циальных уравнений. - В ж.: Дифференциальные уравнения, Минск, 1971, 7, № 2.

Л.М.Фридман

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mu\frac{dz}{dt}=f(z,y,u(z)),\quad \frac{dy}{dt}=g(z,y,u(z)), \tag{1}$$

где $z\in R^m$; $y\in R^n$; μ - малый параметр, а функция $u(z)$ имеет разрыв I-го рода на поверхности $S: S(z)=0$, причем $u(z)=\operatorname{sgn} S(z)$.

При исследовании поведения решений сингулярно возмущенных систем с гладкими правыми частями рассматривают два основных случая. Когда система "быстрых движений" имеет асимптотически устойчивое положение равновесия, поведение решений системы описывается теоремой А.Н. Тихонова [1]. Для случая, когда уравнения быстрых движений имеют орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение, Л.С. Понтрягиным и Л.З. Родыгиным [2] разработан специальный вариант метода усреднения. Аналог теоремы А.Н. Тихонова в случае, когда разрывны уравнения медленных движений, доказан в монографии В.И. Уткина [3].

В настоящей работе рассматривается решение задачи Коши для системы (1) с начальными условиями

$$z(0,\mu)=z^0;\quad y(0,\mu)=y^0. \tag{2}$$

Показано, что для анализа поведения решений задачи (1),(2) применима процедура усреднения Понтрягина-Родыгина.

2. Формулировка основного утверждения. Предположим, что выполняются следующие условия.

I. Функции $f,g\in C^2[\bar G]$, где $\bar G$ замкнутая область $(\bar G\subset R^m\times R^n\times R)$.

II. Поверхность S является поверхностью без контакта системы

$$\frac{d\tilde z}{d\tau}=f(\tilde z,y,u(\tilde z)) \qquad (\,y\text{ - параметр}). \tag{3}$$

при всех $y\in\bar D$ ($\bar D$ - сужение области $\bar G$ на R^n).

Ш. Система (3) при всех $y\in\bar D$ имеет изолированное асимптотически орбитально устойчивое $T(y)$ - периодическое решение $\tilde z_0(\tau,y)$ такое, что $z^0\subset\Omega(y^0)$ -области влияния $\tilde z_0(\tau,y^0)$, причем

$$0<T_1<T(y)<T_2<\infty. \tag{4}$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\partial S/\partial z_1\neq 0$ в области $\bar G$ (нижний индекс у векторов здесь и всюду ниже будет обозначать соответствующую их координату). Вместо переменной z введем в рассмотрение новые переменные $s\in R$ и $x\in R^{m-1}$ по формулам

$$s=S(z);\quad x_i=z_{i+1}\quad (i=\overline{1,m-1}).$$

Тогда системы (I) и (3) примут соответственно вид

$$\mu\frac{dx}{dt}=(grad\, S,f)=h(s,x,y,V(s)) \tag{I'}$$

$$\mu\frac{dx}{dt}=F(s,x,y,V(s));\ \frac{dy}{dt}=H(s,x,y,V(s))$$
$$(V(s)=sgn\, s)\quad и \tag{3'}$$
$$\frac{d\tilde s}{d\tau}=h(\tilde s,\tilde x,y,V(\tilde s)),\quad \frac{d\tilde x}{d\tau}=F(\tilde s,\tilde x,y,V(\tilde s)).$$

Начальные условия (2) запишутся в форме

$$s(0,\mu)=S(z^0),\ x_i(0,\mu)=z^0_{i+1},\ (i=\overline{1,m-1}),\ y(0,\mu)=y^0. \tag{2'}$$

Каждому периодическому решению (3') на поверхности $s=0$ соответствует $x^*(y)$ - неподвижная точка отображения p -кратного последования $\Phi(x,y)$, осуществляемого системой (3'). Обозначим $V_+^*=\{(x^*(y),y): h(0,x^*(y),y,1)>0,\ y\in\bar D\}$. Заметим, что $\Phi(x,y)$ является $p(y)$ -кратной суперпозицией $(p(y)\leqslant 2$ непрерывно дифференцируемых отображений и, следовательно, обладает свойствами гладкости по x при всех $y\in\bar D$.

Предположение. При выполнении условий I–Ш для любого $y\in\bar D$ существуют $K(y)$ и $\delta(y)$ такие, что, как только

$$\|x-x^*(y)\|\leqslant\delta(y)\ \ \|\Phi^{K(y)}(x,y)-x^*(y)\|<\delta(y).$$

Доказательство. Выберем $\delta(y)$ так, чтобы множество $\bar U(x^*(y),\delta(y))=\{(x,y): \|xx^*(y)\|\leqslant\delta(y),(x^*(y),y)\in V_+^*\}$ лежало внутри области влияния $(\tilde S_0(\tau,y),\tilde x_0(\tau,y))$. Из непрерывной зависимости решений системы (3') от начальных условий и условия Ш следует, что для каждого $((x,y)\in U(x^*(y),\sigma(y)))$ существуют $K(x,y)$ и $\Delta(x,y)$ такие, что, как только $\|\eta-x\|<\Delta(x,y)\Phi^{K(x,y)}(\eta,y)\in U(x^*(y),\varepsilon);(\sigma(y)>\varepsilon>0)$. Выделим из имеющегося покрытия области $\bar U(x^*(y),\sigma(y))$ конечное с центрами в точках $x^1,x^2\ldots,x^\ell$. Тогда в качестве $K(y)$ можно взять наименьшее общее кратное из $K(x^i,y)(i=\overline{1,\ell})$.

