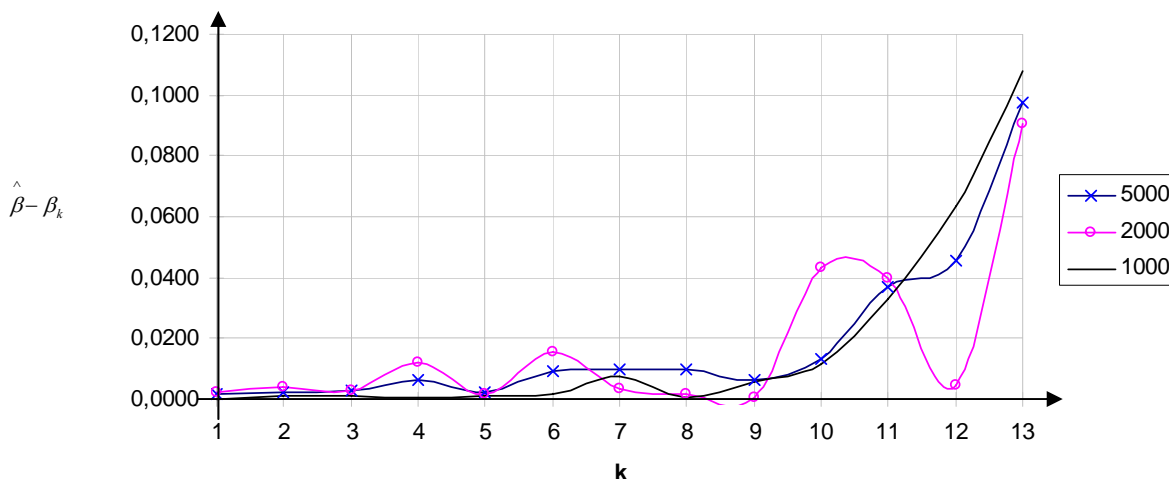


Рисунок 1.9. Отклонение оценок (Лежандра, $K_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0\tau)$)

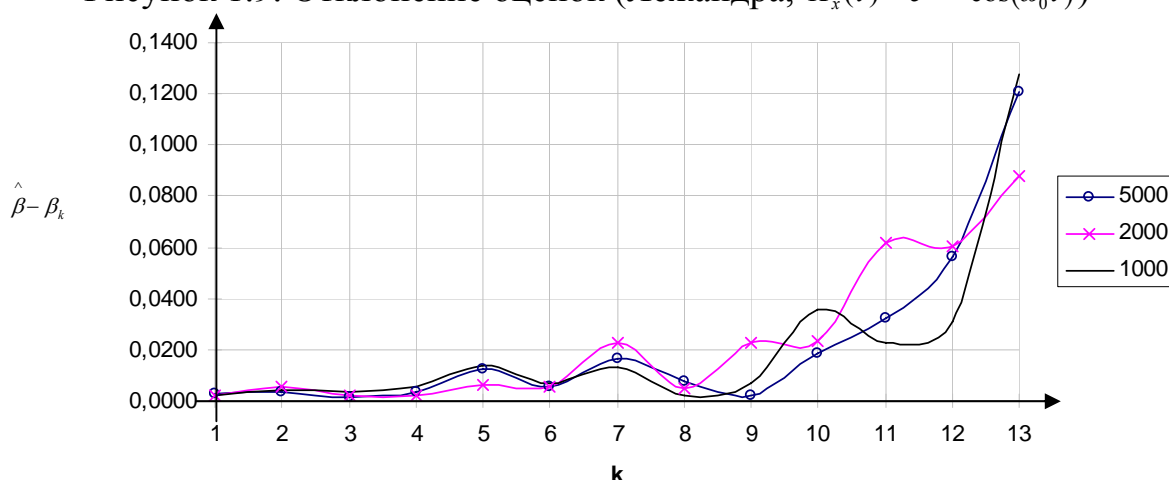


Рисунок 1.10. Отклонение оценок (Дирихле, $K_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0\tau)$)

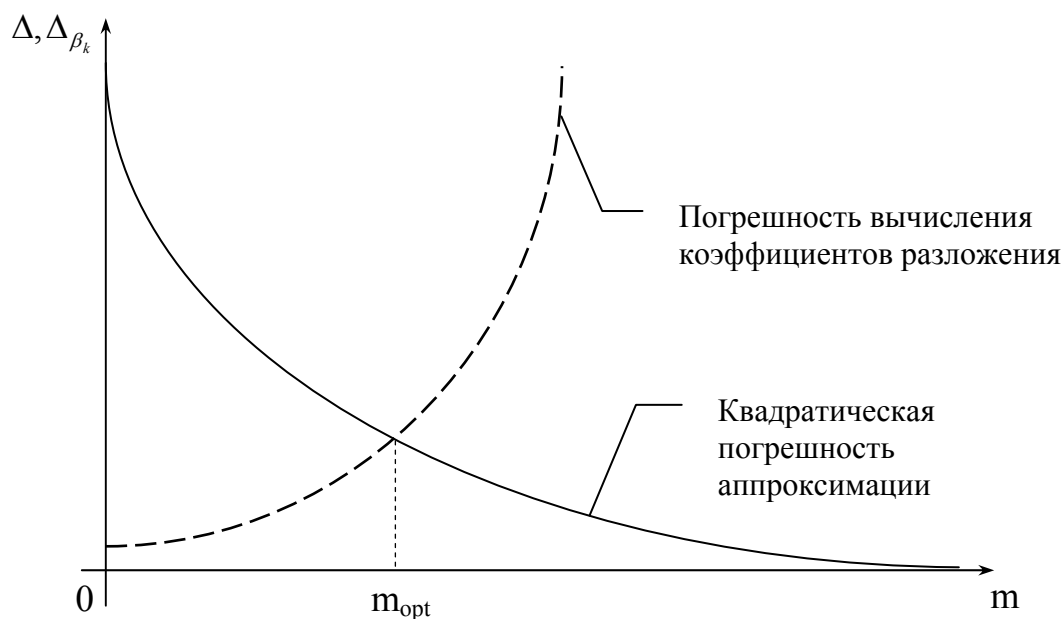


Рисунок 1.11. Оптимальное число членов разложения ряда

Из рисунка 1.11 видно, что существует оптимальное число членов разложения m_{opt} , при котором результирующая погрешность аппроксимации, включающая квадратическую погрешность аппроксимации и погрешность вычисления коэффициентов разложения, минимальна.

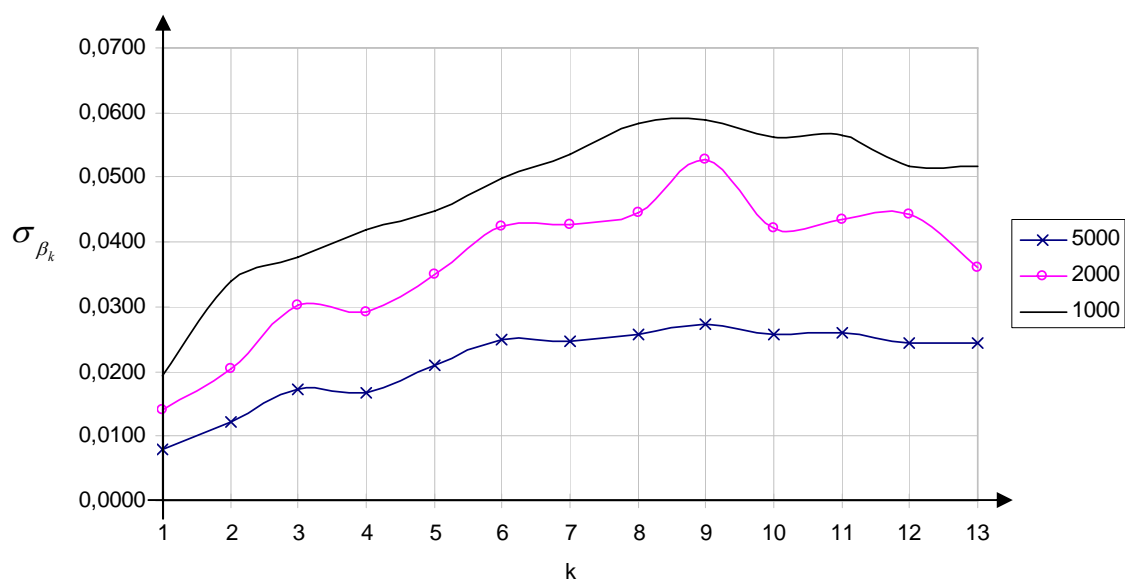


Рисунок 1.12. Среднее квадратическое отклонение оценок (Лагерра)

На рисунках 1.12, 1.13 и 1.14 приведены графики зависимостей среднего квадратического отклонения $\hat{\beta}_k$ от порядка k , при аппроксимации корреляционной функции вида $K_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0\tau)$, в случаях, когда объем выборки значений КФ $N = 5000, N = 2000, N = 1000$.

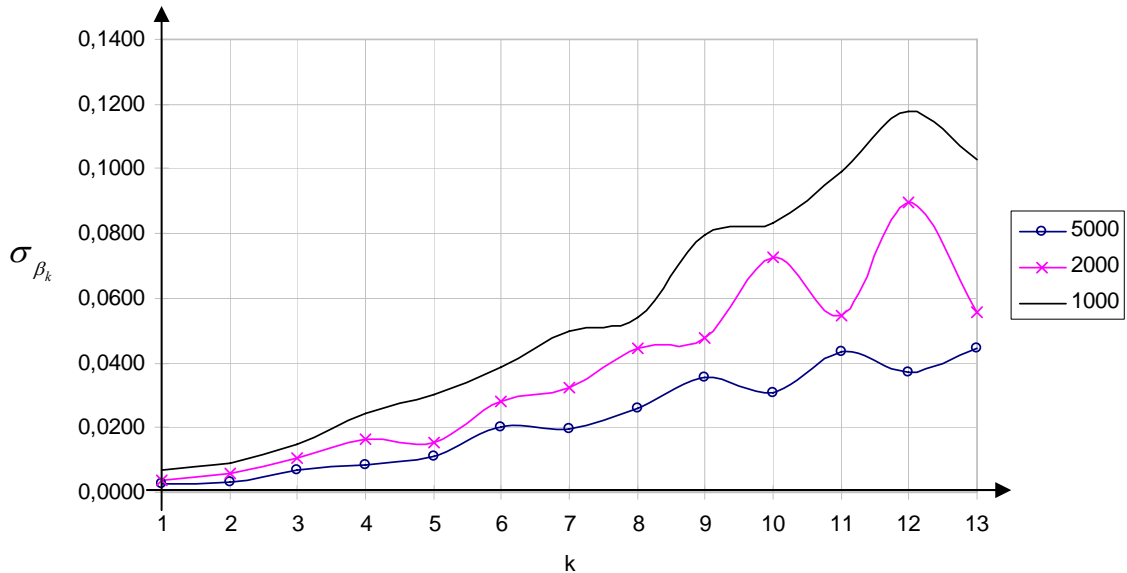


Рисунок 1.13. Среднее квадратическое отклонение оценок (Лежандра)

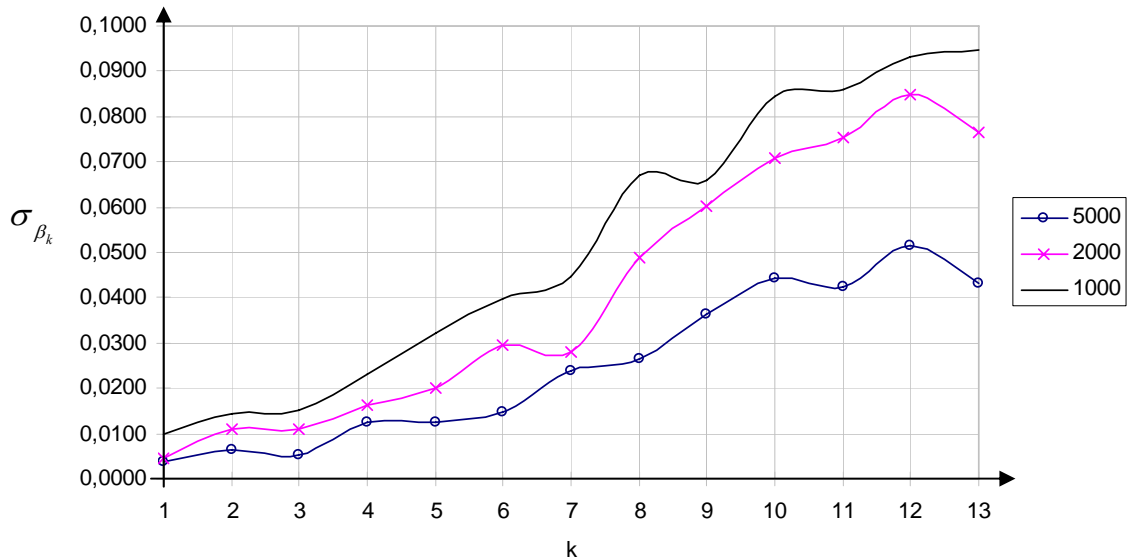


Рисунок 1.14. Среднее квадратическое отклонение оценок (Дирихле)

Среднее квадратическое отклонение $\hat{\beta}_k$ при аппроксимации функциями Дирихле и Лежандра (рисунок 1.12, 1.13) с увеличением порядка k возрастает. В случае же аппроксимации ортогональными функциями Лагерра СКО $\hat{\beta}_k$ стремится к определенному значению, когда порядок k возрастает. Достаточно четко это свойство выражается при увеличении объема выборки (рисунок 1.14, $N = 5000$).

Для ответа на вопрос: насколько же велика погрешность определения коэффициентов разложения, необходимо определить ее математическое ожидание, а также среднее квадратическое отклонение. Для чего квадратическую погрешность аппроксимации (1.79) можно записать в виде:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.80)$$

Учитывая (1.78), выражение (1.80) примет вид:

$$\Delta = \Delta_{\min} + A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \Delta_{\beta_k}^2. \quad (1.81)$$

Математическое ожидание погрешности в этом случае будет определяться следующим образом:

$$M[\Delta] = \Delta_{\min} + A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 M[\Delta_{\beta_k}^2], \quad (1.82)$$

$$\overset{\circ}{\Delta} = A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]). \quad (1.83)$$

Тогда

$$\overset{\circ}{\Delta}^2 = A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]) \cdot \sum_{n=0}^m \|\psi_n\|^2 (\Delta_{\beta_n}^2 - M[\Delta_{\beta_n}^2]), \quad (1.84)$$

$$M[\overset{\circ}{\Delta}^2] = A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 M[(\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2])^2] + \\ + 2A_m^4 \sum_{n \neq k} \|\psi_n\|^2 \|\psi_k\|^2 M[(\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2])(\Delta_{\beta_n}^2 - M[\Delta_{\beta_n}^2])]. \quad (1.85)$$

Обозначив:

$$J_1 = (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2])^2; \quad (1.86)$$

$$J_2 = (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2])(\Delta_{\beta_n}^2 - M[\Delta_{\beta_n}^2]), \quad (1.87)$$

выражение (1.85) примет вид:

$$M[\overset{\circ}{\Delta}^2] = A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_n\|^4 M[J_1] + 2A_m^4 \sum_{k \neq n} \|\psi_n\|^2 \|\psi_k\|^2 M[J_2], \quad (1.88)$$

где

$$M[J_1] = M[\Delta_{\beta_k}^4] - (M[\Delta_{\beta_k}^2])^2, \quad (1.89)$$

считая $\hat{\beta}_k$ и $\hat{\beta}_n$ некоррелированными:

$$M[J_2] = 0. \quad (1.90)$$

Таким образом,

$$\sigma_{\Delta}^2 = A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_n\|^4 (M[\Delta_{\beta_k}^4] - (M[\Delta_{\beta_k}^2])^2). \quad (1.91)$$

Величина относительной методической погрешности определяется по формуле:

$$\delta^2 = \frac{\int_0^{\infty} [K_x^*(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)]^2 d\tau}{\int_0^{\infty} [K_x^*(\tau)]^2 d\tau}. \quad (1.92)$$

Учитывая (1.48), выражение (1.92) преобразуем к виду:

$$\delta^2 = 1 - \frac{A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2}{\int_0^{\infty} [K_x^*(\tau)]^2 d\tau}. \quad (1.93)$$

Из (1.48) и (1.92) следует, что при аппроксимации КФ ортогональными функциями для определения погрешности необходимо определить значения коэффициентов Фурье (1.46), которые, в свою очередь, зависят от параметра масштаба α .

1.7. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями при ограничениях на ее модель

В общем случае, рассмотренное нами семейство ортогональных функций $\psi_k(\tau, \alpha)$ не выполняет основного свойства, присущего КФ, а именно $[K_x(0) = \sigma_x^2]$, т.е. имеет место зависимость:

$$K_x(0) = A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \neq \sigma_x^2. \quad (1.94)$$

Поэтому для выполнения основного свойства решают систему уравнений [14]:

$$\begin{cases} K_x(0) = A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \sigma_x^2; \\ \Delta_1 = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)]^2 d\tau + \lambda \cdot A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min. \end{cases} \quad (1.95)$$

Найдем частные производные $\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_k}$ и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n} &= -2 \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)] \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \cdot A_m \psi_n(0, \alpha) = 0; \\ -2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + 2 A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \cdot \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \cdot A_m \psi_n(0, \alpha) &= 0; \\ -2 \beta_n A_m \|\psi_n\|^2 + 2 A_m b_n \|\psi_n\|^2 + \lambda \cdot A_m \psi_n(0, \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Отсюда

$$b_n = \beta_n - \frac{\lambda \cdot \psi_n(0, \alpha)}{2 \cdot \|\psi_n\|^2}. \quad (1.97)$$

Подставляя найденное значение b_n в выражение (1.94), получим:

$$\begin{aligned} A_m \sum_{k=0}^m \left[\beta_k - \frac{\lambda \cdot \psi_k(0, \alpha)}{2 \cdot \|\psi_n\|^2} \right] \cdot \psi_k(0, \alpha) &= \sigma_x^2; \\ A_m \sum_{k=0}^m \left[\beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) - \frac{\lambda \cdot \psi_k^2(0, \alpha)}{2 \cdot \|\psi_n\|^2} \right] &= \sigma_x^2; \end{aligned} \quad (1.98)$$

$$\frac{\lambda}{2} = - \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}}.$$

Окончательно формула для определения коэффициентов разложения при ограничениях на модель корреляционной функции выглядит так:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}. \quad (1.99)$$

Определим значения b_n для различных ортогональных базисов.

Лагерра:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{\sum_{k=0}^m \alpha} \cdot \alpha = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)}. \quad (1.100)$$

Лежандра:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{\sum_{k=0}^m 2\alpha(2k+1)} \cdot (-1)^n \cdot 2\alpha(2n+1). \quad (1.101)$$

Учитывая приложение 1, получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2n+1). \quad (1.102)$$

Дирихле:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{\sum_{k=0}^m 2\alpha(k+1)} \cdot 2\alpha(n+1). \quad (1.103)$$

Учитывая приложение 1, получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{2(n+1)\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)}. \quad (1.104)$$

Выражения для определения коэффициентов ряда Фурье сведем в таблицу 1.14.

Значения коэффициентов при ограничениях на модель
корреляционной функции

Таблица 1.14

Ортогональный базис	Коэффициенты ряда Фурье b_k
Лагерра	$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)}$
Лежандра	$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2n+1)$
Дирихле	$b_n = \beta_n + \frac{2(n+1)\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)}$

Если в качестве критерия приближения выбрать критерий минимума квадратической погрешности (1.40), то погрешность аппроксимации, вызванная ограничением на модель корреляционной функции, оценивается по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m \sum_{k=0}^m b_k \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha) d\tau + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \sum_{l=0}^m b_l \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \cdot \psi_l(\tau, \alpha) d\tau = \quad (1.105) \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2. \end{aligned}$$

Оценим значения погрешности аппроксимации для различных ортогональных базисов. Для этого в формулу (1.105) подставим значение нормы ортогональной функции (таблица 1.2) и значения коэффициентов ряда Фурье (таблица 1.14).

Погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

Для того, чтобы упростить определение величины погрешности по формуле (1.105), вычислим входящие в нее слагаемые отдельно:

1) второе слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Лагерра:

$$\sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 = \sum_{k=0}^m \left[\beta_k + \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} \right] \cdot \frac{\beta_k}{\alpha} = \quad (1.106)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)}.$$

2) третье слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Лагерра:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k=0}^m \left[\beta_k + \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)^2}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Для того, чтобы получить окончательное выражение погрешности аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, подставим значения, вычисленные по выражениям (1.106) и (1.107) в (1.105):

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 = \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} \right] + \\ &+ A_m^2 \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)^2} \right] = \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{A_m^2}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями Лежандра

Для того, чтобы упростить определение величины погрешности по формуле (1.105), вычислим входящие в нее слагаемые отдельно:

1) второе слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Лежандра:

$$\sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 = \sum_{k=0}^m \left[\beta_k + \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^k \cdot (2k+1) \right] \cdot \frac{\beta_k}{2 \cdot \alpha \cdot (2k+1)} = \quad (1.109)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k \cdot (2k+1)}{(2k+1) \cdot (m+1)^2} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2}.
\end{aligned}$$

2) третье слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Лежандра:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k=0}^m \left[\beta_k + \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k \cdot (2k+1)}{(m+1)^2} \right]^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (2k+1)} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{2}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k \cdot (2k+1)}{(2k+1) \cdot (m+1)^2} + \\
&\quad + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2 \cdot (-1)^{2k} \cdot (2k+1)^2}{(2k+1) \cdot (m+1)^4} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2}{(m+1)^2}.
\end{aligned} \tag{1.110}$$

Для того, чтобы получить окончательное выражение погрешности аппроксимации ортогональными функциями Лежандра подставим значения, вычисленные по выражениям (1.109) и (1.110), в (1.105):

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 = \\
&= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \left[\frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2} \right] + \\
&\quad + A_m^2 \left[\frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2}{(m+1)^2} \right] = \\
&= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{A_m^2}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2}{(m+1)^2}.
\end{aligned} \tag{1.111}$$

Погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями Дирихле

Для того, чтобы упростить определение величины погрешности по формуле (1.105), вычислим входящие в нее слагаемые отдельно:

1) второе слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Дирихле:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k=0}^m \left[\beta_k + \frac{2 \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1)(m+2)} \cdot (k+1) \right] \cdot \frac{\beta_k}{2 \cdot \alpha \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1) \cdot (m+2)}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

2) третье слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Дирихле:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k=0}^m \left[\beta_k + \frac{2 \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1)(m+2)} \cdot (k+1) \right]^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{2}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot 2 \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right) \cdot (k+1)}{(k+1) \cdot (m+1) \cdot (m+2)} + \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{4 \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)^2 \cdot (k+1)^2}{(k+1) \cdot (m+1)^2 \cdot (m+2)^2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)^2}{(m+1)(m+2)}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Для того, чтобы получить окончательное выражение погрешности аппроксимации ортогональными функциями Дирихле, подставим значения, вычисленные по выражениям (1.112) и (1.113) в (1.105):

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 = \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \left[\frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1) \cdot (m+2)} \right] + \\ &\quad + A_m^2 \left[\frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)^2}{(m+1)(m+2)} \right] = \end{aligned} \quad (1.114)$$

$$= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{A_m^2}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)(m+2)}.$$

Погрешность аппроксимации ортогональными функциями $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ можно разделить на две части Δ_1 (см. таблицу 1.8) и Δ_2 . Где Δ_1 – погрешность аппроксимации, вызванная конечным числом членов ряда Фурье, Δ_2 – погрешность аппроксимации, вызванная дополнительным ограничением, обеспечивающим выполнение основного свойства КФ. Значения погрешности для различных ортогональных базисов приведены в таблице 1.15.

Погрешность аппроксимации ортогональными функциями при ограничении на модель КФ

Таблица 1.15

Ортогональный базис	Δ_1	Δ_2
Лагерра	$\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$	$\frac{A_m^2}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)}$
Лежандра	$\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{A_m^2}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2}{(m+1)^2}$
Дирихле	$\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{A_m^2}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)(m+2)}$

1.8. Анализ погрешности вычисления коэффициентов разложения при ограничениях на модель корреляционной функции

Введем обозначение:

$$B_n = \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} \frac{1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2}}, \quad (1.115)$$

тогда выражение (1.99) примет вид:

$$b_n = \beta_n + B_n. \quad (1.116)$$

Представим методическую погрешность аппроксимации (1.105) в виде двух составляющих:

$$\Delta_1 = \Delta_{\min} + \Delta_2, \quad (1.117)$$

где

$$\Delta_{\min} = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \quad (1.118)$$

$$\Delta_2 = A_m^2 \sum_{k=0}^m B_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.119)$$

Подставив в выражение (1.119) выражение (1.116), получим:

$$\Delta_2 = A_m^2 \sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \tau)}{\|\psi_k\|^2} \left[\frac{1 - \sum_{n=0}^m \beta_n \psi_n(0, \alpha)}{\sum_{n=0}^m \frac{\psi_n^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}} \right]^2. \quad (1.120)$$

Заметим, что выражения (1.117)-(1.120) позволяют оценить методическую погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями при условии «идеальности» коэффициентов разложения β_k .

Запишем погрешность аппроксимации КФ с учетом оценок коэффициентов разложения $\hat{\beta}_k$ в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left[K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m \hat{b}_k \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \hat{b}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m \hat{b}_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Выражение (1.121), как следует из выражения (1.116), является функцией случайных оценок коэффициентов разложения $\hat{\beta}_k$. Считая отклонения оценок от коэффициентов разложения малыми, разложим выражение (1.121) в ряд Тейлора относительно $\hat{\beta}_k$ в окрестности β_k , ограничившись квадратичными членами. Для этого найдем соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial \Delta_l}{\partial \hat{\beta}_n} = -2A_m^2 \left[\beta_n \frac{\partial \hat{b}_n}{\partial \hat{\beta}_n} - b_n \frac{\partial \hat{b}_n}{\partial \beta_n} \right] \|\psi_n\|^2; \quad (1.122)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta_l}{\partial \hat{\beta}_n^2} = -2A_m^2 \left[\beta_n \frac{\partial^2 \hat{b}_n}{\partial \hat{\beta}_n^2} - \left(\frac{\partial \hat{b}_n}{\partial \hat{\beta}_n} \right)^2 - \hat{b}_n \frac{\partial^2 \hat{b}_n}{\partial \hat{\beta}_n^2} \right] \|\psi_n\|^2; \quad (1.123)$$

$$\frac{\partial \hat{b}_k}{\partial \hat{\beta}_k} = 1 - \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2 \sum_{n=0}^m \frac{\psi_n^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}} = E_k; \quad (1.124)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{b}_k}{\partial \hat{\beta}_k^2} = 0. \quad (1.125)$$

С учетом формул (1.122)-(1.125) выражение (1.121) примет вид:

$$\Delta_1 = \Delta_{\min} + \Delta_2 + 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k} \|\psi_k\|^2 B_k E_k + A_m^2 \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k}^2 \|\psi_k\|^2 E_k^2. \quad (1.126)$$

Соответственно математическое ожидание погрешности аппроксимации:

$$M[\Delta_1] = \Delta_{\min} + \Delta_2 + 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 M[\Delta_{\beta_k}] B_k E_k + A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 M[\Delta_{\beta_k}^2] E_k^2. \quad (1.127)$$

Из выражения (1.127) видно, что математическое ожидание погрешности аппроксимации помимо минимальной погрешности, содержит две составляющие, численные значения которых линейно зависят от погрешности оценки коэффициентов разложения, и увеличивается с увеличением числа членов разложения ряда m . Следует отметить, что в общем случае с увеличением числа членов разложения ряда Δ_{\min} уменьшается. Следовательно, существует минимум погрешности по m .

Найдем центрированное значение методической погрешности аппроксимации:

$$\overset{\circ}{\Delta}_1 = 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k} - M[\Delta_{\beta_k}]) B_k E_k + A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]) E_k^2; \quad (1.128)$$

$$\overset{\circ}{\Delta}_1^2 = A_m^4 \left(4 \left(\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k} - M[\Delta_{\beta_k}]) B_k E_k \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]) E_k^2 \right)^2 \right) + \quad (1.129)$$

$$+ 4A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k} - M[\Delta_{\beta_k}]) B_k E_k \cdot \sum_{n=0}^m \|\psi_n\|^2 (\Delta_{\beta_n}^2 - M[\Delta_{\beta_n}^2]) E_n^2.$$

При условии некоррелированности $\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_n$ и их нормальном законе распределения, получим:

$$\sigma_{\Delta_1}^2 = A_m^4 \left(4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 (M[\Delta_{\beta_k}^2] - (M[\Delta_{\beta_k}])^2) B_k^2 E_k^2 + \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 (M[\Delta_{\beta_k}^4] - (M[\Delta_{\beta_k}^2])^2) E_k^4 \right) + \quad (1.130)$$

$$+ 4A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 (M[\Delta_{\beta_k}^3] - M[\Delta_{\beta_k}] \cdot M[\Delta_{\beta_k}^2]) B_k E_k^3.$$

Из выражения (1.130) следует, что дисперсия погрешности аппроксимации растет с увеличением числа членов разложения ряда m , а её численное значение зависит как от вида ортогональных функций, так и погрешности, вызванной смещенностью оценки коэффициентов разложения ряда.

1.9. Оценка интервалов корреляции

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся [12]:

- показатель колебательности, равный числу пересечений «нуля» корреляционной функцией и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;

- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач, связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл – **длительность существования корреляционной функции**.

Максимальный интервал корреляции $\tau_k^{(1)} = \tau_{k \max}$ определяется в результате решения уравнения (см. таблицу 1.16):

$$|\rho(\tau \geq \tau_{k \max})| \leq \Delta, \quad (1.131)$$

где Δ – заданное значение, принимаемое, как правило, равным 0.01, 0.02, 0.05.

То есть под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями Δ или $-\Delta$, после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора $[-\Delta, \Delta]$. На рисунке 1.15 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,s}) = e^{-\lambda_s|\tau|} \cos(\omega_{0,s}\tau)$ при $\lambda_s = 1$, $\omega_{0,s} = 5$, $\Delta = 0,05$.

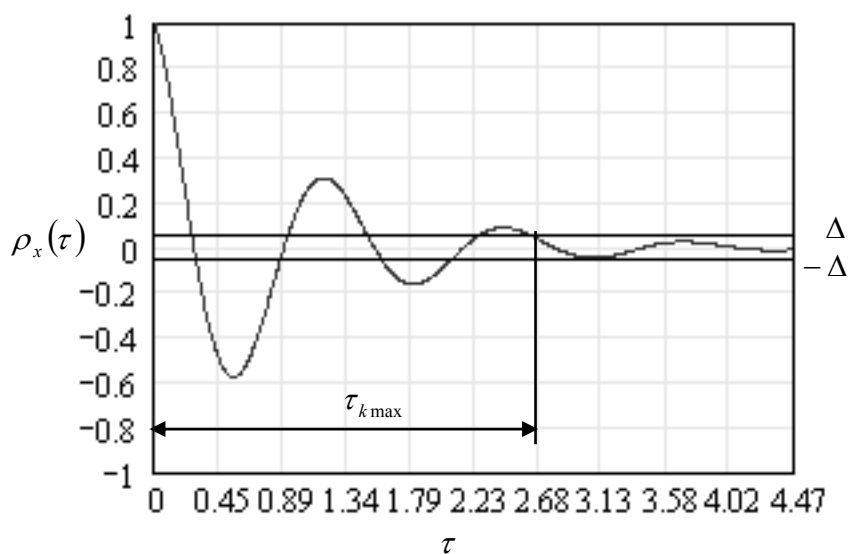


Рисунок 1.15. Максимальный интервал корреляции

Аналитические выражения $\tau_{k \max}$ для типовых моделей $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$ приведены в таблице 1.16.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей
корреляционных функций

Таблица 1.16

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\Delta = 0,01$	$\Delta = 0,02$	$\Delta = 0,05$
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau)$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau)$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\lambda_6 \tau }\left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau)\right)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\lambda_7 \tau }\left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau)\right)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной КФ [19]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (1.132)$$

Графическая интерпретация величины $\tau_k^{(2)}$ дана на рисунке 1.16.

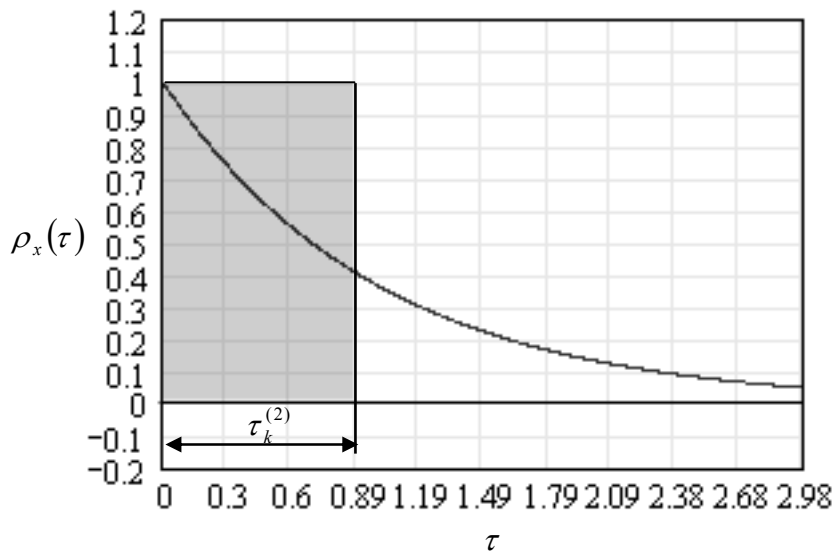


Рисунок 1.16. Интервал корреляции $\tau_k^{(2)}$

Отметим, что для некоторого класса процессов $\tau_k^{(2)} = 0$ (например, для колебательных моделей, площадь положительной и отрицательной части которых равна), что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает $\tau_{k \max} > 0$.

Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции $\tau_k^{(2)}$ целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка в [14] были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau; \quad (1.133)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (1.134)$$

Графическая интерпретация величины $\tau_k^{(3)}$ приведена на рисунке 1.17.

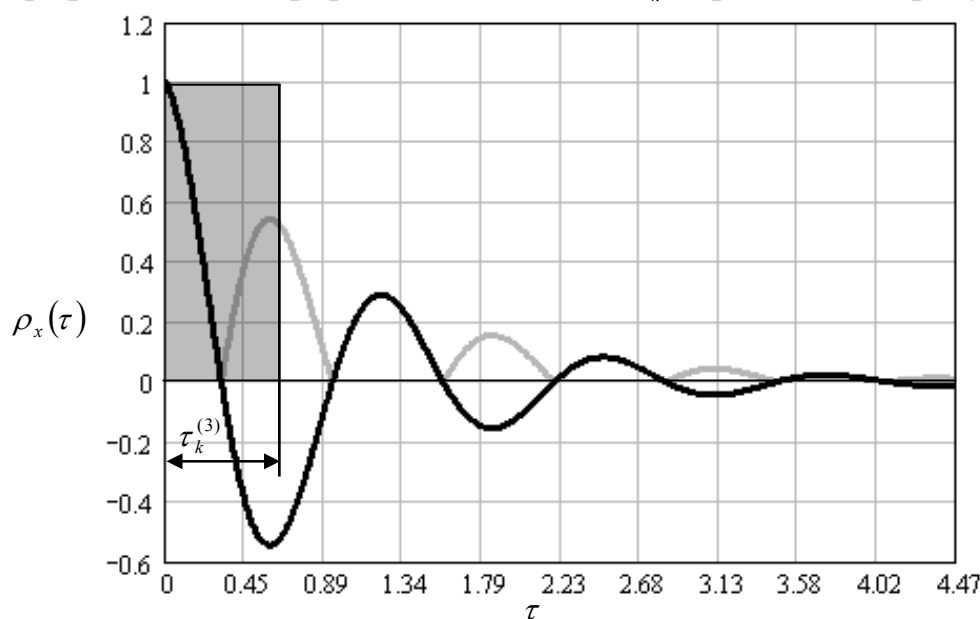


Рисунок 1.17. Интервал корреляции $\tau_k^{(3)}$

Анализ выражений (1.131) и (1.133) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение $\tau_k^{(4)}$. Поэтому, несмотря на то, что $\tau_k^{(4)}$ дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем $\tau_k^{(3)}$. Значения интервалов корреляции $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.17.

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 1.17

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	2	3	4
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\frac{1}{\lambda_1}$	$\frac{1}{2\lambda_1}$
2	$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau)$	$\frac{2}{\lambda_2}$	$\frac{5}{4\lambda_2}$

1	2	3	4
3	$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau)$	0	$\frac{1}{4\lambda_3}$
4	$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	$\frac{8}{3\lambda_4}$	$\frac{7}{4\lambda_4}$
5	$e^{-\lambda_5 \tau }\cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\frac{\lambda_5}{\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2}$	$\frac{2\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2}{4\lambda_5(\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2)}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau }\left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}}\sin(\omega_{0,6}\tau)\right)$	$\frac{2\lambda_6}{\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2}$	$\frac{5\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2}{4\lambda_6(\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2)}$
7	$e^{-\lambda_7 \tau }\left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}}\sin(\omega_{0,7}\tau)\right)$	0	$\frac{1}{4\lambda_7}$

В таблице 1.18 показано, во сколько раз $\tau_{k \max}$ больше $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ ($\Delta = 0,05$).

Таблица 1.18

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(2)}$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	3	6
2	$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau)$	2,375	3,8
3	$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau)$	∞	16,56
4	$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	2,22	3,38
5	$e^{-\lambda_5 \tau }\cos(\omega_{0,5}\tau)$	$3(1 + \mu_5^2)$	$\frac{2(1 + \mu_5^2)}{2 + \mu_5^2}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau }\left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}}\sin(\omega_{0,6}\tau)\right)$	$1,5 \cdot (1 + \mu_6^2)$	$\frac{12(1 + \mu_6^2)}{(5 + \mu_6^2)}$
7	$e^{-\lambda_7 \tau }\left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}}\sin(\omega_{0,7}\tau)\right)$	∞	12
Примечание: $\mu_i = \frac{\omega_{0,i}}{\lambda_i}$ – показатель колебательности.			

Отсюда видно, что $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ дают сильно заниженный результат по сравнению с $\tau_{k \max}$.

В качестве оценки интервалов корреляции можно использовать интервалы корреляции экспоненциальной функции $\rho_a(\tau, \lambda_1) = e^{-\lambda_1|\tau|}$, аппроксимирующей нормированную корреляционную функцию по минимуму квадратической погрешности аппроксимации [14].

Определив параметры модели корреляционной функции (1.47) и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти их аналитические выражения, содержащие только параметры модели аппроксимации.

Так выражение для оценки $\tau_k^{(2)}$ примет вид:

$$\tau_k^{(2)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (1.135)$$

Отметим, что выражение (1.168) и зависимости для определения спектральных плотностей мощности (см. таблицу 1.25) позволяют определить интервал корреляции корреляционной функции $\tau_k^{(2)}$.

Воспользовавшись зависимостями для определения погрешности аппроксимации корреляционной функции (см. таблицу 1.8)

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2, \quad (1.136)$$

и выражением (1.134), в качестве оценки интервала корреляции можно принять выражение:

$$\tau_k^{(4)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.137)$$

Эта оценка будет тем точнее, чем меньше квадратическая погрешность аппроксимации корреляционной функции моделью вида (1.43). Заметим, что анализ этой погрешности и рекомендации по выбору оптимальных значений параметров модели представлен в разделе 2.2 данной печатной работы.

Выполнив все необходимые преобразования, с учетом свойств ортогональных функций, получим выражения для оценки интервалов корреляции различных ортогональных базисов (см. таблицу 1.19).

Выражения для определения интервалов корреляции

Таблица 1.19

Ортогональный базис	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
Лагерра	$\frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k$	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$
Лежандра	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+1)}$	$\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)}$
Дирихле	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \frac{1}{(k+1)}$	$\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)}$

1.10. Аппроксимация взаимных корреляционных функций

Учитывая большое разнообразие взаимокорреляционных функций, представляется более целесообразным искать модель в виде ортогонального ряда (1.47). Отличие от аппроксимации АКФ заключается в том, что необходимо аппроксимировать как правую (положительную полуплоскость), так и левую (отрицательную полуплоскость) ветви ВКФ относительно оси ординат.

Воспользовавшись понятием единичной функции, модель ВКФ примет вид:

$$K_{xy}(\tau) = K_{xy}(\tau)1(\tau) + K_{xy}(-\tau)1(-\tau), \quad (1.138)$$

где

$$1(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau > 0; \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 0, & \text{при } \tau < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad 1(-\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau > 0; \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 1, & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (1.139)$$

Аппроксимативная модель, с учетом (1.138) и (1.139), в этом случае примет вид:

$$K_{xy}(\tau) = A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot 1(\tau) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(-\tau, \alpha_l) 1(-\tau) \right). \quad (1.140)$$

Следует заметить, что число членов аппроксимирующего ряда для каждой ветви будет свое.

При этом квадратическая погрешность аппроксимации запишется в виде:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_{xy}(\tau) - A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot 1(\tau) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(-\tau, \alpha_l) 1(-\tau) \right) \right]^2 d\tau. \quad (1.141)$$

Коэффициенты разложения определяются, исходя из требования минимума этой погрешности.

Для правой ветви:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{n,n}} = \int_0^{\infty} \left[K_{xy}(\tau) - A_m \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \right] \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau = 0; \quad (1.142)$$

$$\int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau - A_m \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau = 0; \quad (1.143)$$

$$\beta_{n,n} = \frac{1}{A_m \|\psi_n\|_n^2} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau. \quad (1.144)$$

Для левой ветви:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{n,l}} = \int_0^{\infty} \left[K_{xy}(\tau) - A_m \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_l) \right] \cdot \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau = 0; \quad (1.145)$$

$$\int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau - A_m \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha_l) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau = 0; \quad (1.146)$$

$$\beta_{n,l} = \frac{1}{A_m \|\psi_l\|_n^2} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (1.147)$$

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации запишется в виде:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - 2 \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot 1(\tau) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(-\tau, \alpha_l) 1(-\tau) \right) d\tau + \quad (1.148)$$

$$+ A_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot 1(\tau) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(-\tau, \alpha_l) 1(-\tau) \right)^2 d\tau.$$

Исходя из свойств ортогональных функций:

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - \\ & - 2A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) d\tau + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \int_0^{\infty} K_{yx}(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha_l) d\tau \right) + \\ & + A_m^2 \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n}^2 \int_0^{\infty} \psi_k^2(\tau, \alpha_n) d\tau + A_m^2 \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l}^2 \int_0^{\infty} \psi_k^2(\tau, \alpha_l) d\tau. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Пользуясь зависимостями для определения коэффициентов разложения (1.144), (1.147) и свойством ортогональности (1.44), получим:

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \left(\sum_{k=0}^{m_n} \|\psi_n\|_k^2 \beta_{k,n}^2 + \sum_{k=0}^{m_l} \|\psi_l\|_k^2 \beta_{k,l}^2 \right) + \\ & + A_m^2 \sum_{k=0}^{m_n} \|\psi_n\|_k^2 \beta_{k,n}^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^{m_l} \|\psi_l\|_k^2 \beta_{k,l}^2 \end{aligned} \quad (1.150)$$

или

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - A_m^2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_n} \|\psi_n\|_k^2 \beta_{k,n}^2 + \sum_{k=0}^{m_l} \|\psi_l\|_k^2 \beta_{k,l}^2 \right). \quad (1.151)$$

Погрешность аппроксимации ВКФ для различных ортогональных базисов приведена в таблице 1.20.

Погрешность аппроксимации ВКФ ортогональными функциями

Таблица 1.20

Ортогональный базис	Погрешность ограниченного числа членов Δ
Лагерра	$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - A_m^2 \cdot \left(\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n}^2 + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l}^2 \right)$
Лежандра	$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - A_m^2 \cdot \left(\frac{1}{2\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\beta_{k,n}^2}{2k+1} + \frac{1}{2\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \frac{\beta_{k,l}^2}{2k+1} \right)$
Дирихле	$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - A_m^2 \cdot \left(\frac{1}{2\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\beta_{k,n}^2}{k+1} + \frac{1}{2\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \frac{\beta_{k,l}^2}{k+1} \right)$

Полученные результаты аппроксимации можно улучшить, произведя предварительное преобразование взаимной корреляционной функции.

Например, когда пара данных процессов представляет собой один и тот же процесс, только задержанный на разные интервалы времени, взаимная корреляционная функция имеет резко выраженный максимум, однако эта точка не находится в начале координат. Таким образом, если применять приведенные выше результаты, полученные при аппроксимации автокорреляционной функции, будут проявляться недостатки. В частности, большое число членов разло-

жения ряда для каждой ветви, это связано со свойством ортогональных функций, используемых при аппроксимации (ортогональные функции, используемые здесь, хорошо аппроксимируют убывающие функции).

Для ВКФ не обязательно условие равенства ее максимального значения единице. Однако хорошие результаты, полученные при аппроксимации автокорреляционных функций с наложением такого условия, послужили причиной использования нормировки в случае взаимных корреляционных функций.

При определенном максимуме A_m в точке τ_m модель взаимной корреляционной функции может быть представлена, как:

$$K_{xy}(\tau) = A_m (\rho_{xy}(\tau - \tau_m)l(\tau - \tau_m) + \rho_{xy}(\tau_m - \tau)l(\tau_m - \tau)), \quad (1.152)$$

где τ_m – значение времени в точке максимума (разделения ветвей);

A_m – значение ВКФ в точке максимума.

Аппроксимативная модель, с учетом (1.152) и (1.139), в этом случае примет вид:

$$K_{xy}(\tau) = A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) \cdot l(\tau - \tau_m) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \cdot l(\tau_m - \tau) \right). \quad (1.153)$$

Квадратическая погрешность аппроксимации запишется в виде:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_{xy}(\tau) - A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) \cdot l(\tau - \tau_m) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \cdot l(\tau_m - \tau) \right) \right]^2 d\tau. \quad (1.154)$$

Коэффициенты разложения:

Для правой ветви:

$$\beta_{n,n} = \frac{1}{A_m \|\psi_n\|_n^2} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau + \tau_m) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau. \quad (1.155)$$

Для левой ветви:

$$\beta_{n,l} = \frac{1}{A_m \|\psi_l\|_l^2} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau_m - \tau) \cdot \psi_n(\tau_m, \alpha_l) d\tau. \quad (1.156)$$

Для повышения точности аппроксимации рекомендуется вместо коэффициентов β_k использовать коэффициенты b_k , приведенные в таблице 1.14. Тогда взаимная корреляционная функция будет выражена в виде:

$$K_{xy}(\tau) = A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \cdot \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) \cdot l(\tau - \tau_m) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \cdot \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \cdot l(\tau_m - \tau) \right) \quad (1.157)$$

Условие минимума квадратической погрешности аппроксимации, равно как и алгоритм поиска оптимальных α_n и α_l , останется аналогичным. Алгоритм аппроксимации ортогональными функциями приведен на рисунке 1.18.

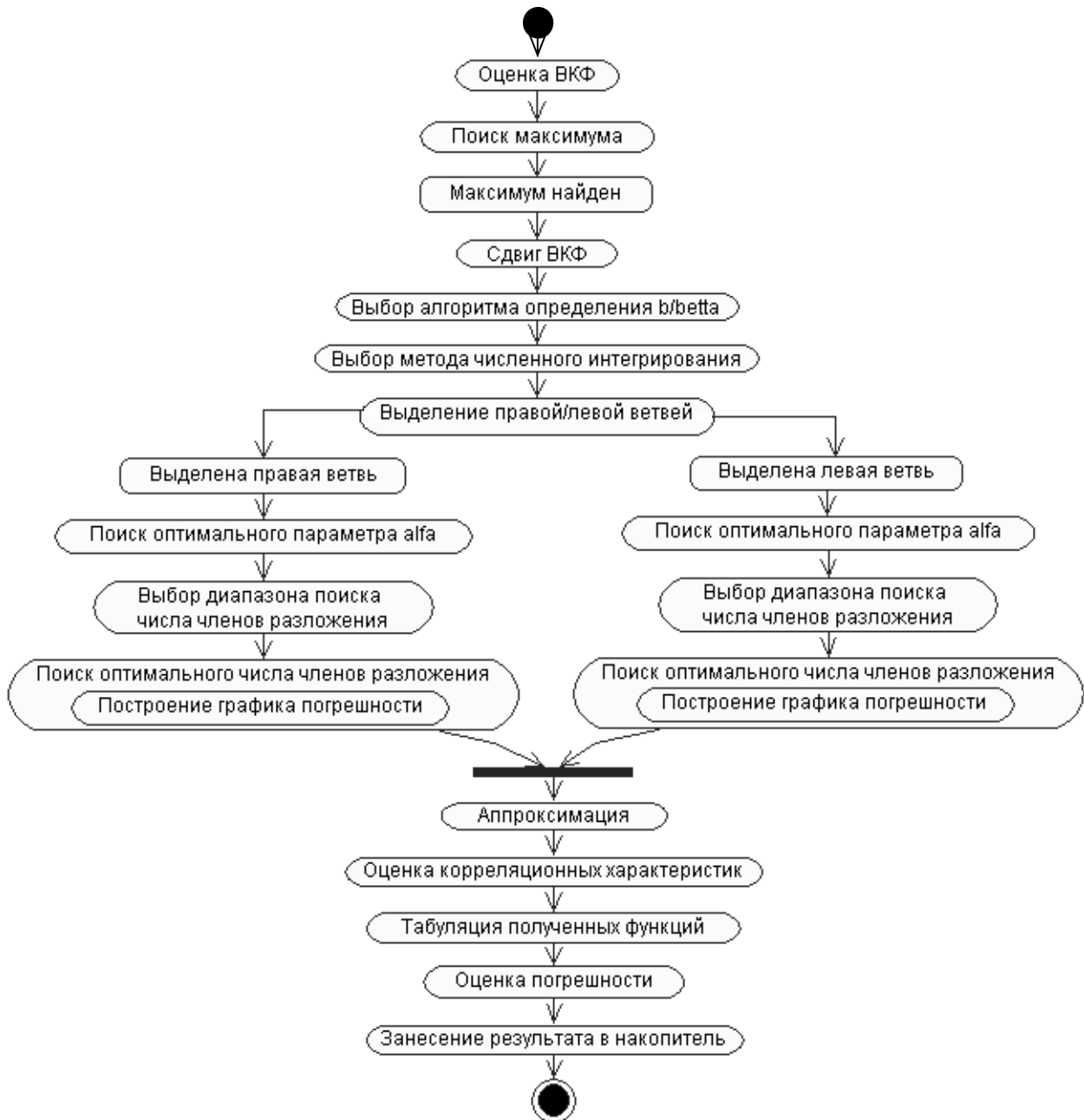


Рисунок 1.18. Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями (Диаграмма деятельности UML)

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{k \max xy}$; (1.158)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$; (1.159)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$; (1.160)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$; (1.161)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик и т.д.

Получаемые при аппроксимации ВКФ ортогональными функциями выражения, для определения интервала корреляции, приведены в таблице 1.21. При этом используется модель ВКФ (1.153).

Выражения для определения интервала корреляции

Таблица 1.21

Ортогональный базис	$\tau_{k\ xy}^{(2)}$	$\tau_{k\ xy}^{(4)}$
Лагерра	$2 \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k}{\alpha_n} + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k}{\alpha_l} \right]$	$\left[\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n}^2 + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l}^2 \right]$
Лежандра	$\left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{1}{(2k+1)\alpha_n} + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{1}{(2k+1)\alpha_l} \right]$	$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{b_{k,n}^2}{(2k+1)} + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \frac{b_{k,l}^2}{(2k+1)} \right]$
Дирихле	$\left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha_n} + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha_l} \right]$	$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{b_{k,n}^2}{(k+1)} + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \frac{b_{k,l}^2}{(k+1)} \right]$

1.11. Аппроксимация спектральной плотности мощности функциями заданного вида

Спектральные функции представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [3]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.162)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.163)$$

С учетом четности функций $K_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$, воспользовавшись формулой Эйлера, выражения (1.162), (1.163) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau; \quad (1.164)$$

$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos\omega\tau d\omega. \quad (1.165)$$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.22.