Рассмотрим матрицу $\psi(y)=\partial\Phi/\partial x(x^*(y),y)$. Пусть наряду с условиями I–III выполняются предположения IУ и У.

IУ. Собственные числа матрицы $\psi(y)$ при всех $y\in\bar D$ лежат внутри круга комплексной плоскости радиуса $q<1$.

У. Решение системы $\dfrac{d\bar y}{dt}=\overline{g(\bar y)}$, где

$$\overline{g(\bar y)}=\frac{1}{T(y)}\int_0^{T(y)}g(\tilde z_0(\tau,\bar y),\bar y,u(\tilde z_0(\tau,\bar y)))d\tau \tag{5}$$

с начальным условием $y(0)=y^0$ при всех $t\in[0,L]$ лежит строго внутри $\bar E$ ($\bar E$ – замкнутая подобласть $\bar D$).

Т е о р е м а. При выполнении условий I–У существуют такие функции $\varphi(t,\mu)$ и $\sigma(\mu)$, что для $(z(t,\mu),y(t,\mu))$– решения задачи (I), (2) выполняются соотношения:

$$\sigma(\mu)=O(\mu\ln\mu);\ \mu\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{T(\bar y)}+Q(t,\mu)\ \text{при}\ t\in[\sigma(\mu),L] \tag{6}$$

$$\sup_{t\in[\sigma(\mu),L]}\|z(t,\mu)-\tilde z_0(T(\bar y(t))\varphi(t,\mu),\bar y(t))\|=O(\mu); \tag{7}$$

$$\sup_{t\in[0,L]}\|y(t,\mu)-\bar y(t)\|=O(\mu),$$

где $Q(t,\mu)$ – кусочно непрерывная по t функция, причем при всех t из ее области непрерывности $Q(t,\mu)=O(\mu)$.

3. Точечные отображения, осуществляемые уравнениями быстрых движений.

Л е м м а I. При выполнении условий I–IУ существуют такие постоянные $\sigma>0$ и $K>0$, что отображение $\Phi^K(x,y)$ переводит множество $\bar U(V_+^*,\sigma)$ в себя, причем для всех $(\eta,y),(\xi,y)\in\bar U(V_+^*,\sigma)$

$$\|\Phi^K(\eta,y)-\Phi^K(\xi,y)\|<q_1\|\eta-\xi\|\ (0<q_1<1). \tag{8}$$

Доказательство. Из условия IУ и теоремы о неявной функции следует, что уравнение $x^*=\Phi^{K(y)}(x^*,y)$ имеет в некоторой окрестности $\|y'-y\|<\Delta_1(y)$ непрерывное по y' решение $x^*(y')$. Из компактности области $\bar D$ следует, что существует такое K_1, что решение уравнения $x^*=\Phi^{K_1}(x^*,y)$ непрерывно дифференцируемо в $\bar D$. Более того, из теоремы о величине спектрального радиуса [4] и непрерывности матрицы $\psi(y)$ следует, что при всех $y\in\bar D$ существуют такие числа $\ell^*(y)$, $\Delta_2(y),\bar q$ что для всех y' таких, что

$\|y'-y\|<\Delta_2(y)$ $\ell>\ell^*(y)$ $\|\psi^{\ell}(y')\|<\bar q$ $(0<\bar q<1)$.

Используя компактность области $\bar D$, выделим из полученного покрытия $\bar D$ конечное с центрами в точках $\overset{1}{y},\overset{2}{y},\dots,\overset{j}{y}$ и, положив $K=\max \ell(\overset{j}{y})$ получим, что при всех $j\geqslant K$ и $y\in\bar D$ $\|\psi^j(y)\|<\bar q$.

Покажем, что для любого $q_1(\bar q<q_1<1)$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $y\in\bar D$ и $\|x-x^*(y)\|<\delta$ $\|\frac{\partial\Phi^K}{\partial x}(x,y)\|<q_1$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует последовательность $\overset{p}{x}$ и $x^*(\overset{p}{y})$ такая, что $\|\overset{p}{x}-x(\overset{p}{y})\|\to 0$, а $\|\frac{\partial\Phi^K}{\partial x}(x,y)\|\geqslant q_1$. Выделим из последовательности $x(\overset{p}{y})$ подпоследовательность, сходящуюся к $x(\overset{0}{y})$ (это можно сделать, т.к. множество V_+^* замкнуто и ограничено). Тогда, в силу непрерывности $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)$ по x, $\|\frac{\partial\Phi^K}{\partial x}(x^*(\overset{0}{y}),\overset{0}{y})\|\geqslant q_1$, что противоречит неравенству $\|\psi^j(y)\|<\bar q$.