Спектральные плотности мощности

Таблица 1.22

№	Вид модели $K_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
1	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_1 \tau }$	$\sigma_x^2 \frac{\lambda_1}{\pi(\lambda_1^2 + \omega^2)}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$\sigma_x^2 \frac{2\lambda_2^3}{\pi(\lambda_2^2 + \omega^2)^2}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$\sigma_x^2 \frac{2\lambda_3\omega^2}{\pi(\lambda_3^2 + \omega^2)^2}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	$\sigma_x^2 \frac{8\lambda_4^5}{3\pi(\lambda_4^2 + \omega^2)^3}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\sigma_x^2 \frac{\lambda_5}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda_5^2 + (\omega + \omega_{0,5})^2} + \frac{1}{\lambda_5^2 + (\omega - \omega_{0,5})^2} \right)$
6	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau) \right)$	$\sigma_x^2 \frac{2\lambda_6(\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2)}{\pi(\lambda_6^2 + (\omega + \omega_{0,6})^2)(\lambda_6^2 + (\omega - \omega_{0,6})^2)}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$	$\sigma_x^2 \frac{2\lambda_7\omega^2}{\pi(\lambda_7^2 + (\omega + \omega_{0,7})^2)(\lambda_7^2 + (\omega - \omega_{0,7})^2)}$
8	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_8 \tau } (\cos(\omega_{0,8}\tau) + C \sin(\omega_{0,8} \tau))$	$\sigma_x^2 \frac{\lambda_8(\lambda_8^2 + \omega_{0,8}^2 + \omega^2) + C\omega_{0,8}(\lambda_8^2 + \omega_{0,8}^2 - \omega^2)}{\pi(\lambda_8^2 + (\omega + \omega_{0,8})^2)(\lambda_8^2 + (\omega - \omega_{0,8})^2)}$

Заметим, что значение C в 8 модели должно удовлетворять условию:

$$-\frac{\lambda_8}{\omega_{0,8}} \leq C \leq \frac{\lambda_8}{\omega_{0,8}}, \quad (1.166)$$

это связано с тем, что плотность не может быть отрицательной.

В таблице 1.23 показаны спектральные плотности мощности при $\lambda_i = 1$, $\omega_{0,i} = 5$, $C = 0.1$.

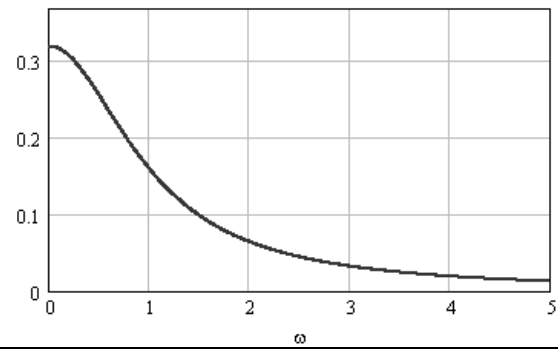
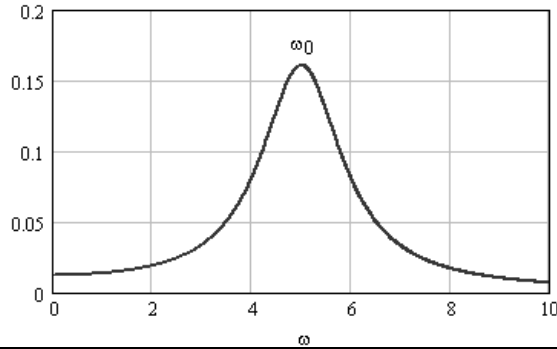
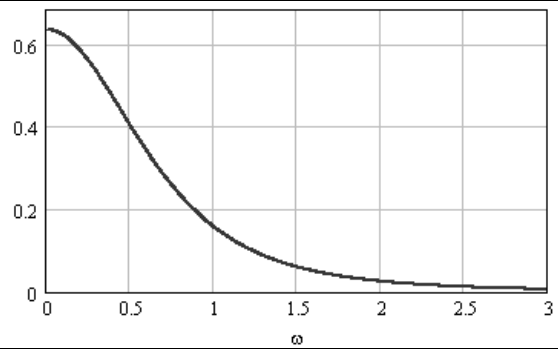
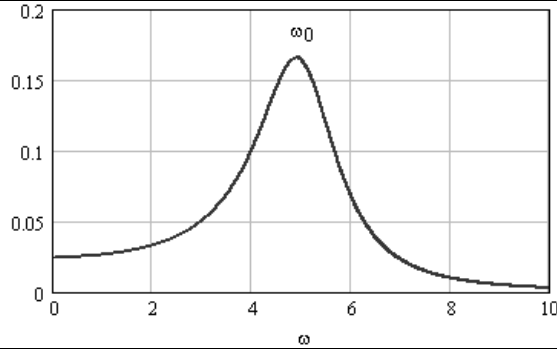
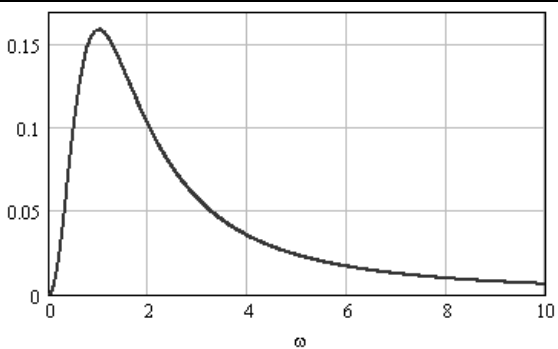
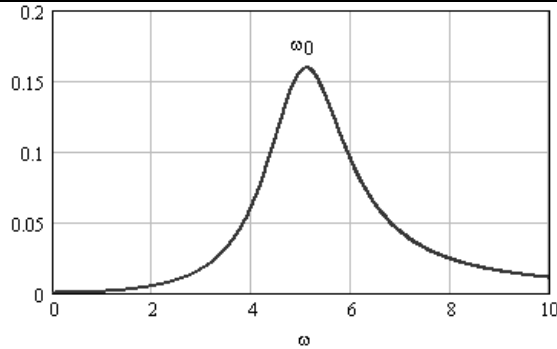
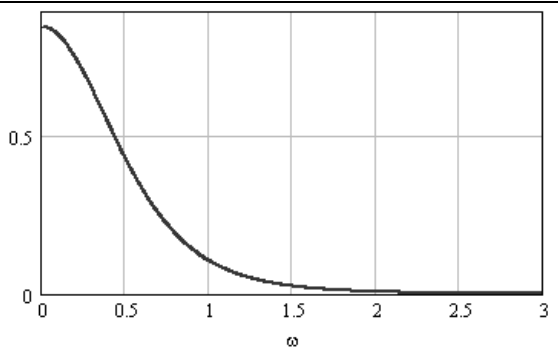
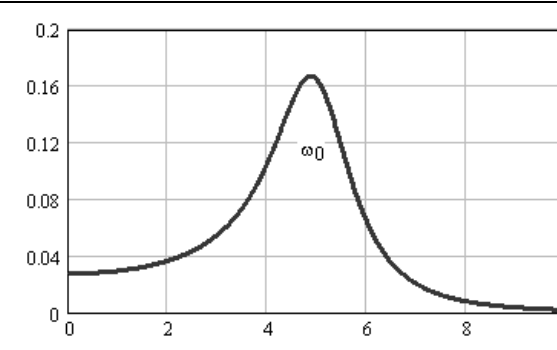
Подставив в выражение (1.165) $\tau = 0$, получим:

$$K_x(0) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega - \quad (1.167)$$

условие нормировки для спектральной плотности мощности.

Вид спектральной плотности мощности

Таблица 1.23

№	$S_x(\omega)$	№	$S_x(\omega)$
1		5	
2		6	
3		7	
4		8	

Подставив в выражение (1.164) $\omega = 0$, получим

$$S_x(0) = \frac{\sigma_x^2 \tau_k^{(2)}}{\pi}. \quad (1.168)$$

При решении некоторых прикладных задач требуется знание аналитического выражения спектральной плотности мощности. Благодаря наличию аналитической связи между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности вопросы их аппроксимации оказываются взаимосвязанными [14].

Запишем квадратическую погрешность аппроксимации спектральной плотности процесса $S_x(\omega)$ функцией заданного вида $S_a(\omega)$:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega) - S_a(\omega)]^2 d\omega. \quad (1.169)$$

Раскрыв квадратные скобки в (1.169), получим:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega - 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) S_a(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_a^2(\omega) d\omega. \quad (1.170)$$

Подставим в (1.170) значения $S_x(\omega)$ и $S_a(\omega)$, полученные из корреляционной функции при помощи преобразования Винера-Хинчина [1]:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \\ S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{cases} \quad (1.171)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Применяя к внутренним интегралам обратное преобразование Винера-Хинчина и учитывая четность корреляционной функции, получим:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau)]^2 d\tau. \quad (1.173)$$

Из выражения (1.173) видно, что задача аппроксимации спектральной плотности мощности функциями заданного вида сводится к задаче аппроксимации корреляционной функции функциями вида:

$$K_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.174)$$

Аналогичным образом, воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, можно определить взаимную спектральную плотность мощности исследуемых процессов:

$$S_{xy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.175)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (1.176)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(j\omega) = \text{Re}S_{xy}(j\omega) - j\text{Im}S_{xy}(j\omega). \quad (1.177)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(j\omega) = \text{Re}S_{xy}(j\omega) + j\text{Im}S_{xy}(j\omega). \quad (1.178)$$

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Представив модель взаимной корреляционной функции в виде

$$K_{axy}(\tau) = K_{ax}(\tau - \tau_m), \quad (1.179)$$

определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ax}(\tau - \tau_m) e^{-j\omega\tau} d\tau = \exp(-j\omega\tau_m) S_x(\omega). \quad (1.180)$$

Воспользовавшись выражением (1.180) и результатами, представленными в таблице 1.22, можно определить аналитические выражения взаимной спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций.

Из выражения (1.180) видно, что

$$\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega) = \cos \omega\tau_m S_x(\omega); \quad (1.181)$$

$$\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) = -\sin \omega\tau_m S_x(\omega). \quad (1.182)$$

Воспользовавшись (1.175), получим:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (1.183)$$

Обозначим

$$S_{axy}^0(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega) - j \operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega). \quad (1.184)$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega) + j \operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega). \quad (1.185)$$

А взаимная спектральная плотность мощности запишется, как:

$$S_{axy}(j\omega) = \operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega) + \operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega) - j(\operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega) - \operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega)). \quad (1.186)$$

Подставив зависимости, приведенные в таблице 1.24, и найденные параметры аппроксимирующих выражений в (1.186), можно определить спектральную плотность мощности.

Преобразование Фурье корреляционных функций

Таблица 1.24

№	Вид модели $K_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$S_{axy}^0(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$	
1	2	3	
1	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_1 \tau }$	$\operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \omega^2}$
		$\operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{\lambda_1^2 + \omega^2}$

1	2	3	
2	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda_2^3}{(\lambda_2^2 + \omega^2)^2}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(3\lambda_2^2 + \omega^2)}{(\lambda_2^2 + \omega^2)^2}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda_3\omega^2}{(\lambda_3^2 + \omega^2)^2}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \lambda_3^2)}{(\lambda_3^2 + \omega^2)^2}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{8\lambda_4^5}{3(\lambda_4^2 + \omega^2)^3}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(15\lambda_4^4 + 10\lambda_4^2\omega^2 + 3\omega^4)}{3(\lambda_4^2 + \omega^2)^3}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_5}{2} \left(\frac{1}{\lambda_5^2 + (\omega + \omega_{0,5})^2} + \frac{1}{\lambda_5^2 + (\omega - \omega_{0,5})^2} \right)$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\omega + \omega_{0,5}}{\lambda_5^2 + (\omega + \omega_{0,5})^2} - \frac{\omega - \omega_{0,5}}{\lambda_5^2 + (\omega - \omega_{0,5})^2} \right)$
6	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau) \right)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda_6(\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2)}{(\lambda_6^2 + (\omega + \omega_{0,6})^2)(\lambda_6^2 + (\omega - \omega_{0,6})^2)}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(3\lambda_6^2 + \omega^2 - \omega_{0,6}^2)}{(\lambda_6^2 + (\omega + \omega_{0,6})^2)(\lambda_6^2 + (\omega - \omega_{0,6})^2)}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda_7\omega^2}{(\lambda_7^2 + (\omega + \omega_{0,7})^2)(\lambda_7^2 + (\omega - \omega_{0,7})^2)}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \omega_{0,7}^2 - \lambda_7^2)}{(\lambda_7^2 + (\omega + \omega_{0,7})^2)(\lambda_7^2 + (\omega - \omega_{0,7})^2)}$

Представим взаимную корреляционную функцию, как

$$K_{axy}^{(m)}(\tau) = A_m K_{axy}(\tau - \tau_m). \quad (1.187)$$

Тогда выражение для взаимной спектральной плотности мощности запишем:

$$S_{axy}(j\omega) = A_m \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{axy}(\tau - \tau_m) e^{-j\omega\tau} d\tau = A_m e^{-j\omega\tau_m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.188)$$

В этом случае вещественная и мнимая части спектральной плотности мощности запишутся в виде

$$\begin{aligned} \text{Re } S_{axy}(j\omega) = A_m & \left[\cos \omega\tau_m (\text{Re } S_{a_n}^0(j\omega) + \text{Re } S_{a_l}^0(j\omega)) - \right. \\ & \left. - \sin \omega\tau_m (\text{Im } S_{a_n}^0(j\omega) - \text{Im } S_{a_l}^0(j\omega)) \right]; \end{aligned} \quad (1.189)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) = & -A_m \left[\sin \omega \tau_m (\operatorname{Re} S_{an}^0(j\omega) + \operatorname{Re} S_{al}^0(j\omega)) + \right. \\ & \left. + \cos \omega \tau_m (\operatorname{Im} S_{an}^0(j\omega) - \operatorname{Im} S_{al}^0(j\omega)) \right], \end{aligned} \quad (1.190)$$

где

$$S_{an}^0(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty K_{an}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad S_{al}^0(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty K_{al}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.191)$$

а $K_{an}(\tau), K_{al}(\tau)$ – аппроксимирующие функции правой и левой ветви.

Так как взаимная спектральная плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = |S_{axy}(\omega)| \exp[j\varphi(\omega)] \quad (1.192)$$

– величина комплексная, при анализе используют графики вещественной и мнимой частей, модуля взаимной спектральной плотности мощности:

$$|S_{axy}(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega))^2 + (\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega))^2} \quad (1.193)$$

и фазы:

$$\varphi_{axy}(\omega) = \operatorname{arctg} \left[-\frac{\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega)}{\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega)} \right]. \quad (1.194)$$

1.12. Аппроксимация спектральной плотности мощности ортогональными функциями

Определив параметры модели корреляционной функции b_0, \dots, b_m, α

$$K_a(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right\}, \quad (1.195)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого, подставив модель (1.195) в выражение для определения спектральной плотности мощности (1.162), получим:

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.196)$$

С учетом определения частотной характеристики ортогональных функций (1.59), получим:

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k [W_k(j\omega) + W_k(-j\omega)]. \quad (1.197)$$

Подставив в выражение (1.197) значения частотных характеристик (см. таблицу 1.10), определим спектральную плотность мощности для различных ортогональных базисов.

Ортогональный базис Лагерра

Подставив в выражение (1.197) значение частотной характеристики ортогонального базиса Лагерра (см. табл. 1.10), получим:

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{1}{\alpha/2 + j\omega} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k + \frac{1}{\alpha/2 - j\omega} \left(\frac{j\omega + \alpha/2}{j\omega - \alpha/2} \right)^k \right]. \quad (1.198)$$

Введем обозначение $tg\varphi = \frac{2\omega}{\alpha}$. Тогда

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{1}{1+jtg\varphi} \left(\frac{jtg\varphi-1}{jtg\varphi+1} \right)^k + \frac{1}{1-jtg\varphi} \left(\frac{jtg\varphi+1}{jtg\varphi-1} \right)^k \right] \quad (1.199)$$

или

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi+j\sin\varphi} \left(\frac{j\sin\varphi-\cos\varphi}{j\sin\varphi+\cos\varphi} \right)^k + \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi-j\sin\varphi} \left(\frac{j\sin\varphi+\cos\varphi}{j\sin\varphi-\cos\varphi} \right)^k \right]. \quad (1.200)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (1.200) приведем к виду:

$$\begin{aligned} S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m \cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{1}{e^{j\varphi}} \left(\frac{-e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi}} \right)^k + \frac{1}{e^{-j\varphi}} \left(\frac{e^{j\varphi}}{-e^{-j\varphi}} \right)^k \right] = \\ &= \frac{A_m \cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k [e^{-(2k+1)\varphi} + e^{(2k+1)\varphi}] = \frac{2A_m \cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos((2k+1)\varphi), \end{aligned} \quad (1.201)$$

где $\varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}$.

Ортогональный базис Лежандра

Подставив в выражение (1.197) значение частотной характеристики ортогонального базиса Лежандра (см. табл. 1.10), получим:

$$\begin{aligned} S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{1}{j\omega + (2k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-j\omega + (2n+1)\alpha}{j\omega + (2n+1)\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{-j\omega + (2k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{j\omega + (2n+1)\alpha}{-j\omega + (2n+1)\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (1.202)$$

Введем обозначение $tg(\varphi_k) = \frac{\omega}{(2k+1)\alpha}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{1}{(2k+1)(1+jtg(\varphi_k))} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{1-jtg(\varphi_n)}{1+jtg(\varphi_n)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2k+1)(1-jtg(\varphi_k))} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{1+jtg(\varphi_n)}{1-jtg(\varphi_n)} \right] \end{aligned} \quad (1.203)$$

или

$$\begin{aligned} S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)(\cos(\varphi_k) + j \cdot \sin(\varphi_k))} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(\varphi_n) - j \cdot \sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n) + j \cdot \sin(\varphi_n)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)(\cos(\varphi_k) - j \cdot \sin(\varphi_k))} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(\varphi_n) + j \cdot \sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n) - j \cdot \sin(\varphi_n)} \right]. \end{aligned} \quad (1.204)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (1.204) приведем к виду:

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)} \left[\frac{1}{e^{j\varphi_k}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-j\varphi_n}}{e^{j\varphi_n}} + \frac{1}{e^{-j\varphi_k}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{e^{j\varphi_n}}{e^{-j\varphi_n}} \right] = \\
 &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)} \left[\exp\left(-j\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)\right) + \exp\left(j\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)\right) \right] = \quad (1.205) \\
 &= \frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)} \cos\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right),
 \end{aligned}$$

где $\varphi_k = \arctg \frac{\omega}{(2k+1)\alpha}$.

Ортогональный базис Дирихле

Подставив в выражение (1.197) значение частотной характеристики ортогонального базиса Дирихле (см. таб. 1.10), получим:

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{1}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{j\omega - (n+1)\alpha}{j\omega + (n+1)\alpha} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{-j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{(-1) \cdot ((n+1)\alpha + j\omega)}{(n+1)\alpha - j\omega} \right]. \quad (1.206)
 \end{aligned}$$

Введем обозначение $tg(\varphi_k) = \frac{\omega}{(k+1)\alpha}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{1}{(k+1)(jtg(\varphi_k) + 1)} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{jtg(\varphi_n) - 1}{jtg(\varphi_n) + 1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(k+1)(-jtg(\varphi_k) + 1)} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-jtg(\varphi_n) - 1}{-jtg(\varphi_n) + 1} \right] \quad (1.207)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[\frac{\cos(\varphi_k)}{(k+1)(\cos(\varphi_k) + j \cdot \sin(\varphi_k))} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-\cos(\varphi_n) + j \cdot \sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n) + j \cdot \sin(\varphi_n)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos(\varphi_k)}{(k+1)(\cos(\varphi_k) - j \cdot \sin(\varphi_k))} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-\cos(\varphi_n) - j \cdot \sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n) - j \cdot \sin(\varphi_n)} \right]. \quad (1.208)
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (1.208) приведем к виду:

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(k+1)} \left[\frac{1}{e^{j\varphi_k}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-e^{-j\varphi_n}}{e^{j\varphi_n}} + \frac{1}{e^{-j\varphi_k}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-e^{j\varphi_n}}{e^{-j\varphi_n}} \right] = \\
 &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k \cos(\varphi_k)}{(k+1)} \left[\exp\left(-j\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \exp\left(j\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)\right) \right] = \quad (1.209)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k \cos(\varphi_k)}{(k+1)} \cos\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right),$$

где $\varphi_k = \arctg \frac{\omega}{(k+1)\alpha}$.

Спектральные плотности мощности для различных ортогональных базисов приведены в таблице 1.25.

Спектральная плотность мощности при аппроксимации ортогональными функциями

Таблица 1.25

Ортогональный базис	$S_{ax}(\omega)$
Лагерра	$\frac{2A_m \cos \varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos((2k+1)\varphi)$
Лежандра	$\frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)} \cos\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)$
Дирихле	$\frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k \cos(\varphi_k)}{(k+1)} \cos\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)$

Представим модель взаимной корреляционной функции в виде:

$$K_{axy}(\tau) = A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) l(\tau - \tau_m) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) l(\tau_m - \tau) \right). \quad (1.210)$$

Определим аналитическое выражение взаимной спектральной плотности мощности для различных ортогональных базисов.

Ортогональный базис Лагерра

С учетом (1.183) и свойств ортогональных функций выражение (1.210) запишется в виде:

$$S_{axy}(j\omega) = A_m \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \exp(-j(2k+1)\varphi_n) + \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \exp(-j(2k+1)\varphi_l) \right], \quad (1.211)$$

где $\varphi_n = \arctg \frac{2\omega}{\alpha_n}$, а $\varphi_l = \arctg \frac{2\omega}{\alpha_l}$.

С учетом (1.211), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\text{Re } S_{axy}(j\omega) = A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \cos((2k+1)\varphi_n) + \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \cos((2k+1)\varphi_l) \right] - \quad (1.212)$$

$$\begin{aligned}
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \sin((2k+1)\varphi_n) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \sin((2k+1)\varphi_l) \right]; \\
\text{Im} S_{a_{xy}}(j\omega) = & A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \sin((2k+1)\varphi_n) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \sin((2k+1)\varphi_l) \right] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \cos((2k+1)\varphi_n) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \cos((2k+1)\varphi_l) \right].
\end{aligned} \tag{1.213}$$

Ортогональный базис Лежандра

С учетом (1.183) и свойств ортогональных функций выражение (1.210) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
S_{a_{xy}}(j\omega) = & A_m \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \exp\left(-j\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right)\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{\cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l} \exp\left(-j\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right)\right) \right],
\end{aligned} \tag{1.214}$$

где $\varphi_n = \arctg \frac{\omega}{(2k+1)\alpha_n}$, а $\varphi_l = \arctg \frac{\omega}{(2k+1)\alpha_l}$.

С учетом (1.214), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\begin{aligned}
\text{Re} S_{a_{xy}}(j\omega) = & A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \cos\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{\cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l} \cos\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{\cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l} \sin\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right];
\end{aligned} \tag{1.215}$$

$$\text{Im} S_{a_{xy}}(j\omega) = A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) - \right. \tag{1.216}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^{m_2} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) \Big] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \cos\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{\cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l} \cos\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right].
\end{aligned}$$

Ортогональный базис Дирихле

С учетом (1.183) и свойств ортогональных функций выражение (1.210) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
S_{a,xy}(j\omega) = A_m \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} & \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \exp\left(-j\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right)\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \exp\left(-j\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right)\right) \right], \quad (1.217)
\end{aligned}$$

где $\varphi_n = \arctg \frac{\omega}{(k+1)\alpha_n}$, а $\varphi_l = \arctg \frac{\omega}{(k+1)\alpha_l}$.

С учетом (1.217), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} S_{a,xy}(j\omega) = A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} & \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \cos\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \cos\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) - \right. \\
& \left. - \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \sin\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right]; \quad (1.218)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} S_{a,xy}(j\omega) = A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} & \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) - \right. \\
& \left. - \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \sin\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \cos\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \cos\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right]. \quad (1.219)
\end{aligned}$$

Обобщенные зависимости для определения взаимной спектральной плотности мощности, ее действительной и мнимой части приведены ниже.

Аналитическое выражение взаимной спектральной плотности мощности:

$$S_{a.xy}(j\omega) = Am \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot e^{-j\phi_{k,n}} + \sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot e^{j\phi_{k,l}} \right]. \quad (1.220)$$

Действительная часть взаимной спектральной плотности мощности:

$$\begin{aligned} \text{Re } S_{a.xy}(j\omega) = Am \left[\frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot \cos(\phi_{k,n}) + \sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot \cos(\phi_{k,l}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot \sin(\phi_{k,l}) - \sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot \sin(\phi_{k,n}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.221)$$

Мнимая часть взаимной спектральной плотности мощности:

$$\begin{aligned} \text{Im } S_{a.xy}(j\omega) = Am \left[\frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot \sin(\phi_{k,l}) - \sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot \sin(\phi_{k,n}) \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot \cos(\phi_{k,n}) + \sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot \cos(\phi_{k,l}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.222)$$

Значения $A_{k,n}$, $\phi_{k,n}$, $A_{k,l}$, $\phi_{k,l}$ сведены в таблицу 1.26.

Таблица 1.26

Ортогональный базис	Ветвь	
	правая	левая
Лагерра	$A_{k,n} = \frac{2b_{k,n} \cos(\varphi_n)(-1)^k}{\alpha_n};$ $\phi_{k,n} = \varphi_n (2k+1);$ $\varphi_n = \text{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_n}$	$A_{k,l} = \frac{2b_{k,l} \cos(\varphi_l)(-1)^k}{\alpha_l};$ $\phi_{k,l} = \varphi_l (2k+1);$ $\varphi_l = \text{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_l}$
Лежандра	$A_{k,n} = \frac{b_{k,n} \cdot \cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n};$ $\phi_{k,n} = \varphi_{k,n} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n};$ $\varphi_{k,n} = \text{arctg} \frac{\omega}{(2k+1)\alpha_n}$	$A_{k,l} = \frac{b_{k,l} \cdot \cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l};$ $\phi_{k,l} = \varphi_{k,l} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l};$ $\varphi_{k,l} = \text{arctg} \frac{\omega}{(2k+1)\alpha_l}$
Дирихле	$A_{k,n} = \frac{b_{k,n} \cdot \cos(\varphi_{k,n}) \cdot (-1)^k}{(k+1)\alpha_n};$ $\phi_{k,n} = \varphi_{k,n} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n};$ $\varphi_{k,n} = \text{arctg} \frac{\omega}{(k+1)\alpha_n}$	$A_{k,l} = \frac{b_{k,l} \cdot \cos(\varphi_{k,l}) \cdot (-1)^k}{(k+1)\alpha_l};$ $\phi_{k,l} = \varphi_{k,l} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l};$ $\varphi_{k,l} = \text{arctg} \frac{\omega}{(k+1)\alpha_l}$

2. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ КОМПЛЕКС АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

2.1. Назначение, основные функции и требования

Автоматизированный комплекс аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов предназначен для определения взаимных корреляционных функций (ВКФ), аппроксимации полученных ВКФ ортогональными функциями Лежандра, Лагерра, Дирихле, определения по полученным оценкам ВКФ спектральных характеристик [14]. Следует отметить, что параметры ортогональных разложений ВКФ определяются как в автоматизированном режиме, так и в режиме ручной настройки, что позволяет более гибко использовать автоматизированную систему при обработке экспериментальных данных и результатов моделирования.

Кроме этого, комплекс позволяет регистрировать и формировать аналоговые сигналы с помощью встроенной в персональный компьютер звуковой карты и подключаемого через интерфейс ISA многофункционального устройства сопряжения с ЭВМ – НВЛ-08 [12]. Аналоговый сигнал, получаемый в результате исследований, принимается на входе системы, проходит аналого-цифровое преобразование и подвергается аппроксимативному корреляционно-спектральному анализу.

Для решения учебных задач, а также исследования алгоритмов определения взаимных корреляционных функций предусмотрена возможность генерации коррелированных псевдослучайных последовательностей (ПП) с последующей обработкой.

Моделирование двух процессов с заданной ВКФ происходит с помощью системы фильтров, путем преобразования первичного сигнала, например, «белого шума». Фильтры реализуются в виде элементов-модулей, частотные характеристики которых известны. Подобный подход применен в автоматизированном комплексе корреляционно-спектрального анализа, описанном в [12]. Множество элементов-модулей, доступных для проектирования сети, ограничено, но предусмотрена возможность добавления новых.

Следует отметить, что исследование новых (разрабатываемых) алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методами имитационного моделирования, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Часто при решении задач имитационного моделирования средств измерений, алгоритмов статистической обработки информации, их метрологическом анализе возникает необходимость в формировании процессов с заданным видом корреляционной функции. При этом не обращают внимания на закон распределения процесса. Теоретически эта задача решается методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [12] (см. рис. 2.1).

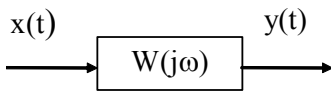


Рисунок 2.1

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (2.1)$$

где $S_x(\omega)$ – спектральная плотность мощности входного сигнала;

$|W(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $|W(j\omega)|^2$ – чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega)\varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega). \end{cases} \quad (2.2)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (2.3)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра $W(j\omega)$ во многом будет определяться видом $S_x(\omega)$. При использовании в качестве входного сигнала «белого шума» с $S_x(\omega) = S_0$, получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (2.4)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра:

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.5)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$Y(j) = \Delta\tau \sum_{i=0}^{N1} x(j-i)h(i), \quad (2.6)$$

где $N1$ – число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$ – интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h(i) = h(i\Delta\tau)$ – значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Этот способ преобразования является основой для цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой – КИХ фильтров.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, допустимой относительной погрешности вы-

числения корреляционной функции δ и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Как правило, интервалы дискретизации временных рядов выбираются равными интервалам дискретизации корреляционных функций. Интервалы дискретизации и минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции при линейной интерполяции и различных погрешностях представлены в таблице 2.1 [14]. Интервалы дискретизации выбираются из учета применения линейной интерполяции КФ [13 стр. 84]. Количество ординат определяется из условия $|\rho(\tau \geq \tau_{k \max})| \leq \Delta$, при этом $J_{\max} = \frac{\tau_{k \max}}{\Delta \tau}$.

Интервалы дискретизации и минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции

Таблица 2.1

Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\Delta \tau$	J_{\max}			
		$\delta=0.02$	$\delta=0.05$	$\delta=0.1$	$\delta=0.2$
$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\frac{\sqrt{8 \cdot \delta}}{\lambda_1}$	9	6	4	3
$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau)$	$\frac{\sqrt{8 \cdot \delta}}{\lambda_2}$	13	9	7	5
$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau)$	$\frac{\sqrt{8 \cdot \frac{\delta}{3}}}{\lambda_3}$	19	13	10	7
$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{24 \cdot \delta}}{\lambda_4}$	10	7	5	4
$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\frac{1}{\lambda_5} \cdot \frac{\sqrt{8 \cdot \delta}}{\sqrt{ \mu_5^2 - 1 }}$	$47 \cdot \frac{\mu}{2\pi}$	$30 \cdot \frac{\mu}{2\pi}$	$21 \cdot \frac{\mu}{2\pi}$	$15 \cdot \frac{\mu}{2\pi}$
$e^{-\lambda_6 \tau }\left(\cos(\omega_{0,6}\tau) \pm \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau)\right)$	$\frac{1}{\lambda_6} \cdot \frac{\sqrt{8 \cdot \delta}}{\sqrt{ \mu_6^2 + 1 }}$				

Примечание: $\mu_i = \frac{\omega_{0,i}}{\lambda_i}$ – показатель колебательности.

Более быстродействующий алгоритм моделирования случайных процессов связан с использованием рекурсивной фильтрации (цифровые фильтры с бесконечной импульсной характеристикой – БИХ фильтры)

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i} \quad (2.7)$$

Параметры a_i и b_i для фильтров, используемых в системе, определяются в соответствии с приложением 2.

Для анализа системы использован алгоритм передачи возбуждения по объектам семантической сети. Возбуждение передается от модуля анализа, назад до модулей генерации. В случае, если данные в модуле генерации уже созданы, а этот модуль был возбужден, повторная генерация не производится. Та-

ким образом, данные, полученные на выходе модуля, используются для всех присоединенных к нему элементов-модулей. Если вычисление сети прошло неудачно, и в системе были обнаружены ошибки, пользователю выдается соответствующее сообщение.

Разработанные алгоритмы аппроксимативного взаимного корреляционно-спектрального анализа реализованы в автоматизированной системе, реализующей функции, приведенные на рисунке 2.2.

Система содержит четыре подсистемы:

- моделирования коррелированных случайных процессов;
- аппроксимативного анализа взаимных корреляционных функций;
- аппроксимативного анализа взаимных спектральных плотностей мощности;
- ведение базы данных.

Для простоты работы с системой и предоставления возможности накопления результатов исследования, в комплексе используются накопители (файл, база данных).

Использование базы данных позволяет облегчить определение методических погрешностей методом имитационного моделирования, предоставляет возможность накопления информации об алгоритмах аппроксимации, упрощения идентификации взаимных корреляционных функций.

Аппаратные и программные требования к системе

Для нормального функционирования автоматизированной системы необходимо, чтобы Ваш компьютер соответствовал перечисленным ниже требованиям.

Общие требования:

- 50 МБ свободного места на жестком диске;
- CD-ROM-устройство, дисковод 3.5" или Flash Disk (для установки автоматизированного комплекса с носителя);
- графический адаптер и дисплей SVGA (800x600) и 256 цветов;
- установленная СУБД Microsoft SQL Server 2000 (для работы с БД);
- звуковая плата (необходима для использования одноименного элемента-модуля семантической сети);
- мышь или аналогичное устройство.

Windows 98:

- процессор Intel Pentium® 133 МГц или выше;
- 32 МБ оперативной памяти.

Windows ME:

- процессор Intel Pentium® 150 МГц или выше;
- 32 МБ оперативной памяти.

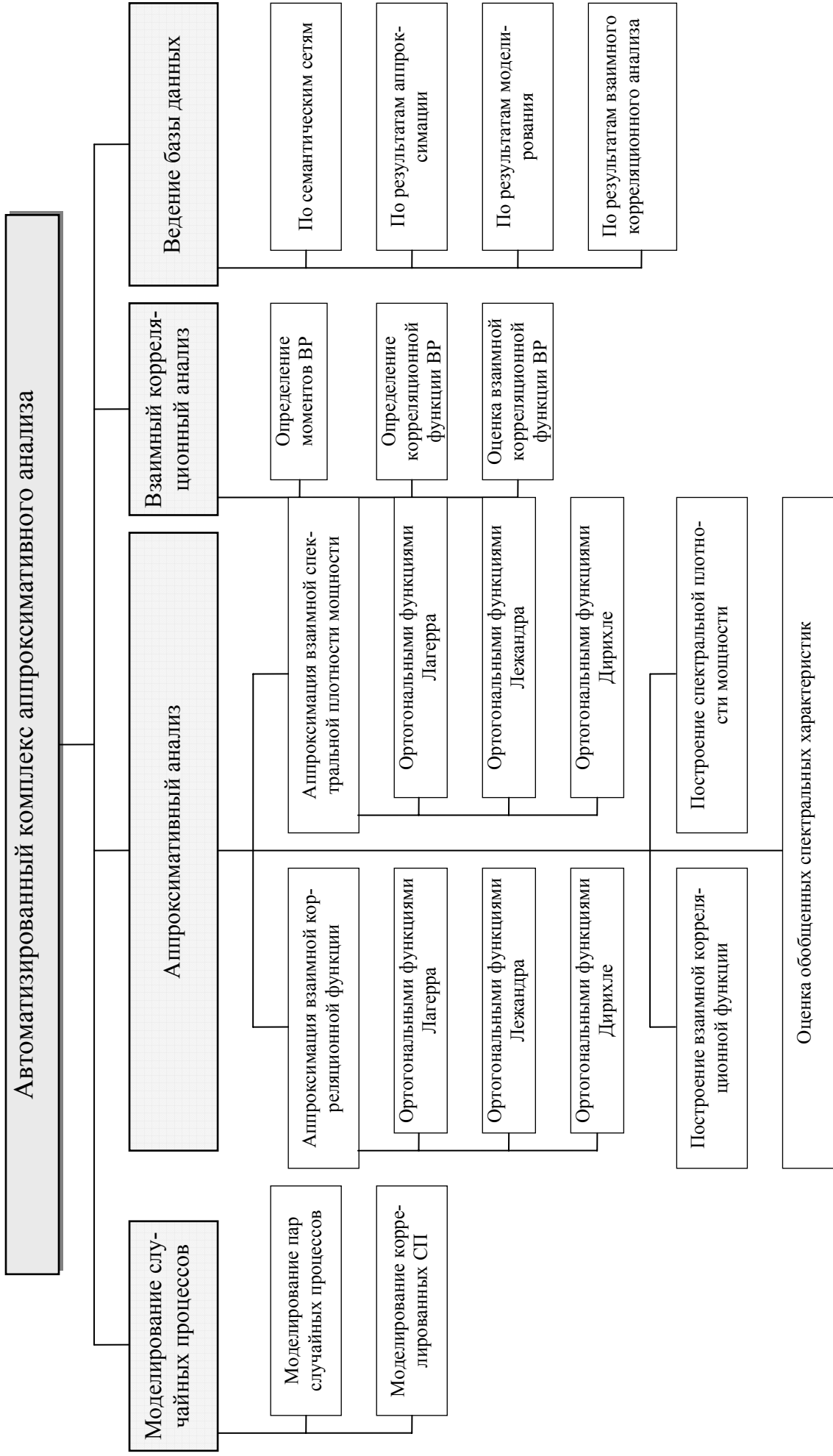


Рисунок 2.2. Функции автоматизированного комплекса анализа временных рядов

Windows NT Workstation 4.0 (Service Pack 6a):

- процессор Intel Pentium® 133 МГц или выше;
- 32 МБ оперативной памяти.

Windows 2000 Professional (Service Pack 2 или выше):

- процессор Intel Pentium® 133 МГц или выше;
- 64 МБ оперативной памяти.

Windows XP Home Edition или XP Professional (Service Pack 1 или выше):

- процессор Intel Pentium® 300 МГц или выше;
- 128 МБ оперативной памяти.

Требования приведены для случая нормального функционирования операционной системы, а также утилит и сервисов, используемых комплексом.

Установка автоматизированного комплекса на компьютер

Чтобы установить автоматизированный комплекс на Ваш компьютер, запустите файл *setup.exe*, расположенный на электронном носителе.

Программа установки работает в диалоговом режиме. Каждое окно содержит набор кнопок для управления процессом установки. Кратко поясним их назначение:

- **Далее >** – принять действие и перейти к следующему шагу процедуры установки;
- **< Назад** – вернуться на предыдущий шаг установки;
- **Отмена** – отказаться от установки продукта;
- **Завершить** – завершить процедуру установки комплекса на компьютер.

Рассмотрим подробно каждый шаг процедуры установки пакета.

Шаг 1. Проверка версии установленной операционной системы

Прежде чем приступить к установке программы, выполняется проверка соответствия установленной операционной системы и Service Pack требованиям, предъявляемым автоматизированным комплексом.

В случае, если какой-либо из требуемых Service Pack для операционной системы не установлен, на экран будет выведено соответствующее сообщение. Для дальнейшей работы необходимо установить Service Pack посредством сервиса **Windows Update**, после чего повторить установку программного комплекса.

Шаг 2. Выбор директории установки

Следующий этап установки автоматизированного комплекса определяет директорию на вашем компьютере, в которую будет установлен продукт. По умолчанию задан путь: «**C:\ProgramFiles\Кафедра ИСТ\Аппроксимативный анализ**».

Чтобы изменить путь, нажмите на кнопку «**Обзор...**» (см. рис. 2.3), в стандартном окне выбора укажите директорию установки продукта и нажмите на кнопку «**Далее >**». После этого будет запущена процедура копирования файлов программного комплекса на Ваш компьютер.

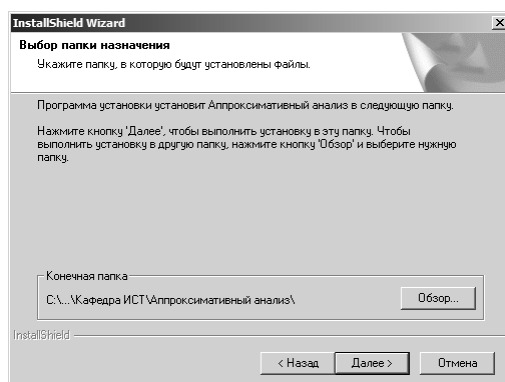


Рисунок 2.3. Выбор директории установки

Шаг 3. Выбор директории программ

На данном этапе установки определяется директория программ, в которую будет установлен комплекс (см. рис. 2.4). По умолчанию выбрана директория: «**Аппроксимативный анализ**» основного меню «**ПУСК**».

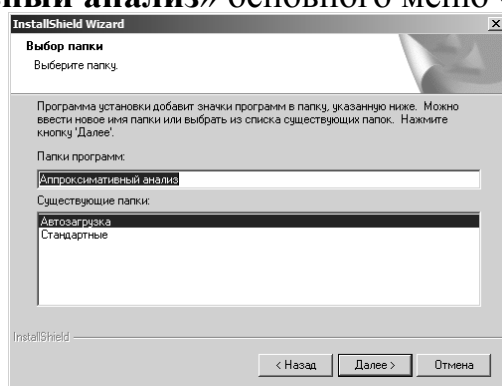


Рисунок 2.4. Выбор директории программ

Для продолжения установки нажмите на кнопку «**Далее**>».

Шаг 4. Завершение процедуры установки

Окно «**Завершение установки**» содержит информацию об окончании процесса установки программного комплекса на Ваш компьютер (см. рис. 2.5).

Если для завершения установки программы требуется регистрация ряда сервисов в системе, Вам будет предложено перезагрузить компьютер. Это **НЕОБХОДИМО** для корректного завершения установки продукта.

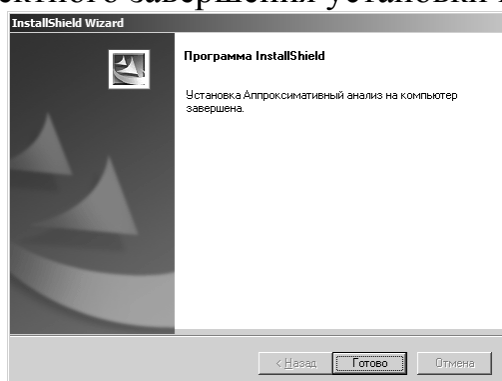


Рисунок 2.5. Окно завершения процедуры установки

Если же перезагрузки компьютера для завершения установки не требуется, чтобы закончить установку программы, нажмите на кнопку «**Готово**».

После завершения установки, в заданной директории программ, должен появиться каталог «**Анализ сигналов**» (см. рис. 2.6).

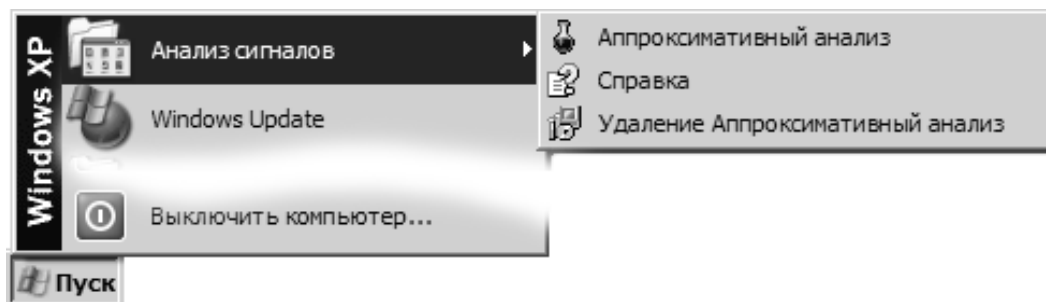


Рисунок 2.6. Директория программ ПУСК

В директории «Анализ сигналов» создается три элемента:

- «Аппроксимативный анализ» – используется для запуска автоматизированного комплекса;
- «Справка» – позволяет вызвать окно справочной системы;
- «Удаление Аппроксимативный анализ» – используется для деинсталляции автоматизированного комплекса из операционной системы.

2.2. Интерфейс пользователя

Автоматизированный комплекс аппроксимативного анализа обладает достаточно простым и удобным в работе интерфейсом. В данной главе рассматриваются основные его элементы: главное окно программы и некоторые сервисные окна, меню пользователя, строка статуса, справочная система. Также приводится описание структуры элементов-модулей автоматизированного комплекса, освещаются правила их использования.

Главное окно программы: общая структура

Главное окно программы состоит из областей: *Меню пользователя*, *Редактирование семантической сети*, *Параметры*, *Воздействия и Реакция*, *Накопители и информация об ошибках*, *Строка статуса*. Расположение областей в окне программы показано на рисунке 2.7.

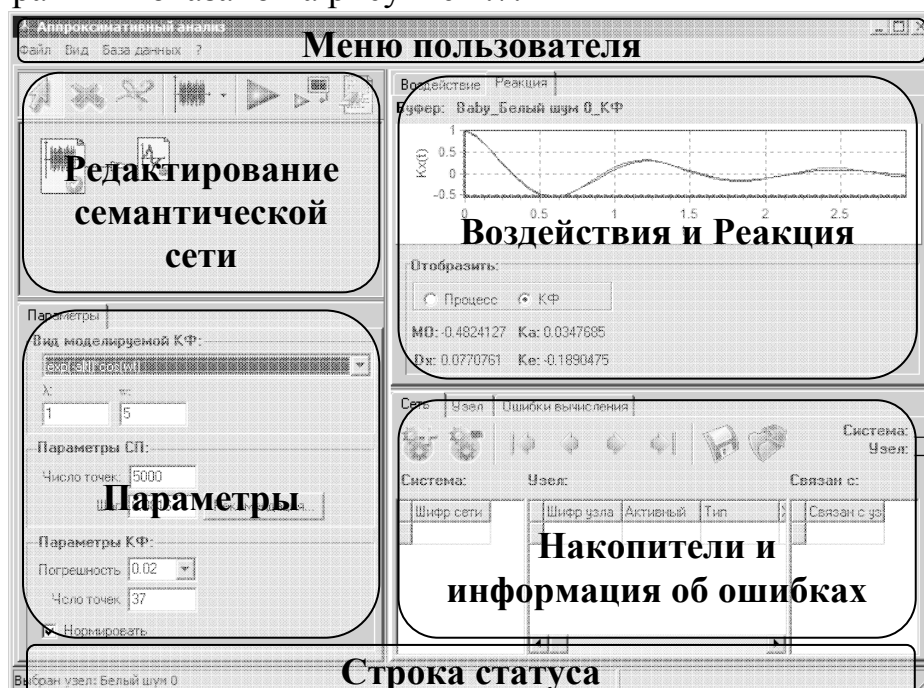


Рисунок 2.7. Главное окно программы

Перечисленные области главного окна программы рассматриваются далее.

2.2.1. Область *Редактирование семантической сети*

Область «**Редактирование семантической сети**» располагается в верхнем левом углу окна. Здесь возможно редактирование сети: перемещение узлов, добавление новых, их связывание и удаление.

Для редактирования сети используется панель инструментов, которая находится непосредственно над областью редактирования.

Элементы панели инструментов:



«Переместить» – переместить элемент-модуль сети.



«Удалить» – Удалить элемент-модуль сети.



«Связать» – Установить связи между двумя элементами-модулями.



«Добавить» – Добавить в семантическую сеть новый элемент-модуль. Тип модуля выбирается нажатием кнопки со стрелкой, расположенной справа. Символьное обозначение выбранного модуля указано на кнопке.






«Вычислить сеть» – Произвести вычисления во всех элементах семантической сети.



«Вычислить узел» – Произвести вычисления в выделенном элементе сети.



«Очистить сеть» – Очистить результаты предыдущих вычислений семантической сети.

Для выбора инструмента необходимо нажать на нем клавишей мыши и произвести соответствующие действия в области редактирования. По окончании редактирования сети, ее можно вычислить полностью , или произвести вычисления в только в выделенном элементе-модуле  (см. рис. 2.8). Также предусмотрена возможность очистки результатов предыдущих вычислений сети .

Панель инструментов

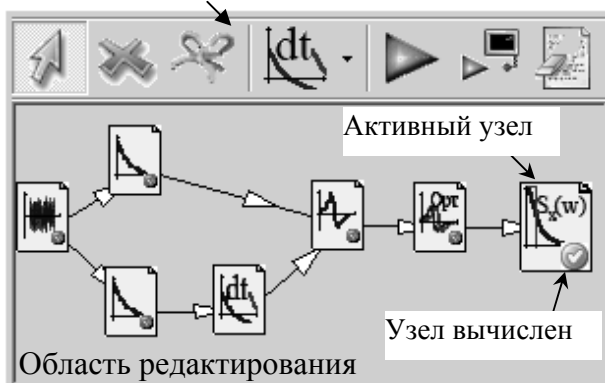



Рис. 2.8. Пример семантической сети, панель инструментов

Имеются правила отображения элементов-модулей сети, позволяющие определить состояние того или иного узла. Каждому узлу, доступному в системе, соответствует пиктограмма, которая отображается в стилизованной








рамке. Если узел вычислен, то в правом нижнем углу отображается галочка , сигнализирующая о достоверности вычисленных данных. Изображение активного узла (узла, чьи свойства: «Параметры», «Воздействие»,

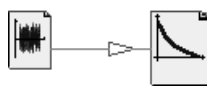
«Реакция» доступны для редактирования) выделяется на фоне остальных узлов сети размером.

Дуги, связывающие узлы, отображаются в виде прямых линий со стрелкой. Стрелка указывает направление передачи данных от одного узла к другому.

Пример:

Синтезировать систему для вычисления спектральной плотности мощности, изображенную на рисунке 2.8.

- 1) Выбрать тип добавляемого элемента-модуля «Источник СП» .
- 2) Выделить инструмент «Добавить» .
- 3) Щелкнуть левой кнопкой мыши в области редактирования. В семантическую сеть добавится новый элемент-модуль, а в области редактирования появится соответствующая ему пиктограмма . Вновь добавленный модуль становится активным, и в областях «Параметры», «Воздействие» и «Реакция» отображаются его характеристики.
- 4) Выбрать тип добавляемого элемента-модуля «Фильтр» .
- 5) Выделить инструмент «Добавить» .
- 6) Щелкнуть левой кнопкой мыши над областью редактирования. В семантическую сеть добавится элемент-модуль «Фильтр», а в области редактирования появится соответствующая ему пиктограмма .
- 7) Выделить инструмент «Связать» .
- 8) Щелкнуть левой кнопки мыши на элементе-источнике информации, передаваемой по линии создаваемой связи, затем – на приемнике.



В результате, при компиляции семантической сети приемник будет использовать данные, поступающие от источника.

- 9) Дальнейший синтез сети производят по аналогии.

После того как создана сеть, она может быть вычислена нажатием кнопки

▶. Для анализа и вычисления системы использован алгоритм передачи возбуждения по объектам семантической сети. В созданной семантической сети наименования семантических групп совпадают с наименованием классов функциональных модулей. Возбуждение передается от модулей анализа назад до модулей генерации. В случае, если процесс в модуле генерации уже создан, а этот модуль был возбужден, повторная генерация не производится. Таким образом, данные, полученные на выходе модуля, передаются во все присоединенные к нему модули.

Сеть		Узел	Ошибки вычисления
Система: Сеть8985 Узел: Белый шум			
№	Тип ошибки		
1	Действия узла 'ВКФ 4' выполнены с ошибкой.		
2	Действия узла 'Орт_Алпр 5' выполнены с ошибкой.		
3	Действия узла 'Спектр 7' выполнены с ошибкой.		

Рис. 2.9. Вкладка «Ошибки вычисления»

▶. Для анализа и вычисления системы использован алгоритм передачи возбуждения по объектам семантической сети. В созданной семантической сети наименования семантических групп совпадают с наименованием классов функциональных модулей. Возбуждение передается от модулей анализа назад до модулей генерации. В случае, если процесс в модуле генерации уже создан, а этот модуль был возбужден, повторная генерация не производится. Таким образом, данные, полученные на выходе модуля, передаются во все присоединенные к нему модули.

Если компиляция прошла неудачно, и в системе были обнаружены ошибки, пользователю выдаются соответствующие сообщения. Ошибки, возникшие

в результате вычисления сети, отображаются на вкладке «Ошибки вычисления» (см. рис. 2.9). Все сообщения сводятся в таблицу, при этом указывается узел, в котором произошел сбой.

2.2.2. Область *Параметры*

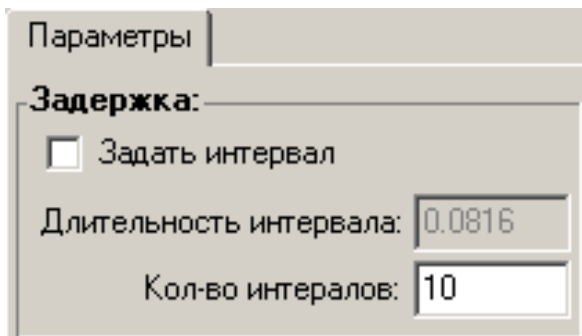


Рис. 2.10. Вкладка «Параметры» узла «Линия задержки»

На панели «Параметры» (см. рис. 2.10) изображены параметры узла, доступные пользователю для настройки. Из рисунка видно, что для данного узла возможно задание длительности интервала дискретизации и количества интервалов в реализуемой задержке. Если флаг «Задать интервал» не выбран, длительность интервала будет равна шагу дискретизации исходного СП, поступающего от узла-источника (узла, связанного дугой).

2.2.3. Область *Воздействие*

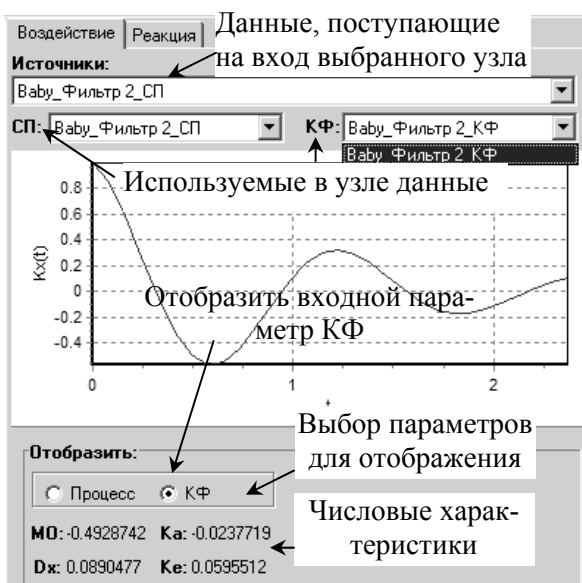


Рис. 2.11. Вкладка «Воздействие» узла «Линия задержки»

Как упоминалось выше, каждый узел семантической сети имеет три набора свойств: «Параметры», «Воздействие», «Реакция». Для отображения этих множеств в системе предусмотрено три вкладки с одноименными названиями. Вкладка «Параметры» располагается под областью редактирования семантической сети, вкладки «Воздействие», «Реакция» в правом верхнем углу. Для примера рассмотрим структуру вкладок для узла «Линия задержки».

Чтобы определить исходные данные элемента-модуля, поступающие от других модулей, необходимо перейти на вкладку «Воздействие» (см. рис. 2.11). Структура вкладки одинакова для всех узлов. В верхней ее части отображается всплывающий список «Источники», где указываются все исходные данные, поступающие на вход узла. Данные, используемые в узле для вычислений, также отображаются во всплывающих списках, но в них указываются только данные, подходящие по типу для выбранного параметра узла. В нашем случае это параметры «СП» и «КФ». Также на вкладке располагаются элементы, задающие режим отображения входных

данных и области для их отображения. В случае линии задержки – график для отображения СП или КФ и элемент выбора отображаемых данных, а также поля для отображения числовых характеристик процесса.

2.2.4. Область *Реакция*

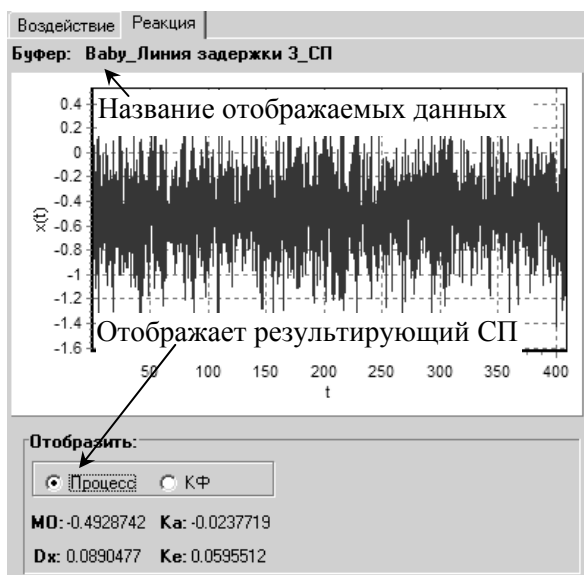


Рис. 2.12. Вкладка «Реакция» узла «Линия задержки»

По окончании вычислений в узле формируется результат. Результат отображается на вкладке «Реакция», которая содержит элементы для отображения данных и их выбора. В нашем случае на панели «Реакция» отображается исходный СП (или его КФ), задержанный на заданное количество интервалов времени (см. рис. 2.12).

При моделировании сети необходимо помнить, что в модуле используются те данные, которые выбраны во всплывающем списке исходных данных (см. предыдущий раздел). Для нашего примера в качестве исходных данных СП используется «Baby_Фильтр 2_СП», КФ – «Baby_Фильтр 2_КФ». Это данные,

сформированные в узле «Фильтр 2» и переданные по дуге в узел «Линия задержки 3». В результате вычисления в элементе-модуле «Линия задержки 3» были сформированы буферы для СП – «Baby_Линия задержки 3_СП» и для КФ – «Baby_Линия задержки 3_КФ», содержащие результат вычислений в узле. Названия результатов отображаются в верхней части вкладки «Реакция».

2.2.5 Область *Накопители и информация об ошибках*

Область состоит из трех закладок «Система», «Модуль», «Ошибки вычисления».

Закладка «Ошибки вычисления» была описана в разделе *Редактирование семантической сети*.

Закладка «Система»

Закладка «Система» предназначена для отображения информации о семантических сетях, содержащихся в БД (см. рис. 2.13). Здесь приводится таблица хранящихся в БД систем (таблица «Система»), узлов, входящих в выделенную сеть (выделенная сеть помечается треугольником в левой части таблицы «Система»), а также в таблице «Связан с» указываются модули, с которыми связан активный модуль (модуль, выделенный в таблице «Модуль»).



Рисунок 2.13. Закладка «Система»

Шифр сети, указанный в таблице «Система», формируется по правилам: в начале указывается слово «Сеть_», далее следует порядковый номер месяца в текущем году «№месяца_» и день, завершает символьное название сети время ее создания. Выбор активной сети осуществляется стрелками перемещения курсора или нажатием левой клавиши мыши.

В таблице «Узел» указываются все узлы, содержащиеся в выделенной сети. Информация в таблице обновляется каждый раз, когда выбирается новая сеть. Помимо шифра узла указывается его тип и координаты. Наименования узлов, связанных с выделенным в таблице «Узел», отображаются в таблице «Связан с».

В правом верхнем углу закладки дублируется информация о выделенной в данный момент сети и узле.

Для взаимодействия с БД на закладке расположена панель инструментов, описание ее элементов приводится ниже.



Создать новую семантическую сеть и добавить ее в БД.



Удалить из БД выделенную в таблице «Система» семантическую сеть.



Выделить семантическую сеть, расположенную в начале таблицы «Система».



Выделить следующую семантическую сеть таблицы «Система».



Выделить предыдущую семантическую сеть таблицы «Система».



Выделить семантическую сеть, расположенную в конце таблицы «Система».



Сохранить выделенную семантическую сеть в файл.



Открыть сохраненную ранее семантическую сеть.

Закладка «Модуль»

Закладка «Модуль» предназначена для работы с накопителями (файл, БД), здесь указывается буфер данных активного узла сети (буфер, с которым









производятся манипуляции), его тип и соответствующие этому типу данные, сохраненные ранее в БД (см. рис. 2.14).



Рисунок 2.14. Закладка «Модуль»

Тип буфера данных, с которым производятся действия, указывается в элементе выбора, при этом задается один из вариантов: «Параметры», «Воздействие», «Реакция». При указании типа во всплывающем списке «Буферы данных» указываются имена буферов данных, доступных в активном узле, и отвечающие требованиям типа данных. Содержимое выбранного во всплывающем меню буфера данных будет сохраняться в накопитель или заполняться содержимым накопителя в зависимости от выбранной в панели инструментов команды.

Перечислим команды панели инструментов, расположенной на закладке «Модуль».

-  Выделить буфер данных, расположенный в начале таблицы БД.
-  Выделить следующий буфер данных.
-  Выделить предыдущий буфер данных.
-  Выделить буфер данных, расположенный в конце таблицы «Система».
-  Сохранить выделенный буфер данных в БД.
-  Открыть сохраненный ранее буфер БД.
-  Сохранить выделенный буфер данных в файл.
-  Открыть сохраненный ранее буфер данных.

Примечание: Для удаления информации из БД необходимо выбрать удаляемую строку и нажать клавишу **Ctrl+Del**.

Между узлами семантической сети информация передается в виде буферов данных. **Буфер данных** – это объект, содержащий результаты вычислений, произведенных в узле.

При формировании имен буферов данных в комплексе используются следующие соглашения: имя буфера данных состоит из идентификатора системы «Baby_», после которого указывается имя узла (например «Фильтр 2_»), затем указывается тип данных, отражающий его содержимое.

В автоматизированном комплексе предусмотрены следующие типы данных:

СП – случайный процесс;

КФ – корреляционная функция;

ВКФ – взаимная корреляционная функция;

betta – коэффициенты ряда Фурье, вычисленные в результате аппроксимации взаимной корреляционной функции [13];

b – коэффициенты ряда Фурье, вычисленные в результате аппроксимации при ограничении на модель корреляционной функции $K_x(0) = Dx$;

Примечание:

Для типов **betta** и **b** дополнительно указывается ветвь, к которой они относятся (**_ЛВ** – левая ветвь, **_ПВ** – правая ветвь).

Sxy – спектральная плотность мощности;

SxyRe – действительная часть спектральной плотности мощности;

SxyIm – мнимая часть спектральной плотности мощности;

SxyPh – фаза спектральной плотности мощности;





SxyMo – модуль спектральной плотности мощности.

Пример:

Если в списке источников узла «ВКФ 4» указан буфер данных с названием «Baby_Белый шум 0_СП», это говорит о том, что на вход узла «ВКФ 4» поступает СП, сформированный в узле семантической сети с названием «Белый шум 0».



Рис. 2.15. Окно «Взаимодействие с накопителями»

После того, как получены результаты вычисления системы, их можно сохранить в накопитель. Накопителями могут служить файл и база данных. С целью унификации механизма работы с накопителем в программном комплексе используется диалоговое окно «Взаимодействие с накопителем» (см. рис. 2.15). Оно вызывается на вкладке «Узел» и содержит для работы все блоки данных активного узла, доступные для работы с накопителем. Для занесения данных в файл используется кнопка  для чтения – . Для чтения и записи в базу данных (БД) используются  и  соответственно. Окно взаимодействия с накопителями состоит из трех вкладок, по числу типов данных. На первой вкладке отображаются параметры, на второй – воздействия, на третьей –

98

реакции. На вкладках отображаются данные активного в настоящий момент узла. Каждому блоку данных соответствует область, состоящая из элемента выбора с указанием типа данных и указанного в скобках названия. Если элемент выбран, буфер сохраняется в накопителе. Далее указывается тип накопителя «БД» или «Файл». На рисунке 2.15 СП с названием «Baby_Белый шум 0_СП» настроен на запись в файл «Белый шум 0_PR.txt», а КФ с названием «Baby_Белый шум 0_КФ» – на запись в БД.

Использование базы данных для хранения результатов обработки

Современные методы описания процессов в информационных системах разнообразны и требуют различного смыслового содержания и представления для применения в инженерной практике. Среди них большое значение имеют теоретико-вероятностные методы исследований, основанные на вероятностной трактовке протекающих в информационных системах процессов. Вероятностный (статистический) подход позволяет более полно учесть состояние динамической системы, характер управляющих и возмущающих воздействий и во многих случаях более адекватен практическим задачам. Основой для статистических решений и оптимальной обработки сигналов служат аналитические методы математической статистики. В математической статистике исходными являются имеющие случайный характер результаты наблюдения или экспериментальные данные из опытов. Задачей математической статистики является, во-первых, определение по результатам наблюдения путем обработки сигналов оценок параметров или статистических характеристик явлений или событий, связанных с наблюдениями, во-вторых, исследование точности их приближения к оцениваемым статистическим характеристикам.

При определении погрешностей результатов измерения и их характеристик объектом исследования становятся методы описания и количественного анализа методических погрешностей, а так же методы экспериментального определения погрешностей. Изучение составляющих погрешностей, вызванных той или иной причиной, позволяет определить пути их уменьшения.

Реальные устройства, как правило, оказываются одновременно нелинейными и инерционными. Решение задач анализа для этого общего случая сопряжено с большими трудностями, поскольку аналитическое решение задач по оценке методической погрешности и ее составляющих возможно только для сравнительно простых вероятностных характеристик и лишь для нормальных процессов. В связи с этим сложную систему можно представить в виде комбинации отдельных линейных и нелинейных устройств (звеньев), а анализ системы может быть сведен к анализу преобразования сигналов через отдельные устройства.

Задача синтеза системы является достаточно трудоемкой. В основе ее лежит выбор элементов-модулей с известными характеристиками из некоторого множества и их взаимная стыковка с целью получения необходимых характеристик всей системы в целом. При этом испытывается недостаток информации о влиянии различных комплектующих и их свойств на конечный результат.

При получении пары процессов с заданной взаимной корреляционной функцией возникает проблема классификации взаимных корреляционных функций и выбора модулей системы генерации. Пара процессов, полученная из единого источника первичного сигнала, например, «белого шума», с помощью системы фильтров с известными частотными характеристиками, имеет известную взаимно корреляционную функцию. Однако при определении зависимости вида взаимно корреляционной функции пары процессов от импульсных характеристик формирующих фильтров возникает необходимость в накоплении информации о сгенерированных процессах и использованных при этом фильтрах.

Таким образом, использование базы данных о фильтрах и полученных в результате генерации процессах позволяет решить ряд задач, а именно:

1. определение методических погрешностей аппроксимации методом имитационного моделирования;
2. накопление информации об алгоритмах получения пар процессов с заданными взаимными корреляционными функциями посредством синтеза системы формирующих фильтров с заданными переходными характеристиками;
3. облегчение идентификации взаимных корреляционных функций получаемых пар процессов;
4. решение задачи синтеза системы получения процессов с использованием экспертных алгоритмов.

При этом нет необходимости в хранении большого объема информации, а именно самих процессов и взаимных корреляционных функций. Достаточно вести базу данных об использованных фильтрах и хранить параметры аппроксимирующих выражений с указанием погрешностей аппроксимации.

Для выполнения приведенных выше функций информационной среды необходимо иметь средства, обеспечивающие ведение базы знаний по модулям, их параметрам и настройкам, а также синтезированным системам и алгоритмам синтеза с использованием базы знаний. В качестве базы знаний целесообразно использовать семантическую сеть.

В качестве узлов сети будут выступать модули, составляющие системы, дугами, соединяющими узлы сети, будем обозначать связи между модулями, по которым передается информация. Дуги имеют направление, показывающее связь выхода предыдущего модуля с входом следующего.

При составлении семантической сети можно выделить следующие семантические группы: источник СП, фильтр, линия задержки, формирователь ВКФ, ортогональный фильтр, нелинейный преобразователь, формирователь спектра, накопитель, АЦП. Соединение модулей семантической сети осуществляется связыванием. При связывании у каждого модуля может быть несколько источников и приемников, однако при вычислении в модуле используются данные, которые заданы как исходные на вкладке «Воздействие». Единицей передаваемой информации считается буфер данных, содержимое и формат которого зависит от типа. Тип исходных данных и формируемых результатов в модуле определяется автоматически и контролируется при определении исходных данных модуля.

Алгоритм синтеза определяется как последовательность шагов по активации модулей системы, начиная с терминальных. При этом активизируемый модуль вызывает активацию источника информации, в случае, если этот источник – генератор белого шума, происходит его генерация, файл – его открытие (чтение), АЦП – сбор данных с помощью подсистемы ввода-вывода. Если активизируемый элемент уже вычислен и имеет сформированные данные на выходе, активизация его не производится, а случайный процесс используется в следующих модулях. Таким образом, реализуется возможность подключения нескольких модулей к единственному источнику случайного процесса для генерирования пар процессов с заданными взаимными корреляционными характеристиками.

База данных может быть реализована с помощью известных СУБД. Наиболее оптимальной в случае представления семантической сети можно считать сетевую модель базы данных. Однако большинство распространенных коммерческих СУБД используют реляционную модель данных, которая с точки зрения представления данных равнозначна сетевой модели. Преобразование одной модели в другую, тем не менее, необходимо ввиду использования алгоритма возбуждения на семантической сети. При реализации автоматизированной системы с помощью объектно-ориентированного языка в сочетании с реляционной СУБД использования сетевой модели базы данных можно избежать, заменив ее последовательным преобразованием реляционной базы данных (или ее фрагментов) в семантическую сеть объектов классов, соответствующих описанным семантическим группам. При этом возможны различные схемы преобразования. Это преобразование всех записей в базе данных с помощью СУБД в сеть объектов на этапе инициализации программы с возможностью изменения семантической сети и внесения изменений (частично или полностью) в базу данных при завершении работы с программой; это ведение базы данных одновременно с модификацией семантической сети; и, наконец, это создание семантической сети в начале выполнения алгоритмов с помощью СУБД по реляционной базе данных и разрушение сети при завершении синтеза. Все описанные подходы имеют свои достоинства и недостатки. Первый подход не позволяет использовать все преимущества реляционной модели и может приводить к ошибкам при работе нескольких пользователей с одной базой данных (клиент-серверная схема). Второй требует аккуратного обращения с базой данных и резко увеличивает объем работ по ее модификации, связанный с дублированием всех операций по удалению, добавлению или редактированию. Третий подход связан со значительными временными затратами при осуществлении синтеза системы. Кроме этого, следует обеспечить использование системы в случае отсутствия соединения с базой данных, когда нет необходимости в накоплении информации о модели или сервер СУБД недоступен. Поэтому выбрана следующая схема взаимодействия с СУБД. При загрузке базы данных на основе информации о текущей системе создается семантическая сеть. Текущие изменения сети фиксируются в базе данных. Результаты вычислений в моделях заносятся в базу данных по желанию пользователя. Результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями (Лагерра,

Лежандра, Дирихле) заносятся в базу данных на этапах аппроксимации. При этом совокупности параметров аппроксимирующих выражений присваивается уникальный шифр, который обеспечивает идентификацию результатов аппроксимации внутри системы. Контроль за соответствием модели системы и результатов аппроксимации взаимных корреляционных функций, получаемых на выходе, ведет пользователь. В качестве СУБД выбрана Microsoft SQL Server [20]. Она обеспечивает один из наиболее распространенных методов, реализующих интерфейс пользователя с БД – это SQL (язык структурированных запросов). Преимущество языка SQL в том, что он позволяет непосредственно работать с БД верхнего уровня. Кроме того, он предоставляет возможность в краткой форме описать достаточно сложные многокритериальные запросы. Сервисы автоматизированному комплексу предоставляются через механизм ODBC (Open DataBase Connectivity).

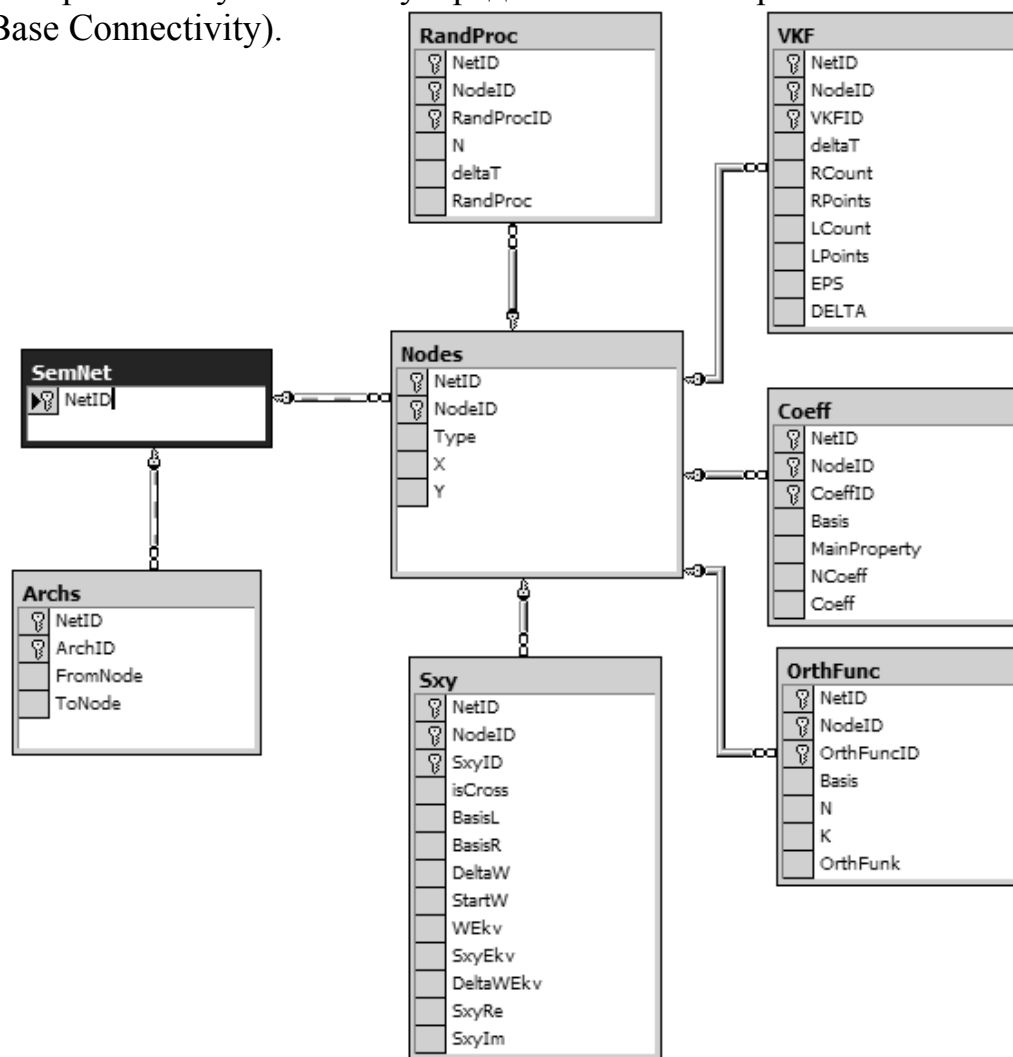


Рисунок 2.16. Схема базы данных

Следует особо отметить тот факт, что при реализации клиент-серверной схемы установки автоматизированной системы в качестве платформы сервера можно выбрать Windows XP/NT/2000, а в качестве клиента – Windows 98/Me. При установке системы на одном компьютере выбирается платформа Windows 98/Me.

Схема базы данных приведена на рисунке 2.16. На схеме показаны поля каждой таблицы и связи между таблицами. Отметим, что данная база данных не

находится, строго говоря, в первой нормальной форме, поскольку, при занесении информации о параметрах аппроксимирующих выражений Лагерра, Лежандра и Дирихле, не соблюдается требование атомарности для поля *beta*.

Однако дальнейшая нормализация приводит к существенному усложнению базы, введению дополнительной таблицы и организации быстрых методов поиска, что является более трудоемким, чем введение дополнительного алгоритма анализа данных в базе при восстановлении аппроксимирующей модели.

Рассмотрим таблицы, входящие в базу данных (см. рис. 2.16), и расшифруем наименования полей.

Таблица: SemNet

	Column Name	Data Type	Length	Allow Nulls
🔑	NetID	nchar	20	

где NetID – идентификатор сети.

Таблица: Nodes

	Column Name	Data Type	Length	Allow Nulls
🔑	NetID	nchar	20	
🔑	NodeID	nchar	20	
	Type	tinyint	1	✓
	X	smallint	2	✓
	Y	smallint	2	✓

где NodeID – идентификатор узла;

Type – тип узла (фильтр, определение ВКФ...);

X, Y – координаты узла в сети.

Таблица: Archs

	Column Name	Data Type	Length	Allow Nulls
🔑	NetID	nchar	20	
🔑	ArchID	nchar	20	
	FromNode	nchar	20	
	ToNode	nchar	20	

где ArchID – идентификатор дуги;

FromNode – идентификатор узла источника данных;

ToNode – идентификатор приемника данных.

Таблица: RandProc

	Column Name	Data Type	Length	Allow Nulls
🔑	NetID	nchar	20	
🔑	NodeID	nchar	20	
🔑	RandProcID	nchar	20	
	N	int	4	✓
	deltaT	float	8	✓
	RandProc	text	16	✓

где RandProcID – идентификатор СП;

N – число отсчетов СП;

deltaT – интервал дискретизации СП;

RandProc – отсчеты СП;

Таблица: VKF

	Column Name	Data Type	Length	Allow Nulls
🔑	NetID	nchar	20	
🔑	NodeID	nchar	20	
🔑	VKFID	nchar	20	
	deltaT	float	8	✓
	RCount	smallint	2	✓
	RPoints	text	16	✓
	LCount	smallint	2	✓
	LPoints	text	16	✓
	EPS	float	8	✓
	DELTA	float	8	✓

где VKFID – идентификатор ВКФ;
 deltaT – интервал дискретизации ВКФ;
 RCount – число отсчетов правой ветви ВКФ;
 RPoints – отсчеты правой ветви ВКФ;
 LCount – число отсчетов левой ветви ВКФ;
 LPoints – отсчеты левой ветви ВКФ;
 ESP – среднеквадратическое отклонение;
 DELTA – максимальная погрешность.

Таблица: Coeff

	Column Name	Data Type	Length	Allow Nulls
🔑	NetID	nchar	20	
🔑	NodeID	nchar	20	
🔑	CoeffID	nchar	20	
	Basis	char	1	✓
	MainProperty	bit	1	✓
	NCoeff	int	4	✓
	Coeff	text	16	✓

где CoeffID – идентификатор коэффициентов;
 Basis – ортогональный базис;
 MainProperty – флаг «ограничение на модель корреляционной функции»;
 NCoeff – число коэффициентов;
 Coeff – коэффициенты ряда Фурье.

Таблица: OrthFunc

	Column Name	Data Type	Length	Allow Nulls
🔑	NetID	nchar	20	
🔑	NodeID	nchar	20	
🔑	OrthFuncID	nchar	20	
	Basis	char	1	✓
	N	int	4	✓
	K	int	4	✓
	OrthFunk	text	16	✓

где OrthFuncID – идентификатор ортогональных функций;
 Basis – ортогональный базис;
 N – число отсчетов в ортогональной функции;
 K – порядок ортогональной функции;
 OrthFunk – отсчеты ортогональных функций.

Таблица: Sxy

	Column Name	Data Type	Length	Allow Nulls
🔑	NetID	nchar	20	
🔑	NodeID	nchar	20	
🔑	SxyID	nchar	20	
	isCross	bit	1	✓
	BasisL	char	1	✓
	BasisR	char	1	✓
	DeltaW	float	8	✓
	StartW	float	8	✓
	WEkv	float	8	✓
	SxyEkv	float	8	✓
	SxyRe	image	16	✓
	SxyIm	image	16	✓
	SxyPh	image	16	✓
	SxyMo	image	16	✓

где SxyID – идентификатор ортогональных функций;
 isCross – флаг «взаимный спектр»;
 Basis_ – ортогональный базис правой и левой ветви;
 DeltaW – интервал дискретизации по частоте;
 StartW – значение частоты первого отсчета спектра;
 WEkv – эквивалентная ширина спектра;
 SxyEkv – спектральная плотность мощности при эквивалентной ширине спектра;
 SxyRe – отсчеты спектральной плотности мощности (действительная часть);
 SxyIm – отсчеты спектральной плотности мощности (мнимая часть);
 SxyPh – фаза спектральной плотности мощности;
 SxyMo – модуль спектральной плотности мощности.

В автоматизированной системе проектирование системы происходит наглядно, путем добавления новых модулей, отображаемых на рабочей области экрана условными пиктограммами. На рабочей области экрана в этом случае формируется граф – семантическая сеть, в узлах которой находятся указанные выше модули. Между модулями устанавливаются связи, соответствующие каналам передачи случайных процессов от одного модуля к другому. Получаемая в результате система может быть занесена в базу данных, в которой ведется учет построенных систем и полученных взаимных корреляционных функций.

2.3. Узлы автоматизированного комплекса

При составлении семантической сети можно выделить семантические группы, указанные на диаграмме классов (рис. 2.17).

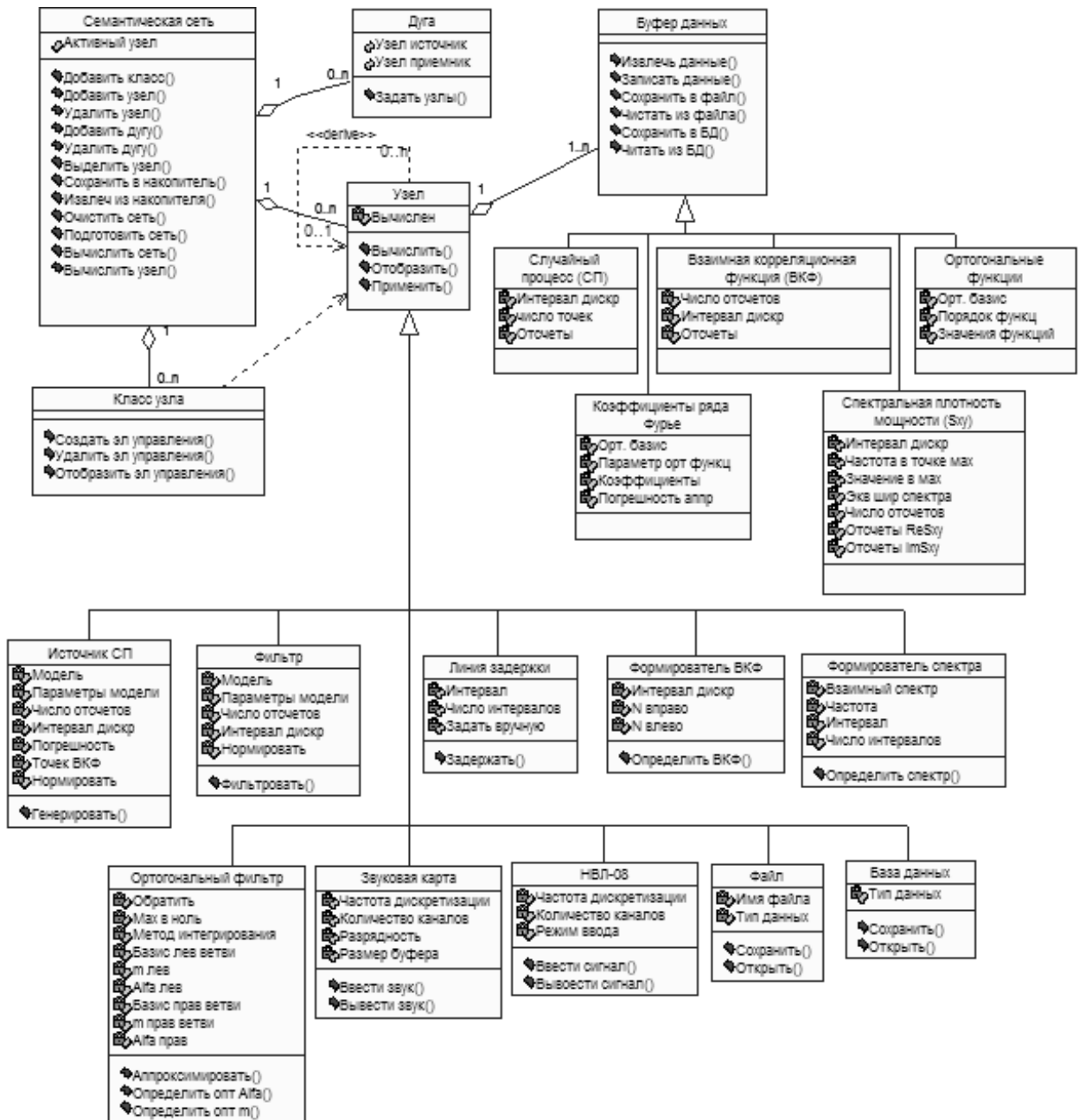


Рис. 2.17. Диаграмма классов семантической сети (методология UML)

Рассмотрим подробно семантические группы, доступные в сети. Как видно из рисунка 2.17, в комплексе имеется десять групп: «Источник СП», «Фильтр», «Линия задержки», «Формирователь ВКФ», «Ортогональный фильтр», «Формирователь спектра», «Звуковая карта», «НВЛ-08», «Файл», «База данных». Каждая группа предназначена для реализации определенного класса задач.

Источник СП – позволяет сгенерировать СП с заданным видом КФ или «белый шум».

Фильтр – производится цифровая фильтрация СП поступающего на вход узла. Если на вход фильтра поступает «белый шум», на выходе – СП с выбранным видом КФ.

Линия задержки – поступающий на вход узла СП задерживается на заданное число временных интервалов.

Формирователь ВКФ – на основании двух СП, поступающих на вход узла, формируется их ВКФ, имеющая заданное число отсчетов в правой и левой ветви.

Ортогональный фильтр – имеется возможность аппроксимации ВКФ ортогональными функциями Лежандра, Лагерра, Дирихле. Параметры ортогональных функций определяются в автоматизированном режиме.

Формирователь спектра – определяется спектральная плотность мощности, вещественная и мнимая части спектра, модуль, фаза спектральной плотности мощности.

Звуковая карта, НВЛ-08 – позволяют вводить аналоговые сигналы в персональный компьютер.

Накопитель – используется для формирования буфера данных на основе полученной из файла или базы данных информации.






В следующих разделах приводится подробное описание функциональных модулей, которые могут быть использованы в семантической сети автоматизированного комплекса.

Структура автоматизированного комплекса

На структурной схеме (рис. 2.18) используются графические обозначения накопителей, буферов данных и устройств ПЭВМ, описание которых приводится в таблице 2.2.

Графические обозначения структурных единиц, используемые в структурной схеме

Таблица 2.2

Символьное обозначение	Описание
	Файл
	База данных
	Буфер данных. Данные между функциональными модулями семантической сети передаются через буферы данных, которые представляют собой объекты ядра данных, что в свою очередь предполагает возможность доступа к ним из любой программы операционной системы
	Многофункциональное устройство НВЛ-08
	Звуковая карта компьютера

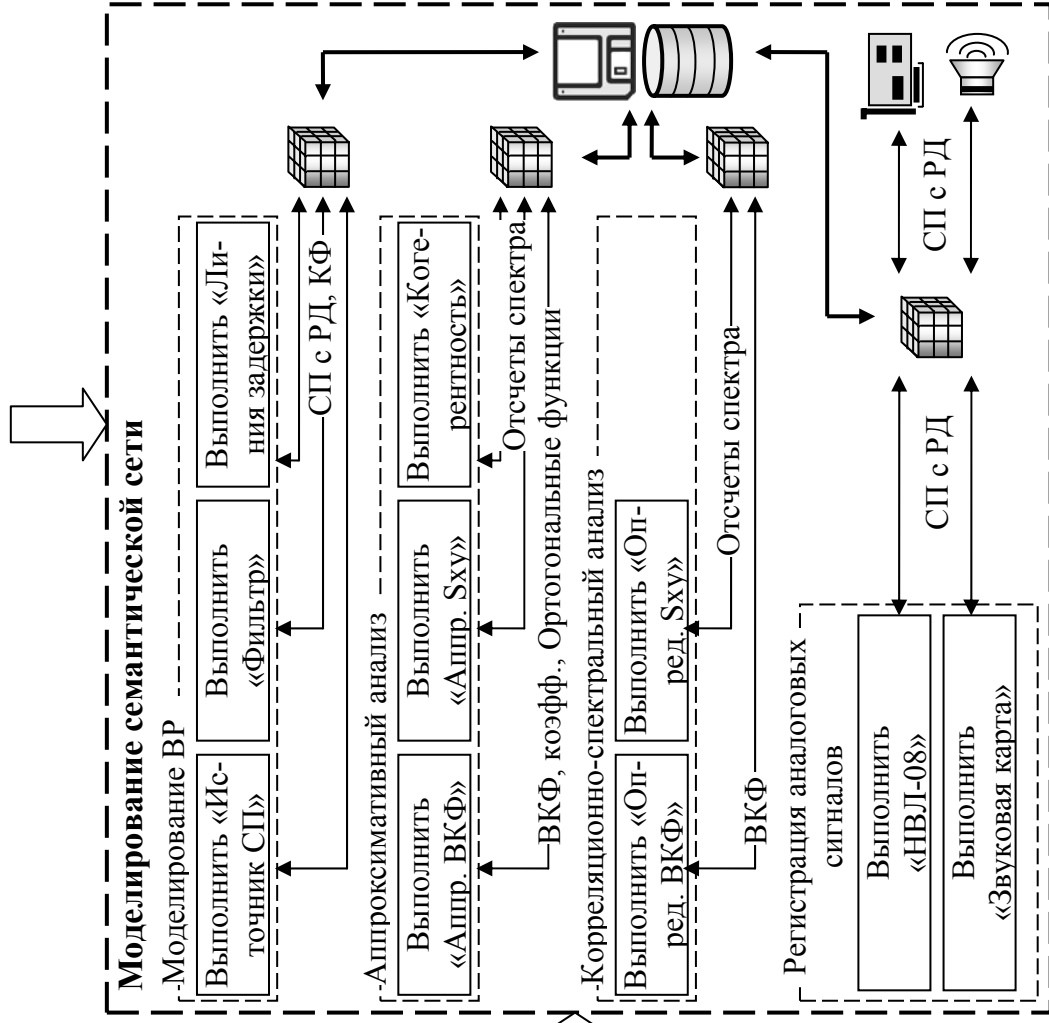
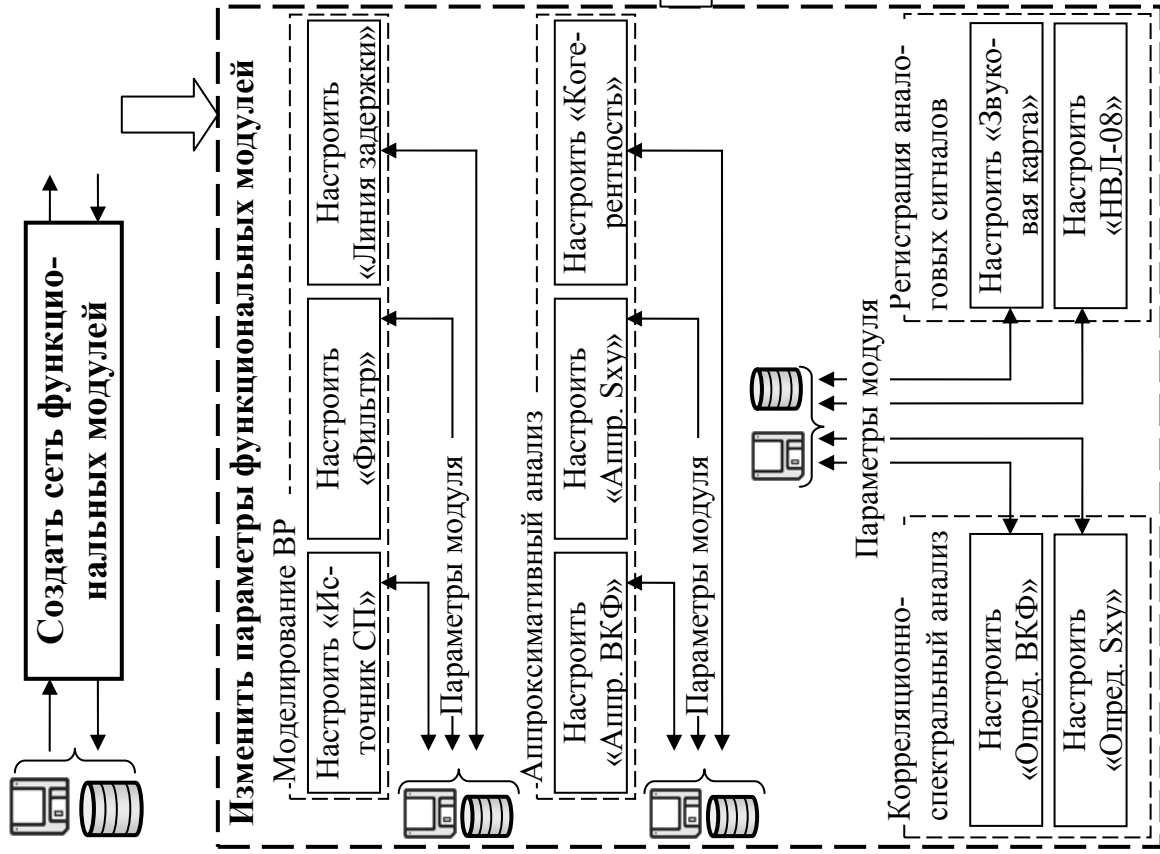


Рисунок 2.18. Структурная схема автоматизированного комплекса корреляционно-спектрального анализа

Варианты использования автоматизированного комплекса для синтеза и компиляции семантических сетей приведены на рисунке 2.19.

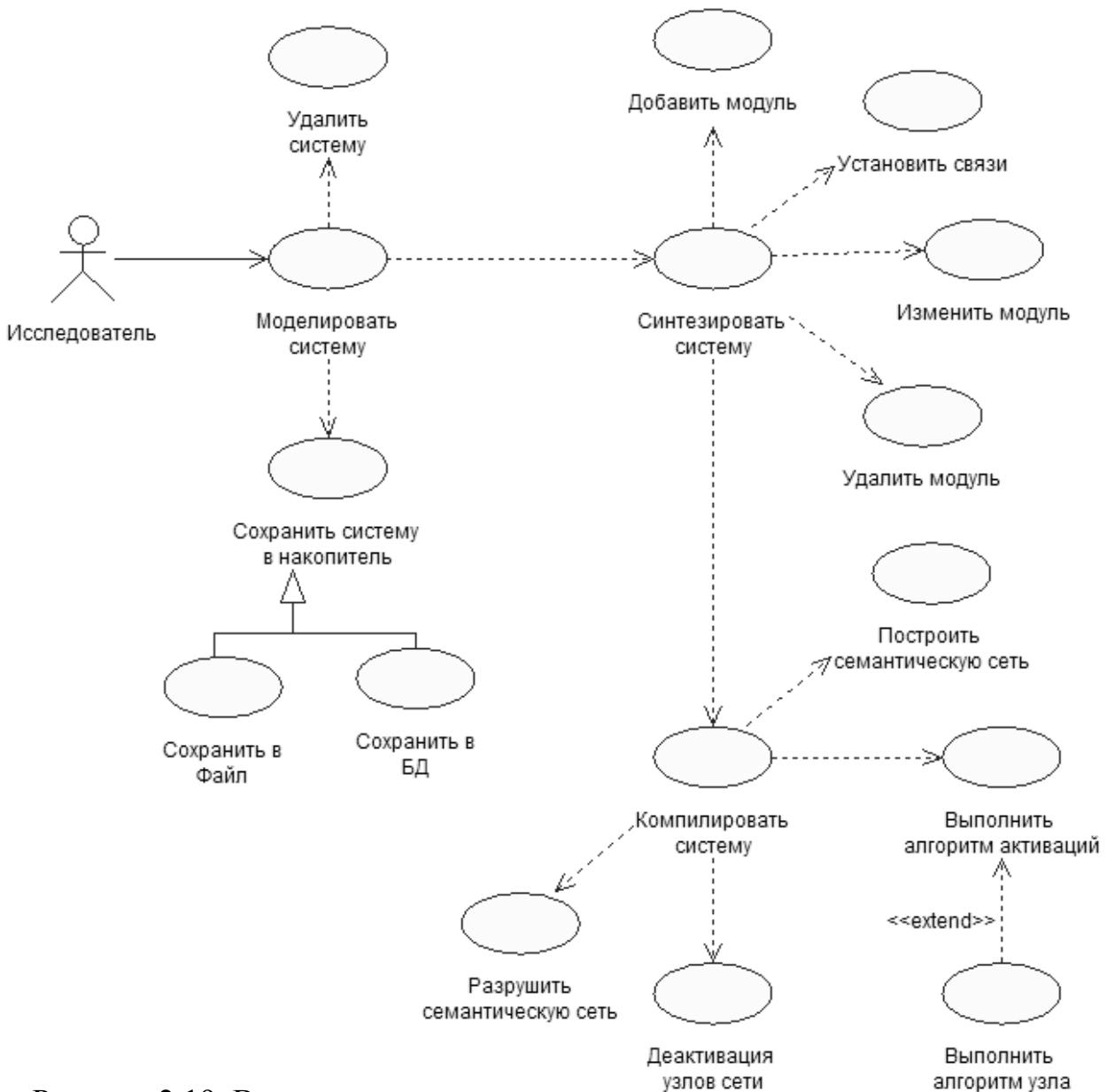


Рисунок 2.19. Варианты использования для синтеза и компиляции семантических сетей

Соответствие модели системы и результатов аппроксимации взаимных корреляционных функций, получаемых на выходе, контролирует пользователь.

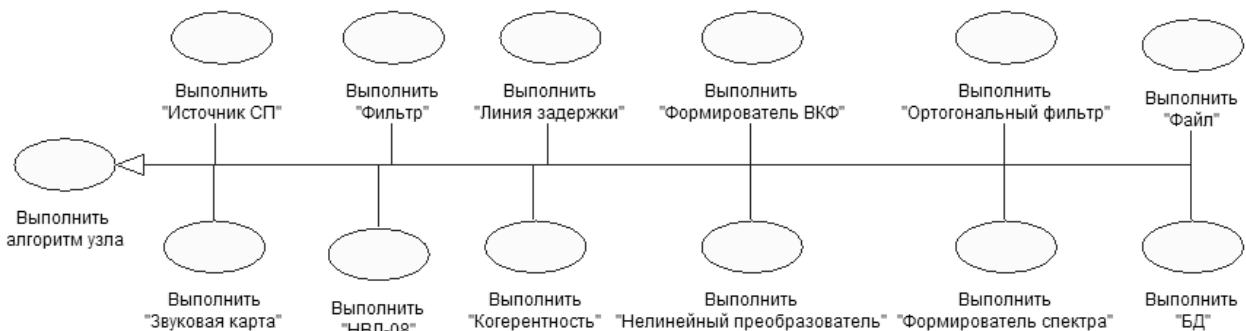


Рисунок 2.20. Отношение обобщения для варианта использования «Выполнить алгоритм узла»

Отношение обобщения для варианта использования «Выполнить алгоритм узла» приведено на рисунке 2.20.

Отношение обобщения для варианта использования «Добавить модуль» приведено на рисунке 2.21.

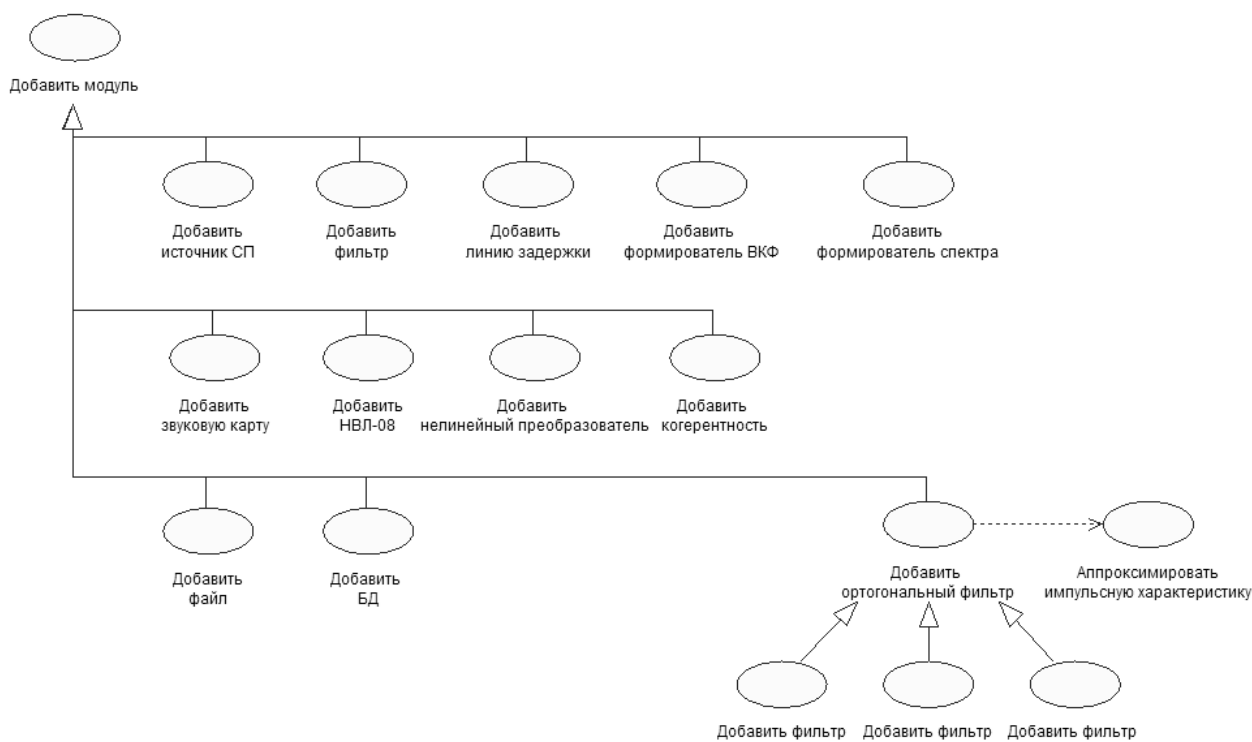
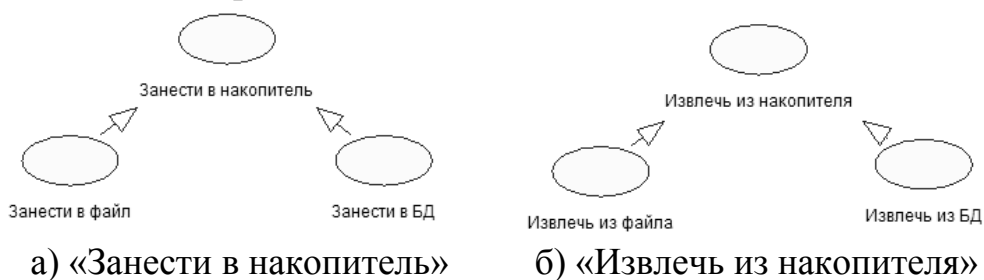


Рисунок 2.21. Отношение обобщения варианта использования «Добавить модуль»

В диаграммах вариантов использования, приводимых ниже, используются отношения обобщения «Занести в накопитель» и «Извлечь из накопителя» (см. рис. 2.22). Эти отношения внесены для упрощения обозначения таких типов накопителей как файл и БД.



а) «Занести в накопитель»

б) «Извлечь из накопителя»

Рисунок 2.22. Отношение обобщения накопителей

2.3.1. Источник СП

Функциональные модули из группы **Источник СП** позволяют сгенерировать «белый шум» или СП с заданным видом КФ. В них задаются: вид моделируемой КФ и ее параметры; параметры генерируемого СП; параметры КФ. Для правильного определения шага дискретизации СП, по которым планируется определять ВКФ, предусмотрена возможность вызова окна рекомендаций (см. рис 2.24), где выбираются модели КФ генерируемых СП и указывается допус-

тимая погрешность определения КФ. По заданным параметрам определяется интервал дискретизации и число точек КФ.

В функциональном модуле «Источник СП» автоматизированной системы осуществляется генерация случайного процесса с равномерной дискретизацией. При этом задается интервал дискретизации, количество отсчетов и вид корреляционной функции (также может быть сгенерирован «белый шум»). При генерации рассчитываются некоторые вероятностные характеристики процесса, а именно: математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса, а также корреляционная функция. Для определения методической погрешности оценки КФ методом имитационного моделирования рассчитывается ее среднеквадратическое отклонение и максимальная погрешность от аналитически определенной.

Схема функционального модуля



Рисунок 2.23. Схема функционального модуля «Источник СП»

Примечание: При описании типов данных, поступающих на вход и формируемых на выходе функциональных модулей, используются типы, приведенные в разделе 2.1.5, глава 2.

Диаграмма вариантов использования

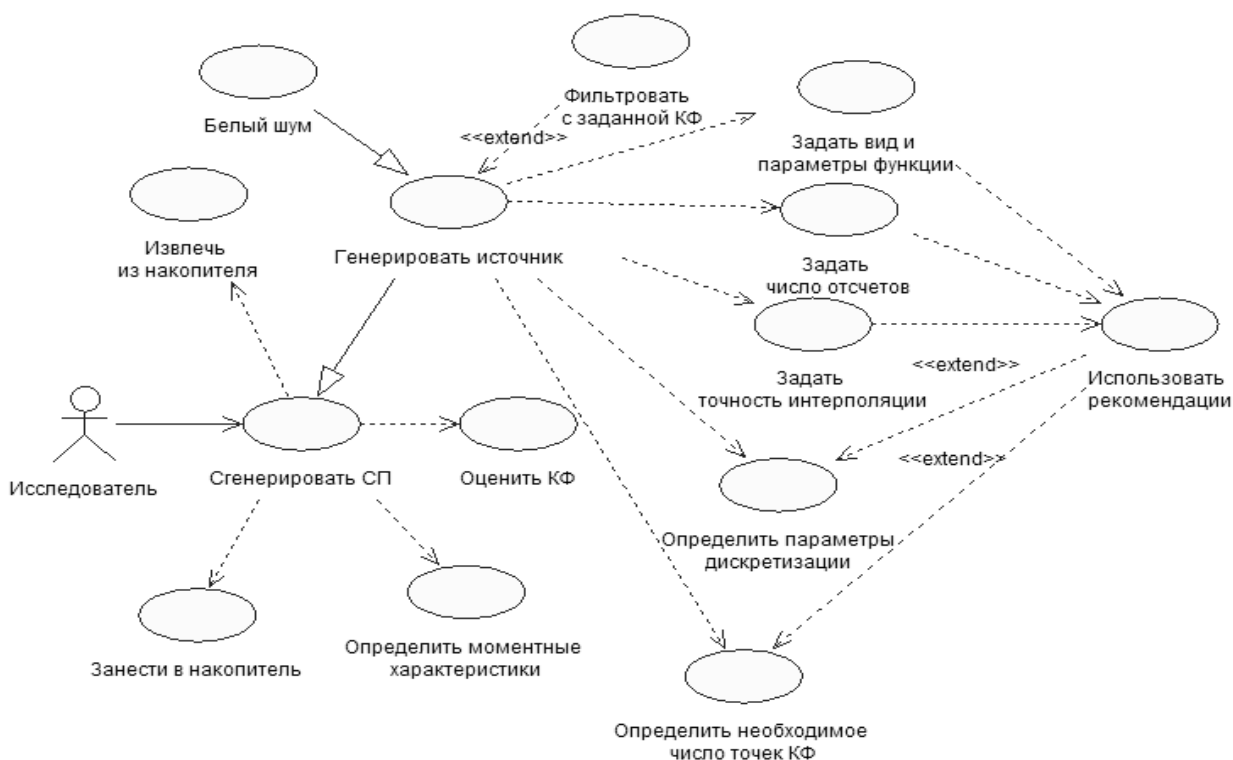


Рисунок 2.24. Диаграмма вариантов использования «Источник СП»

Описание параметров

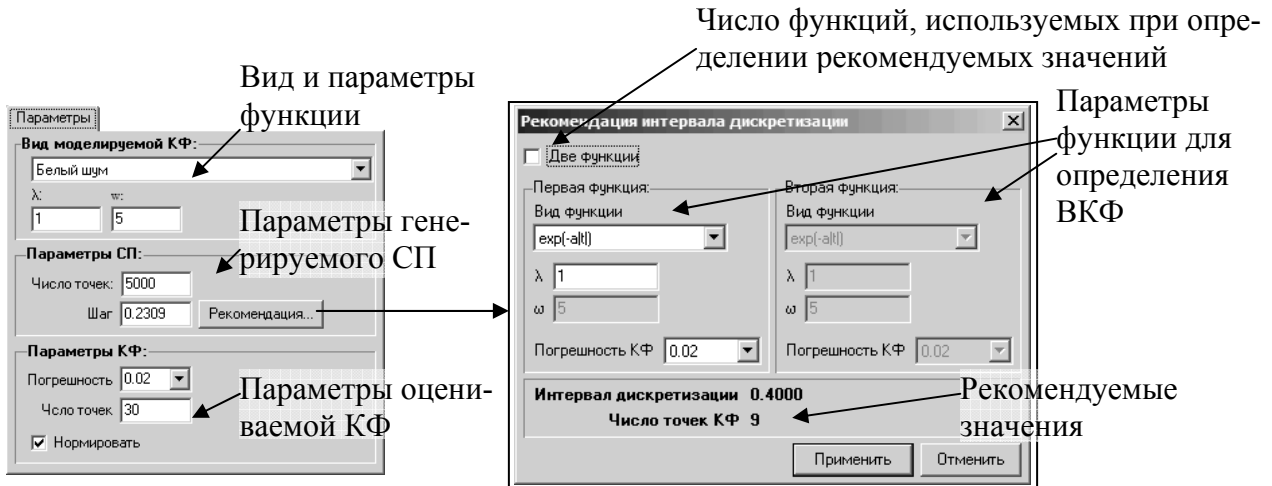


Рисунок 2.25. Закладка «Параметры» для узла «Источник СП»

Описание исходных данных

Функциональный модуль «Источник СП» не использует данных.



Рисунок 2.26. Закладка «Воздействие» для узла «Источник СП»

Описание результатов



Рисунок 2.27. Закладка «Реакция» для узла «Источник СП»

Алгоритмы функционирования

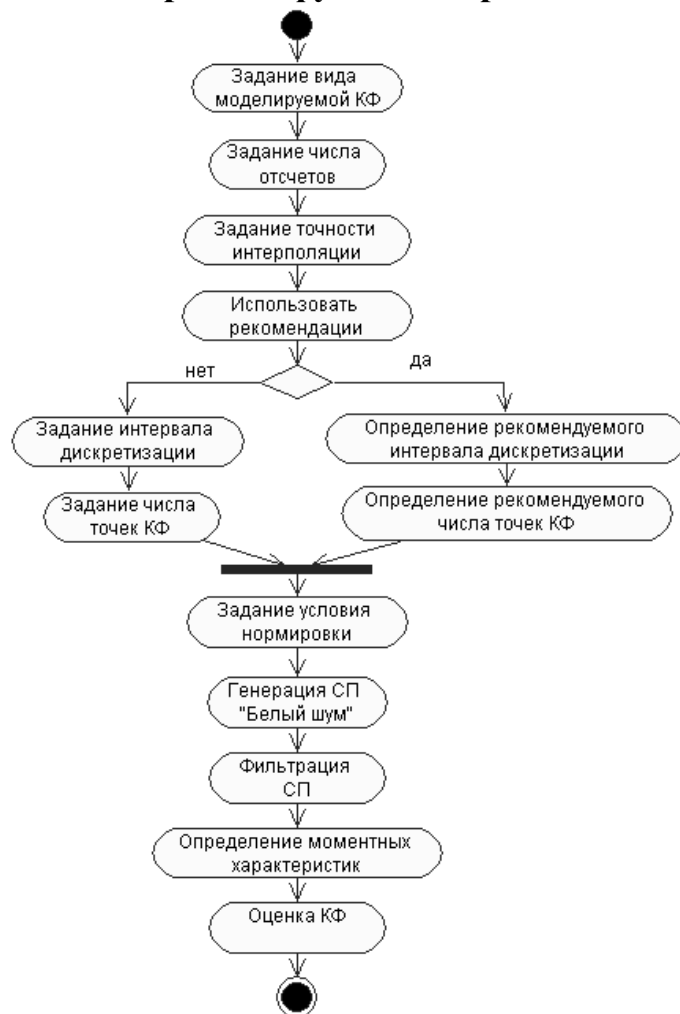


Рисунок 2.28. Диаграмма деятельности. Вычисления в узле «Источник СП»

Определение моментных характеристик

К числовым характеристикам относятся: начальные и центральные моменты k -го порядка, мода, медиана, коэффициенты вариации и формы, пикфактор.

Из них наиболее часто применяются:

Среднее значение (первый момент) – определяет положение центра рассеяния случайного процесса. Оценивание среднего значения (математического ожидания) производится усреднением реализаций случайного процесса:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.8)$$

Дисперсия (второй центральный момент) – характеризует рассеяние значений случайного процесса относительно среднего значения. При оценке вычисляется среднее квадратов центрированных (реализаций, из которых вычтено среднее значение) значений реализаций:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (2.9)$$

Асимметрия или **коэффициент асимметрии** является мерой несимметричности распределения. Если этот коэффициент отчетливо отличается от 0, распределение является асимметричным. Плотность нормального распределения симметрична относительно среднего:

$$K_a = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \sigma_x^3}. \quad (2.10)$$



Экссесс, **коэффициент эксцесса** измеряет «пикообразность» распределения. Если эксцесс значительно отличен от 0, то функция плотности имеет либо более закругленный, либо более острый пик, чем пик плотности нормального распределения. Функция плотности нормального распределения имеет эксцесс, равный 0. Оценка эксцесса (выборочный эксцесс) вычисляется по формуле:

$$K_\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3 \cdot (n-1) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \sigma_x^4}. \quad (2.11)$$

Пример:

Сгенерировать СП с КФ вида $\rho_x(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_5|\tau|} \cdot \cos \omega_{0,5}\tau$. Параметры функции: $\lambda_5 = 1$, $\omega_{0,5} = 5$. Рассчитать ВКФ СП, имеющих следующие корреляционные функции: $\rho_x(\tau, \lambda_1) = e^{-\lambda_1|\tau|}$, $\rho_x(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_5|\tau|} \cdot \cos \omega_{0,5}\tau$.

1. Выделить функциональный модуль «Источник СП».
2. Установить свойство «Вид моделируемой КФ» в значение «exp(-a|t|)*cos(wt)».
3. Установить свойство « λ_1 » и « λ_5 » в значение 1.
4. Установить свойство « $\omega_{0,5}$ » в значение 5.
5. В свойстве «число точек» задать число отсчетов генерируемого СП.
6. Нажать на кнопку «Рекомендация...» для определения рекомендованных значений интервала дискретизации и числа точек КФ. Появится окно «Рекомендации интервала дискретизации».
 - 6.1. Установить флаг «Две функции».
 - 6.2. Установить вид первой функции в значение «exp(-a|t|)».
 - 6.3. Задать параметры и установить погрешность вычисления КФ первой функции.
 - 6.4. Установить вид второй функции в значение «exp(-a|t|)*cos(wt)».
 - 6.5. Задать параметры и установить погрешность вычисления КФ второй функции.
 - 6.6. Нажать кнопку «Применить». Окно «Рекомендации интервала дискретизации» закроется, а определенные рекомендуемые значения интервала дискретизации и числа точек КФ будут присвоены параметрам функционального модуля. При нажатии кнопки «Отменить» параметры функционального модуля не изменяются.
7. При необходимости нормирования КФ установить флаг «Нормировать».

8. Сгенерировать СП с заданными значениями параметров. Генерация производится нажатием кнопки «Вычислить узел»  или «Вычислить сеть» .
9. На закладке «Реакция» посмотреть результат вычислений. В разделе «Отобразить» отображаются моментные характеристики СП, задается режим отображения результата.

2.3.2. Фильтр



Рисунок 2.29. Схема функционального модуля «Фильтр»

Диаграмма вариантов использования

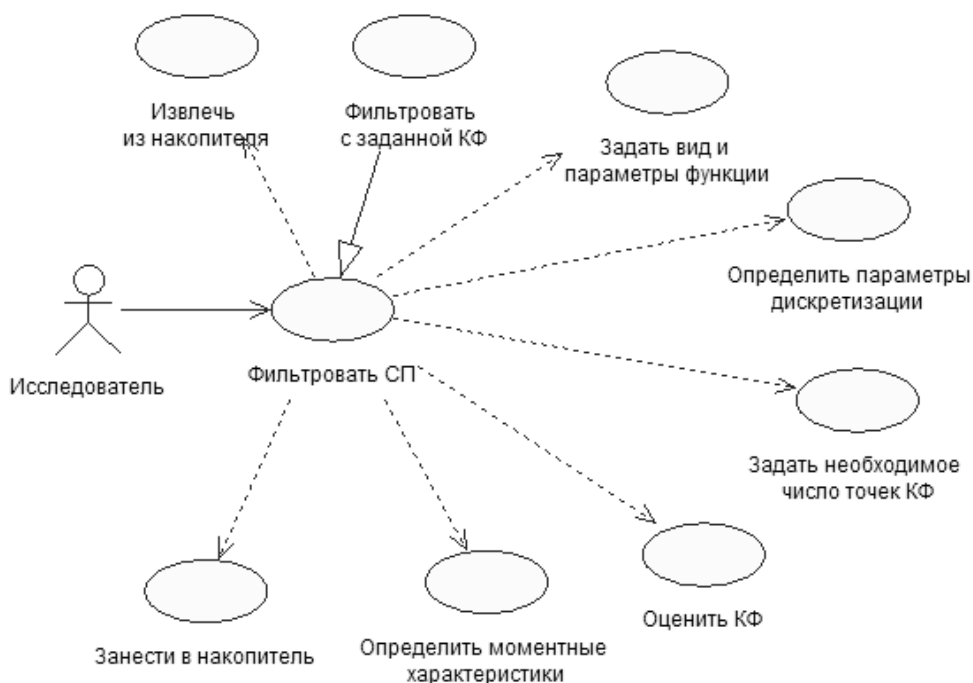


Рисунок 2.30. Диаграмма вариантов использования «Фильтр»

Описание параметров

Параметры

Фильтр:
 Нормированная КФ:
 λ: ω:

Дискретизация:
 Тип:
 Параметр:
 Поток:

Параметры КФ:
 Число точек:
 Шаг: мин
 Нормировать

Вид и параметры фильтра
 Параметры дискретизации
 Параметры КФ

Рисунок 2.31. Закладка «Параметры» для узла «Фильтр»

Описание исходных данных

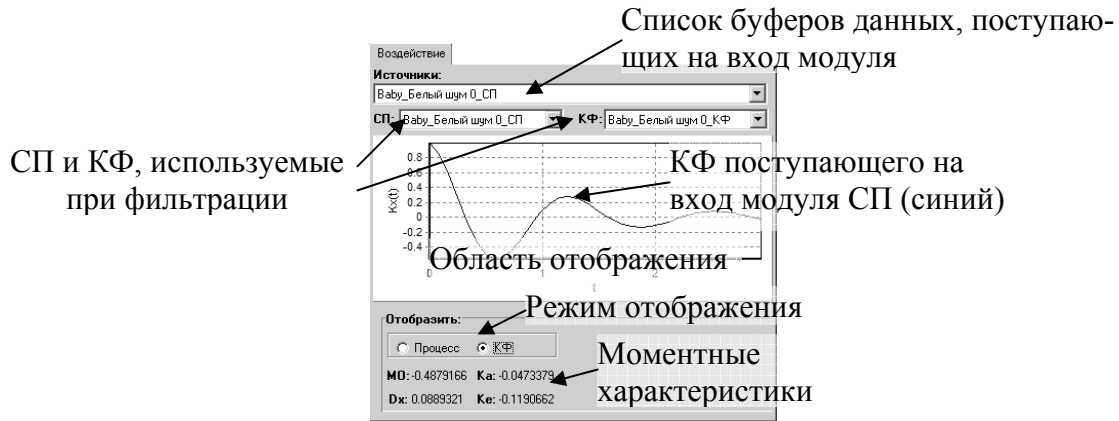


Рисунок 2.32. Закладка «Воздействие» для узла «Фильтр»

Описание результатов

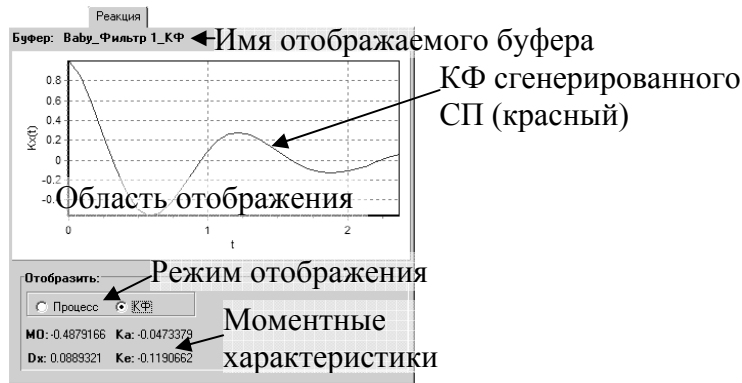


Рисунок 2.33. Закладка «Реакция» для узла «Фильтр»



Алгоритмы функционирования



Рисунок 2.34. Диаграмма деятельности. Вычисления в узле «Фильтр»

Пример:

Определить выходной сигнал фильтра. Моделируемая КФ имеет вид $\rho_x(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_5|\tau|} \cdot \cos \omega_{0,5}\tau$. Параметры функции: $\lambda_5 = 1$, $\omega_{0,5} = 5$.

1. Выделить функциональный модуль «Фильтр».
2. Установить свойство «Вид моделируемой КФ» в значение « $\exp(-a|t|) \cdot \cos(wt)$ ».
3. Установить свойство « λ_5 » в значение 1.
4. Установить свойство « $\omega_{0,5}$ » в значение 5.
5. В разделе «Параметры КФ» задать «Число точек».
6. При необходимости нормировки КФ установить флаг «Нормировать».
7. На закладке «Воздействие» выбрать СП, подвергающийся фильтрации. СП выбирается в списке «СП».
8. Сгенерировать СП с заданными значениями параметров. Генерация производится нажатием кнопки «Вычислить узел»  или «Вычислить сеть» .
9. На закладке «Реакция» посмотреть результат вычислений. В разделе «Отобразить» отображаются моментные характеристики СП, задается режим отображения результата.

2.3.3. Линия задержки



Рисунок 2.35. Схема функционального модуля «Линия задержки»

Диаграмма вариантов использования

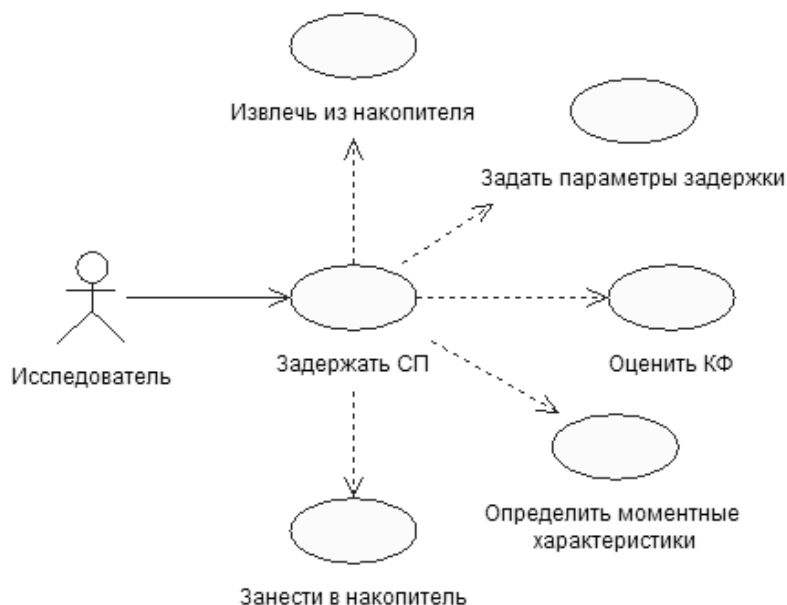


Рисунок 2.36. Диаграмма вариантов использования «Линия задержки»

Описание параметров

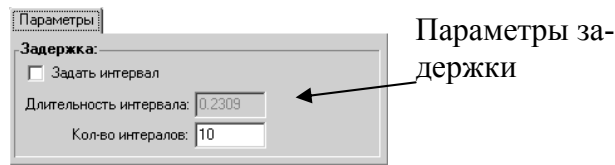


Рисунок 2.37. Закладка «Параметры» для узла «Линия задержки»

Если флаг «Задать интервал» установлен, то длительность интервала дискретизации задается пользователем, иначе – определяется автоматически по данным, поступающим на вход функционального модуля. Параметр «Количество интервалов» определяет общую длительность задержки.

Описание исходных данных

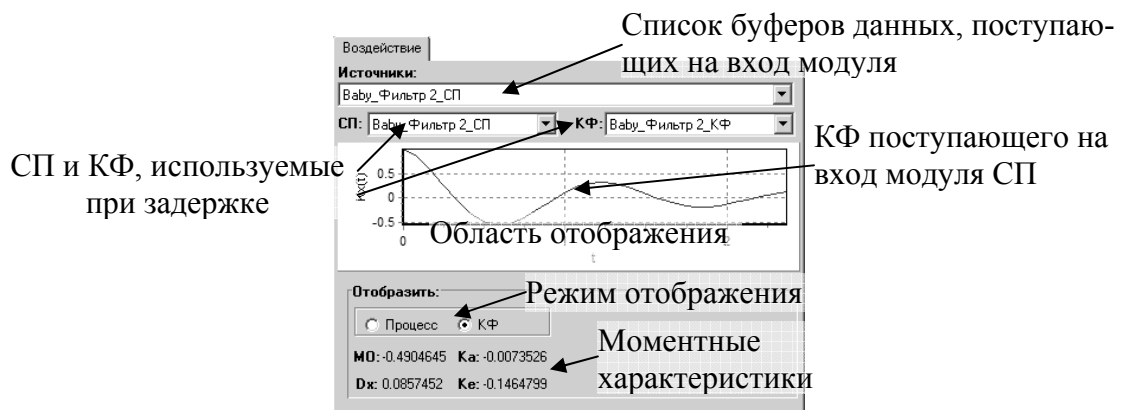


Рисунок 2.38. Закладка «Воздействие» для узла «Линия задержки»

Описание результатов

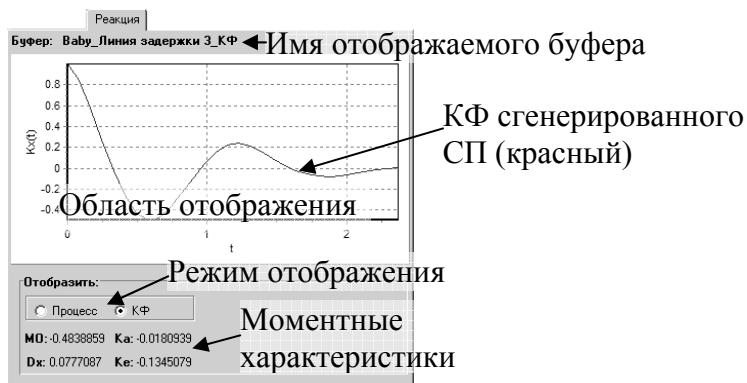


Рисунок 2.39. Закладка «Реакция» для узла «Линия задержки»

Алгоритмы функционирования

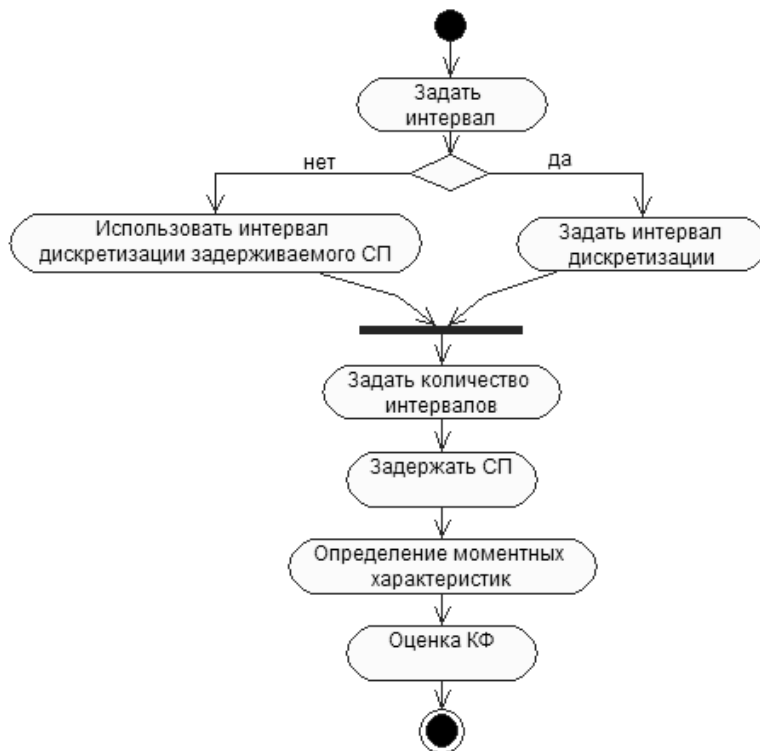


Рисунок 2.40. Диаграмма деятельности. Вычисления в узле «Линия задержки»

Пример:

Задержать СП, поступающий на вход линии задержки от источника СП (см. рис. 2.41). Параметры задержки: $\Delta\tau = 0,5$ (интервал дискретизации), $N = 5$ (количество интервалов дискретизации).

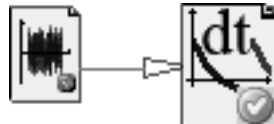




Рисунок 2.41. Система, используемая в примере

1. Выделить функциональный модуль «Линия задержки».
2. Установить флаг «Задать интервал». Свойство «Длительность интервала» доступно для редактирования.
3. Установить свойство «Длительность интервала» в значение 0,5.
4. Установить свойство «Количество интервалов» в значение 5.
5. На закладке «Воздействие» выбрать СП, подвергающийся задержке. СП выбирается в списке «СП».
6. Нажатием кнопки «Вычислить узел»  или «Вычислить сеть»  произвести вычисления. В результате вычислений СП, поступающий от модуля «Источник СП», будет задержан.
7. На закладке «Реакция» посмотреть результат вычислений. В разделе «Отобразить» отображаются моментные характеристики СП, задается режим отображения результата.

2.3.4. Формирователь ВКФ



Рисунок 2.42. Схема функционального модуля «Формирователь ВКФ»

Диаграмма вариантов использования

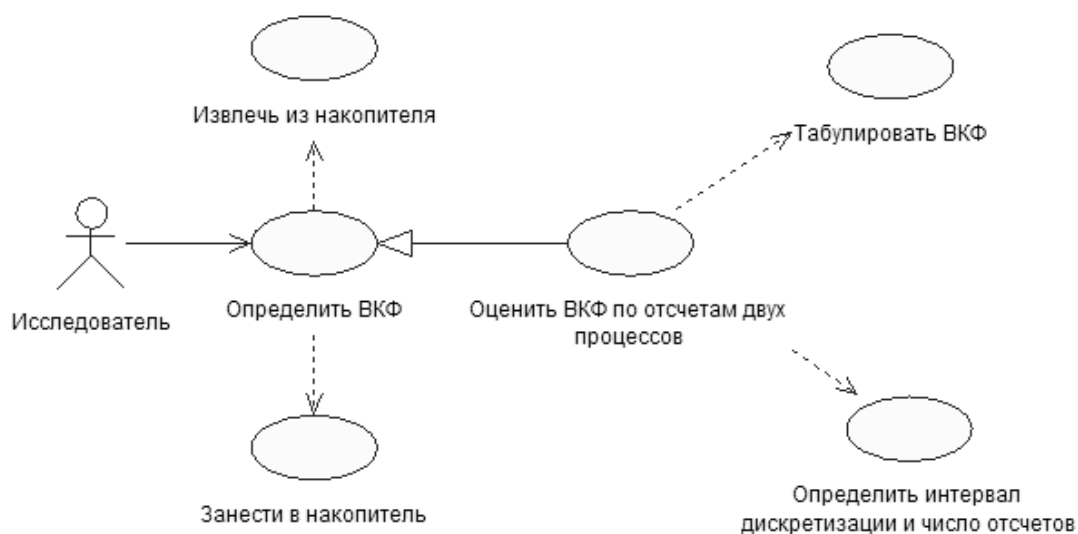


Рисунок 2.43. Диаграмма вариантов использования «Формирователь ВКФ»

Описание параметров



Рисунок 2.44. Закладка «Параметры» для узла «Формирователь ВКФ»

Примечание: Если флаг «Задать интервал» сброшен, интервал задержки извлекается из буфера данных поступающего на вход модуля.

Описание исходных данных

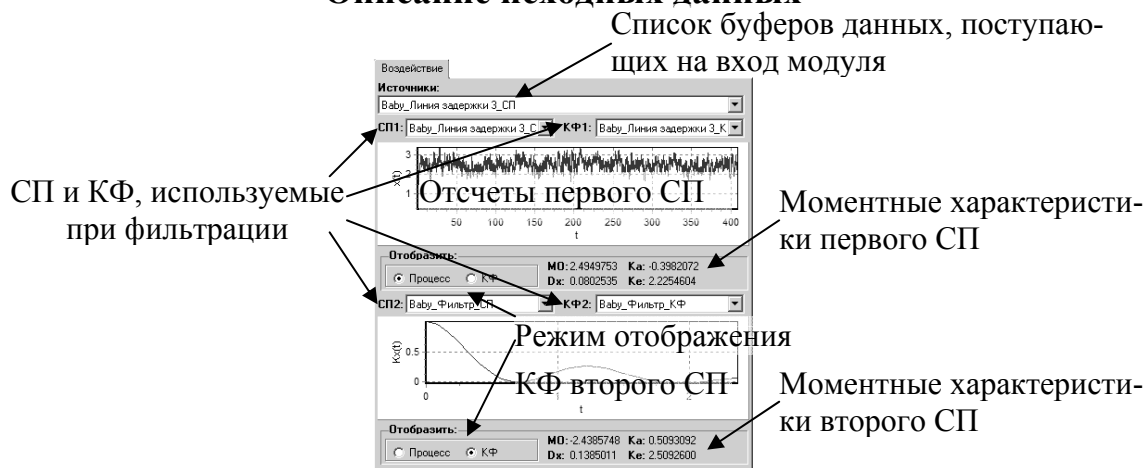


Рисунок 2.45. Закладка «Воздействие» для узла «Формирователь ВКФ»

Описание результатов

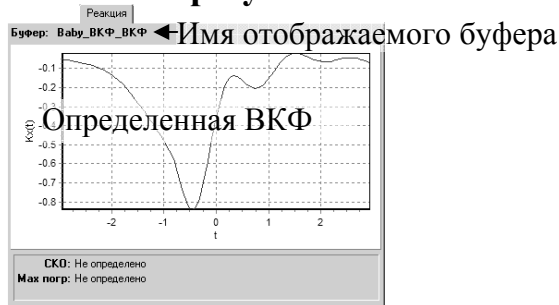


Рисунок 2.46. Закладка «Реакция» для узла «Формирователь ВКФ»

Алгоритмы функционирования



Рисунок 2.47. Диаграмма деятельности. Вычисления в узле «Формирователь ВКФ»

Пример:

Определить ВКФ по отсчетам СП, поступающих от функциональных модулей «Линия задержки» и «Фильтр» (см. рис. 2.48). Интервал задержки определяется автоматически, число точек ветвей равно 37.

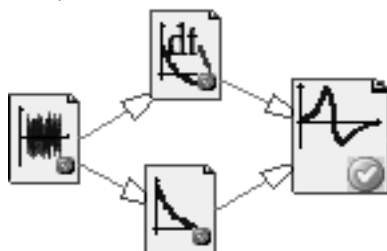




Рисунок 2.48. Система, используемая в примере

1. Выделить функциональный модуль «Формирователь ВКФ».
2. Задать число точек левой ветви (см. рис. 2.44).
3. Задать число точек правой ветви.
4. На закладке «Воздействие» выбрать СП, используемые при определении ВКФ. Буфер данных первого СП выбирается в списке «СП1», второго – в списке «СП2». Для определения ВКФ в списках «СП1» и «СП2» необходимо выбрать буфер, содержащий СП.
5. Нажатием кнопки «Вычислить узел»  или «Вычислить сеть»  произвести вычисления. В результате вычислений по отсчетам «СП1» и «СП2» будет вычислена ВКФ.
6. На закладке «Реакция» посмотреть результат вычислений. В области отображения приводится вычисленная корреляционная функция.

2.3.5. Ортогональный фильтр

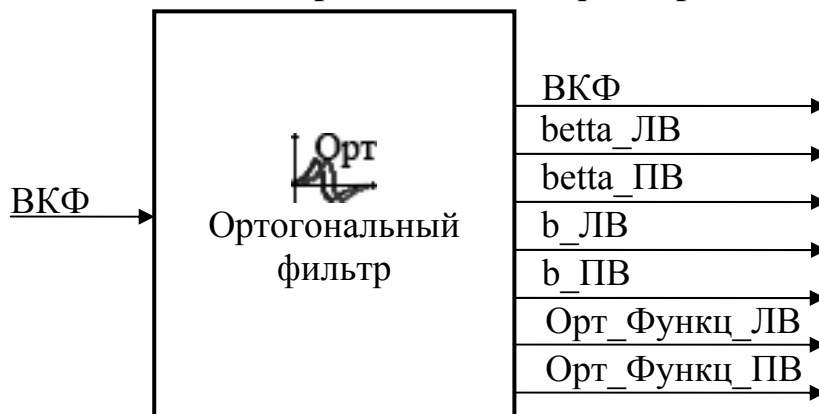


Рисунок 2.49. Схема функционального модуля «Ортогональный фильтр»

Диаграмма вариантов использования

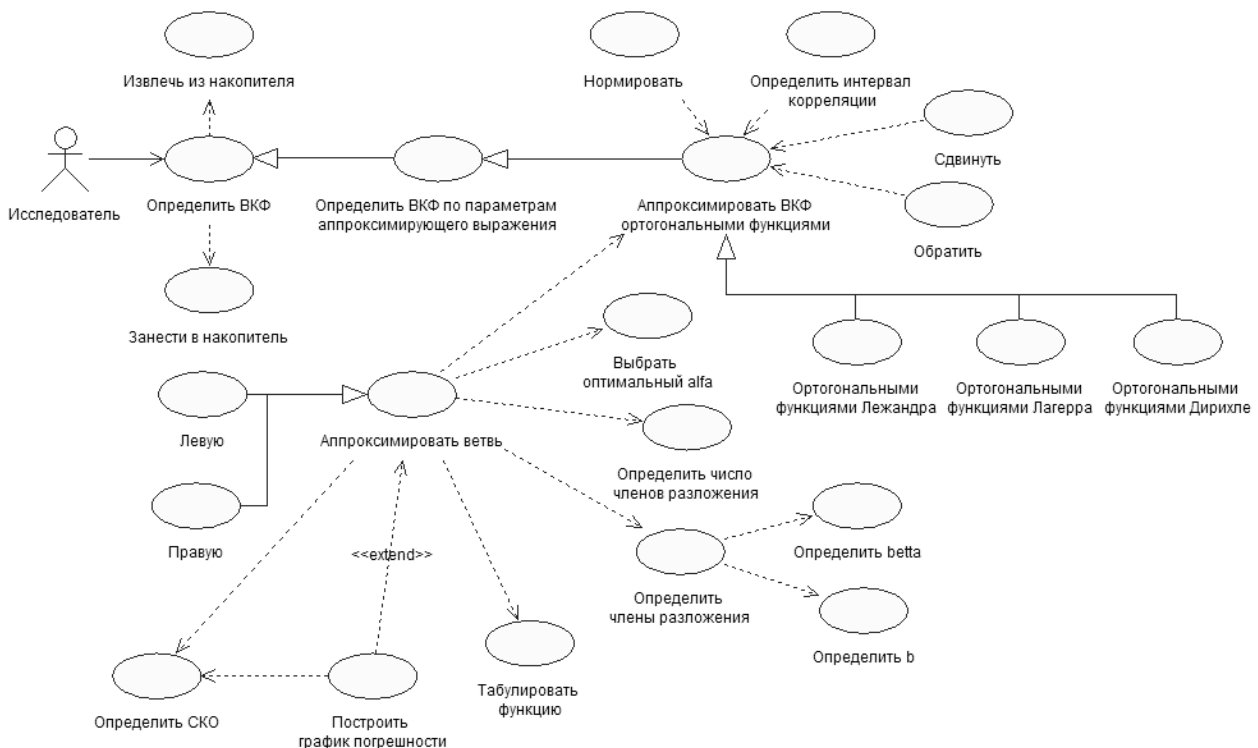


Рисунок 2.50. Диаграмма вариантов использования «Ортогональный фильтр»

Описание параметров

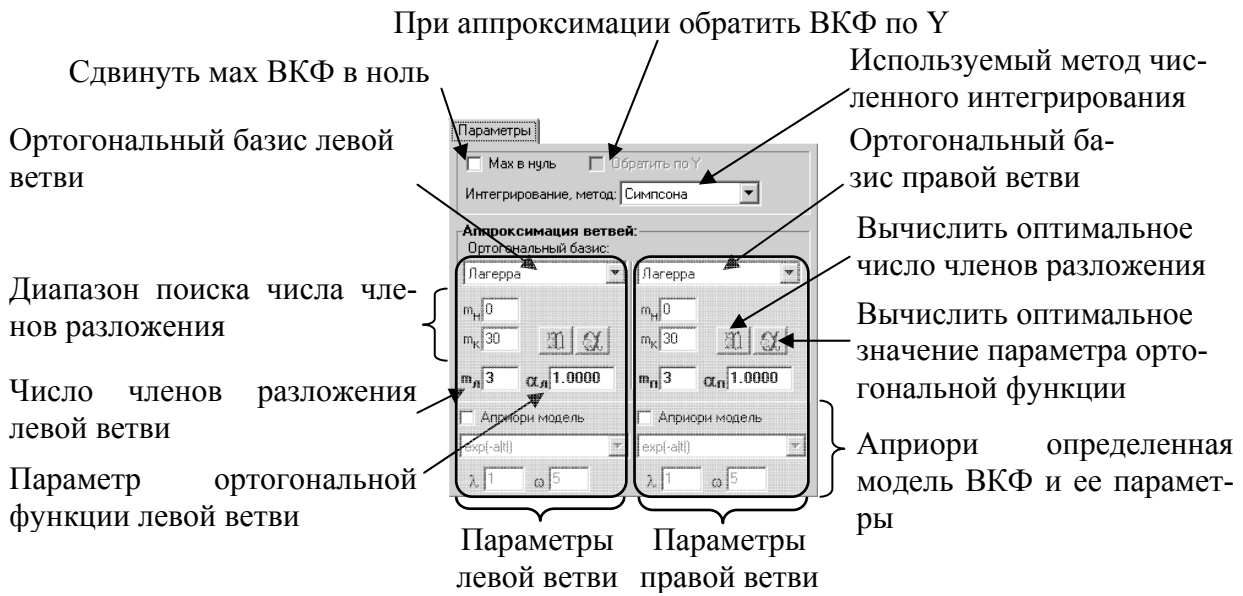


Рисунок 2.51. Закладка «Параметры» для узла «Ортогональный фильтр»

Примечание: Если флаг «Априори модель» установлен, при вычислении коэффициентов разложения используются аналитические функции для определенной модели (см. глава 1, разд. 2.2.1).

Описание исходных данных

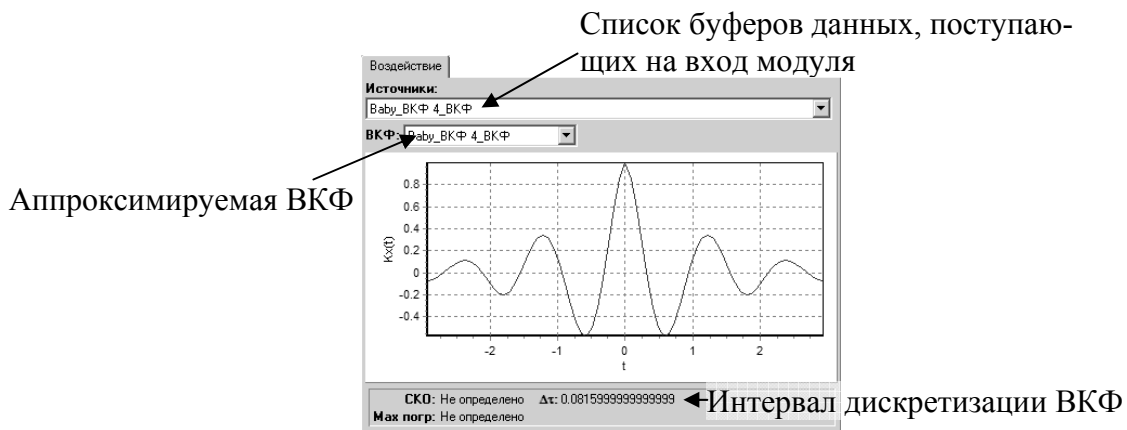


Рисунок 2.52. Закладка «Воздействие» для узла «Ортогональный фильтр»

Описание результатов

Аппроксимация без осн. св-ва



Аппроксимация с осн. св-вом



График ошибок лев. ветви



Коэфф. разложения прав. ветвь



Ортогональные функции

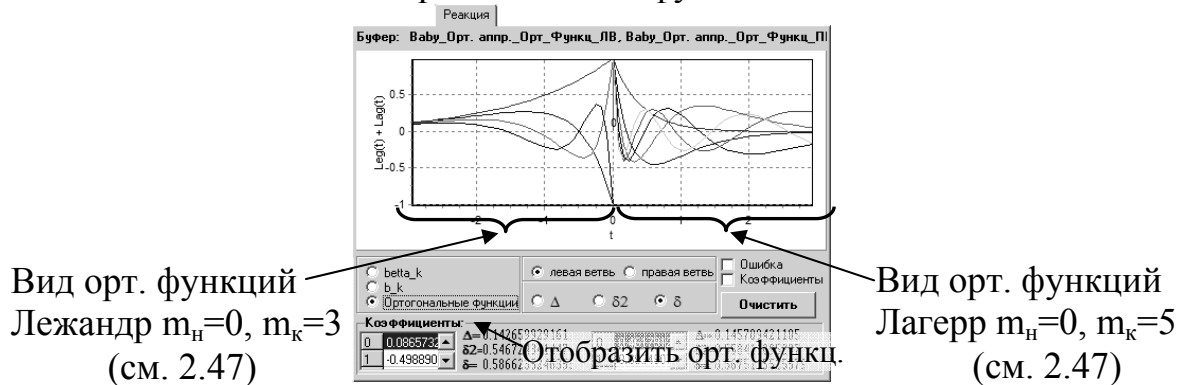


Рисунок 2.53. Зкладка «Реакция» для узла «Ортогональный фильтр»

Алгоритмы функционирования

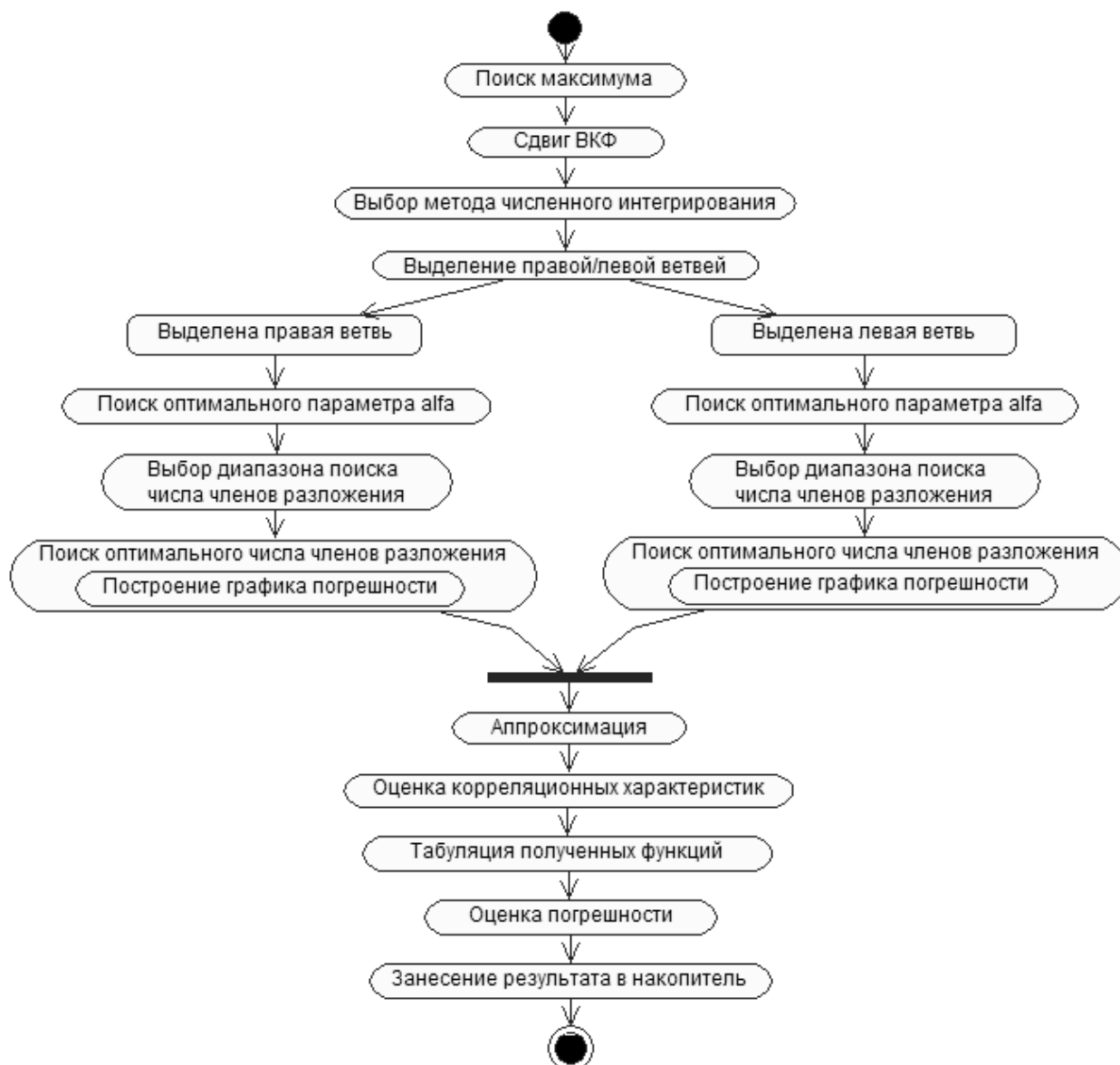


Рисунок 2.54. Диаграмма деятельности.
Вычисления в узле «Ортогональный фильтр»

Пример:

Аппроксимировать ВКФ двух поступающих от функциональных модулей «Фильтр» (см. рис. 2.55) СП.

СП, поступающий от функционального модуля «Фильтр 1», имеет КФ вида $\rho_x(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_5|\tau|} \cdot \cos \omega_{0,5}\tau$. Параметры функции: $\lambda_5 = 1$, $\omega_{0,5} = 5$.

СП, поступающий от функционального модуля «Фильтр 2», имеет КФ вида $\rho_x(\tau, \lambda_1) = e^{-\lambda_1|\tau|}$. Параметр функции: $\lambda_1 = 1$.

При этом СП от модуля «Фильтр 2» должен быть задержан на 10 интервалов дискретизации.

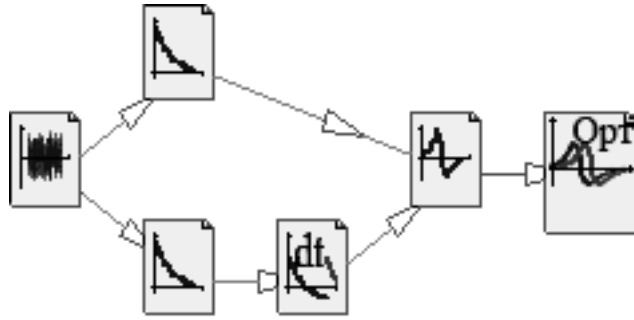


Рисунок 2.55. Система, используемая в примере

1. Выбрать функциональный модуль «Источник СП».
2. Установить вид моделируемой КФ в «Белый шум».
3. Нажать на кнопку «Рекомендация...» для определения рекомендованных значений интервала дискретизации и числа точек КФ. Появится окно «Рекомендации интервала дискретизации».
 - 3.1. Установить флаг «Две функции».
 - 3.2. Установить вид первой функции в значение « $\exp(-a|t|)$ ». Параметр функции $\lambda_1 = 1$, погрешность вычисления КФ – 0,02.
 - 3.3. Установить вид второй функции в значение « $\exp(-a|t|) \cdot \cos(\omega t)$ ». Параметры функции: $\lambda_5 = 1$, $\omega_{0,5} = 5$, погрешность вычисления КФ – 0,02.
 - 3.4. Нажать кнопку «Применить». Окно «Рекомендации интервала дискретизации» закроется, а определенные значения интервала дискретизации и числа точек КФ будут присвоены параметрам модуля. Эти параметры будут использоваться при генерации «белого шума». При нажатии кнопки «Отменить» параметры функционального модуля не изменятся.
4. Выбрать функциональный модуль «Фильтр 1».
5. Задать «Модель КФ» в значение « $\exp(-a|t|)$ », параметру λ_1 присвоить значение 1.
6. Выбрать функциональный модуль «Фильтр 2».
7. Задать «Модель КФ» в значение « $\exp(-a|t|) \cdot \cos(\omega t)$ », параметру λ_5 присвоить значение 1, параметру $\omega_{0,5} - 5$.
8. Выбрать функциональный модуль «Линия задержки».
9. Задать «Кол-во интервалов» равным 10.
10. Выбрать функциональный модуль «Формирователь ВКФ».
11. На закладке «Воздействие» выбрать в качестве буфера данных второго СП («СП2:») буфер «Baby_Линия задержки_СП».
12. Задать число точек левой и правой ветви ВКФ.
13. Выбрать функциональный модуль «Ортогональный фильтр».
14. Задать метод численного интегрирования, используемый при аппроксимации.
15. Нажать кнопку «Вычислить сеть». Результат аппроксимации отображается на закладке «Реакция» узла «Ортогональный фильтр».

16. Установить флаги «Мах в ноль» и «Отобразить по Y» так, чтобы разделение ветвей происходило в точке максимума. Это позволяет достичь лучших результатов аппроксимации. Для рассматриваемого примера, флаги «Мах в ноль» и «Отобразить по Y» должны быть установлены.
17. Выбрать ортогональный базис для левой и правой ветви.
18. Задать диапазон поиска числа членов разложения.
19. Вычислить оптимальное значение параметра ортогональной функции для левой и правой ветви.
20. Вычислить оптимальное число членов разложения правой и левой ветви.
21. Нажать кнопку «Вычислить узел».
22. Результаты аппроксимации отображаются на закладке «Реакция».

2.3.6. Формирователь спектра

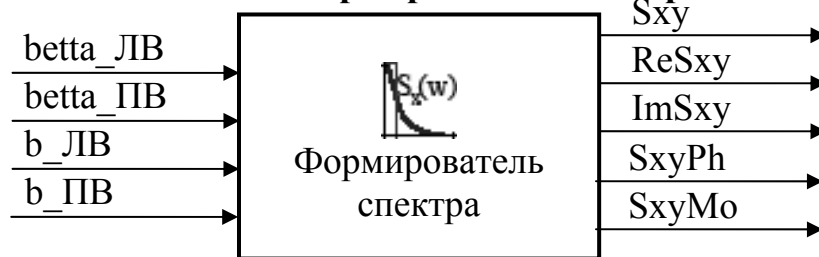


Рисунок 2.56. Схема функционального модуля «Формирователь спектра»

Диаграмма вариантов использования

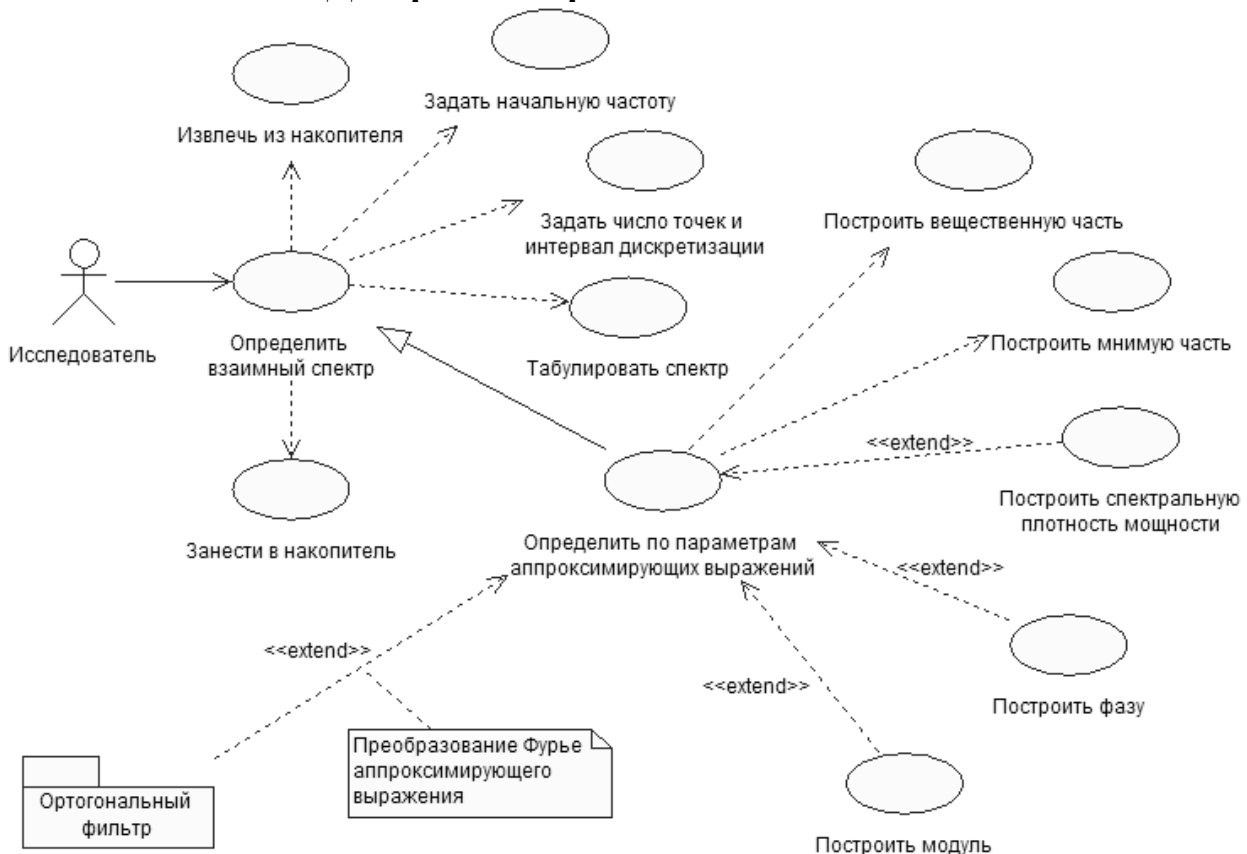


Рисунок 2.57. Диаграмма вариантов использования «Формирователь спектра»

Описание параметров

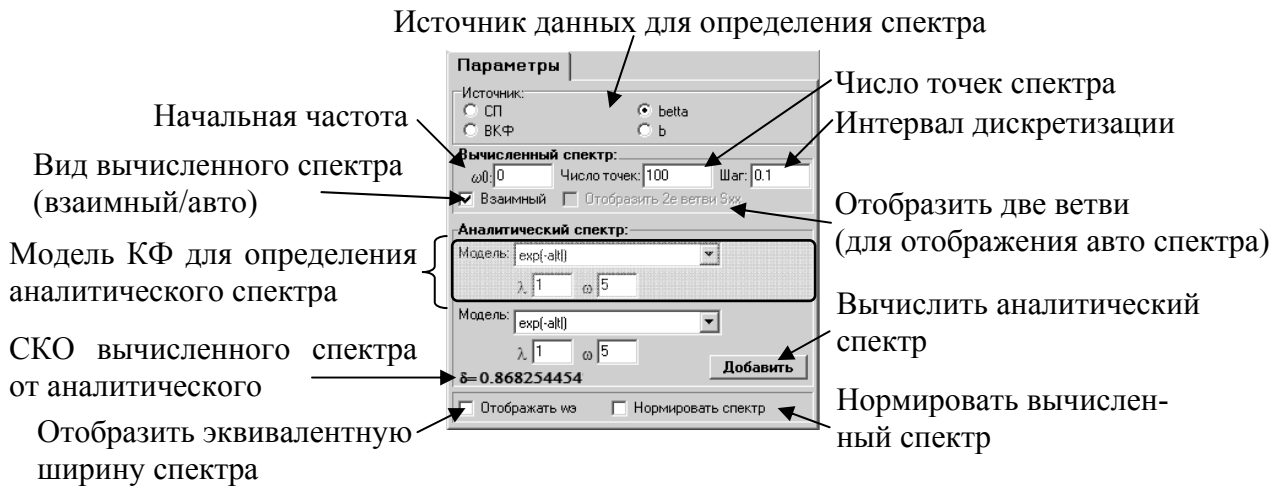


Рисунок 2.58. Закладка «Параметры» для узла «Формирователь спектра»

Описание исходных данных

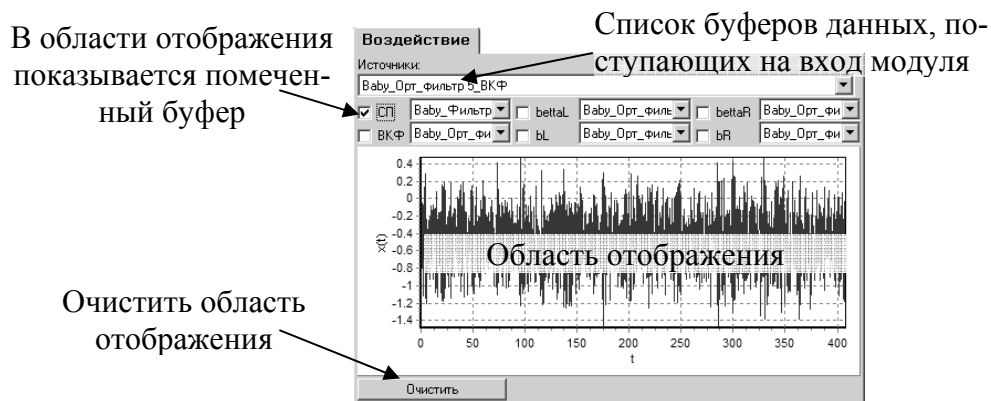


Рисунок 2.59. Закладка «Воздействие» для узла «Формирователь спектра»

Описание результатов

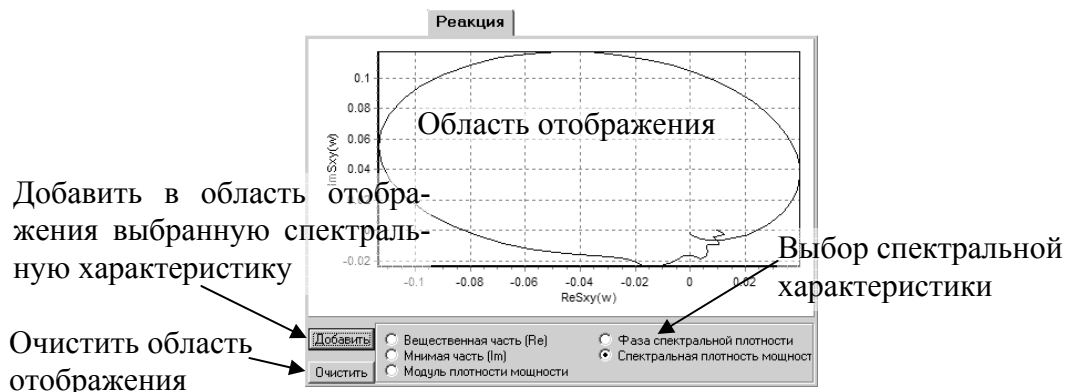


Рисунок 2.60. Закладка «Реакция» для узла «Формирователь спектра»

Алгоритмы функционирования

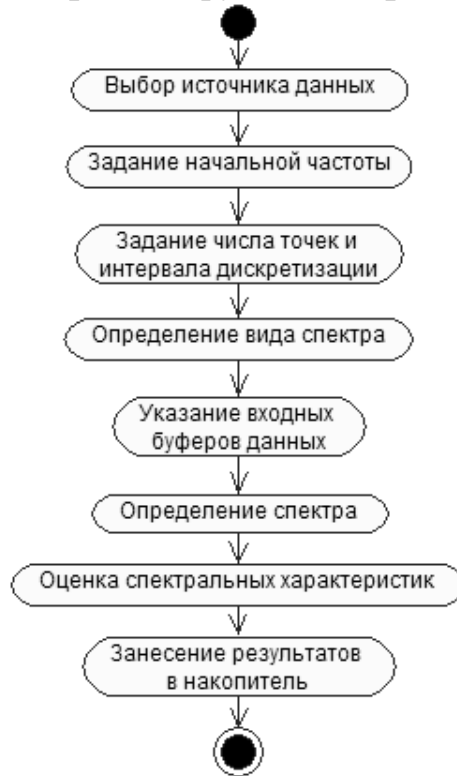


Рисунок 2.61. Диаграмма деятельности.
Вычисления в узле «Формирователь спектра»

Пример:

Аппроксимировать ВКФ двух поступающих от функциональных модулей «Фильтр» (см. рис. 2.62) СП и построить по полученным результатам спектр.

СП, поступающий от функционального модуля «Фильтр 1», имеет КФ вида $\rho_x(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_5|\tau|} \cdot \cos \omega_{0,5}\tau$. Параметры функции: $\lambda_5 = 1$, $\omega_{0,5} = 5$.

СП, поступающий от функционального модуля «Фильтр 2», имеет КФ вида $\rho_x(\tau, \lambda_1) = e^{-\lambda_1|\tau|}$. Параметр функции: $\lambda_1 = 1$.

При этом СП от модуля «Фильтр 2» должен быть задержан на 10 интервалов дискретизации.

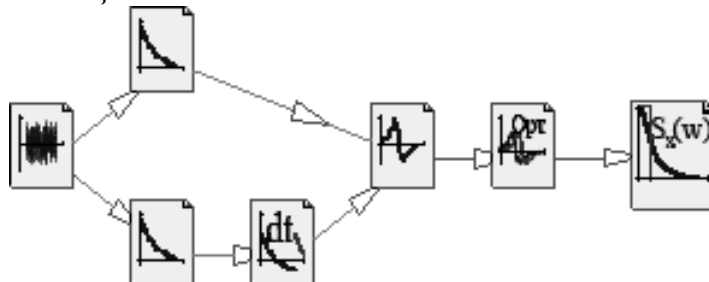


Рисунок 2.62. Система, используемая в примере

1. Произвести действия, описанные в примере раздела 2.2.5.
2. Выбрать функциональный модуль «Формирователь спектра».
3. На закладке «Параметры» задать источник данных: СП, коэффициенты β или b .
4. Задать значение начальной частоты, числа точек и интервала дискретизации спектра. Определить вид спектра (авто или взаимный).

5. При возникновении необходимости сравнения вычисленного спектра со спектром, определенным для модели аналитически, необходимо задать вид модели и ее параметры. После чего нажать на кнопку «Добавить».
6. Для отображения эквивалентной ширины спектра установить флажок «Отображать wэ».
7. Для нормировки спектра использовать флаг «Нормировать спектр».
8. На закладке «Воздействие» задать названия используемых буферов данных.
9. Нажать кнопку «Вычислить модуль» или «Вычислить сеть». Результат определения спектра отображается на закладке «Реакция».
10. Для просмотра спектральной характеристики необходимо выбрать ее вид и нажать кнопку «Добавить». Чтобы очистить область отображения спектральных характеристик, необходимо нажать кнопку «Очистить».

2.3.7. Звуковая карта

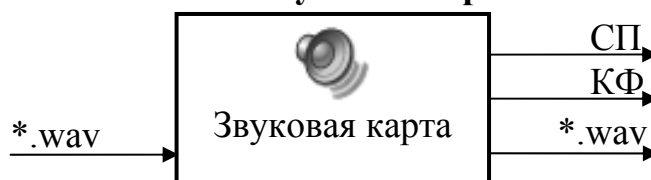


Рисунок 2.63. Схема функционального модуля «Звуковая карта»

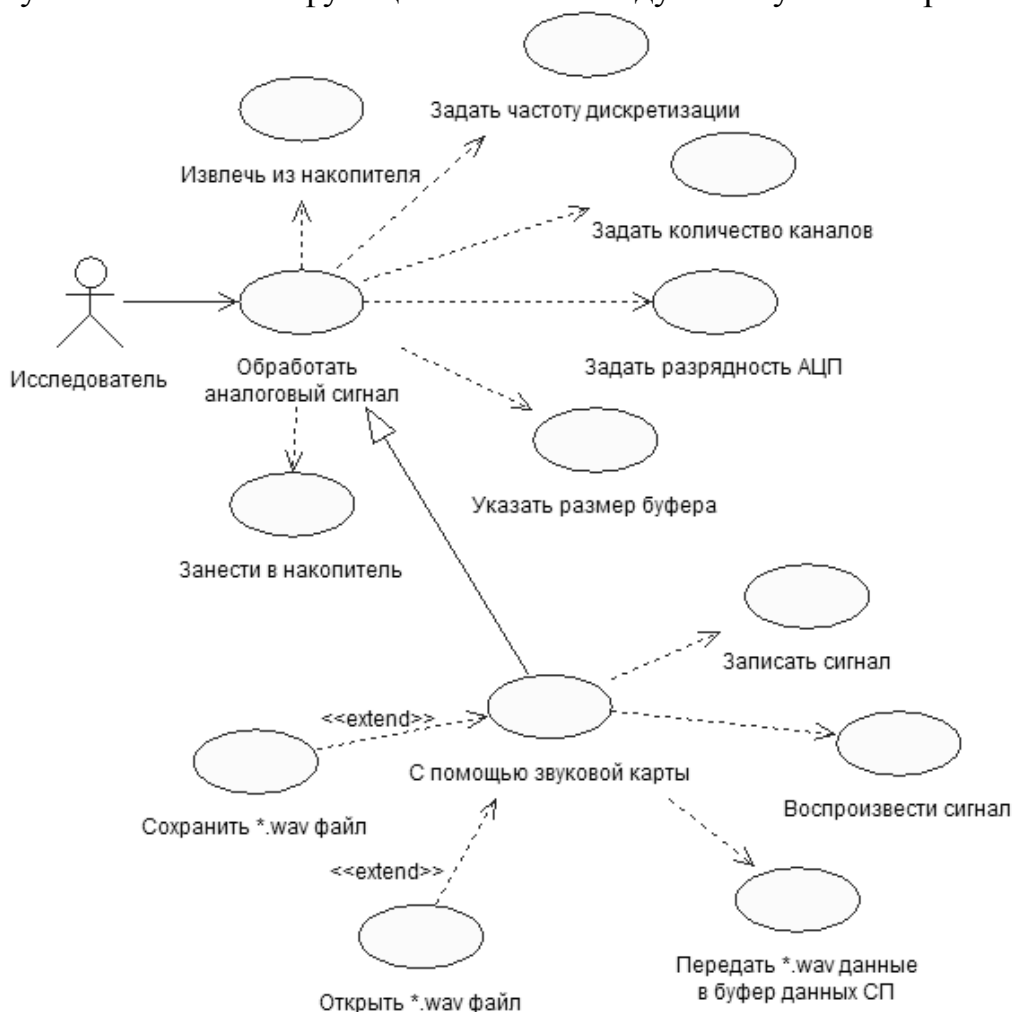


Рисунок 2.64. Диаграмма вариантов использования «Звуковая карта»

Описание параметров



Рисунок 2.65. Закладка «Параметры» для узла «Звуковая карта»

Описание исходных данных

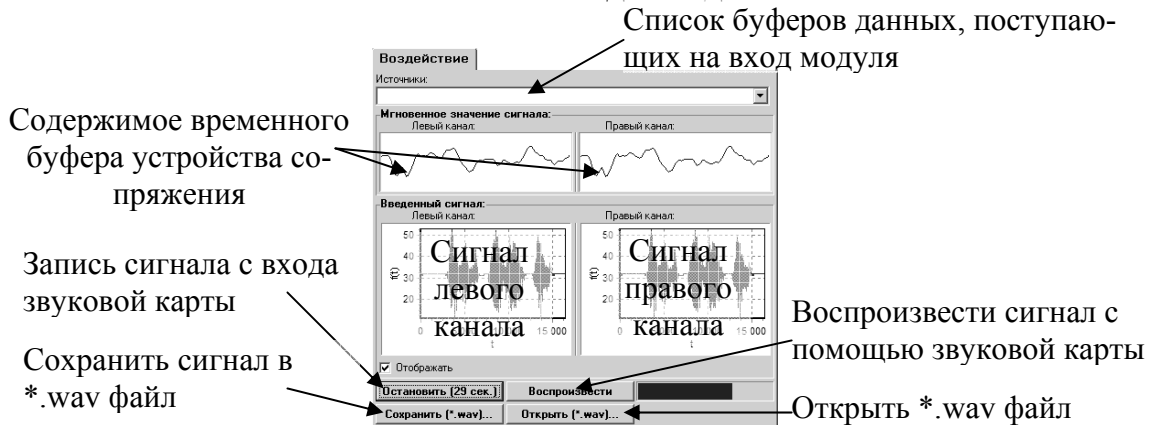


Рисунок 2.66. Закладка «Воздействие» для узла «Звуковая карта»

Описание результатов

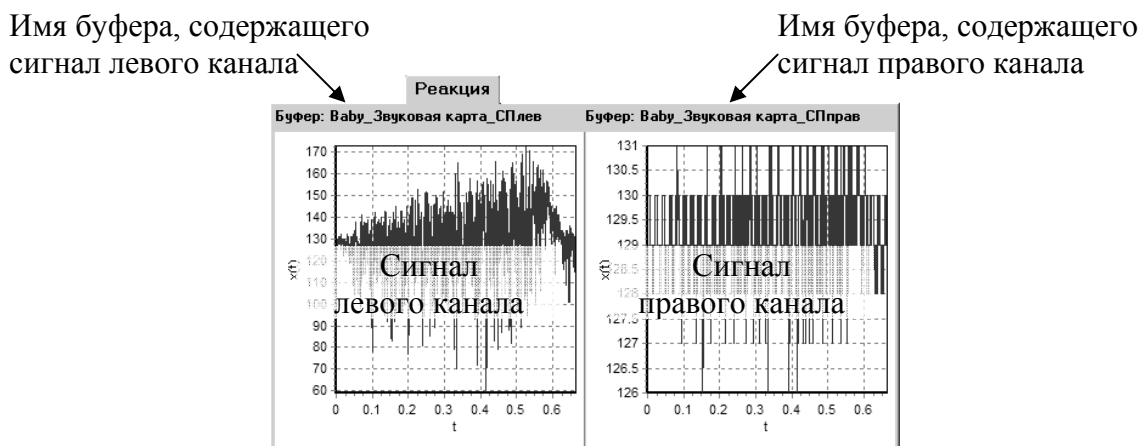


Рисунок 2.67. Закладка «Реакция» для узла «Звуковая карта»

Алгоритмы функционирования

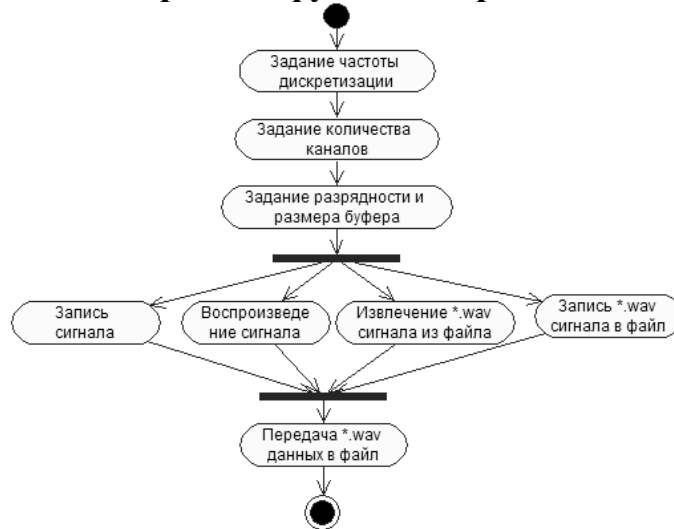




Рисунок 2.68. Диаграмма деятельности. Вычисления в узле «Звуковая карта»

Пример:

Произвести регистрацию сигнала, поступающего на вход звуковой карты.

1. Выделить функциональный модуль «Звуковая карта».
2. Задать частоту дискретизации.
3. Задать количество каналов.
4. Задать разрядность АЦП.
5. Установить размер буфера.
6. На закладке «Воздействие» нажать на кнопку «Записать». Начнется процесс регистрации аналогового сигнала. При этом в верхней части закладки отображаются мгновенные значения сигналов. Для остановки процесса регистрации необходимо повторно нажать кнопку.
7. Нажать кнопку «Вычислить узел»  или «Вычислить сеть» . При этом сигнал из формата *.wav файла будет преобразован в формат буфера данных СП.
8. На закладке «Реакция» отображаются СП, полученные с помощью звуковой карты.

2.3.8. МФУ НВЛ-08

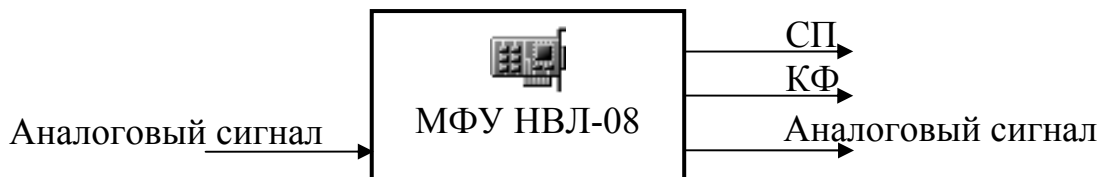


Рисунок 2.69. Схема функционального модуля «МФУ НВЛ-08»

Технические характеристики устройства

Многофункциональное устройство НВЛ-08, используемое функциональным модулем как аппаратная часть, выполнено в стандарте ISA и предназначено для работы в составе ПЭВМ типа IBM PC AT.

Устройство NVL08 выполняет следующие функции:

- аналого-цифровое преобразование;
- цифро-аналоговое преобразование;
- цифровой ввод/вывод.

Аналоговый ввод

Разрядность – 12 бит;

Время преобразования АЦП – 4 мкс;

Количество каналов – 8 дифференциальных или 16 потенциальных;

Диапазон входных напряжений (полная шкала) $\pm 5V$;

Предельное входное напряжение $\pm 12V$;

Время установления устройства выборки-хранения УВХ – не более 3 мкс;

Производительность устройства в составе IBM PC AT 20 МГц – 100000 выборок/с;

Режим запуска АЦП – программный;

Способ ввода информации из АЦП – программный и по прерыванию.

Аналоговый вывод

Разрядность цифроаналогового преобразователя ЦАП – 12 бит;

Время установления сигнала на выходе ЦАП ≤ 5 мкс;

Количество каналов – 1;

Диапазон выходного напряжения $\pm 5,12V$;

Нелинейность $\pm 0,1\%$.

Цифровой ввод

Количество входных линий – 8 (уровень ТТЛ).

Цифровой вывод

Количество выходных линий – 8 (уровень ТТЛ). Линии обладают повышенной нагрузочной способностью (до 30 мА на линию).

Структурная схема устройства

Функционально устройство НВЛ-08 разделяется на блок связи с интерфейсом (БСИ) ISA и функциональный блок (ФБ), объединенные внутренней магистралью.

БСИ выполняет согласование магистрали ISA и внутренней магистрали устройства НВЛ-08. В функции БСИ входит: дешифрация адресов программно доступных регистров устройства и формирование управляющих сигналов для организации взаимодействия ФБ и ПЭВМ. Базовый адрес устройства (200h, 220h, 300h) устанавливается с помощью перемычек (см. рис. 2.70).

БСИ обеспечивает программный способ ввода-вывода по сигналу готовности и ввод-вывод по прерыванию. Используемые входы запроса прерывания (IRQ4, IRQ5, IRQ6, IRQ10, IRQ11) устанавливаются переключателями, расположенными на плате устройства.

Функциональный блок состоит из:

- преобразователя аналогового сигнала в цифровой код, состоящего из аналогового мультиплексора (коммутатора), буферного дифференциального усилителя, устройства выборки-хранения, интегрального АЦП, источника опорного напряжения и устройства управления,
- преобразователя цифрового сигнала в аналоговый, в состав которого входят буферный регистр входного кода, интегральный ЦАП, преобразователь ток-напряжение и источник опорного напряжения,
- схемы цифрового ввода/вывода, обеспечивающей прием на шину данных ISA и буферизированную передачу цифровых сигналов, разрядностью до 8 бит.

Аналоговый мультиплексор может работать в режимах коммутации потенциальных сигналов (16 каналов) и дифференциальных (8 каналов). Режим коммутации задается переключателями (см. рис. 2.70).

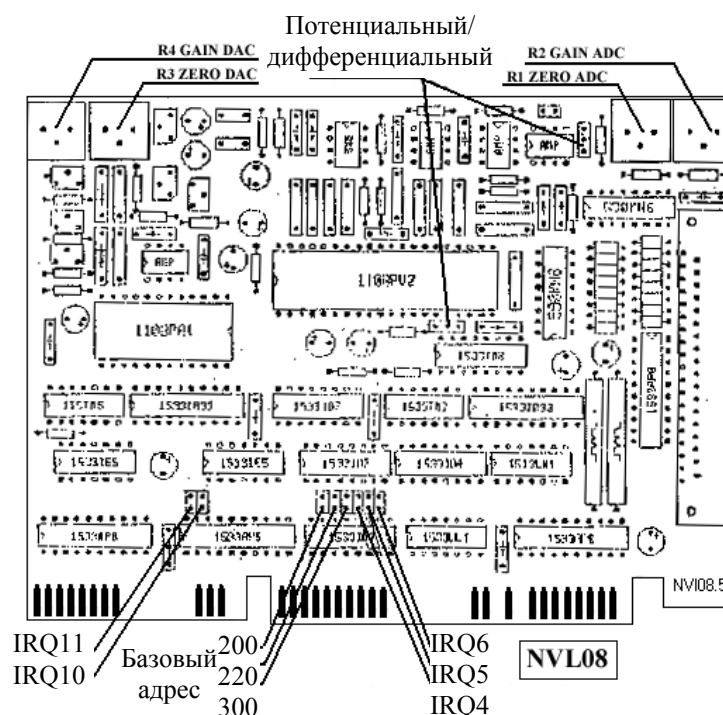


Рисунок 2.70. Многофункциональное устройство НВЛ-08

С помощью переключек на устройстве НВЛ-08 производятся следующие переключения:

- Установка базового адреса (при поставке 300h);
- Установка номера прерывания, формируемого после окончания цикла преобразования АЦП (при поставке IRQ5);
- Установка типа входных линий. **Переключаются две переключки одновременно!** (При поставке – дифференциальный вход.).

Расположение переключек указано на рисунке 2.70.

Внешние сигналы модуля выведены на разъем пользователя, назначение контактов которого представлено на рисунке 2.71:

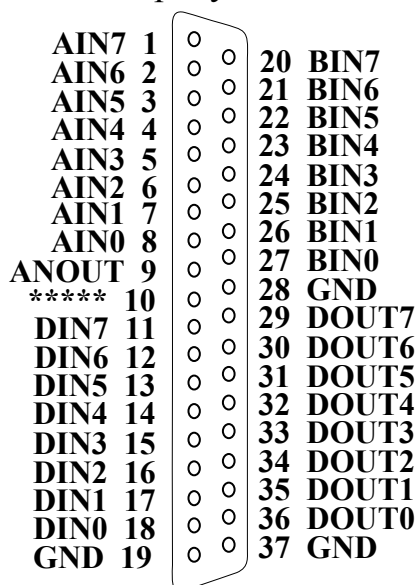


Рисунок 2.71. Разъем пользователя

где AIN0..7 и BIN0..7 – входные аналоговые сигналы при дифференциальном включении, BIN0..7 соответствуют сигналам AIN8..15 при одиночном включении, ANOUT – выход цифро-аналогового преобразователя, DIN0..7 – цифровые входы, DOUT0..7 – цифровые выходы, GND – общий провод.

Калибровка устройства

Устройство имеет четыре органа настройки:

- смещение АЦП;
- чувствительность АЦП;
- смещение ЦАП;
- размах выходного сигнала ЦАП.

Процедуру калибровки удобно производить, используя тестовую заглушку, распаянную по прилагаемому ниже описанию. В тестовой заглушке нулевой канал АЦП замкнут на общий провод, на канал 1 подается напряжение с внешнего источника (стабилитрон с заранее известным $U_{ст}$), на канал 2 подается выход ЦАПа, а на остальные каналы – напряжения от внешнего источника (желательно от батарейки) с использованием делителей.

Следует отметить, что после включения питания необходимо выждать около 15 мин для вхождения в режим.

Сначала настраивают смещение АЦП резистором R1 по каналу, замкнутому на общий провод. Затем подстройкой резистора R2 производят калибровку по каналу с известным напряжением. Теперь можно приступить к настройке ЦАПа, используя настроенный АЦП.

Резистором R3 устанавливают нулевое напряжение на выходе ЦАП (четвертое число в строке настройки), резистором R4 устанавливают размах выходного напряжения ЦАП $\pm 5.12V$. Расположение регулировочных резисторов указано на рис. 2.70.

Диаграмма вариантов использования

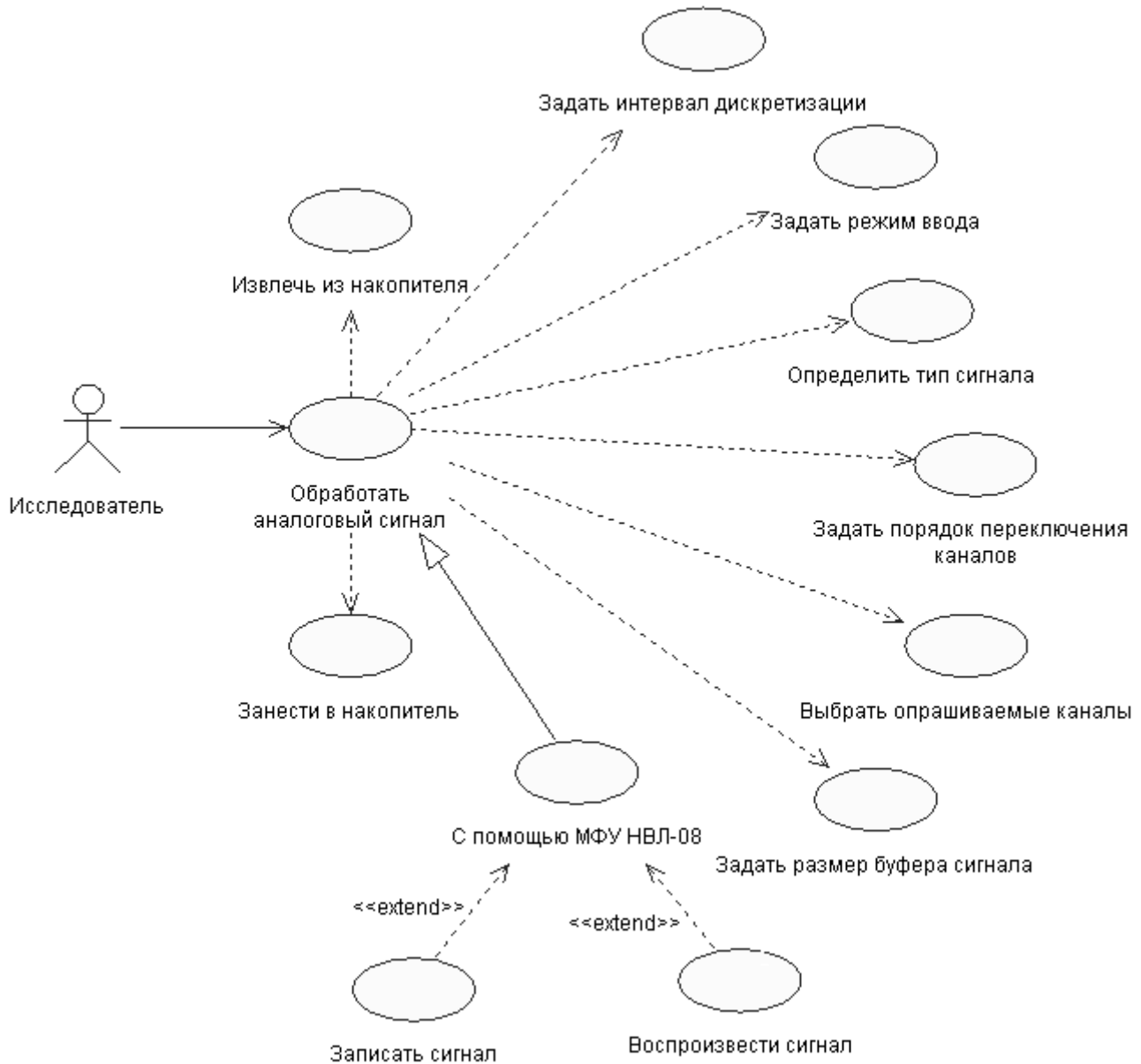


Рисунок 2.72. Диаграмма вариантов использования «МФУ НВЛ-08»



Рисунок 2.73. Закладка «Параметры» для узла «МФУ НВЛ-08»

При нажатии кнопки «Градуировка...» появляется окно настройки градуировочных характеристик АЦП и ЦАП.

Ввиду неидеальности аналого-цифровых преобразователей, используемых в системе, появляется необходимость «сглаживания» результатов измерений. Для этого при определении градуировочной характеристики используется медианная отбраковка. Её параметры задаются в виде общего количества измерений, производимых при определении соответствия код-напряжение, и количества элементов усреднения. Для начала градуировки необходимо задать вид измерителя напряжения. Возможны два варианта. Первый с использованием внешнего измерителя, в этом случае код выдается с помощью ЦАП, а напряжение, соответствующее этому коду, вводится пользователем по результатам измерений внешним к системе вольтметром. Второй вариант градуировки позволяет определять связь характеристик ЦАП и АЦП. Этот вариант позволяет использовать доступные системе средства без привлечения дополнительных средств измерения, что удобно в случае использования одной ЭВМ. После определения вида измерителя необходимо добавить запись в градуировочную таблицу. Это возможно путем выбора элемента во всплывающем меню или нажатием горячей клавиши «Ins». После чего задается выходной сигнал в одноименном элементе управления, и нажимается клавиша «Enter», тем самым подается команда на запуск процесса измерения сигнала и определения величины напряжения по полученному коду. Как видно из рис. 2.74, имеется возможность задавать единицы измерения. В случае, когда производится моделирование канала на одном вычислительном комплексе, нет необходимости работать с кодами, так как можно задать напряжение, и система пересчитает его в код по имеющейся градуировочной характеристике ЦАП.

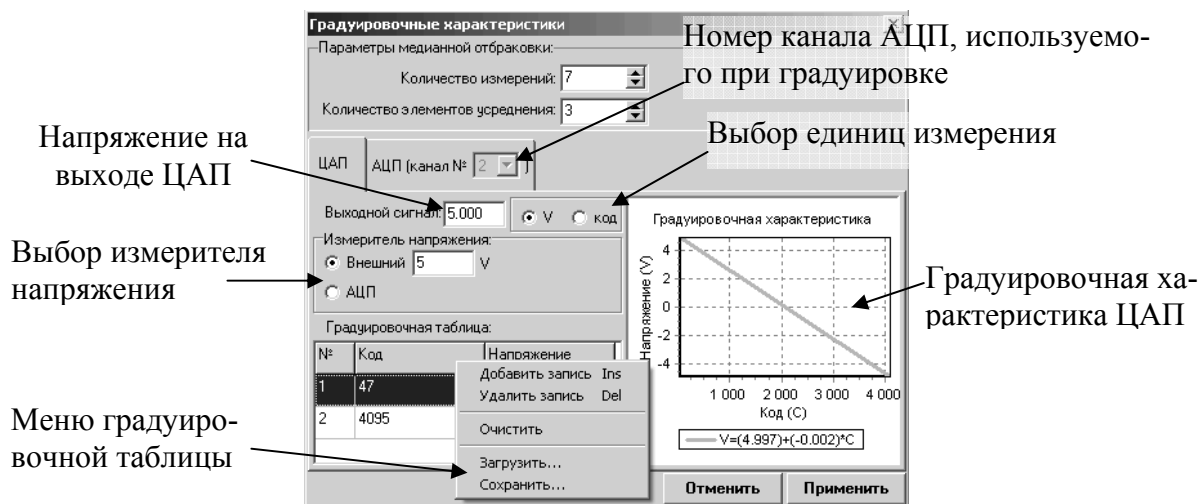


Рисунок 2.74. Градуировочная характеристика ЦАП

При измерении сигнала с помощью АЦП в системе необходимо выбрать канал приема. Для этого, при условии не пустой градуировочной таблицы, в элементе управления «АЦП (канал № XX)» задается номер канала (см. рис. 2.74). Если сигнал измеряется с помощью внешнего измерителя напряжения, то необходимо ввести выходной сигнал, нажать клавишу «Enter», после чего ввести измеренное значение с помощью управляющего элемента внешнего изме-

рителя. Результаты градуировки отображаются на графике «Градуировочная характеристика», а коэффициенты, вычисленные методом наименьших квадратов, отображаются в его нижней части.

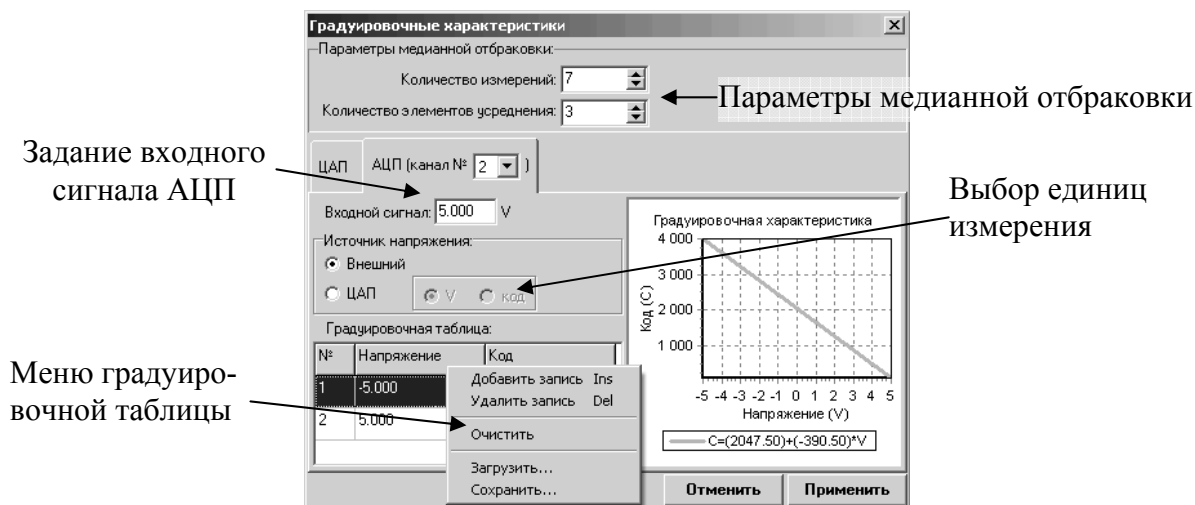


Рисунок 2.75. Градуировочная характеристика АЦП

При работе с градуировочной таблицей доступны функции удаления записи, очистки таблицы, её сохранения и загрузки из файла. Для определения необходимой функции выбирается элемент во всплывающем меню таблицы. По окончании градуировки необходимо применить новые коэффициенты градуировочной характеристики с помощью расположенной в нижней части панели кнопки «Применить». Когда все настройки переданы в систему, кнопка не активна.

Описание исходных данных

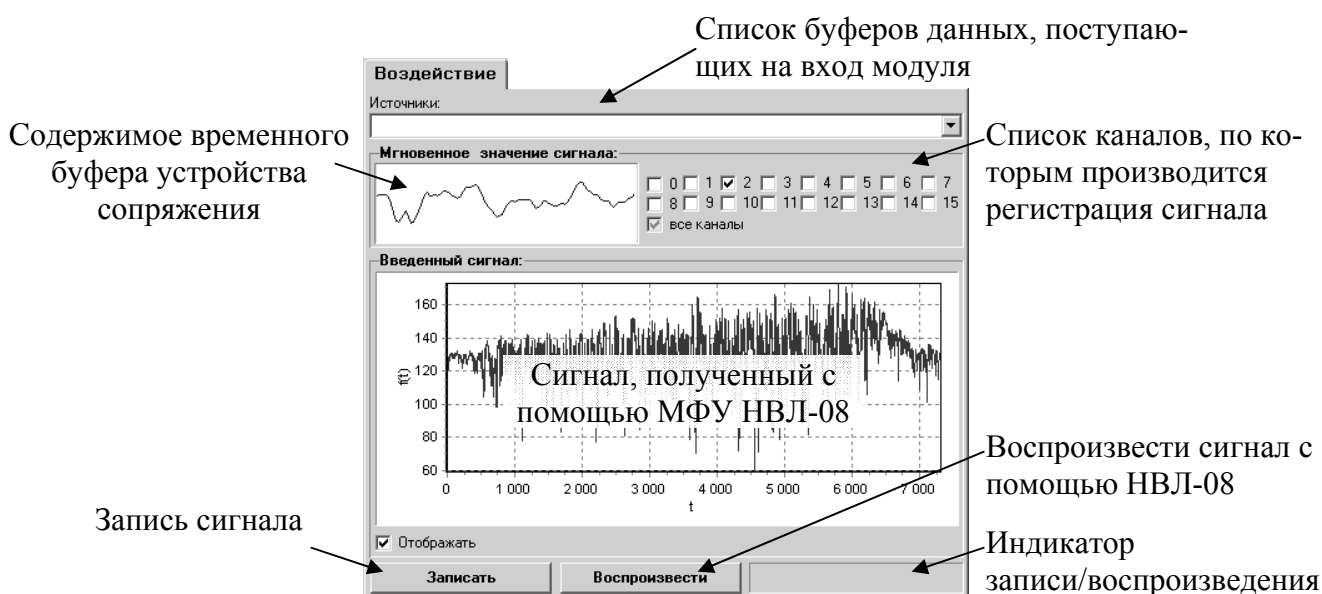


Рисунок 2.76. Закладка «Воздействие» для узла «МФУ НВЛ-08»

Описание результатов

Имя буферов, содержащих сигналы
выбранных каналов

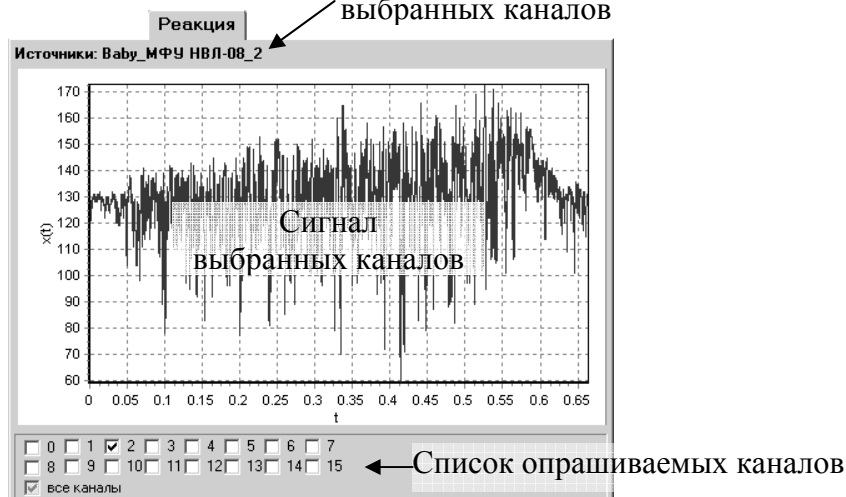


Рисунок 2.77. Закладка «Реакция» для узла «МФУ НВЛ-08»

Алгоритмы функционирования





Рисунок 2.78. Диаграмма деятельности. Вычисления в узле «МФУ НВЛ-08»

Пример:

Произвести регистрацию сигнала, поступающего на вход многофункционального устройства НВЛ-08.

1. Выделить функциональный модуль «МФУ НВЛ-08».
2. Задать интервал дискретизации.
3. Задать режим ввода.
4. Определить тип сигнала.
5. Выбрать опрашиваемые каналы и задать порядок их переключения.
6. Задать размер буфера, содержащего мгновенное значение сигнала.
7. Произвести градуировку ЦАП и АЦП.

8. На закладке «Воздействие» нажать на кнопку «Записать». Начнется процесс регистрации аналоговых сигналов. При этом в верхней части закладки отображаются мгновенные значения сигналов. Для остановки процесса регистрации необходимо повторно нажать кнопку.
9. Нажать кнопку «Вычислить узел»  или «Вычислить сеть» . При этом полученные сигналы будут переданы на выход функционального модуля.
10. На закладке «Реакция» отображаются СП, полученные с помощью МФУ НВЛ-08.

2.3.9. Накопитель

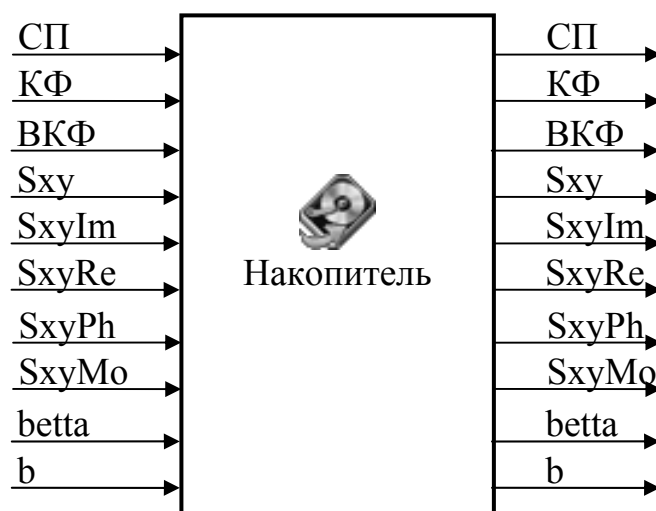


Рисунок 2.79. Схема функционального модуля «Накопитель»

Диаграмма вариантов использования

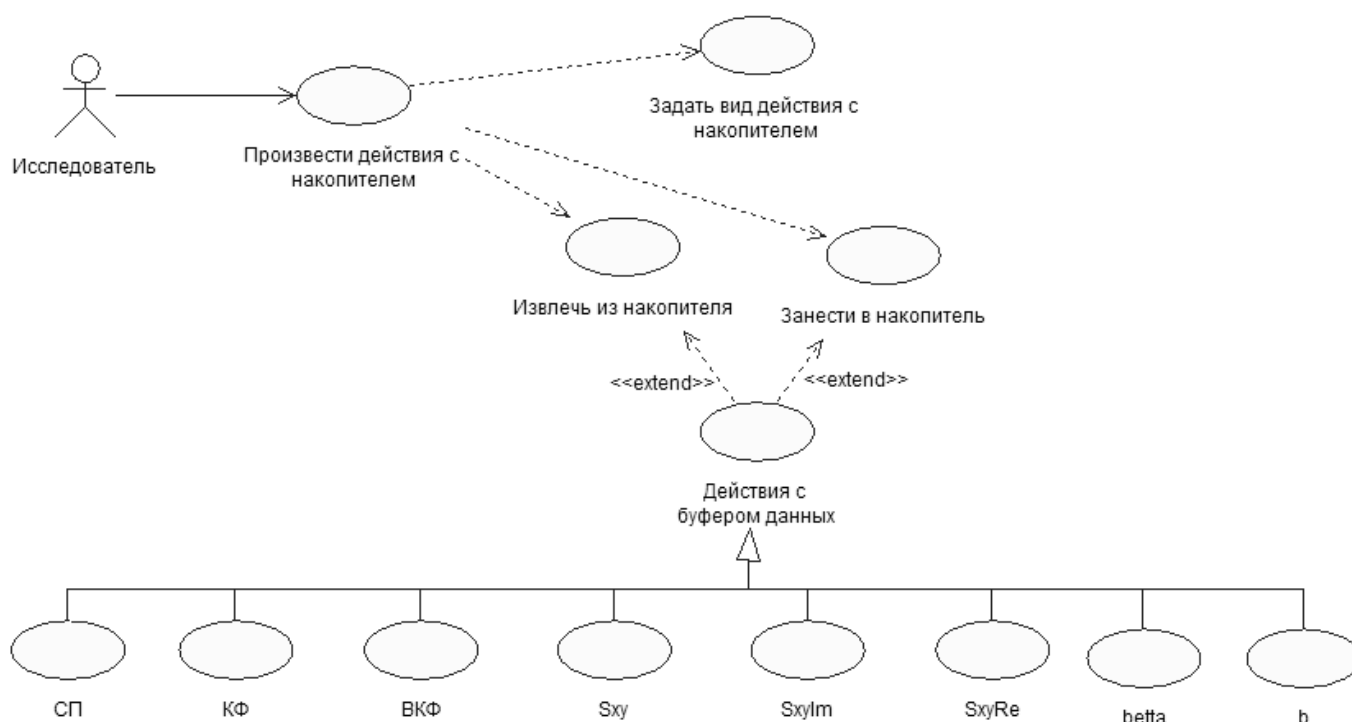


Рисунок 2.80. Диаграмма вариантов использования «Накопитель»

Описание параметров

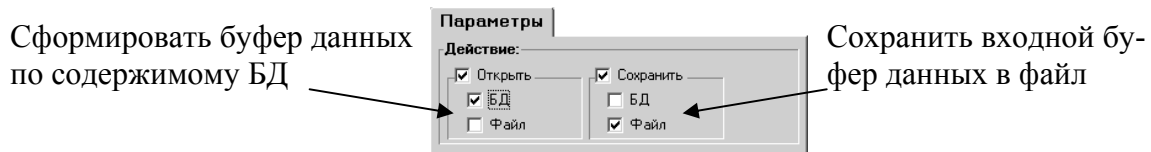


Рисунок 2.81. Закладка «Параметры» для узла «Накопитель»

Описание исходных данных

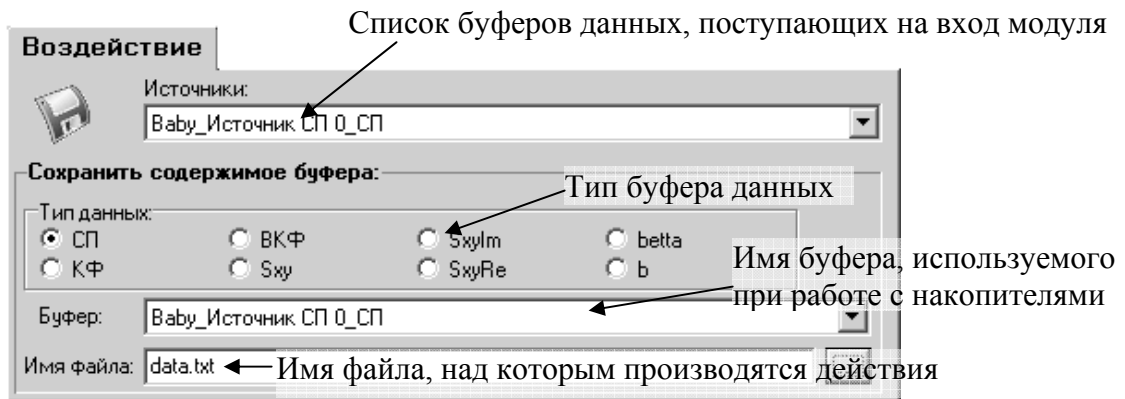


Рисунок 2.82. Закладка «Воздействие» для узла «Накопитель»

Описание результатов

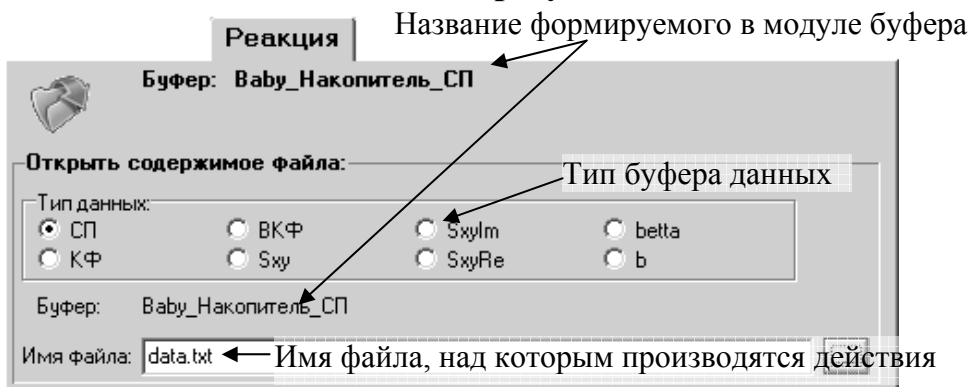


Рисунок 2.83. Закладка «Реакция» для узла «Накопитель»

2.4. Меню пользователя

В верхней части главного окна программы располагается меню пользователя, с его помощью можно настроить вид программного окна, произвести действия с накопителями, а также подключить базу данных.

Меню пользователя состоит из следующих пунктов:

- **Файл**
- **Система**
- **Вид**
- **Вычислить**
- **База данных**
- **?**

Рассмотрим каждый из перечисленных пунктов отдельно.

Пункт *Файл*

Файл	
Открыть сеть...	F3
Сохранить сеть...	F2
Заккрыть сеть	Ctrl+F4
Открыть буфер...	Ctrl+O
Сохранить буфер...	Ctrl+S
Выход	

- **Открыть сеть...** – открыть семантическую сеть в накопителе;
- **Сохранить сеть...** – сохранить семантическую сеть в накопителе;
- **Заккрыть сеть** – удалить все узлы и дуги входящие в семантическую сеть;
- **Открыть буфер...** – открыть активный в данный момент буфер;

- **Сохранить буфер...** – сохранить активный в данный момент буфер;
- **Выход** – выгрузить автоматизированный комплекс из памяти вашего компьютера.

Пункт *Система*

Система	
Следующий модуль	Ctrl+N

- **Следующий модуль** – сделать активным следующий модуль системы.

Пункт *Вид*

Вид	
<input checked="" type="checkbox"/> Параметры (узла)	
<input checked="" type="checkbox"/> Воздействия/Реакция (узла)	
<input checked="" type="checkbox"/> БД (сети)	

- **Параметры (узла)** – отобразить/скрыть область параметров узла;
- **Воздействия/Реакция (узла)** – отобразить/скрыть область воздействий и реакций узла;
- **БД (сети)** – отобразить/скрыть область накопителей и информации об ошибках.

Пункт *Вычислить*

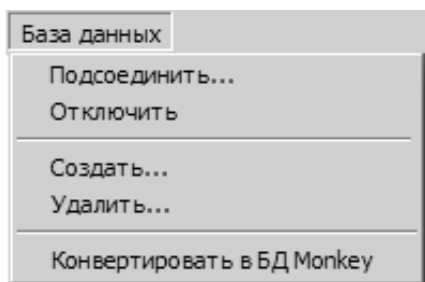
Вычислить	
Систему	F9
Модуль	F8
alfa оптимальный	Ctrl+A
m оптимальный	Ctrl+M

- **Систему** – произвести вычисления во всех узлах системы;
- **Модуль** – произвести вычисления в активном модуле;
- **alfa оптимальный** – определить оптимальное значение параметра масштаба. При определении

должен быть активным модуль «Ортогональный фильтр»;

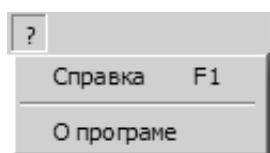
- **m оптимальный** – определить оптимальное число членов разложения ряда (правой и левой ветви). При определении должен быть активным модуль «Ортогональный фильтр».

Пункт *База данных*



- **Подсоединить...** – подсоединить БД с информацией о семантических сетях, узлах и результатах вычислений. При этом БД должна быть создана, а СУБД Microsoft SQL Server 2000 – находиться в активном состоянии;
- **Отключить** – отключить подсоединенную ранее БД;
- **Создать...** – создать БД, при этом необходимо указать сведения о пользователе. Создавать и удалять БД может только пользователь с правами администратора программного комплекса;
- **Удалить...** – удалить созданную ранее БД;
- **Конвертировать в БД Monkey** – преобразовать БД, созданную программным комплексом аппроксимации, в БД автоматизированного комплекса, описанного в [12].

Пункт ?



- **Справка** – вызвать справочную систему автоматизированного комплекса;
- **О программе** – показать справочное окно с основными сведениями об автоматизированном комплексе.

2.5. Строка статуса

В строке статуса отображается текущее состояние автоматизированного комплекса. Строка состоит из двух частей: в первой отображается название вычисляемого узла, если происходит вычисление узлов сети, или отображает название активного в данный момент узла; во второй части указывается название буфера, заданного в поле выбора буферов (при этом поле выбора должно быть выделено).

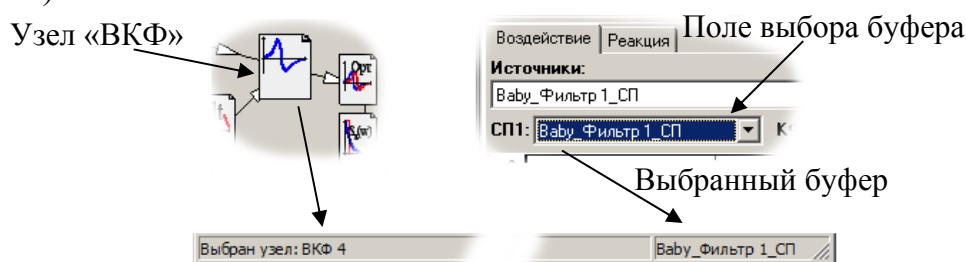


Рисунок 2.84. Строка статуса

2.6. Справочная система

Для того, чтобы получить полную справку по программе, достаточно воспользоваться командой «Справка» в меню «?». Здесь приведено детальное описание ключевых задач, реализуемых с помощью автоматизированного комплекса корреляционно-спектрального анализа, а также ответы на часто задаваемые вопросы. Если у Вас возникнет вопрос по отдельному управляющему элементу программного комплекса, выделите его и нажмите на клавишу <F1>.

3. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

3.1. Имитационное моделирование систем генерации пар случайных процессов

Цель работы: изучение метода моделирования случайных процессов с помощью композиции отдельных имитационных модулей.

3.1.1. Содержание лабораторной работы

В данной работе реализована наглядная и эффективная схема получения пар случайных процессов путем составления системы из известных структурных единиц – функциональных модулей с заданными свойствами. Случайный процесс или генерируется в модуле, или преобразуется некоторым образом при прохождении через него. Для получения необходимых характеристик случайного процесса необходимо задать параметры модулей. Процессу синтеза системы, а также ее последующей компиляции посвящена специальная глава (см. глава 2). Для выполнения этой лабораторной работы необходимо внимательно ознакомиться с правилами редактирования систем и методикой задания входных воздействий модуля.

При составлении системы рекомендуем сначала добавить все элементы-модули, затем установить связи между элементами, после чего настроить элементы. Чтобы впоследствии вернуться к созданной ранее системе, ее рекомендуется сохранить в базу данных или файл.

В ходе работы необходимо составить систему, задать параметры функциональных модулей и на вкладке «Воздействие», назначить входные буферы данных модуля. При этом особое внимание следует уделить этапу создания системы, так как в следующих работах эти навыки будут необходимы для построения систем.

Суть эксперимента состоит в генерации «белого шума» с последующим пропуском его через фильтры.

На первом этапе лабораторной работы нужно создать систему, представленную на рисунке 3.1.



Рисунок 3.1. Система функциональных модулей

В начале работы с помощью функционального модуля «Источник СП» генерируется «белый шум». При этом на основе информации об используемых фильтрах определяется интервал дискретизации.

Например, для функции $e^{-\lambda_s|\tau|} \cos \omega_{0,5} \tau$ определение интервала дискретизации выйдет так:

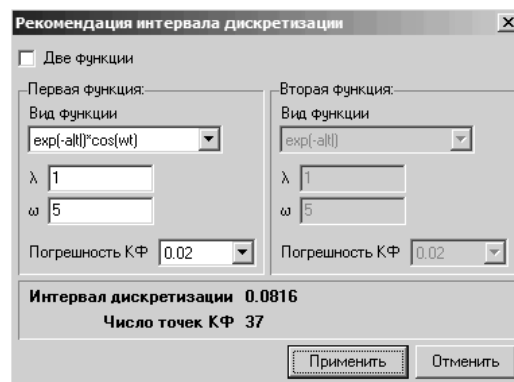


Рисунок 3.2. Рекомендации по выбору интервала дискретизации

После этого результирующий «белый шум» подается в модуль «Фильтр 1», где на вкладке «Воздействие» указывается буфер данных модуля «Источник СП», содержащий СП «белый шум». На вкладке «Параметры» модуля «Фильтр 1» устанавливается требуемая модель КФ (см. рис. 3.3).

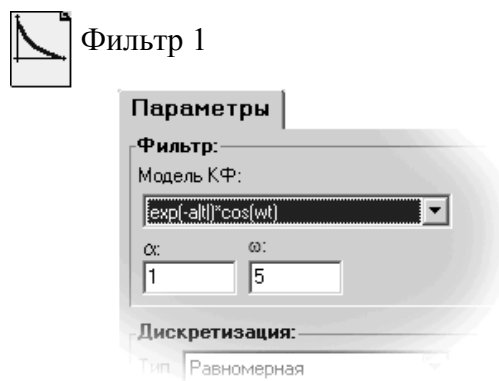


Рисунок 3.3. Выбор модели КФ

По завершению настройки системы необходимо нажать кнопку «Вычислить систему». При этом в модуле «Источник СП» сгенерируется «белый шум», который пройдет через фильтр, а СП будет иметь заданный вид КФ.

Следующим шагом лабораторной работы является создание схемы, включающей некоторое число фильтров, задержек, один источник «белого шума». Требуется провести несколько экспериментов по получению псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ и определить СКО теоретической КФ от рассчитанной по сгенерированной последовательности (см. рис. 3.4).

Теоретически рассчитанная КФ отображается синим цветом на вкладке «Воздействия» узла «Источник СП». Она представляет собой функцию, полученную аналитически на основе сведений о характере и параметрах формирующего фильтра, на вход которого поступает «белый шум». Выражения для всех используемых в автоматизированной системе фильтров приведены в приложении.

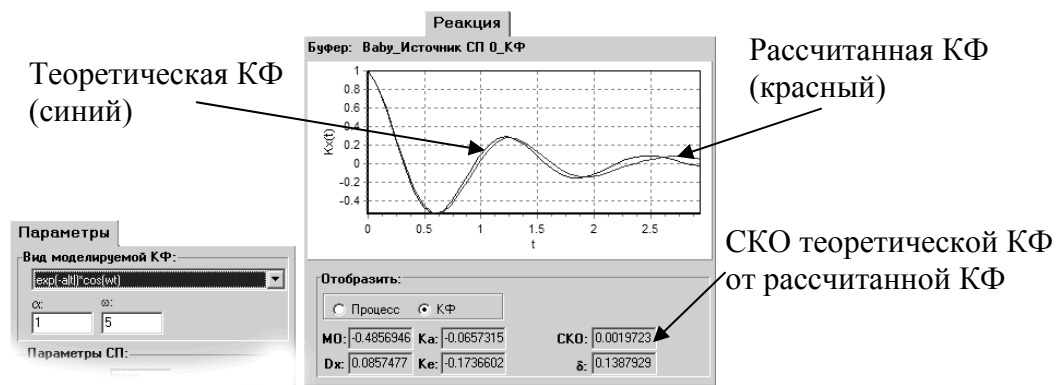


Рисунок 3.4. Результат вычислений в «Источник СП»

Интервал дискретизации, установленный в узле «Источник СП», автоматически передается в связанные с ним узлы. В качестве эксперимента рекомендуем посмотреть результаты при различных интервалах дискретизации и ответить на вопрос: как влияет интервал дискретизации на качество генерации процесса с заданной КФ?

После наложения экспериментально рассчитанной КФ и полученной аналитически в соответствующих полях отображаются среднеквадратическое отклонение и максимальная погрешность. Суть лабораторной работы состоит в последовательном выполнении 29 экспериментов по генерации пары процессов и расчету их КФ с накоплением сведений об ошибке оценки КФ. Таким образом, результатом работы станет получение методической погрешности оценки КФ методом имитационного моделирования.

Если ведется база данных, необходимо подключить систему, вызвав пункт меню «База данных/Подсоединить...». В этом случае на вкладке «Система» необходимо создать свою систему, нажав на кнопку «Добавить систему в БД» и указав в качестве названия свою фамилию или уникальное имя. После вычисления системы результат необходимо сохранить в БД.

После проведения 29 экспериментов результаты будут отображены на вкладке «Модуль».

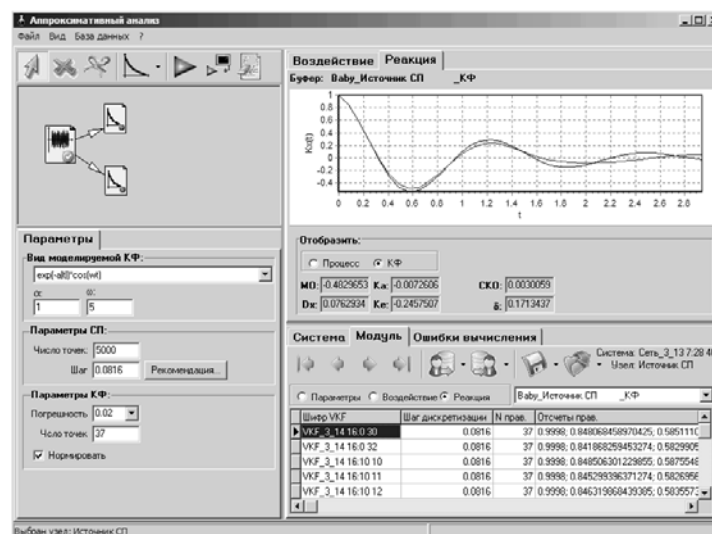


Рисунок 3.5. База данных корреляционной функции

В случае отсутствия базы данных необходимо вручную заполнить таблицу, пример которой приведен ниже:

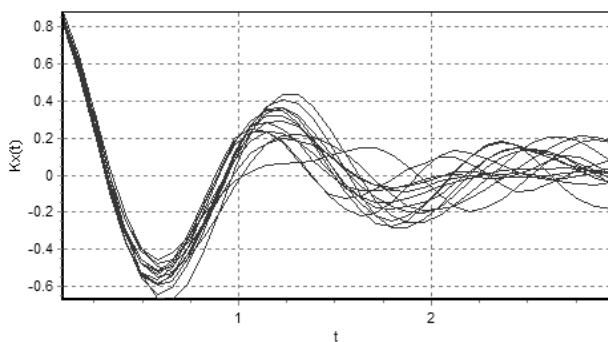
Результаты моделирования

Таблица 3.1

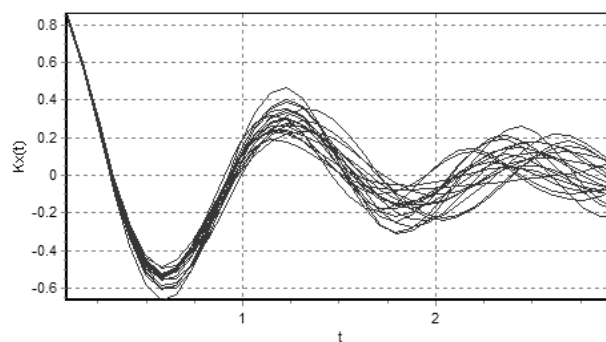
Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7
СКО	0,1455	0,1509	0,1492	0,1636	0,1606	0,1736	0,1743
Мах погрешность	0,131	0,1245	0,1229	0,129	0,1222	0,125	0,1292
Номер эксперимента	8	9	10	11	12	13	14
СКО	0,1616	0,1552	0,1806	0,1521	0,178	0,156	0,1915
Мах погрешность	0,121	0,1234	0,1235	0,1211	0,1319	0,1239	0,1285
Номер эксперимента	15	16	17	18	19	20	21
СКО	0,1501	0,1436	0,1425	0,16	0,1531	0,1592	0,1447
Мах погрешность	0,124	0,1265	0,1312	0,1279	0,1227	0,1235	0,1241
Номер эксперимента	22	23	24	25	26	27	28
СКО	0,2107	0,216	0,1916	0,1521	0,1466	0,1439	0,1777
Мах погрешность	0,1244	0,1289	0,1194	0,1276	0,126	0,1321	0,1243
Номер эксперимента	29						
СКО	0,1652						
Мах погрешность	0,1298						

После подсчета погрешностей матожидание СКО составит 0,1638, максимальная погрешность – 0,1321. Последнее значение – методическая погрешность, полученная методом имитационного моделирования.

На рисунке 3.6 приведены взаимные корреляционные функции для рассматриваемых модулей при разном объеме выборки. Особо отметим совпадение функций на начальном участке в случае малого числа отсчетов исходного случайного процесса.



а) M=500



б) M=1000

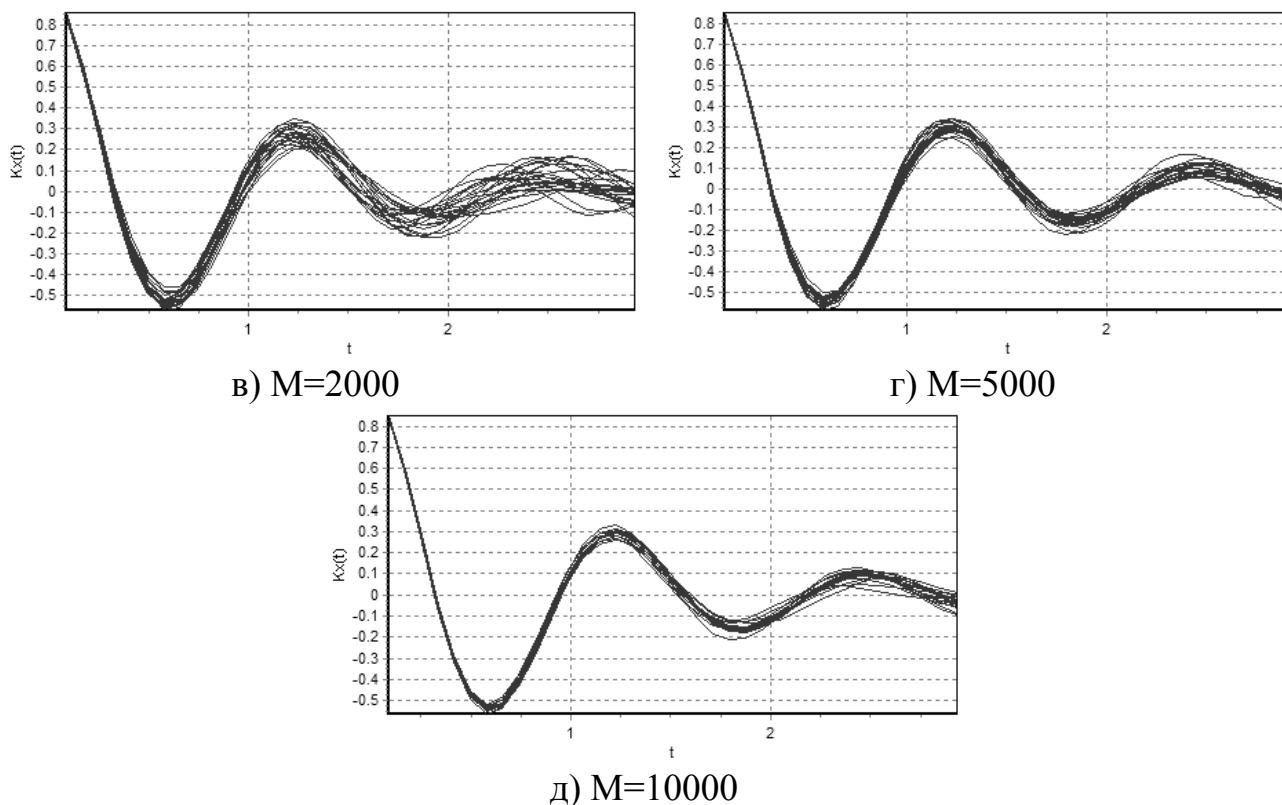


Рисунок 3.6. Корреляционные функции при объеме выборки M

3.1.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: вид автокорреляционных функций, значения их параметров.
2. Составить систему для выполнения преобразований, требуемых при получении указанной в задании пары случайных процессов. Настроить модули.
3. Сгенерировать «белый шум».
4. Получить процесс с заданным видом КФ.
5. Оценить КФ и построить ее аналитический график.
6. Занести погрешности в БД. (В случае отсутствия БД оформить таблицу 3.1).
7. Повторить пункты 3-6 29 раз.
8. Определить погрешность моделирования процесса методом имитационного моделирования.
9. Оформить отчет.

3.1.3. Содержание отчета

1. Задание.
2. Цель работы.
3. Схема системы.
4. Метод и алгоритм моделирования коррелированных временных рядов с заданным преподавателем видом корреляционной функции.
5. Импульсная характеристика формирующего фильтра (приложение 3).
6. Примеры реализации коррелированных временных рядов для объема выборки $M=5000$ и соответствующих им корреляционных функций.

7. Погрешности генерирования коррелированных временных рядов для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Интервал дискретизации выбрать для восстановления корреляционной функции с погрешностью $\delta = 0,02$.
8. Графические зависимости погрешности генерирования от объема выборки $M=500, 1000, 2000, 5000$.
9. Выводы по работе.

3.1.4. Контрольные вопросы

1. Какие вероятностные характеристики относятся к характеристикам взаимосвязи?
2. Какие случайные процессы, временные ряды относятся к коррелированным случайным процессам?
3. Какой метод лежит в основе генерирования временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
4. От чего зависит выбор интервала дискретизации случайного процесса?

3.2. Взаимный корреляционный анализ

Цель работы: Изучение методов моделирования случайных процессов и оценки взаимных корреляционных функций.

3.2.1. Содержание лабораторной работы

Лабораторная работа включает в себя генерацию пары процессов с определением интервала дискретизации и взаимной корреляционной функции.

Для выполнения работы необходимо собрать систему функциональных модулей, показанную на рис. 3.7.

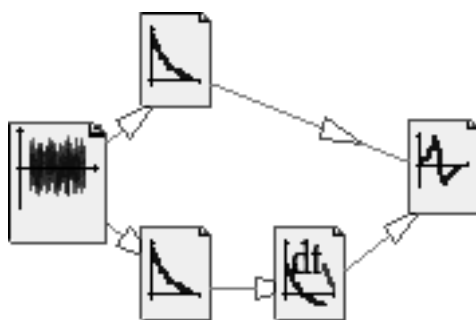


Рисунок 3.7. Система функциональных модулей

В начале работы с помощью функционального модуля «Источник СП» генерируется «белый шум». При этом необходимо выбрать интервал дискретизации на основе информации об используемых фильтрах.

Например, для заданных функций $e^{-\lambda_7|\tau|} \cos \omega_{0,5}\tau$ и $e^{-\lambda_7|\tau|} \left(\cos \omega_{0,7}\tau - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin \omega_{0,7}\tau \right)$ определение интервала дискретизации выглядит так:

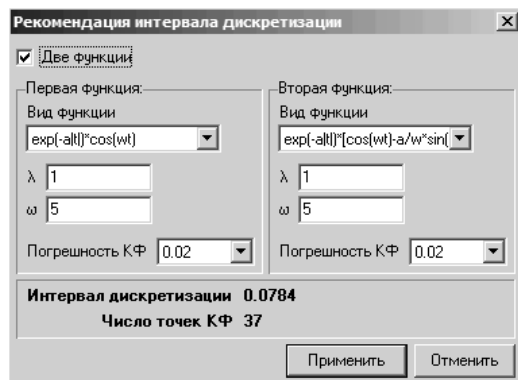


Рисунок 3.8. Рекомендации по выбору интервала дискретизации

После этого результирующий «белый шум» подается в модули «Фильтр 1» и «Фильтр 2», где на вкладке «Параметры» устанавливаются требуемые функции (см. рис. 3.9).



Рисунок 3.9. Рекомендации по выбору модели КФ

В модуле «Линия задержки» установите количество интервалов в 0. Рекомендуем попробовать изменить задержку процесса и определить влияние задержки на взаимную корреляцию процессов. Задержка задается длительностью интервала и количеством интервалов. Таким образом, предоставлена возможность наглядно задавать задержку, кратную интервалу дискретизации.

Для определения ВКФ процессов, поступающих от фильтра и линии задержки, на вкладке «Воздействие» необходимо задать буферы данных с исходными СП (см. рис. 3.10).



Формирователь

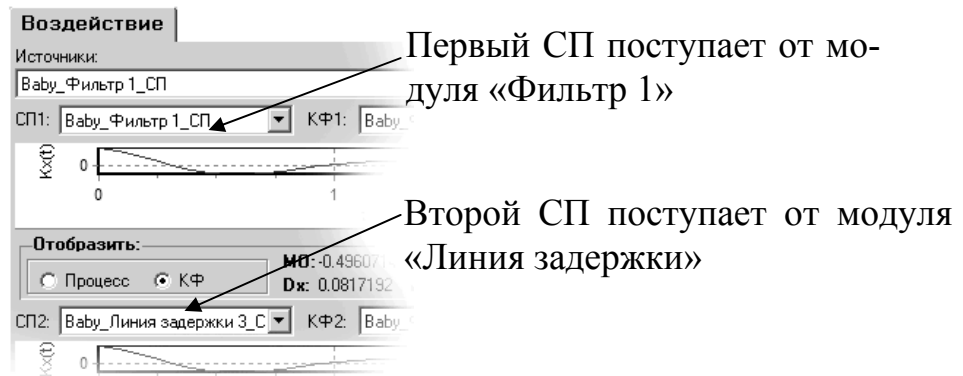


Рисунок 3.10. Выбор буферов данных с исходными СП

Взаимную корреляционную функцию указанной пары процессов можно рассчитать в модуле «Формирователь ВКФ», установив предварительно число точек левой и правой ветвей графика (см. рис. 3.11).



Формирователь

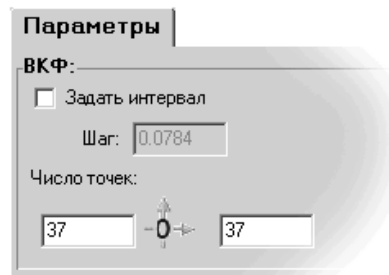


Рисунок 3.11. Установка параметров ВКФ

По завершению настройки системы необходимо нажать кнопку «Вычислить сеть». При этом в модуле «Источник СП» сгенерируется «белый шум», в модулях фильтров полученный «белый шум» подвергнется фильтрации, а СП на выходе фильтров будут иметь заданный вид КФ. В модуле «Формирователь ВКФ» будет определена взаимная КФ (см. рис. 3.12).



Формирователь ВКФ

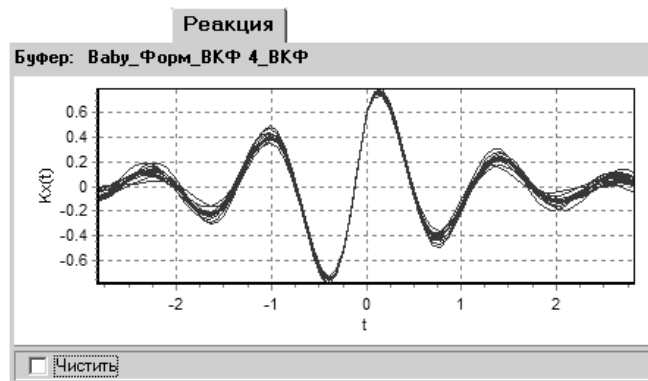


Рисунок 3.12. ВКФ, определенная в модуле «Формирователь ВКФ»

Суть лабораторной работы состоит в последовательном выполнении 29 экспериментов по генерации пары процессов и расчету их КФ с накоплением сведений об ошибке оценки КФ. Таким образом, результатом работы станет получение методической погрешности оценки КФ методом имитационного моделирования.

Если ведется база данных, необходимо подключить систему, вызвав пункт меню «База данных/Подсоединить...». В этом случае на вкладке «Система» необходимо создать свою систему, нажав на кнопку «Добавить систему в БД» и указав в качестве названия свою фамилию. После вычисления системы результат необходимо сохранить в БД.

После проведения 29 экспериментов результаты будут отображены на вкладке «Модуль».

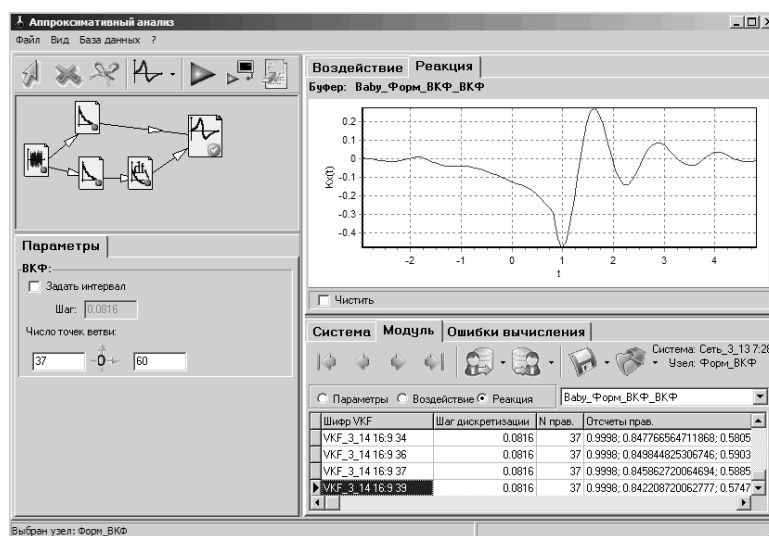


Рисунок 3.13. База данных взаимной корреляционной функции

В случае отсутствия базы данных необходимо вручную заполнить таблицу, пример которой приведен ниже:

Результаты моделирования

Таблица 3.2

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7
СКО	0,1455	0,1509	0,1492	0,1636	0,1606	0,1736	0,1743
Мах погрешность	0,131	0,1245	0,1229	0,129	0,1222	0,125	0,1292
Номер эксперимента	8	9	10	11	12	13	14
СКО	0,1616	0,1552	0,1806	0,1521	0,178	0,156	0,1915
Мах погрешность	0,121	0,1234	0,1235	0,1211	0,1319	0,1239	0,1285
Номер эксперимента	15	16	17	18	19	20	21
СКО	0,1501	0,1436	0,1425	0,16	0,1531	0,1592	0,1447
Мах погрешность	0,124	0,1265	0,1312	0,1279	0,1227	0,1235	0,1241

Номер эксперимента	22	23	24	25	26	27	28
СКО	0,2107	0,216	0,1916	0,1521	0,1466	0,1439	0,1777
Мах погрешность	0,1244	0,1289	0,1194	0,1276	0,126	0,1321	0,1243
Номер эксперимента	29						
СКО	0,1652						
Мах погрешность	0,1298						

После подсчета погрешностей матожидание СКО составит 0,1638, максимальная погрешность – 0,1321. Последнее значение – методическая погрешность, полученная методом имитационного моделирования.

На рисунке 3.14 приведены взаимные корреляционные функции для рассматриваемых модулей при разном объеме выборки. Особо отметим совпадение функций на начальном участке в случае малого числа отсчетов исходного случайного процесса.

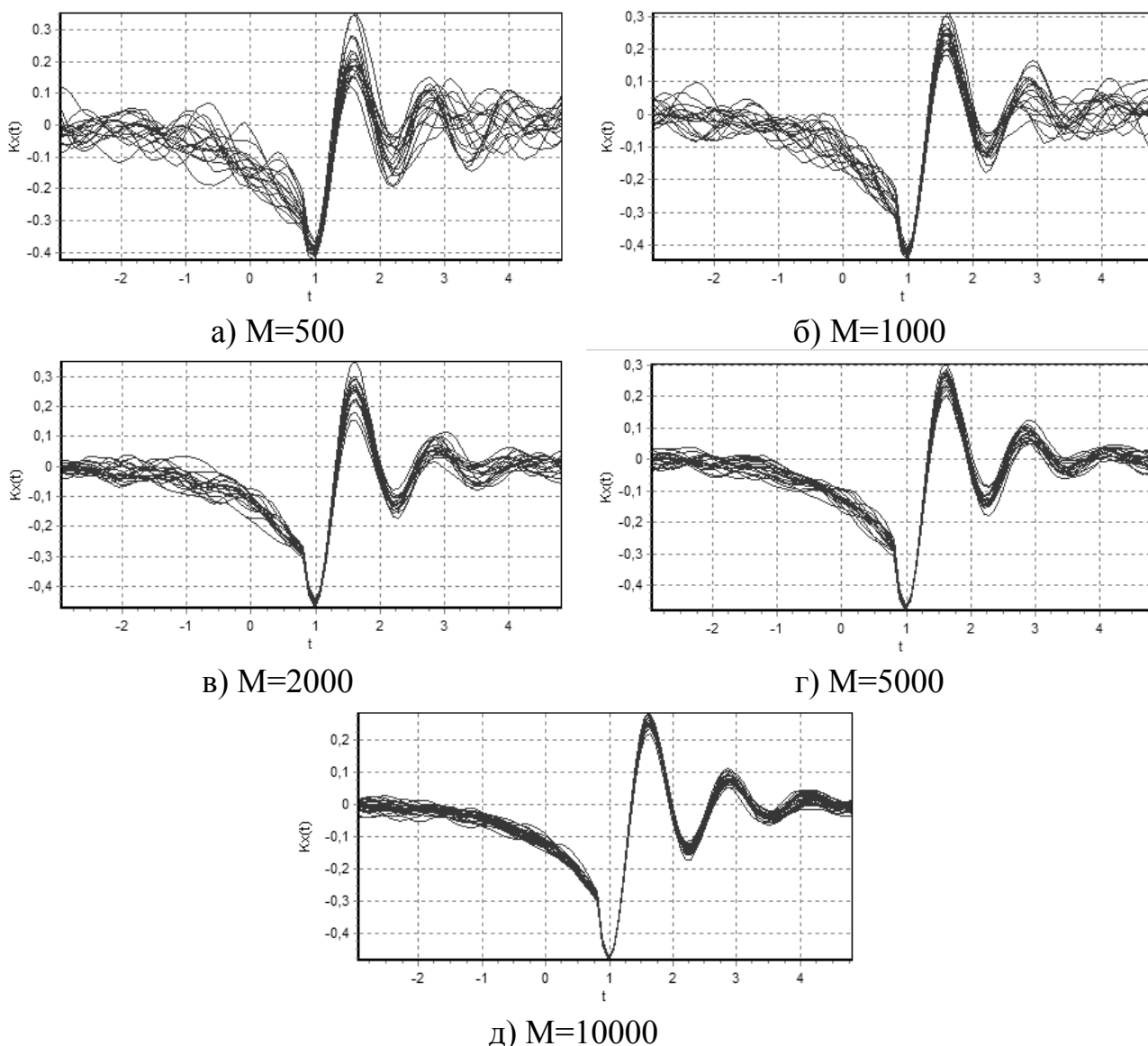


Рисунок 3.14. Взаимные корреляционные функции при объеме выборки M

3.2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: вид пары автокорреляционных функций, значения их параметров.
2. Составить систему для выполнения преобразований, требуемых при получении указанной в задании пары случайных процессов. Настроить модули.
3. Определить интервал дискретизации.
4. Сгенерировать «белый шум».
5. Получить пару процессов с заданным видом КФ.
6. Оценить ВКФ.
7. Занести погрешности в БД. (В случае отсутствия БД оформить таблицу 3.2).
8. Повторить пункты 3-6 29 раз.
9. Определить погрешность моделирования пары процессов методом имитационного моделирования.
10. Оформить отчет.

3.2.3. Содержание отчета

1. Задание.
2. Цель работы.
3. Схема системы.
4. Метод и алгоритм моделирования коррелированных временных рядов с заданным преподавателем видом корреляционной функции.
5. Импульсная характеристика формирующего фильтра (приложение 3).
6. Примеры реализации коррелированных временных рядов для объема выборки $M=5000$ и соответствующих им корреляционных функций.
7. Погрешности генерирования коррелированных временных рядов для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Интервал дискретизации выбрать для восстановления корреляционной функции с погрешностью $\delta = 0,02$.
8. Графические зависимости погрешности генерирования от объема выборки $M=500, 1000, 2000, 5000$.
9. Выводы по работе.

3.2.4. Контрольные вопросы

1. Какие модели корреляционных функций наиболее часто принимают, чем обоснован этот выбор?
2. Какие критерии применяются в качестве критериев приближения?
3. Что характеризует показатель колебательности корреляционной функции?
4. В чем заключается методика оценки качества генерирования случайного процесса с заданным видом корреляционной функции?
5. Каким требованиям должны отвечать математические модели при аналитическом исследовании поведения реальных динамических систем?

3.3. Аппроксимация взаимной корреляционной функции ортогональными функциями

Цель работы: изучение методов аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле.

3.3.1. Содержание лабораторной работы

Лабораторная работа включает в себя генерацию пары процессов с равномерной дискретизацией, определение взаимной корреляционной функции и аппроксимацию ВКФ ортогональными функциями Лагерра, Лежандра или Дирихле (ортогональный базис задается преподавателем). Она основана на первых двух работах, поэтому часть, посвященная получению пары процессов с равномерной дискретизацией, считается изученной и здесь опущена. В предлагаемом примере следует установить задержку для второго процесса на 10 интервалов дискретизации.

Итак, после генерации пары процессов взаимная корреляционная может быть определена, как показано на рис. 3.15.

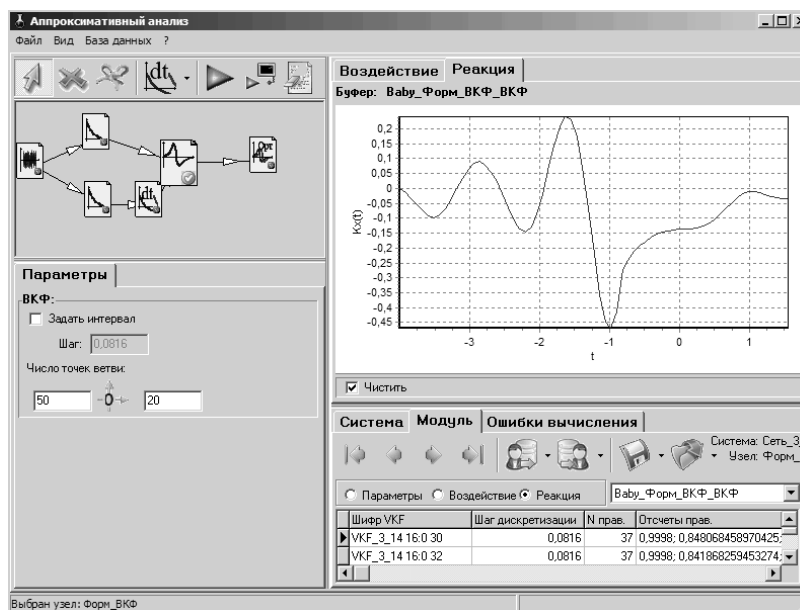


Рисунок 3.15. Взаимная корреляционная функция

Выделим функциональный модуль «Ортогональный фильтр» и определим параметры аппроксимирующего выражения Лагерра для этой функции. Для этого следует установить флажок «b_k» и «Мах в нуль». Далее необходимо подобрать параметры аппроксимирующего выражения. Необходимо установить рекомендуемый метод интегрирования Симпсона в соответствующем окне. После нажатия на кнопку α необходимо рассчитать рекомендуемые значения сначала для α – параметра масштаба ортогональных функций, затем для числа членов разложения m (кнопка m). Для некоторого круга функций значение α , определяемое методом, используемым в системе (он указан в описании систе-

мы), не является оптимальным. Этот метод позволяет «акцентировать» внимание на начале функции и при достаточно небольшом числе членов разложения получить удовлетворительную аппроксимацию. Однако в некоторых случаях необходимо точно подобрать выражение и для «хвоста» функции. Поэтому рекомендуем на основе предложенного значения α подобрать параметр, при котором среднеквадратическая погрешность аппроксимации ветви будет минимальной.

Следующим шагом является выбор числа членов разложения. Здесь нужно задать интервал, в котором производится поиск оптимального числа. График погрешности при различном числе членов разложения можно посмотреть при установленном флаге «Ошибка» на вкладке «Реакция».

Для указанного варианта картина аппроксимации представлена на рис. 3.16, а коэффициенты разложения сведены в таблицу 3.3.

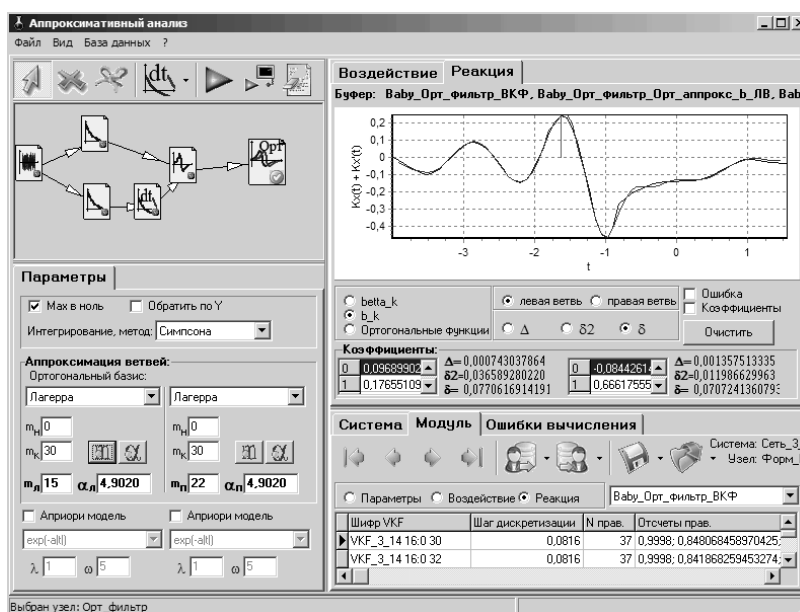


Рисунок 3.16. Результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра

Коэффициенты разложения

Таблица 3.3

Коэффициент	Ветвь	
	Правая	Левая
1	2	3
β_0	0.09689902	-0.08442614
β_1	0.17655109	0.66617555
β_2	-0.03205	-0.009848
β_3	-0.115767	-0.097262
β_4	-0.107133	-0.098377
β_5	-0.06857	-0.069211
β_6	-0.02587	-0.030672
β_7	0.006909	-7.97E-4

1	2	3
β_8	0.027949	0.018734
β_9	0.038286	0.024096
β_{10}	0.042234	0.023561
β_{11}	0.261934	0.214394
β_{12}	-0.020403	0.02317
β_{13}	-0.11537	-0.106237
β_{14}	-0.116341	-0.107174
β_{15}		-0.100641
β_{16}		-0.050402
β_{17}		-0.010177
β_{18}		0.025463
β_{19}		0.040931
β_{20}		0.043587
β_{21}		0.035321
β_{22}		0.035321

Зависимость погрешности от числа членов разложения ряда при заданном значении α для правой ветви приведена на рис. 3.17.

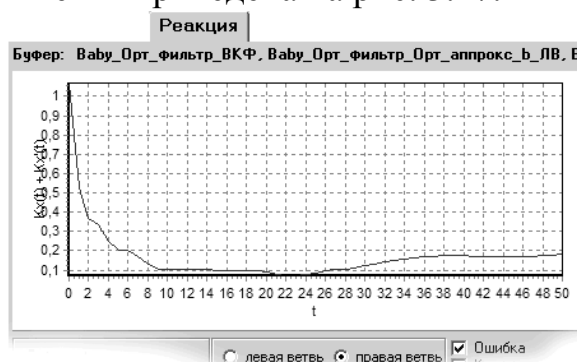


Рисунок 3.17. График ошибок правой ветви

Видно, что при большом числе членов разложения погрешность меняется незначительно, поэтому можно выбрать и меньшее значение параметра масштаба α .

На рис. 3.18 приведен пример аппроксимации при ручном подборе параметра масштаба α . Как следует из рисунка, уменьшение значения параметра масштаба α приводит к увеличению числа членов разложения ряда.

Коэффициенты разложения

Таблица 3.4

Коэффициент	Ветвь	
	Правая	Левая
1	2	3
β_0	0,08894563	-0,16209835
β_1	0,11059057	0,64090021
β_2	0,289903	0,066145

1	2	3
β_3	-0,131137	0,023891
β_4	0,016738	0,053947
β_5	0,035066	0,005447
β_6	-0,029962	-0,040354
β_7	-0,021094	-0,030148
β_8	0,016986	0,001867
β_9	0,017375	0,017026
β_{10}	-0,009295	0,011696
β_{11}	-0,023233	0,000983
β_{12}	-0,012389	-0,004291
β_{13}	0,005639	-0,003669
β_{14}	0,011285	-0,001402
β_{15}	0,001467	-0,000418
β_{16}	-0,012943	-0,000824
β_{17}	-0,019981	-0,001520
β_{18}	-0,015979	-0,001945
β_{19}		-0,002464
β_{20}		-0,003685
β_{21}		-0,005726
β_{22}		-0,008045
β_{23}		-0,009847
β_{24}		-0,010640
β_{25}		-0,010535
β_{26}		-0,010148
β_{27}		-0.010213

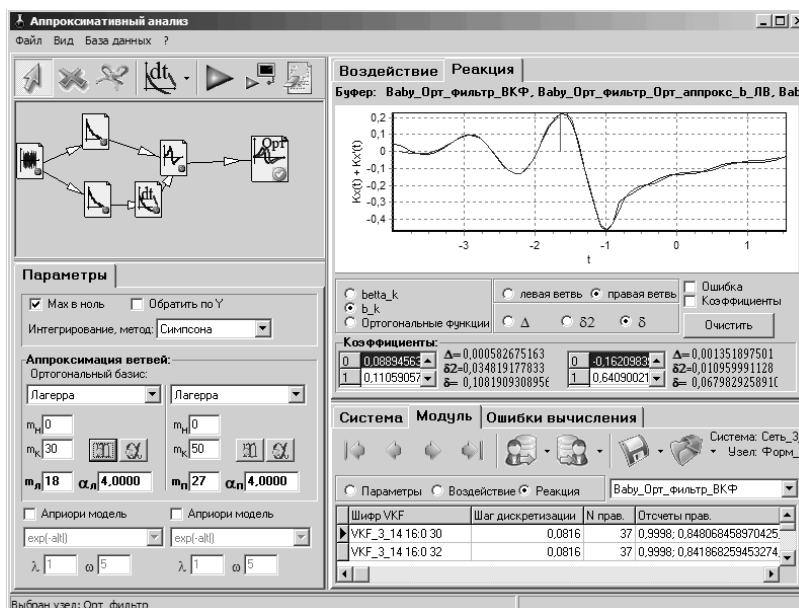


Рисунок 3.18. Результаты аппроксимации

Суть работы состоит в проведении 29 экспериментов аппроксимации взаимных корреляционных функций процессов, полученных после фильтрации 29 разных псевдослучайных последовательностей «белый шум». Необходимо определить методическую погрешность аппроксимации функциями Лагерра, Лежандра или Дирихле (в зависимости от задания) при помощи базы данных, либо вручную. Результаты эксперимента приведены в таблице 3.5.

Погрешность аппроксимации

Таблица 3.5

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7
СКО	0,0521	0,0393	0,0699	0,0481	0,0382	0,0465	0,0644
	0,0359	0,0618	0,0474	0,0879	0,0783	0,0751	0,0436
Мах погрешность	0,0426	0,0394	0,0421	0,0410	0,0403	0,0401	0,0437
	0,0145	0,0384	0,0404	0,0086	0,0470	0,0449	0,0140
Номер эксперимента	8	9	10	11	12	13	14
СКО	0,0315	0,0660	0,0447	0,0412	0,0533	0,0433	0,0370
	0,0787	0,0385	0,0607	0,0898	0,0511	0,0703	0,0809
Мах погрешность	0,0350	0,0422	0,0379	0,0374	0,0427	0,0401	0,0388
	0,0413	0,0292	0,0433	0,0464	0,0249	0,0421	0,0158
Номер эксперимента	15	16	17	18	19	20	21
СКО	0,0362	0,0428	0,0320	0,0523	0,0403	0,0419	0,0753
	0,0733	0,0585	0,0710	0,0513	0,0898	0,0933	0,0346
Мах погрешность	0,0367	0,0413	0,0324	0,0434	0,0392	0,0397	0,0429
	0,0391	0,0365	0,0370	0,0404	0,0392	0,0465	0,0260
Номер эксперимента	22	23	24	25	26	27	28
СКО	0,0325	0,0453	0,0483	0,0333	0,0500	0,0379	0,0595
	0,0877	0,0744	0,0516	0,0745	0,0375	0,0698	0,0604
Мах погрешность	0,0366	0,0406	0,0408	0,0365	0,0409	0,0392	0,0438
	0,0360	0,0400	0,0132	0,0373	0,0114	0,0487	0,0143
Номер эксперимента	29						
СКО	0,0451						
	0,0500						
Мах погрешность	0,0418						
	0,0231						

После подсчета погрешностей матожидание СКО составит 0,0556, максимальная погрешность – 0,0487.

Отметим, что погрешность, вызванная такими параметрами, как, например, конечность выборки исходного «белого шума», и погрешность аппроксимации могут компенсировать друг друга.

3.3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: вид функций, параметры, ортогональный базис.
2. Определить интервал дискретизации, сгенерировать «белый шум», получить пару процессов с равномерной дискретизацией.
3. Оценить ВКФ и построить аналитический график.
4. Аппроксимировать ВКФ ортогональными функциями и занести результаты аппроксимации с указанием погрешностей в БД. (В случае отсутствия БД оформить таблицу.)
5. Повторить процедуру аппроксимации для 29 разных генераций «белого шума».
6. Определить методическую погрешность аппроксимации ВКФ методом имитационного моделирования.
7. Оформить отчет.

3.3.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями.
3. График полученной ВКФ и аппроксимирующего выражения для пары СП с равномерной дискретизацией.
4. Результаты имитационного моделирования.
5. Выводы по работе.

3.3.4. Контрольные вопросы

1. В чем заключается специфика выбора вида модели и оценки ее параметров при аппроксимации взаимных корреляционных функций?
2. Из каких этапов состоит алгоритм аппроксимации ортогональными функциями?
3. Какие параметры характеризуют ортогональное разложение корреляционной функции?
4. Какие данные необходимо сохранять при аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями?
5. Как определить интервал корреляции при аппроксимации ортогональными функциями? Рассмотреть случай аппроксимации автокорреляционных функций.
6. Из каких соображений выбирается начальное приближение параметра масштаба ортогональных функций?
7. Почему увеличение числа членов разложения ортогонального ряда не всегда приводит к уменьшению погрешности аппроксимации?
8. В чём заключается основное «неудобство» ортогональных разложений?
9. Каким образом оценивается погрешность аппроксимации, вызванная конечным числом членов ряда, если используется критерий минимума квадратической погрешности?

10. Какие факторы учитываются при анализе составляющих методической оценки погрешности, вносимой определением коэффициентов разложения?

3.4. Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных

Цель работы: приобретение навыков корреляционно-спектрального анализа данных, получаемых в ходе эксперимента.

3.4.1. Содержание лабораторной работы

Лабораторная работа включает в себя генерацию пары процессов с определением интервала дискретизации и взаимной корреляционной функции. После чего ВКФ подвергается аппроксимации, по полученным коэффициентам которой определяется спектральная плотность мощности.

Для выполнения работы необходимо собрать систему функциональных модулей, показанную на рис. 3.19.

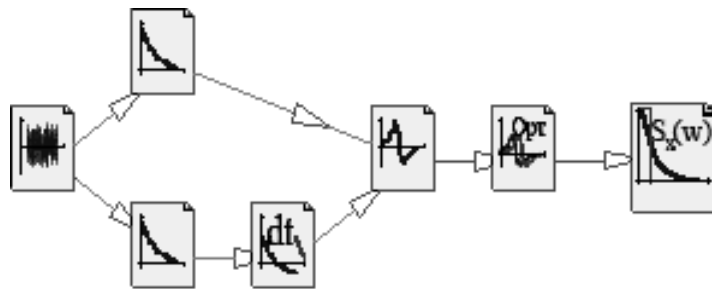


Рисунок 3.19. Система функциональных модулей

В начале работы с помощью функционального модуля «Источник СП» генерируется «белый шум». При этом необходимо выбрать интервал дискретизации на основе информации об используемых фильтрах.

Например, для заданных функций $e^{-\lambda_5|\tau|} \cos \omega_{0,5}\tau$ и $e^{-\lambda_7|\tau|} \left(\cos \omega_{0,7}\tau - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin \omega_{0,7}\tau \right)$ определение интервала дискретизации выглядит так:

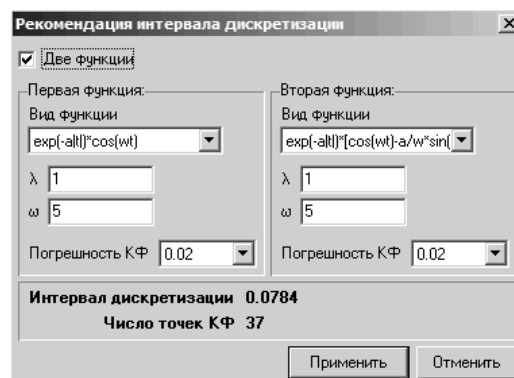


Рисунок 3.20. Рекомендации по выбору интервала дискретизации

После этого результирующий «белый шум» подается в модули «Фильтр 1» и «Фильтр 2», где на вкладке «Параметры» устанавливаются требуемые функции (см. рис. 3.21).



Рисунок 3.21. Рекомендации по выбору модели КФ

В модуле «Линия задержки» установите количество интервалов в 0. Рекомендуем попробовать изменить задержку процесса и определить влияние задержки на взаимную корреляцию процессов. Задержка задается длительностью интервала и количеством интервалов. Таким образом, предоставлена возможность наглядно задавать задержку, кратную интервалу дискретизации.

Для определения ВКФ процессов, поступающих от фильтра и линии задержки, на вкладке «Воздействие» необходимо задать буферы данных с исходными СП (см. рис. 3.22).

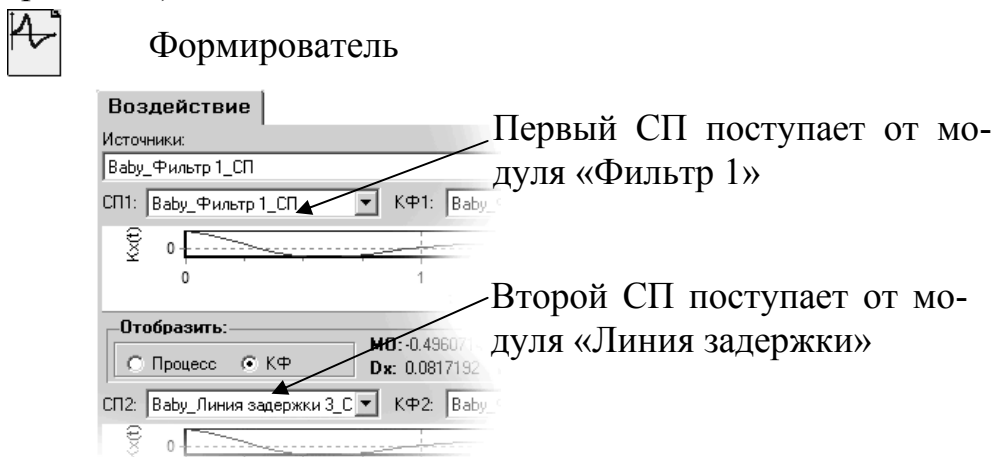


Рисунок 3.22. Выбор буферов данных с исходными СП

Взаимную корреляционную функцию указанной пары процессов можно рассчитать в модуле «Формирователь ВКФ», установив предварительно число точек левой и правой ветвей графика (см. рис. 3.23).

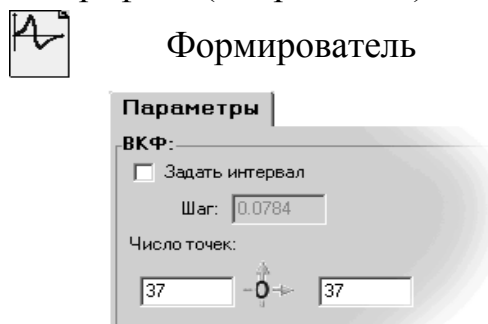


Рисунок 3.23. Установка параметров ВКФ

По завершению настройки системы необходимо нажать кнопку «Вычислить сеть». При этом в модуле «Источник СП» сгенерируется «белый шум», модулях фильтров пройдет через фильтр, а СП будут иметь заданный вид КФ. В модуле «Формирователь ВКФ» будет определена взаимная КФ (см. рис. 3.24).

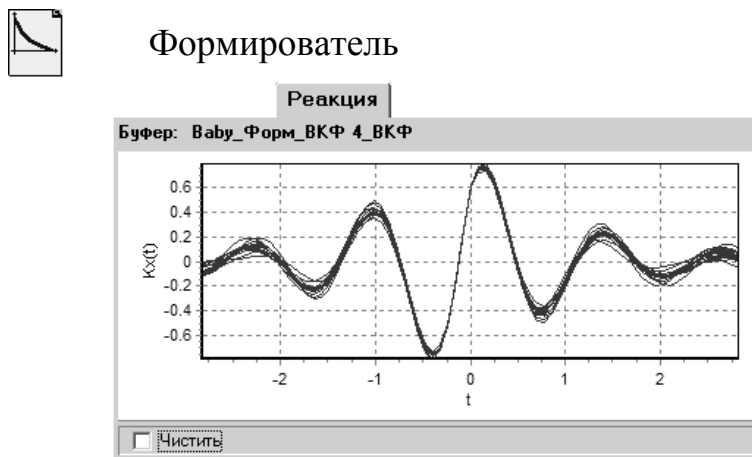


Рисунок 3.24. ВКФ, определенная в модуле «Формирователь ВКФ»

Взаимная корреляционная функция, определенная в модуле «Формирователь ВКФ», передается в модуль «Ортогональный фильтр», где определяется ее оценка. Коэффициенты ряда Фурье, вычисленные в модуле «Ортогональный фильтр», передаются в модуль «Формирователь спектра». Функциональный модуль «Формирователь спектра» позволяет определить спектральную плотность мощности по коэффициентам аппроксимирующего выражения.

Суть лабораторной работы состоит в последовательном выполнении 29 экспериментов по аппроксимации ВКФ и последующему определению спектральной плотности мощности с накоплением сведений об ошибке оценки спектральной плотности мощности. Таким образом, результатом работы станет получение методической погрешности оценки спектральной плотности мощности методом имитационного моделирования.

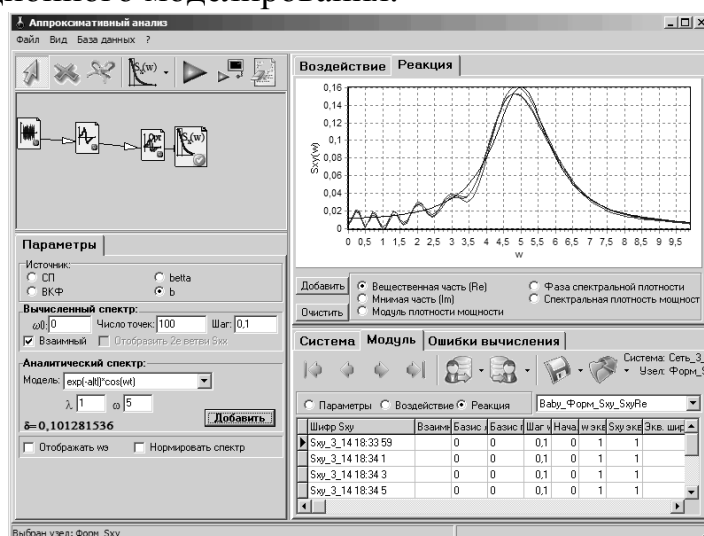


Рисунок 3.25. База данных спектральной плотности мощности

Если ведется база данных, необходимо подключить систему, вызвав пункт меню «База данных/Подсоединить...». В этом случае на вкладке «Систе-

ма» необходимо создать свою систему, нажав на кнопку «Добавить систему в БД» и указав в качестве названия свою фамилию. После вычисления системы результат необходимо сохранить в БД.

После проведения 29 экспериментов результаты будут отображены на вкладке «Модуль».

В случае отсутствия базы данных необходимо вручную заполнить таблицу, пример которой приведен ниже:

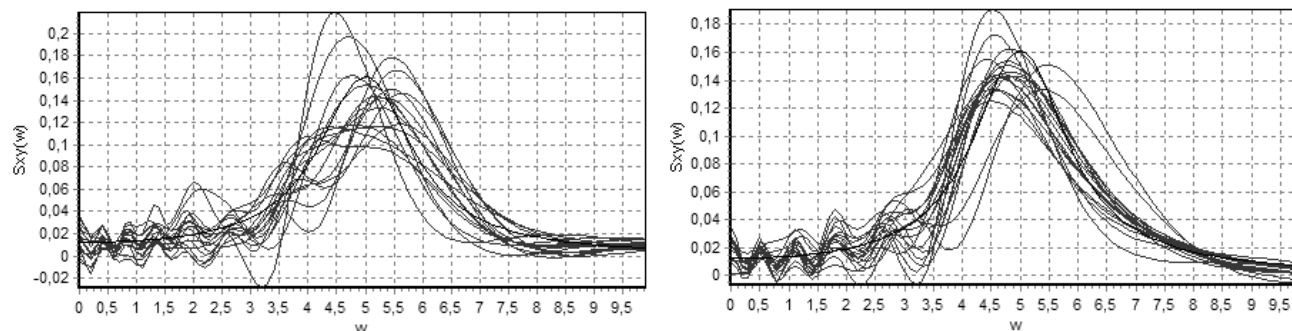
Результаты моделирования

Таблица 3.6

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7
СКО	0,1455	0,1509	0,1492	0,1636	0,1606	0,1736	0,1743
Мах погрешность	0,131	0,1245	0,1229	0,129	0,1222	0,125	0,1292
Номер эксперимента	8	9	10	11	12	13	14
СКО	0,1616	0,1552	0,1806	0,1521	0,178	0,156	0,1915
Мах погрешность	0,121	0,1234	0,1235	0,1211	0,1319	0,1239	0,1285
Номер эксперимента	15	16	17	18	19	20	21
СКО	0,1501	0,1436	0,1425	0,16	0,1531	0,1592	0,1447
Мах погрешность	0,124	0,1265	0,1312	0,1279	0,1227	0,1235	0,1241
Номер эксперимента	22	23	24	25	26	27	28
СКО	0,2107	0,216	0,1916	0,1521	0,1466	0,1439	0,1777
Мах погрешность	0,1244	0,1289	0,1194	0,1276	0,126	0,1321	0,1243
Номер эксперимента	29						
СКО	0,1652						
Мах погрешность	0,1298						

После подсчета погрешностей матожидание СКО составит 0,1638, максимальная погрешность – 0,1321. Последнее значение – методическая погрешность, полученная методом имитационного моделирования.

На рисунке 3.26 приведены спектральные плотности мощности для рассматриваемых модулей при разном объеме выборки.



а) M=500

б) M=1000

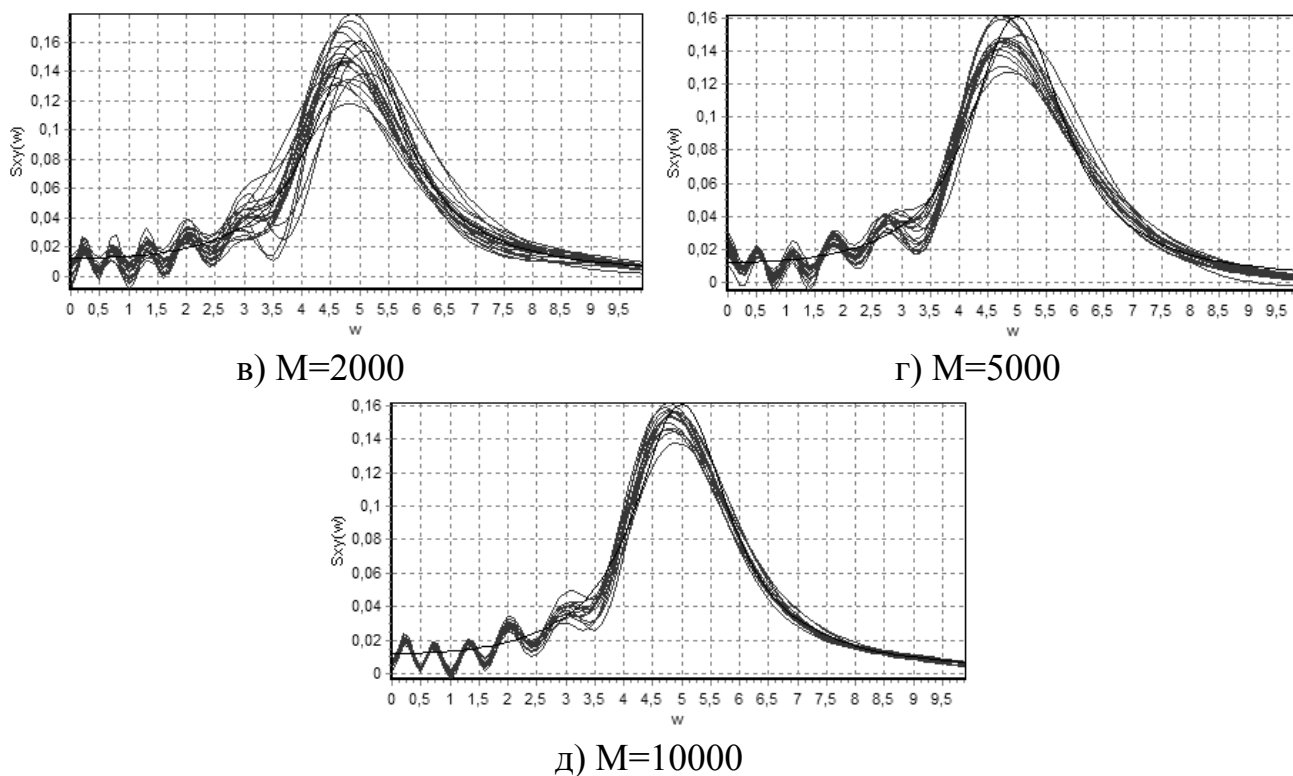


Рисунок 3.26. Взаимные спектральные плотности мощности при объеме выборки M

Результаты аппроксимации ортогональными функциями Лагерра (интерпретация файла отчета)

Таблица 3.7

Наименование	Эксперимент	
	первый	второй
1	2	3
α	5.9059	13.2626
$\beta_{0,n}$	0.990879	0.997665
$\beta_{1,n}$	0.243135	0.242111
$\beta_{2,n}$	-0.03205	-0.009848
$\beta_{3,n}$	-0.115767	-0.097262
$\beta_{4,n}$	-0.107133	-0.098377
$\beta_{5,n}$	-0.06857	-0.069211
$\beta_{6,n}$	-0.02587	-0.030672
$\beta_{7,n}$	0.006909	-7.97E-4
$\beta_{8,n}$	0.027949	0.018734
$\beta_{9,n}$	0.038286	0.024096
$\beta_{10,n}$	0.042234	0.023561
α	5.4325	14.7495
$\beta_{0,n}$	0.991421	0.991763
$\beta_{1,n}$	0.261934	0.214394

1	2	3
$\beta_{2,l}$	-0.020403	0.02317
$\beta_{3,l}$	-0.11537	-0.106237
$\beta_{4,l}$	-0.116341	-0.107174
$\beta_{5,l}$	-0.082487	-0.100641
$\beta_{6,l}$	-0.040315	-0.050402
$\beta_{7,l}$	-0.005122	-0.010177
$\beta_{8,l}$	0.019218	0.025463
$\beta_{9,l}$	0.03231	0.040931
$\beta_{10,l}$	0.037568	0.043587
$\beta_{11,l}$	0.037587	0.035321
τ_m	7.964444	2.465188
$K_{axy}(\tau_m)$	0.989983	0.431741
m	11	10
$\tau_{kxy}^{(2)}$	0.541491	0.236601
$\tau_{kxy}^{(4)}$	0.383161	0.154083

3.4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: файл с аппроксимируемой функцией или таблицу значений (график). В последнем случае необходимо создать файл, пользуясь описанием форматов файлов в приложении.
2. Аппроксимировать функцию ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле. Подобрать значения параметров, минимизируя среднеквадратическую погрешность аппроксимации. Создать файл отчета.
3. По параметрам аппроксимирующих выражений определить преобразование Фурье от функции.
4. Оформить отчет.

3.4.3. Содержание отчета

1. Задание.
2. Цель работы.
3. Графики, иллюстрирующие аппроксимацию. В том числе привести графики неудачных результатов аппроксимации (в случае их наличия).
4. Графики спектральных плотностей мощности, полученных по коэффициентам аппроксимирующих выражений.
5. Выводы по работе.

3.4.4. Контрольные вопросы

1. Какие характеристики относятся к обобщенным спектральным характеристикам?

2. В чем заключается физический смысл интервалов корреляции?
3. В чем заключается физический смысл показателя колебательности?
4. Назовите методы определения эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса.
5. Какие процессы относятся к широкополосным случайным процессам?
6. Какие процессы относятся к узкополосным случайным процессам?
7. В чем заключается специфика определения эквивалентной ширины спектра мощности узкополосного процесса?
8. В чем заключается специфика аппроксимации спектральных плотностей мощности?
9. Какие параметры описывают ортогональное разложение спектральной плотности мощности?
10. Приведите методику аппроксимации взаимных спектральных плотностей мощности ортогональными функциями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен широкий круг задач аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа с использованием ортогональных функций Лагерра, Лежандра, Дирихле:

1. разработаны алгоритмы для оценки авто и взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности в указанных базисах;
2. определены аналитические выражения для оценки параметра масштаба ортогональных функций, обеспечивающих допустимые погрешности аппроксимации;
3. определены аналитические выражения коэффициентов разложения ортогональных моделей, используемых при аппроксимации типовых моделей корреляционных функций и анализе методических погрешностей аппроксимации;
4. проведен анализ методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций, вызванных конечностью числа членов ряда Фурье, ограничением на модель корреляционной функции, неточностью вычисления коэффициентов разложения;
5. найдены аналитические выражения для ряда обобщенных корреляционных характеристик.

Разработанные алгоритмы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа легли в основу программного комплекса, с помощью которого возможно решение задач:

1. аппроксимации авто и взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле;
2. оценки обобщенных корреляционных характеристик (интервалов корреляции);
3. анализа методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций;
4. анализа аналоговых сигналов, регистрируемых с помощью устройств сопряжения ЭВМ.

На базе программного комплекса разработан лабораторный практикум, который может быть использован при изучении базовых дисциплин, связанных с моделированием и статистической обработкой случайных процессов, а также при проведении научных исследований. В предлагаемом лабораторном практикуме рассмотрены вопросы моделирования случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками, а также аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа временных рядов ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Авдеев Б.Я., Антонюк Е.М., Долинов С.Н., Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Фремке А.В. Адаптивные телеизмерительные системы. – Л.: Энергоатомиздат, 1981. – 246 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.: ил.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 5-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 576 с.: ил.
4. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. – М.: Радио и связь, 2004. – 344 с.: ил.
5. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник – СПб: Питер, 2001. – 752 с.: ил.
6. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. – М.: Наука, 1958. – 508 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – СПб.: Издательство «Лань», 2003. – 832 с.
8. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74//Минприбор. – 1974. – 76 с.
9. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи – М.: Советское радио, 1962. – 831 с.
10. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. Изд. 2-е переработ. и доп. – М.: «Энергия», 1972.
11. Прохоров С. А. Математическое описание и моделирование случайных процессов. – СГАУ, 2001 - 329 с.: ил.
12. Прохоров С. А., Иващенко А.В., Графкин А.В.; Под ред. Прохорова С.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов. – СНИЦ РАН, 2003. – 286 с.: ил.
13. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./ СНИЦ РАН, 2001. – 380с.: ил.
14. Прохоров С.А. Исследование и разработка методов и аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида. – Дисс. ... канд. тех. наук – Куйбышев: 1974. – 126 с.
15. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., переработанное и дополненное/ СНИЦ РАН, 2002. – 277 с.: ил.
16. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. - Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1968. - 368 стр.
17. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. – М.: Сов. Радио, 1968. – 256 с.
18. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.: ил.
19. Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.

20. Фронковьяк Д., Гарсиа М., Уолен Э. Руководство администратора Microsoft SQL Server 7.0/Пер. с англ. – М.: Издательско-торговый дом «Русская Редакция», 2000. – 672 с.: ил.
21. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982. – 256 с.
22. Эммануил С., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с. : ил. – Парал. тит. англ.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоматизированный комплекс структурная схема	108	Процесс стационарный	21
Автоматизированный комплекс функции	88	- эргодический	21
Аппаратные требования к системе	87	Ряд Фурье	35
Аппроксимативный подход	24	Свойства процесса	21
Асимметрия	114	Системы ортогональных функций	36
Вероятностные характеристики	19	Соотношение неопределенности	47
- классификация	20	Спектральные функции	71
Дисперсия	113	Справочная система	143
Длительность импульсной характеристики	46	Статистическая обработка	24
Импульсная характеристика	44	- вторичная	24
Интервал корреляции	62	- первичная	24
Интерфейс пользователя	91-99	Схема базы данных	102-106
Количество ординат КФ	86	Типы данных	98
Корреляционная функция	32	Усреднение по времени	19
Коэффициенты ряда Фурье	35	- по времени и совокупности	19
- для типовых моделей	39-41	- по совокупности	19
- при ограничениях на модель КФ	54	Формулы численного интегрирования	41
Критерии приближения	34	Функция автокорреляционная	28
Математическое ожидание	113	- типовые модели	29
Меню пользователя	141-143	- корреляционная	28
Метод наименьших квадратов	25	- корреляционная взаимная	30
Методы аппроксимации	25	- корреляционная нормированная	28, 30
- классификация	26	Частотная характеристика	44
- статистических измерений	23	Экссесс	114
Моделирование СП	85	Этапы аппроксимации КФ	33
МФУ НВЛ-08	132		
- калибровка	135		
- разъем пользователя	135		
Ортогональная функция	35		
- параметр масштаба	35		
Ортогональный базис	35		
Оценка несмещенная	20		
- свойства	20		
- состоятельная	20		
- эффективная	20		
Погрешность аппроксимации	35		
- при ограничении на модель КФ	53		
- при ограничении числа членов	41		
- оценки коэффициентов	48		
Полоса пропускания	45		
Преобразование Фурье	71		

Алгоритмы рекурсивной фильтрации

Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	Генерирующий алгоритм	Параметры алгоритма
1	2	3
$e^{-\lambda_1 \tau }$	$y_0 = a_0 x_n$ $y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1}$	$\gamma = \lambda_1 \cdot \Delta\tau$; $p = e^{-\gamma}$ $a_0 = \sqrt{1-p^2}$ $b_1 = p$
$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$y_0 = a_0 x_n$ $y_1 = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1}$ $y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1}$	$\gamma = \lambda_2 \cdot \Delta\tau$; $p = e^{-\gamma}$ $\alpha_0 = p^3 \cdot (1+\gamma) - p \cdot (1-\gamma)$ $\alpha_1 = 1 - 4p^2 \cdot \gamma - p^4$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ $a_1 = \frac{\alpha_1}{a_0}$; $b_1 = 2p$; $b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$y_0 = a_0 x_n$ $y_1 = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1}$ $y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \lambda_3 \cdot \Delta\tau$; $p = e^{-\gamma}$ $\alpha_0 = p^3 \cdot (1-\gamma) - p \cdot (1+\gamma)$ $\alpha_1 = 1 + 4p^2 \cdot \gamma - p^4$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}$; $b_1 = 2p$; $b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3}\right)$	$y_0 = x_0$ $y_1 = x_1$ $y_2 = x_2$ $y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} - b_1 y_{n-1} - b_2 y_{n-2} - b_3 y_{n-3}$	$\gamma = \lambda_4 \cdot \Delta\tau$; $p = e^{-\gamma}$ $\alpha_0 = p^4 \cdot \left(\frac{\gamma^2}{3} + \gamma + 1\right) - p^2 \cdot \left(\frac{\gamma^2}{3} - \gamma + 1\right)$ $\alpha_1 = p^5 \cdot \left(\frac{\gamma^2}{3} - \gamma - 2\right) - 6 \cdot \gamma \cdot p^3 - p \cdot \left(\frac{\gamma^2}{3} + \gamma - 2\right)$ $\alpha_2 = p^6 - p^4 \cdot (2\gamma^2 - 6\gamma - 3) + p^2 \cdot (2\gamma^2 + 6\gamma - 3) - 1$ $y_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 + 8\alpha_0^2}}{2\alpha_0}$ $a_0 = \sqrt{-\alpha_0 \frac{(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})}{2}}$

1	2	3
		$a_2 = \sqrt{-\alpha_0 \left(\frac{2}{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4}} \right) (y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})}$ $a_1 = -\alpha_2 \left(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4} \right) (y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})$ $b_1 = -3p; b_2 = 3p^2; b_3 = -p^3$
$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$		$\gamma = \lambda_5 \cdot \Delta\tau; \gamma_0 = \omega_{0,5} \cdot \Delta\tau; p = e^{-\gamma}$ $\alpha_0 = p \cdot (p^2 - 1) \cdot \cos(\gamma_0); \alpha_1 = 1 - p^4$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}; b_1 = 2p \cos(\gamma_0); b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau) \right)$	$y_0 = a_0 x_n$ $y_1 = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1}$ $y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \lambda_6 \cdot \Delta\tau; \gamma_0 = \omega_{0,6} \cdot \Delta\tau; p = e^{-\gamma}$ $\alpha_0 = p \cdot (p^2 - 1) \cdot \cos(\gamma_0) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \cdot p \cdot (1 + p^2) \cdot \sin(\gamma_0)$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4 \cdot p^2 \cdot \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \cdot \sin(\gamma_0) \cdot \cos(\gamma_0)$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}; b_1 = 2p \cos(\gamma_0); b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau) \right)$		$\gamma = \lambda_7 \cdot \Delta\tau; \gamma_0 = \omega_{0,7} \cdot \Delta\tau; p = e^{-\gamma}$ $\alpha_0 = p \cdot (p^2 - 1) \cdot \cos(\gamma_0) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \cdot p \cdot (1 + p^2) \cdot \sin(\gamma_0)$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4 \cdot p^2 \cdot \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \cdot \sin(\gamma_0) \cdot \cos(\gamma_0)$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}; b_1 = 2p \cos(\gamma_0); b_2 = -p^2$

Импульсные характеристики формирующих фильтров

Данное приложение содержит аналитические выражения для определения взаимных корреляционных функций процессов, полученных при прохождении «белого шума» через пару фильтров. Всего выбрано 7 типовых видов фильтров (см. табл. 1.1). Для их различных комбинаций найдены аналитические выражения и построены графики (см. П.3).

В первой таблице приведены импульсные характеристики формирующих фильтров $h_j(\tau)$ типовых моделей и корреляционные функции $K_{x(j)}(\tau)$, получаемые на выходе фильтра при прохождении через него «белого шума».

Далее приводятся аналитические выражения для взаимных корреляционных функций процессов, полученных при прохождении «белого шума» через пару фильтров. Они получены решением интеграла свертки (П2.1) для пары фильтров

$$K_{xy(ji)}(\tau) = 2\pi \int_0^{\infty} h_j(t + \tau)h_i(t)dt, \tag{П2.1}$$

где j – номер модели первого фильтра, i – второго.

Для уменьшения объема записи взаимная корреляционная функция $K_{xy(ji)}(\tau)$ разбита на две ветви - $K_{xy(ji)}^{(1)}(\tau)$, определенную на интервале $(0, \infty)$, и $K_{xy(ji)}^{(2)}(\tau)$, определенную на $(-\infty, 0)$. Так как $K_{xy(ji)}^{(2)}(\tau) = K_{yx(ji)}^{(1)}(-\tau)$, приведены отдельно выражения для правой и левой ветвей. Взаимная корреляционная функция представляется в виде: $K_{xy(ji)}(\tau) = k_{(ji)} \cdot F_{(ji)}(\tau) \cdot e^{-\lambda_j \tau}$.

j	$K_{x(j)}(\tau, \lambda_j, \omega_{0,j})$	k	$h_j(\tau)$
1	$\sigma_x e^{-\lambda_1 \tau }$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \pi}}$	$k \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$
2	$\sigma_x e^{-\lambda_2 \tau } \cdot (1 + \lambda_2 \tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\lambda_2 \pi}}$	$k \lambda_2^2 \tau e^{-\lambda_2 \tau}$
3	$\sigma_x e^{-\lambda_3 \tau } \cdot (1 - \lambda_3 \tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\lambda_3 \pi}}$	$k \lambda_3 e^{-\lambda_3 \tau} \cdot (1 - \lambda_3 \tau)$
4	$\sigma_x e^{-\lambda_4 \tau } \cdot \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3}\right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{3 \lambda_4 \pi}}$	$k \lambda_4^3 \tau^2 e^{-\lambda_4 \tau}$
5	$\sigma_x e^{-\lambda_5 \tau } \cdot \cos(\omega_{0,5} \tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\lambda_5 \pi}}$	$k \lambda_5 e^{-\lambda_5 \tau} \left(\cos(\omega_{0,5} \tau) + \frac{\sqrt{\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2} - \lambda_5}{\omega_{0,5}} \sin(\omega_{0,5} \tau) \right)$
6	$\sigma_x e^{-\lambda_6 \tau } \cdot \left(\cos(\omega_{0,6} \tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau) \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\lambda_6 \pi}}$	$k \lambda_6 \frac{\sqrt{\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2}}{\omega_{0,6}} e^{-\lambda_6 \tau} \sin(\omega_{0,6} \tau)$
7	$\sigma_x e^{-\lambda_7 \tau } \cdot \left(\cos(\omega_{0,7} \tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\lambda_7 \pi}}$	$k \lambda_7 e^{-\lambda_7 \tau} \left(\cos(\omega_{0,7} \tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$

1. ВКФ для модели:

$$K_{x(t)}(\tau, \lambda_1, \omega_{0,1}) = \sigma_x e^{-\lambda_1 |\tau|}$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)}$
1	1	$\frac{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{\lambda_j + \lambda_i}$	1
	2	$\frac{2\lambda_i \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2}$	1
	3	$\frac{2\lambda_j \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2}$	1
	4	$\frac{4\lambda_i^2 \sqrt{6\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	1
	5	$\frac{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i} (\lambda_j + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2})}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2}$	1
	6	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i} (\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2}$	1
	7	$\frac{2\lambda_j \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2}$	1

2. ВКФ для модели:

$$K_{x(2)}(\tau, \lambda_2, \omega_{0,2}) = \sigma_x e^{-\lambda_2 |\tau|} \cdot (1 + \lambda_2 |\tau|)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} + B_{(ji)} \tau $
2	1	$\frac{2\lambda_j \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2}$	$A_{(ji)} = 1; B_{(ji)} = \lambda_j + \lambda_i$
	2	$\frac{4\lambda_j \lambda_i \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = 2;$ $B_{(ji)} = \lambda_j + \lambda_i$
	3	$\frac{4\lambda_j \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = \lambda_j - \lambda_i; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j \lambda_i$
	4	$\frac{8\lambda_j \lambda_i^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^4}$	$A_{(ji)} = 3; B_{(ji)} = \lambda_j + \lambda_i$
	5	$\frac{2\lambda_j \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2 + 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} (\lambda_j + \lambda_i);$ $B_{(ji)} = (\lambda_j + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}) ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)$
	6	$\frac{4\lambda_j \sqrt{\lambda_j \lambda_i (\lambda_i^2 + \omega_i^2)}}{((\lambda_i + \lambda_j)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = 2(\lambda_j + \lambda_i); B_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2$
	7	$\frac{4\lambda_j \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2; B_{(ji)} = \lambda_j ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)$

3. ВКФ для модели:

$$K_{x(3)}(\tau, \lambda_3, \omega_{0,3}) = \sigma_x e^{-\lambda_3 |\tau|} \cdot (1 - \lambda_3 |\tau|)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} - B_{(ji)} \tau $
3	1	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j \lambda_i$
	2	$\frac{4\lambda_i \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = \lambda_i - \lambda_j; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j \lambda_i$
	3	$\frac{4\lambda_j \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_i; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j \lambda_i$
	4	$\frac{8\lambda_i^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^4}$	$A_{(ji)} = \lambda_i - 2\lambda_j; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j \lambda_i$
	5	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} (\lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2) + 2\lambda_j ((\lambda_j + \lambda_i) \lambda_i + \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = \lambda_j (\lambda_j + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}) ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)$
	6	$\frac{4\sqrt{\lambda_j \lambda_i} (\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2; B_{(ji)} = \lambda_j ((\lambda_i + \lambda_j)^2 + \omega_i^2)$
	7	$\frac{4\lambda_j \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = 2(\lambda_i (\lambda_j + \lambda_i) + \omega_i^2); B_{(ji)} = \lambda_j ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)$

4. ВКФ для модели:

$$K_{x(4)}(\tau, \lambda_4, \omega_{0,4}) = \sigma_x e^{-\lambda_4 |\tau|} \cdot \left(1 + \lambda_4 |\tau| + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} + B_{(ji)} \tau + C_{(ji)}\tau^2$
4	1	$\frac{2\lambda_j^2 \sqrt{6\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = 2; B_{(ji)} = 2(\lambda_j + \lambda_i); C_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2$
	2	$\frac{4\lambda_j^2 \lambda_i \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^4}$	$A_{(ji)} = 6; B_{(ji)} = 4(\lambda_j + \lambda_i); C_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2$
	3	$\frac{4\lambda_j^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^4}$	$A_{(ji)} = 2(\lambda_j - 2\lambda_i); B_{(ji)} = 2(\lambda_j^2 - \lambda_i^2); C_{(ji)} = \lambda_j(\lambda_j + \lambda_i)^2$
	4	$\frac{8\lambda_j^2 \lambda_i \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^5}$	$A_{(ji)} = 12; B_{(ji)} = 6(\lambda_j + \lambda_i); C_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2$
	5	$\frac{2\lambda_j^2 \sqrt{6\lambda_j \lambda_i}}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^3}$	$A_{(ji)} = 2(\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} - \lambda_i)(3(\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_i^2) + 2(\lambda_j + \lambda_i)((\lambda_j + \lambda_i)^2 - 3\omega_i^2);$ $B_{(ji)} = 2((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)(\lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2 + 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_j + \lambda_i));$ $C_{(ji)} = ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2(\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} + \lambda_j)$
	6	$\frac{4\lambda_j^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}(\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^3}$	$A_{(ji)} = 2(3(\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = 4(\lambda_j + \lambda_i)((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2); C_{(ji)} = ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2$
	7	$\frac{4\lambda_j^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^3}$	$A_{(ji)} = 2(\lambda_j^3 - (3\lambda_j + 2\lambda_i)(\lambda_i^2 + \omega_i^2));$ $B_{(ji)} = 2((\lambda_j + \lambda_i)^3(\lambda_j - \lambda_i) - 2\omega_i^2 \lambda_i(\lambda_j + \lambda_i) - \omega_i^4);$ $C_{(ji)} = \lambda_j((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2$

5. ВКФ для модели:

$$K_{x(s)}(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = \sigma_x e^{-\lambda_5|\tau|} \cdot \cos(\omega_{0,5}\tau)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j}\tau) + B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j}\tau)$
	1	$\frac{2\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i + \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}; B_{(ji)} = (\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j)(\lambda_j + \lambda_i)/\omega_j - \omega_j$
	2	$\frac{2\lambda_i\sqrt{2\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2 + 2(\lambda_j + \lambda_i)\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2};$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j}((\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_j^2) - 2\omega_j(\lambda_j + \lambda_i)$
	3	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^2}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_i(\omega_j^2 + \lambda_j(\lambda_j + \lambda_i)) + \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}(\lambda_j^2 - \lambda_i^2 + \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j}((\lambda_j + \lambda_i)^2 \lambda_j + \omega_j^2(2\lambda_i + \lambda_j)) + \omega_j(\lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2)$
5	4	$\frac{4\lambda_i^2\sqrt{6\lambda_j\lambda_i}}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^3}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^3 - (\omega_j^2 + \lambda_j^2)(2\lambda_j + 3\lambda_i) + \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}(3(\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j}(\lambda_j + \lambda_i)((\lambda_j + \lambda_i)^2 - 3\omega_j^2) + \omega_j(\omega_j^2 - 3(\lambda_j + \lambda_i)^2)$
	5	$\frac{2\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2)}$	$A_{(ji)} = (\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} - \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2})(\omega_i^2 + \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2) + 2\lambda_i(\omega_j^2 + \lambda_j^2) +$ $+ 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}(\lambda_j + \lambda_i) + 2\lambda_j(\lambda_i^2 + \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j}(\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\omega_i^2 - \omega_j^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2) + 2\lambda_i\omega_{0,j} + \lambda_j(\omega_j^2 + \omega_i^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2)) +$ $+ \omega_j(\omega_i^2 + \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2 - 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_j + \lambda_i))$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) + B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
6	6	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i (\lambda_i^2 + \omega_i^2)}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2) \sqrt{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2}}$	$A_{(ji)} = \omega_i^2 + \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2 + 2(\lambda_j + \lambda_i) \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2};$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j} ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2 - \omega_j^2) - 2\omega_j (\lambda_j + \lambda_i)$
	7	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2) \sqrt{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2}}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_j (\omega_i^2 + \lambda_i^2) + 2\lambda_i (\lambda_j^2 + \omega_j^2) + \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} (\lambda_j^2 + \omega_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j} (\lambda_j (\omega_i^2 + \omega_j^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2) + 2\omega_j^2 \lambda_i) + \omega_j (\lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2)$

6. ВКФ для модели:

$$K_{x(6)}(\tau, \lambda_6, \omega_{0,6}) = \sigma_x e^{-\lambda_6 |\tau|} \cdot \left(\cos(\omega_{0,6} \tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau) \right)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) + B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
6	1	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j; B_{(ji)} = \lambda_j + \lambda_i$
	2	$\frac{4\lambda_i \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^2} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = 2\omega_j (\lambda_j + \lambda_i); B_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_j^2$
	3	$\frac{4\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^2} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j (\lambda_j^2 + \omega_j^2 - \lambda_i^2); B_{(ji)} = \lambda_j (\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2 (\lambda_j + 2\lambda_i)$
	4	$\frac{8\lambda_i^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^3} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j (3(\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_j^2); B_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i) ((\lambda_j + \lambda_i)^2 - 3\omega_j^2)$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) + B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
6	5	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2)} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j (\omega_j^2 + \lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2 + 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} (\lambda_j + \lambda_i));$ $B_{(ji)} = 2\lambda_i \omega_j^2 + \lambda_j ((\lambda_i + \lambda_j)^2 + \omega_i^2 + \omega_j^2) + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} ((\lambda_i + \lambda_j)^2 - \omega_j^2 + \omega_i^2)$
	6	$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i(\lambda_i^2 + \omega_i^2)}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2)} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = 2\omega_j (\lambda_j + \lambda_i);$ $B_{(ji)} = \omega_i^2 - \omega_j^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2$
	7	$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2)} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j (\lambda_j^2 + \omega_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = 2\lambda_i \omega_j^2 + \lambda_j ((\lambda_i + \lambda_j)^2 + \omega_i^2 + \omega_j^2)$

7. ВКФ для модели:

$$K_{x(7)}(\tau, \lambda_7, \omega_{0,7}) = \sigma_x e^{-\lambda_7 |\tau|} \cdot \left(\cos(\omega_{0,7} \tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$$

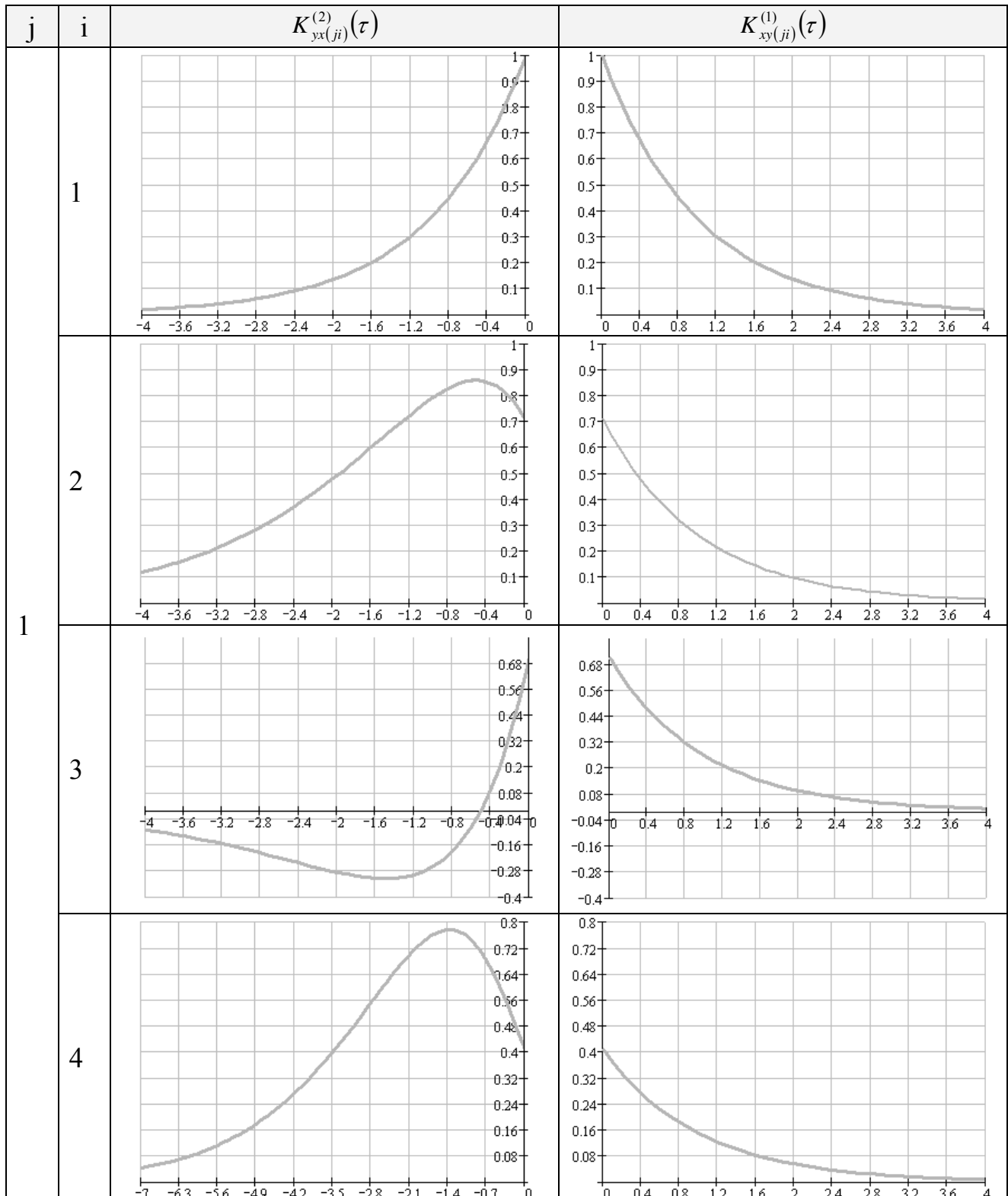
j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) - B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
7	1	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j\lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i;$ $B_{(ji)} = \omega_j + \lambda_j (\lambda_j + \lambda_i) / \omega_j$
	2	$\frac{4\lambda_i \sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2;$ $B_{(ji)} = \omega_j (\lambda_j + 2\lambda_i) + \lambda_j (\lambda_j + \lambda_i)^2 / \omega_j$
	3	$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^2}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_i (\lambda_j^2 + \lambda_j \lambda_i + \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \omega_j (2\lambda_j (\lambda_j + \lambda_i) + \omega_j^2 - \lambda_i^2) + \lambda_j^2 (\lambda_j + \lambda_i)^2 / \omega_j$
4	$\frac{8\lambda_i^2 \sqrt{3\lambda_j\lambda_i}}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^3}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^3 - (\omega_j^2 + \lambda_j^2) (2\lambda_j + 3\lambda_i);$ $B_{(ji)} = \omega_j (3\lambda_i (\lambda_j + \lambda_i) - \omega_j^2) + \lambda_i (\lambda_j + \lambda_i)^3 / \omega_j$	

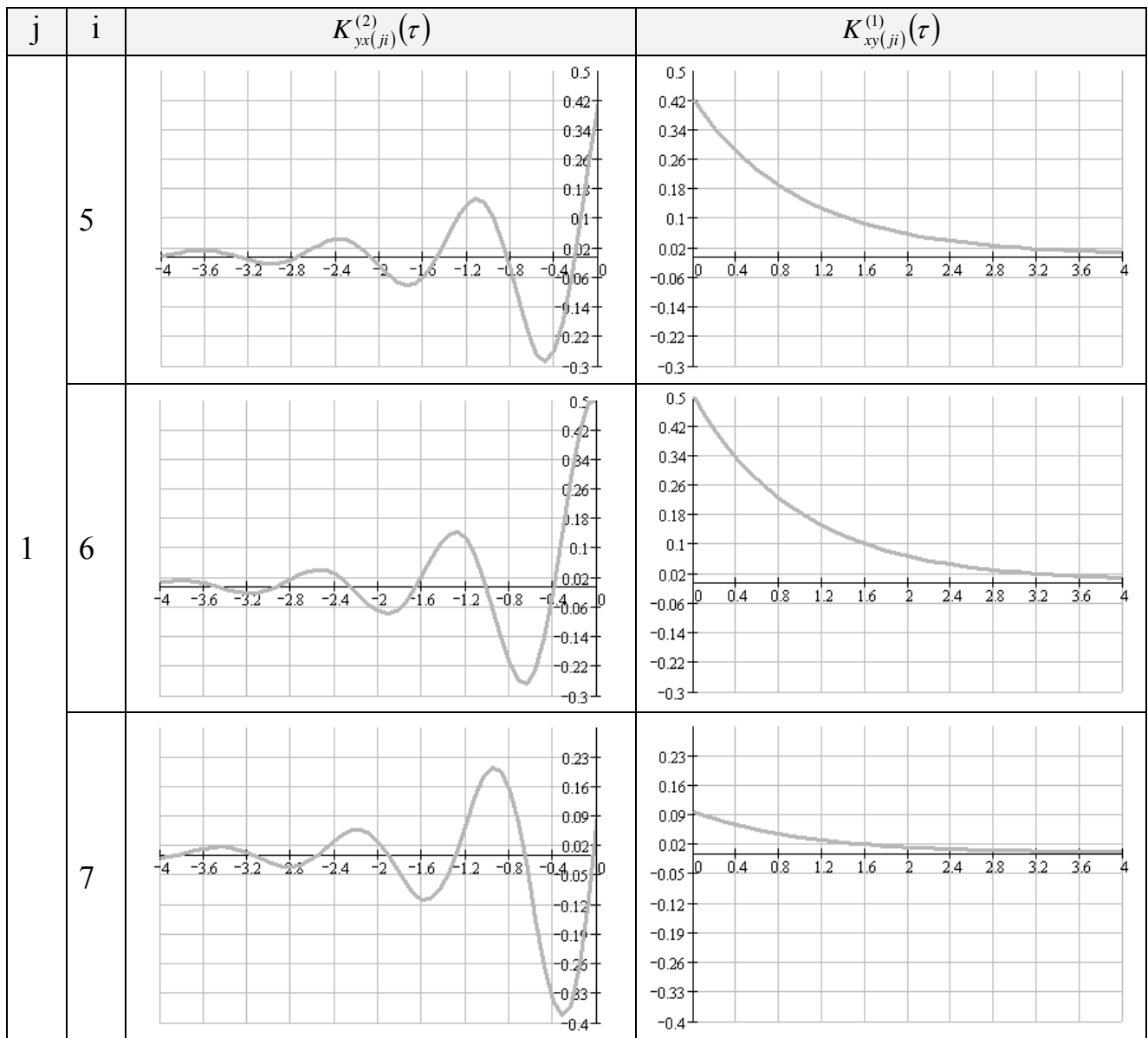
j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) - B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
5	7	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)(\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_j(\omega_i^2 + \lambda_i^2) + 2\lambda_i(\lambda_j^2 + \omega_j^2) + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \omega_j(\omega_j^2 - \omega_i^2 - \lambda_i^2 + 2\lambda_j(\lambda_j + \lambda_i) + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_j + 2\lambda_i)) + \lambda_j(\lambda_j + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2})(\omega_i^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2)/\omega_j$
		$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i}(\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)(\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2; \quad B = \omega_0(2\lambda_6 + \lambda_0) + \lambda_0(\omega_6^2 + (\lambda_0 + \lambda_6)^2)/\omega_0$
6	7	$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)(\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_j(\omega_i^2 + \lambda_i^2) + 2\lambda_i(\lambda_j^2 + \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \omega_j(2\lambda_j(\lambda_j + \lambda_i) + \omega_j^2 - \omega_i^2) + \lambda_j((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)/\omega_j$
		$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)(\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2}$	

В приложении приведены графики ВКФ при параметрах фильтров $\lambda_j = 1$, $\omega_{0,j} = 5$, $\lambda_i = 1$, $\omega_{0,i} = 5$.

1. ВКФ для модели:

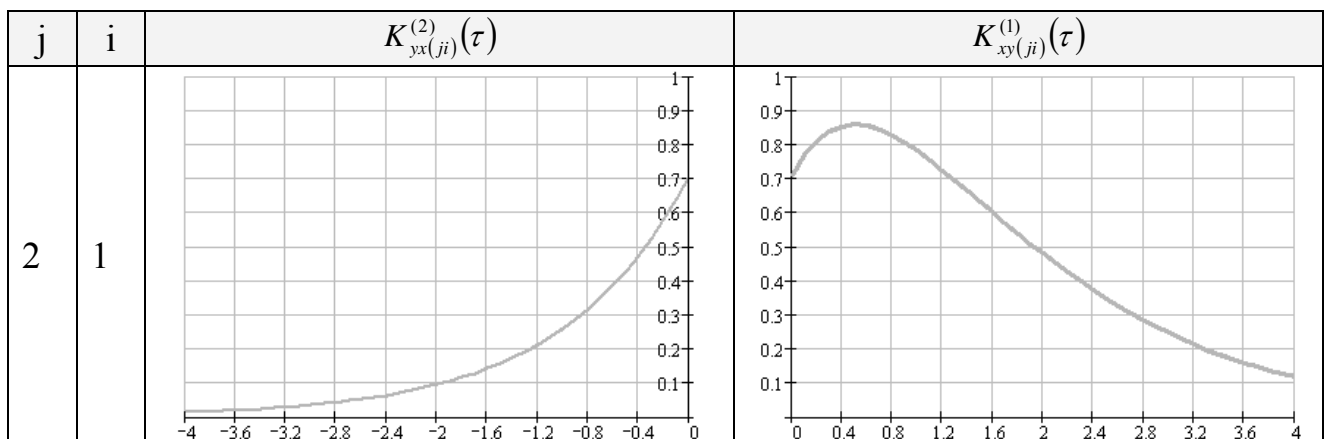
$$K_{x(i)}(\tau, \lambda_1, \omega_{0,1}) = \sigma_x e^{-\lambda_1 |\tau|}$$

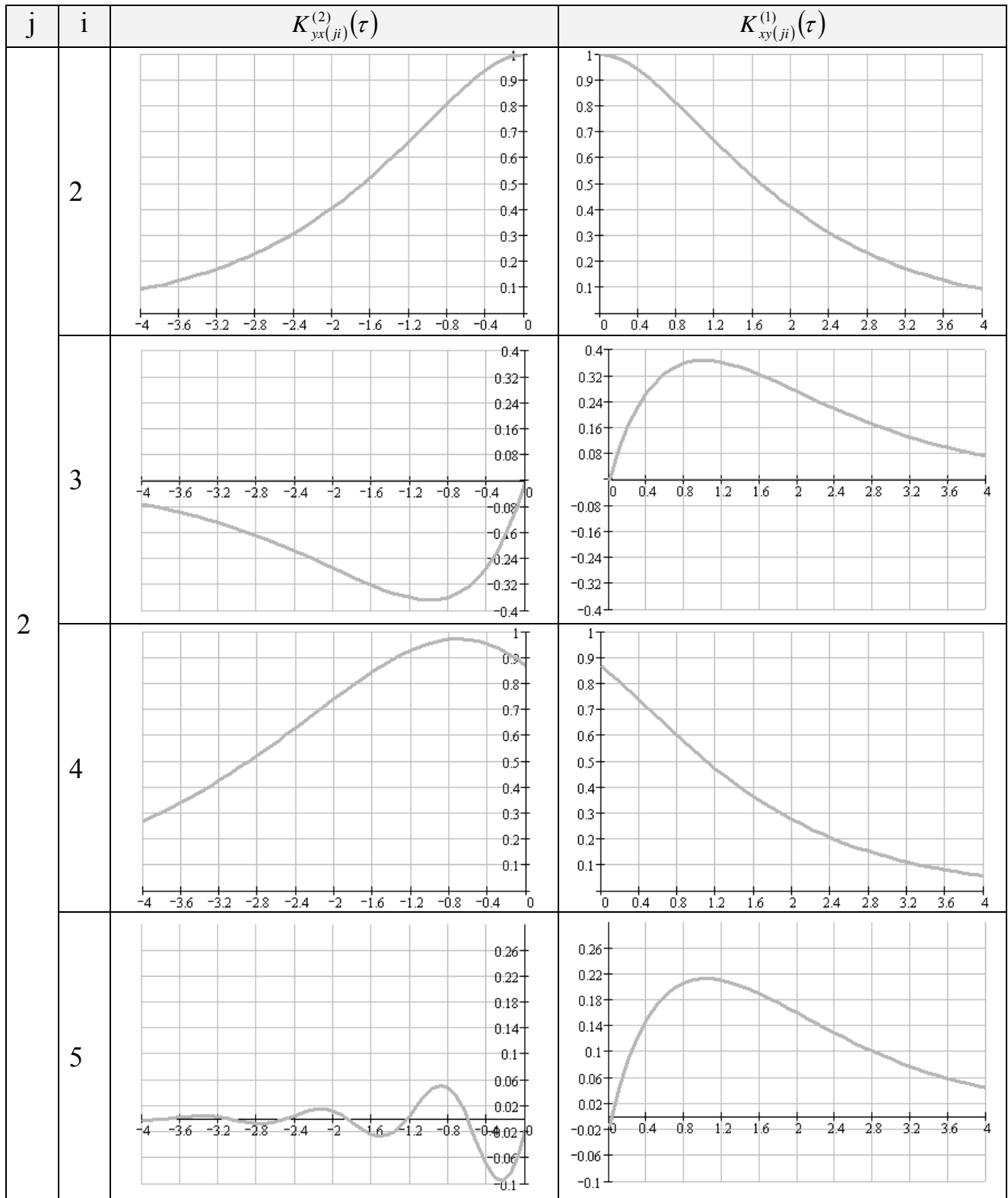


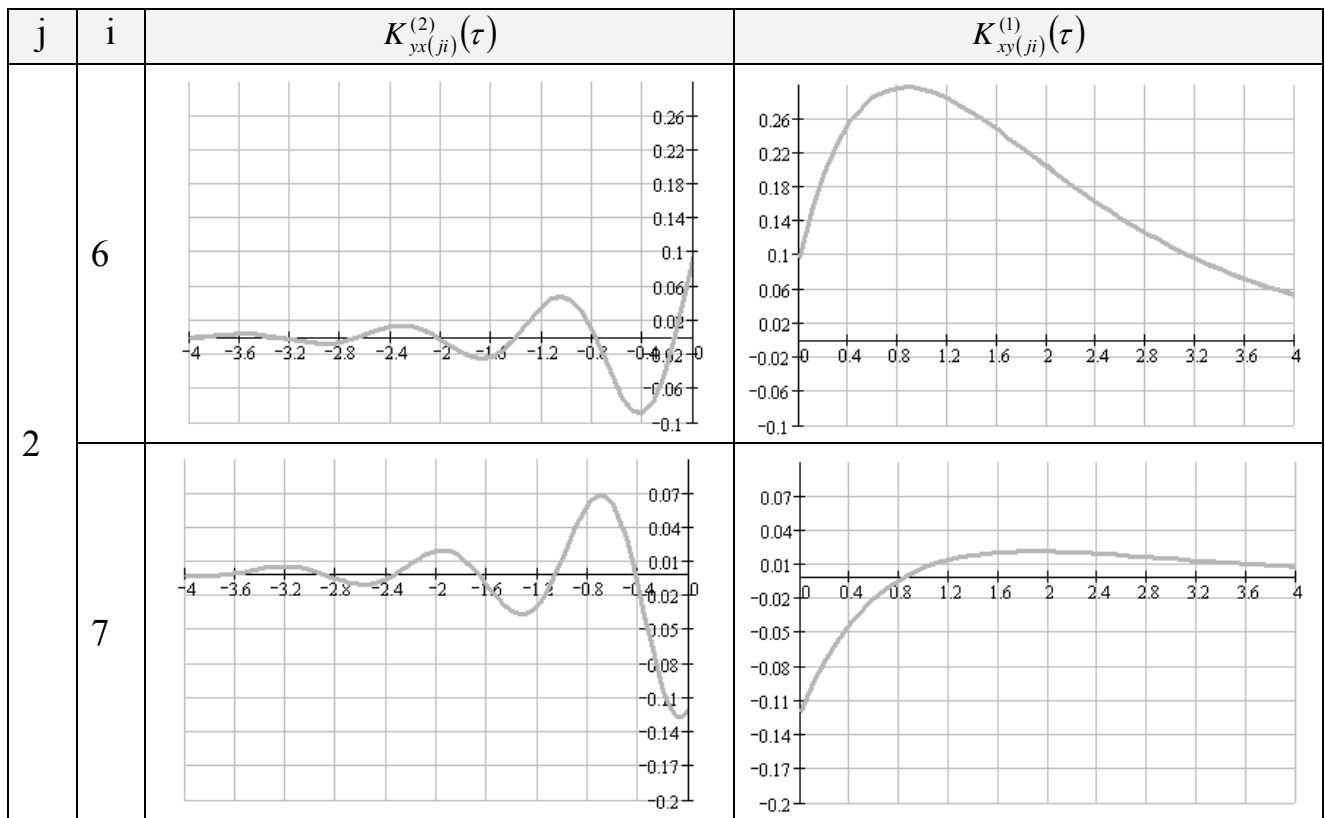


2. ВКФ для модели:

$$K_{x(2)}(\tau, \lambda_2, \omega_{0,2}) = \sigma_x e^{-\lambda_2|\tau|} \cdot (1 + \lambda_2|\tau|)$$

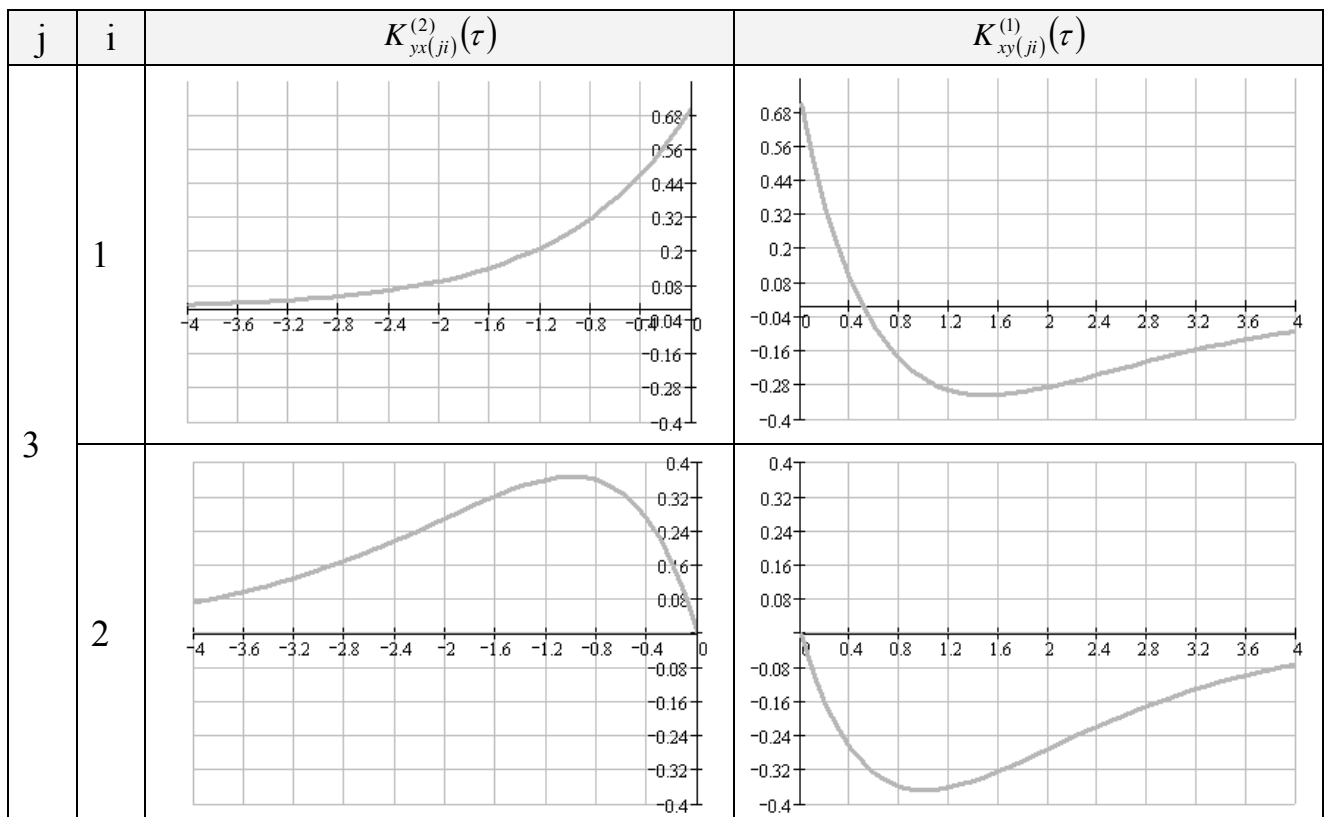




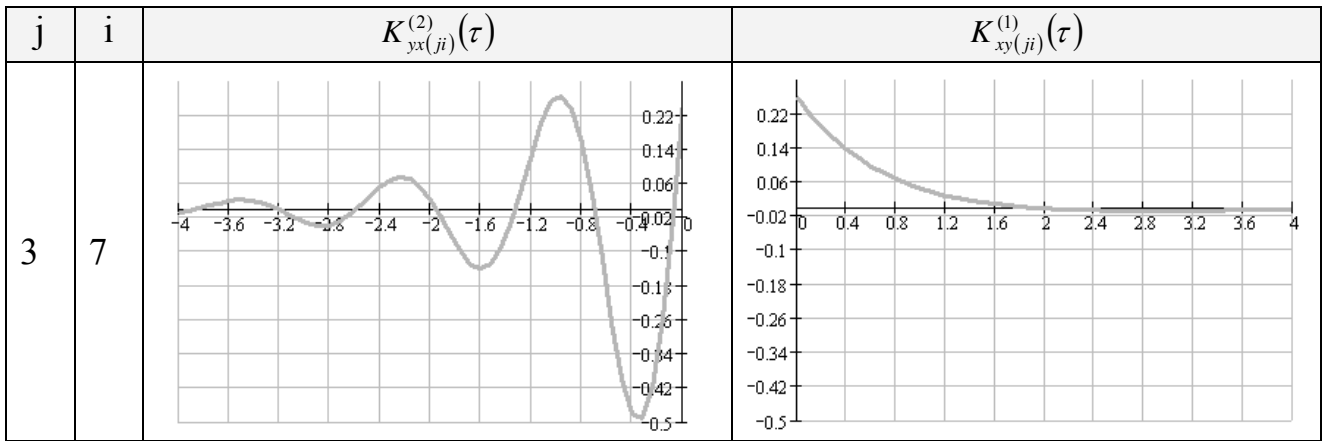


3. ВКФ для модели:

$$K_{x(3)}(\tau, \lambda_3, \omega_{0,3}) = \sigma_x e^{-\lambda_3 |\tau|} \cdot (1 - \lambda_3 |\tau|)$$

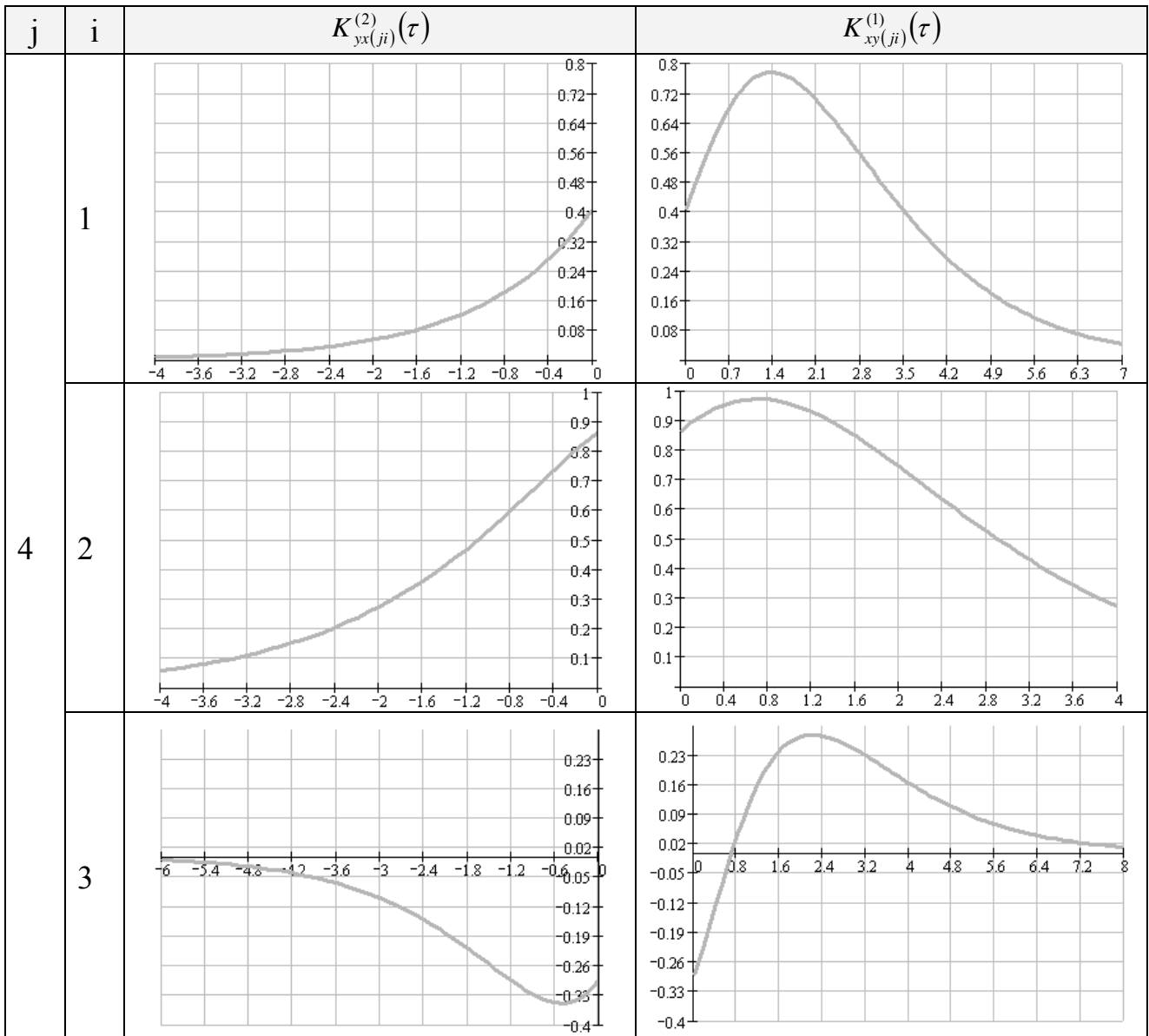


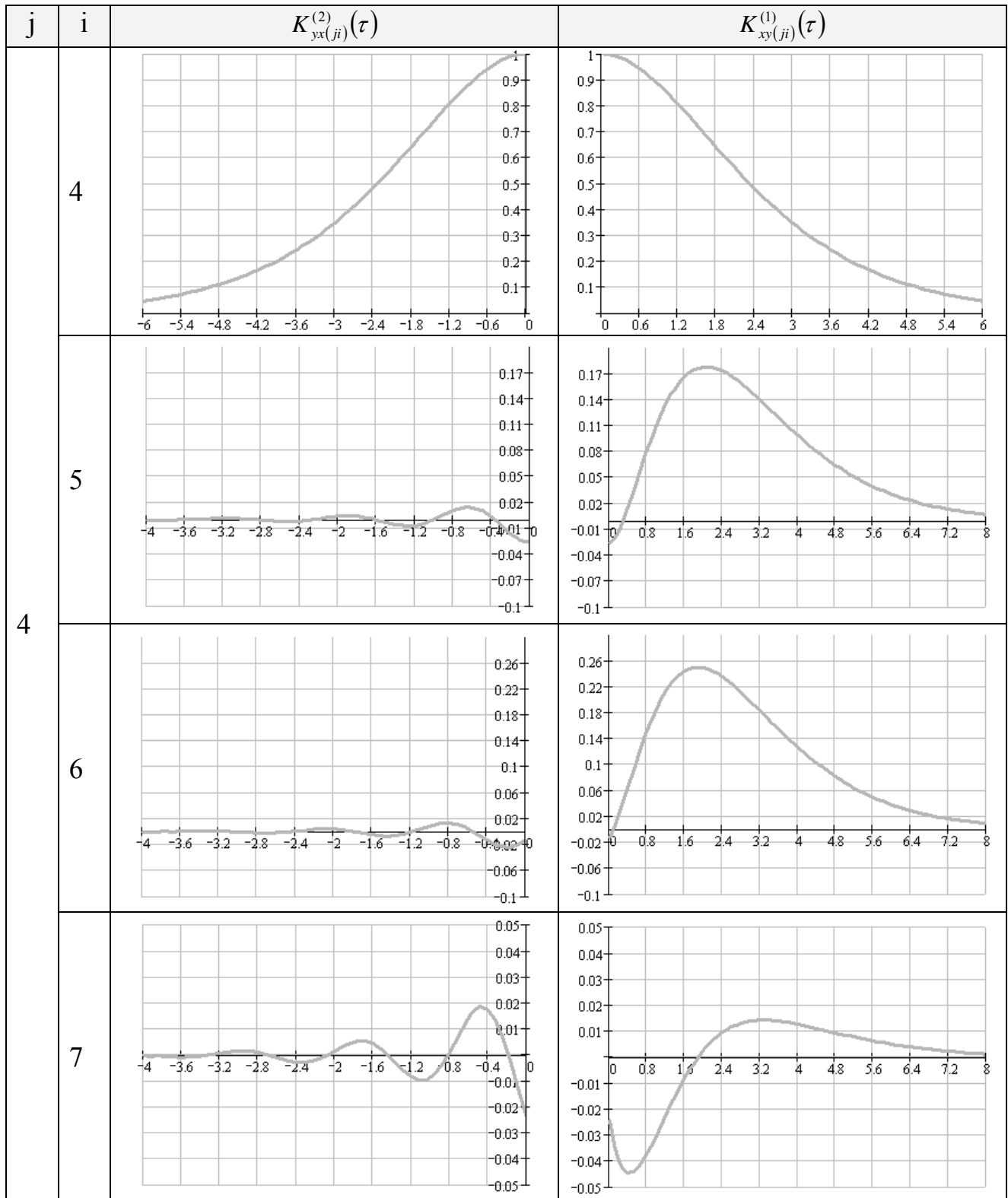
j	i	$K_{yx(ji)}^{(2)}(\tau)$	$K_{xy(ji)}^{(1)}(\tau)$
3	3		
	4		
	5		
	6		



4. ВКФ для модели:

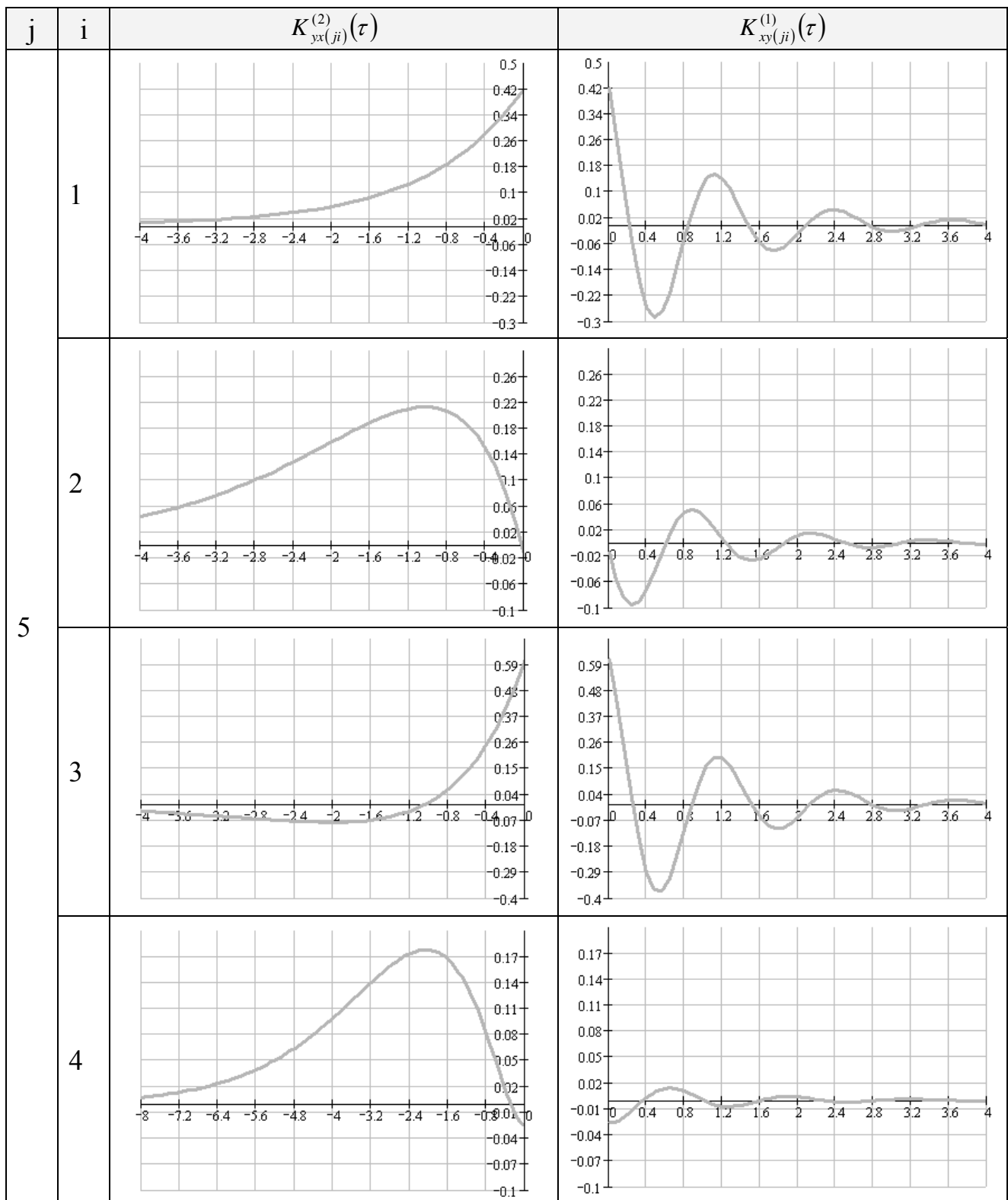
$$K_{x(4)}(\tau, \lambda_4, \omega_{0,4}) = \sigma_x e^{-\lambda_4 |\tau|} \cdot \left(1 + \lambda_4 |\tau| + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$$

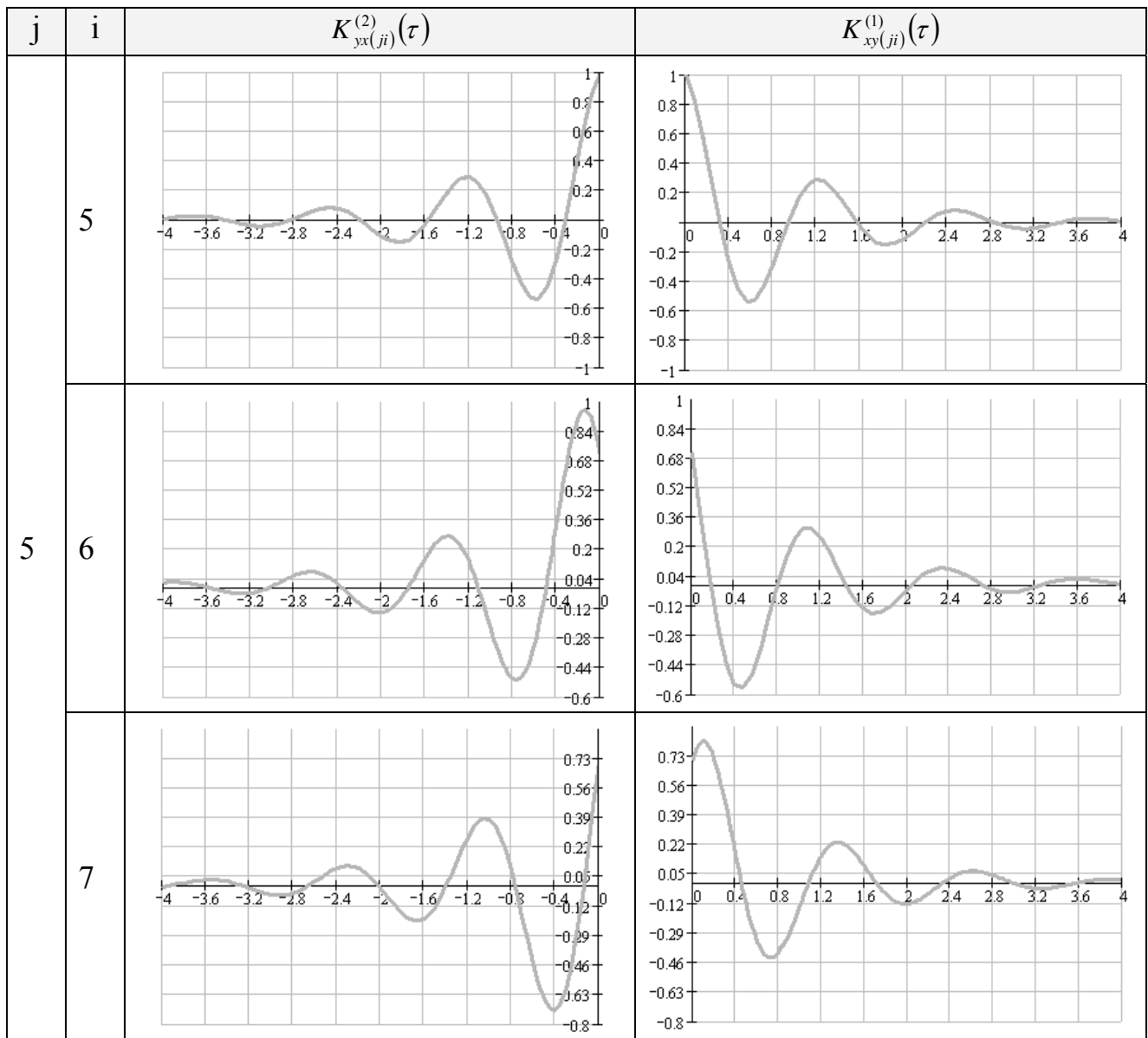




5. ВКФ для модели:

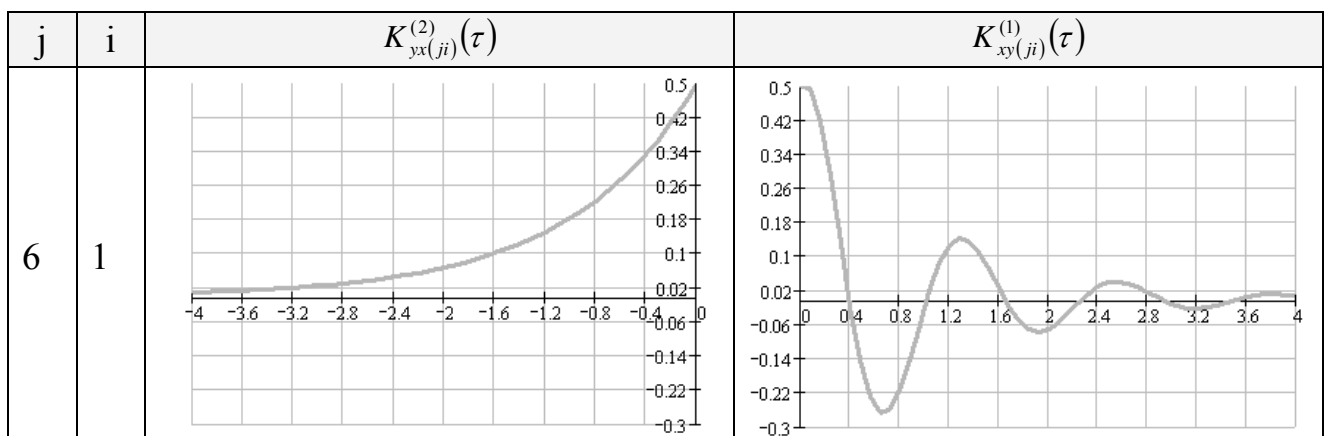
$$K_{x(s)}(\tau, \lambda_s, \omega_{0,s}) = \sigma_x e^{-\lambda_s |\tau|} \cdot \cos(\omega_{0,s} \tau)$$

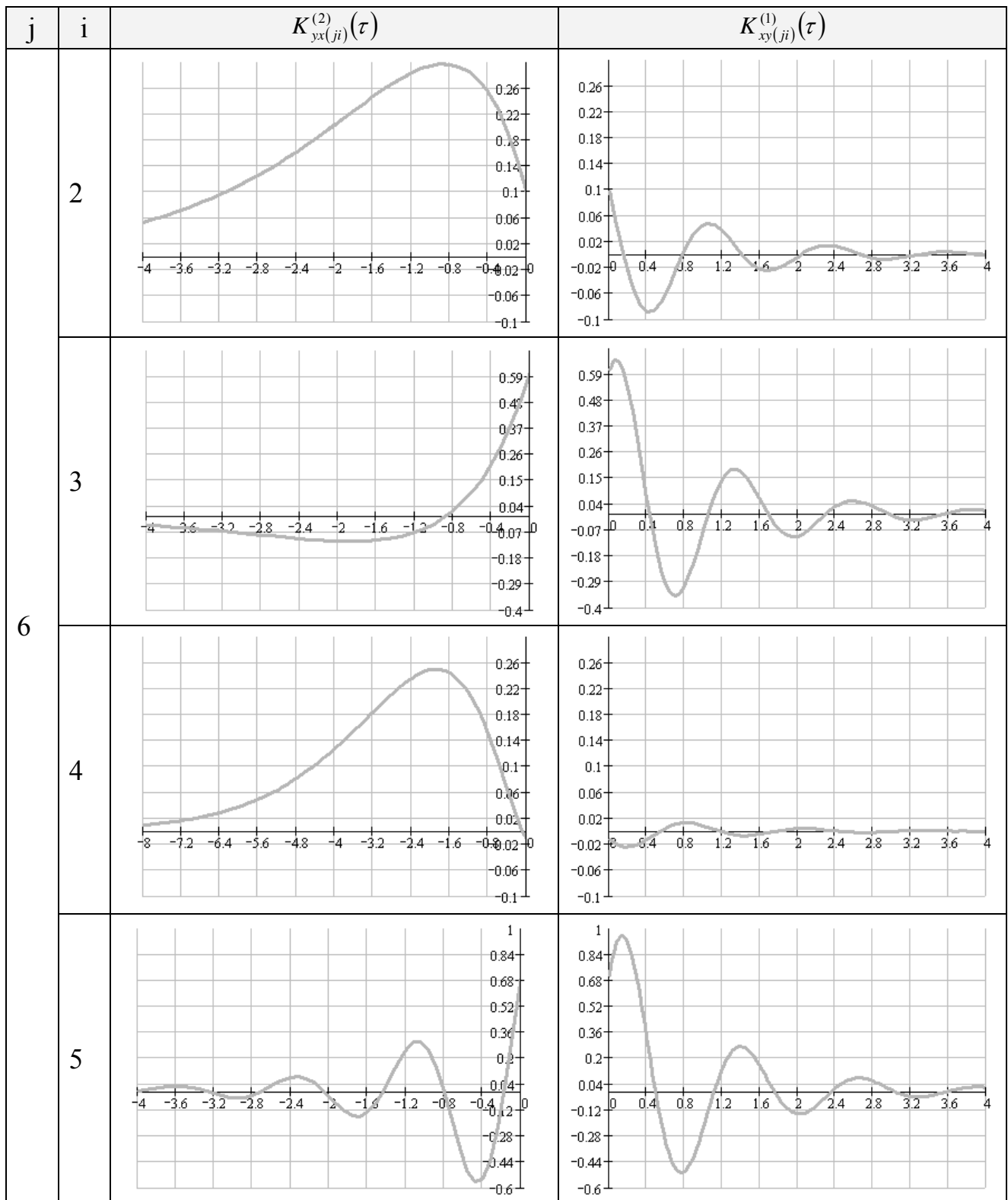


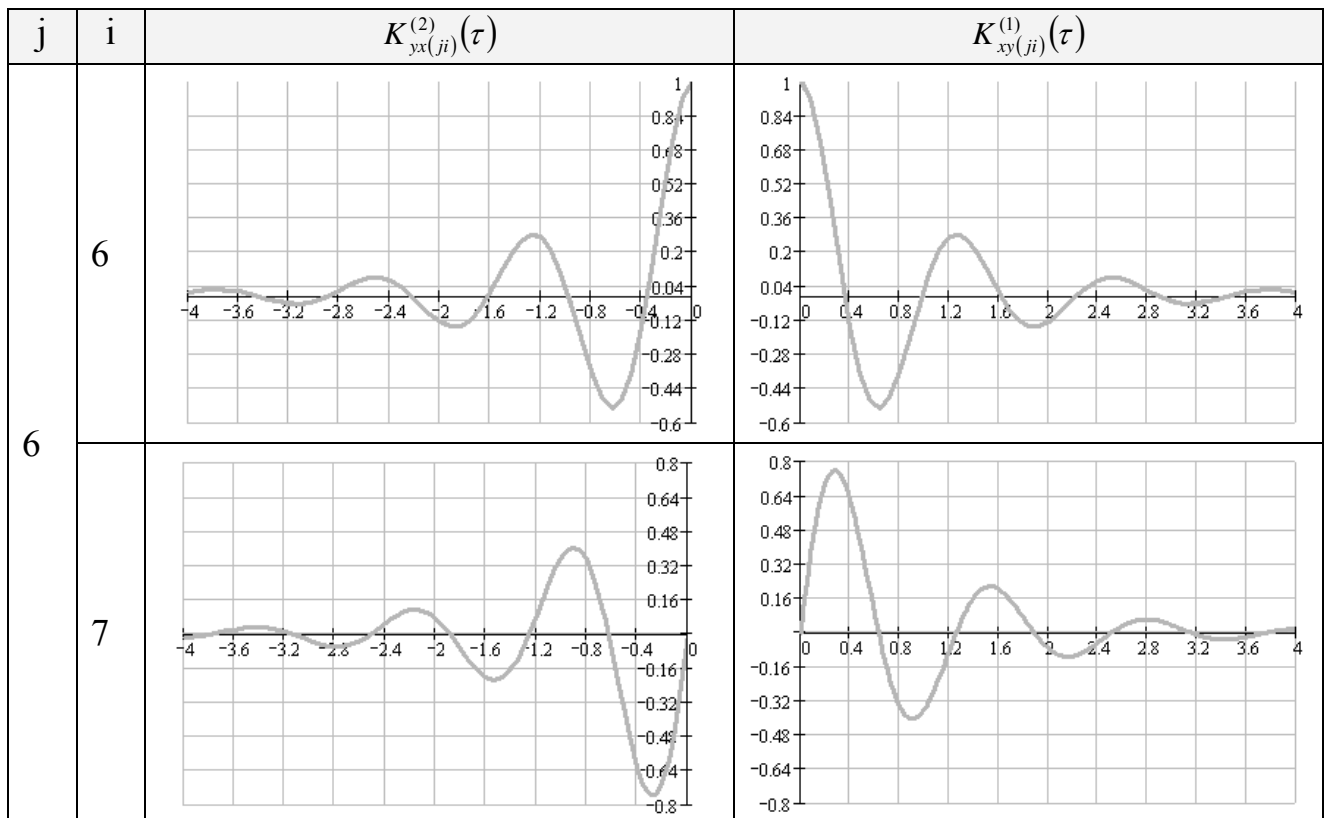


6. ВКФ для модели:

$$K_{x(6)}(\tau, \lambda_6, \omega_{0,6}) = \sigma_x e^{-\lambda_6 |\tau|} \cdot \left(\cos(\omega_{0,6} \tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau) \right)$$

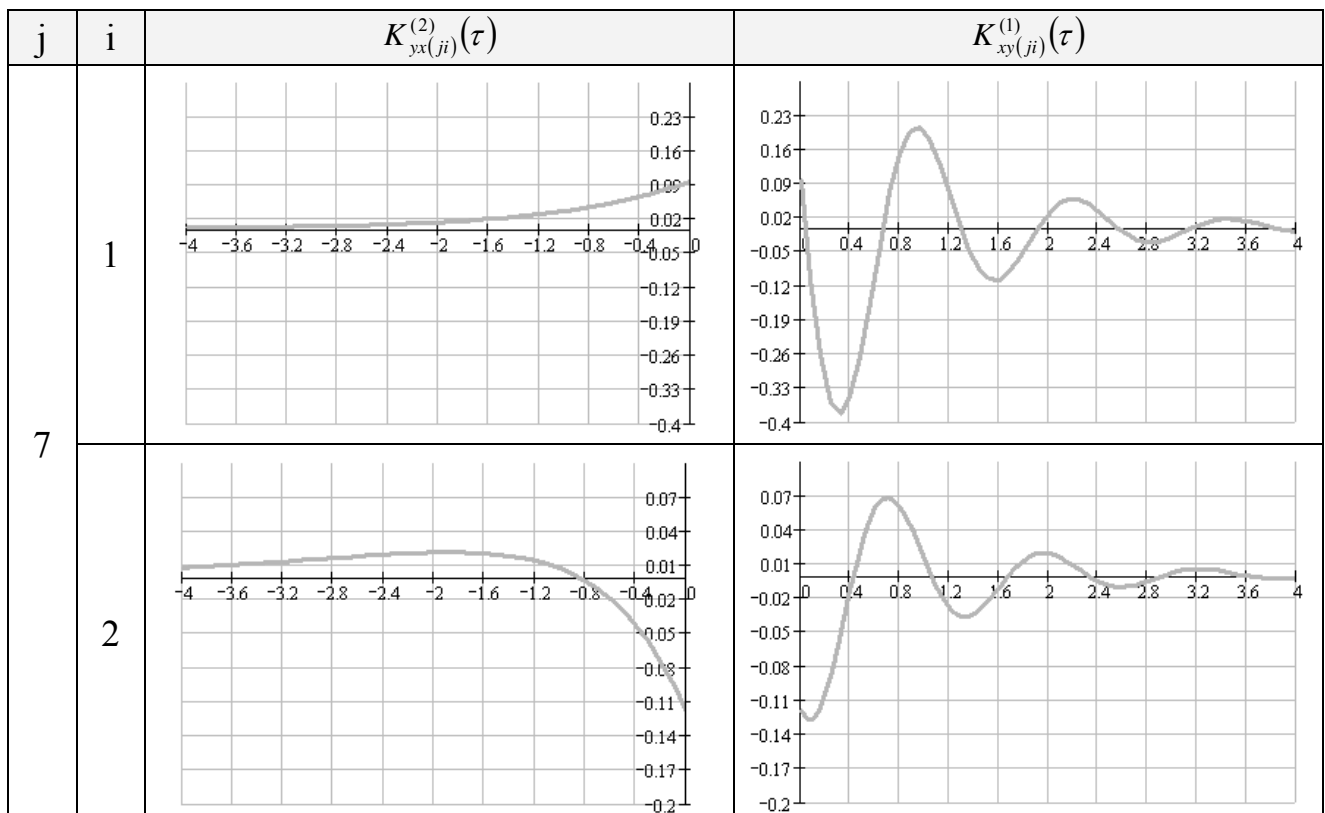


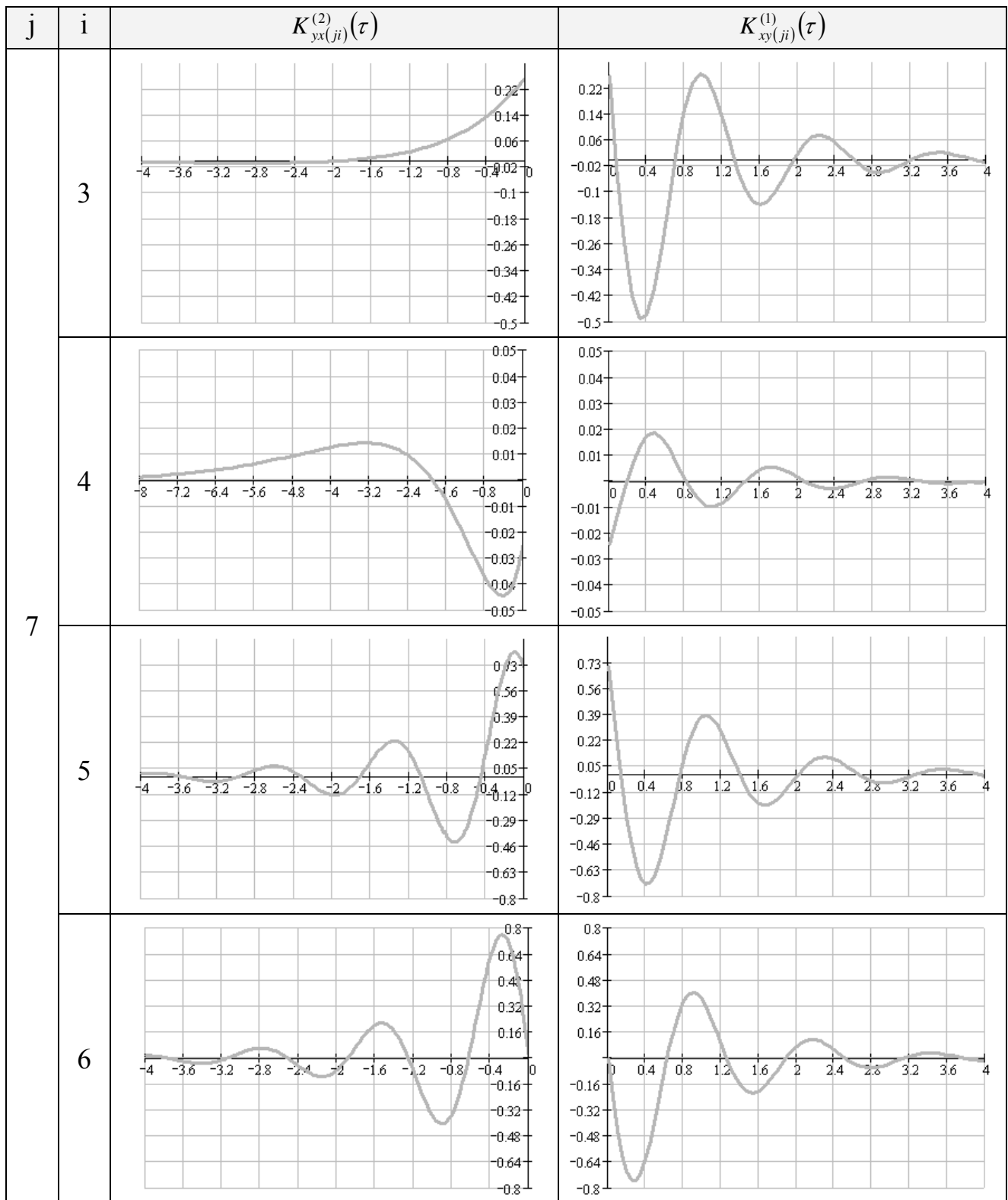




7. ВКФ для модели:

$$K_{x(7)}(\tau, \lambda_7, \omega_{0,7}) = \sigma_x e^{-\lambda_7|\tau|} \cdot \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau) \right)$$





j	i	$K_{yx(ji)}^{(2)}(\tau)$	$K_{xy(ji)}^{(1)}(\tau)$
7	7		

Формат файлов автоматизированного комплекса

Система функциональных модулей	
МОДУЛИ	
[Наименование модуля № 1]	
[координата X]	
[координата Y]	
[тип функционального модуля]	
...	
[Наименование модуля № N]	
[координата X]	
[координата Y]	
[тип функционального модуля]	
ДУГИ	
[Наименование дуги №1]	
[Наименование модуля источника]	
[Наименование модуля приемника]	
...	
[Наименование дуги № M]	
[Наименование модуля источника]	
[Наименование модуля приемника]	

Примечание:

В квадратных скобках указывается содержимое параметра.

N – Количество функциональных модулей в системе.

M – Число дуг в системе.

Параметр «Тип функционального модуля» принимает следующие значения:

Функциональный модуль	
Наименование	Тип
Источник СП	3
Фильтр	4
Линия задержки	5
Формирователь ВКФ	6
Ортогональный фильтр	7
Формирователь спектра	9
Звуковая карта	11
Накопитель	12
НВЛ-08	13

Формат файла СП (РД)
[N] – число отсчетов
[dt] – шаг дискретизации
[x(0)] – отсчет СП № 0
...
[x(N-1)] – отсчет СП № N-1

Примечание:

N – Число отсчетов СП.

Формат файла с ВКФ (РД)
[N _{прав.}] – число отсчетов правой ветви
[N _{лев.}] – число отсчетов левой ветви
[dt] – шаг дискретизации ВКФ
[Kху _{прав.} (0)] – отсчет правой ветви № 0
...
[Kху _{прав.} (N-1)] – отсчет правой ветви № N-1
[Kху _{лев.} (0)] – отсчет левой ветви № 0
...
[Kху _{лев.} (N-1)] – отсчет левой ветви № N-1

Примечание: при сохранении КФ, сгенерированной на первой странице, число отсчетов левой ветви равно 1, а его значение равно значению КФ в нуле.

Формат файла с коэффициентами (beta/b)
1
[alfa _{прав.}] – параметр ортогональной функций правой ветви
[beta _{прав.} (0)] – коэффициент правой ветви № 0
...
[beta _{прав.} (M _{прав.})] – коэффициент правой ветви № M _{прав.}
[alfa _{лев.}] – параметр ортогональных функций левой ветви
[beta _{лев.} (0)] – коэффициент левой ветви № 0
...
[beta _{лев.} (M _{лев.})] – коэффициент левой ветви № M _{лев.}
MAX X, Y, SHIFT:
[MAX x] – координата x точки максимума
[MAX y] – координата y точки максимума
[MAX shift] – сдвиг максимума относительно нуля (номер отсчета)
$\tau_k^{(2)}$ – интервал корреляции
$\tau_k^{(4)}$ – интервал корреляции
[M _{прав.}] – порядок аппроксимирующей функции правой ветви
[M _{лев.}] – порядок аппроксимирующей функции левой ветви
[basis _{прав.}] – базис ортогональных функций правой ветви

1
[basis _{лев.}] – базис ортогональных функций левой ветви
[err_мет _{прав.}] – методическая погрешность правой ветви
[err_мет _{лев.}] – методическая погрешность левой ветви
[err_сред _{прав.}] – среднеквадратическая погрешность правой ветви
[err_мет _{лев.}] – среднеквадратическая погрешность левой ветви

Формат файлов со спектром

Вещественная часть спектра $\text{Re}S_{xy}$	Мнимая часть спектра $\text{Im}S_{xy}$	Спектральная плотность мощности S_{xy}
$\Delta\omega$	$\Delta\omega$	$\Delta\omega$
ω_s	ω_s	$\text{Re} S_{xy}(0)$
$\text{Re} S_{xy}(j\omega_s)$	$\text{Im} S_{xy}(j\omega_s)$...
$\Delta\omega_s$	$\Delta\omega_s$	$\text{Re} S_{xy}(N)$
$\text{Re} S_{xy}(0)$	$\text{Im} S_{xy}(0)$	$\text{Im} S_{xy}(0)$
...
$\text{Re} S_{xy}(N)$	$\text{Im} S_{xy}(N)$	$\text{Im} S_{xy}(N)$

Фаза спектра $S_{xy}Ph$	Модуль спектра $S_{xy}Mo$
$\Delta\omega$	$\Delta\omega$
$S_{xy}Ph(0)$	$S_{xy}Mo(0)$
...	...
$S_{xy}Ph(N)$	$S_{xy}Mo(N)$

где $\Delta\omega$ – шаг дискретизации по частоте;
 ω_s – частота max спектра;
 $\text{Re} S_{xy}(j\omega_s)$, $\text{Im} S_{xy}(j\omega_s)$ – значение спектра в точке max;
 $\Delta\omega_s$ – эквивалентная ширина спектра;
 N – число отсчетов спектра;
 $\text{Re} S_{xy}(i \cdot \Delta\omega)$ – значение вещественной части спектра на частоте $i \cdot \Delta\omega$;
 $\text{Im} S_{xy}(i \cdot \Delta\omega)$ – значение мнимой части спектра на частоте $i \cdot \Delta\omega$;
 $S_{xy}Ph(i \cdot \Delta\omega)$ – значение фазы спектральной плотности мощности на частоте $i \cdot \Delta\omega$;
 $S_{xy}Mo(i \cdot \Delta\omega)$ – значение модуля спектральной плотности мощности на частоте $i \cdot \Delta\omega$.

Прохоров С.А., Графкин А.В.

Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа
в ортогональных базисах

Компьютерный набор и верстка:
Прохоров С.А., Графкин А.В.;
Лицензия ЛР № 040910 от 10.08.98

Подписано в печать 1.07.2005 г.
Формат 60x84 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 24
Тираж 500 экз. Заказ № 299

Самарский научный центр Российской академии наук.
443001, Самара, Студенческий переулок, 3 А.