Таким образом, для множества $\bar U(V_+^*,\delta)$ $\sup\limits_{(x,y)\in U(V_+^*,\delta)}\|\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}(x,y)\|<q_1$, а значит, для любых η, ξ таких, что $(\eta,y),(\xi,y)\in U(V_+^*,\delta)$, используя формулу конечных приращений, получим неравенство (8).

Из леммы I следует, что уравнение $\tilde S_0(\tau,y)=0$ при всех $y\in\bar D$ имеет на промежутке $[0,T(y)]$ одинаковое число гладких по y решений. В дальнейшем ограничимся случаем, когда $\tilde S_0(\tau,y)$ пересекает поверхность $S=0$ дважды за период. Тогда функции $\eta(y)=\Phi(x,y)$ задаются формулами

$$0=R_1^+(\tau_1,x,y);\quad \xi(y)=R_2^+(\tau_1,x,y), \tag{9}$$
$$0=R_1^-(\tau_2,\xi(y),y),\quad \eta(y)=R_2^-(\tau_2,\xi(y),y),$$

где $R_1^{\pm}, R_2^{\pm}$ функции, выражающие зависимость общего решения системы (3') от начальных условий при $S>0$ и $S<0$ соответственно, причем $\frac{\partial R_1^+}{\partial\tau_1}=h(0,x,y,1)$; $\frac{\partial R_1^-}{\partial\tau_2}=h(0,\xi(y),y,-1)$. В силу замкнутости $U(V_+^*,\delta)$, при всех $(x,y)\in U(V_+^*,\delta)$ существует $\Delta_1>0$ такое, что $\left|\frac{\partial R_1^+}{\partial\tau_1}\right|,\left|\frac{\partial R_2^+}{\partial\tau_2}\right|>\Delta_1$. Следовательно, из теоремы о неявной функции следует, что функции $\tau_1(x,y),\tau_2(x,y)$, определенные из уравнений (9), непрерывно дифференцируемы в $U(V_+^*,\sigma)$.

Обозначим $(\tilde{S}_0(\tau,y),\tilde{x}_0(\tau,y))$ решение системы (3') с "начальной фазой" $\tilde{S}_0(0,y)=0$.

Лемма 2. Существуют такие постоянные $\mu_1, C, C_1>0$ и функция $\psi(t,\mu)$, что для $(S(t,\mu,\mathring{x},\mathring{y}), y(t,\mu,\mathring{x},\mathring{y}))$ – решения системы (I') с начальными условиями $S(0,\mu)=0$; $x(0,\mu)=\mathring{x}$; $y(0,\mu)=\mathring{y}$, $(\mathring{x},\mathring{y})\in U(V_+^*,(\mu)$ при всех t, для которых $y(t,\mu,\mathring{x},\mathring{y})\in D$, при $\mu\in[0,\mu_1]$ выполняются неравенства

$$\|(S(t,\mu,\mathring{x},\mathring{y}),x(t,\mu,\mathring{x},\mathring{y}))-(\tilde{S}_0(\psi(t,\mu)y(t,\mu,\mathring{x},\mathring{y})),\tilde{x}_0(\psi(t,\mu)y(t,\mu,\mathring{x},\mathring{y})\|<C_1\mu.$$

Доказательство. Введя в систему (I') новое "время" $\tau=t/\mu$, получим

$$\frac{d\check{S}}{d\tau}=h(\check{S},\check{x},\check{y},V(\check{S}));\quad \frac{d\check{x}}{d\tau}=F(\check{S},\check{x},\check{y},V(\check{S}))$$

$$\frac{d\check{y}}{d\tau}=H(\check{S},\check{x},\check{y},V(\check{S}))\mu. \tag{I0}$$

Отображение $\Phi_\mu(x,y)$ поверхности $S=0$ пространства (S,x), осуществляемое системой (I0), задается формулами

$$0=P_1^+(\tau_1,x,y,\mu);\quad \xi(y,\mu)=P_2^+(\tau_1,x,y,\mu);$$

$$0=P_1^-(\tau_2,\xi(y,\mu),\check{y}(\tau_1,\mu,x,y),\mu);\quad \eta(y,\mu)=P_2^-(\tau_2,\xi(y,\mu),$$
$$\check{y}(\tau_1,\mu,x,y),\mu),$$

где $P_1^\pm$, $P_2^\pm$ – функции, задающие зависимость координат общего решения системы (3') от начальных условий при $S>0$ и $S<0$ соответственно, причем

$$P_1^\pm(\tau,x,y,0)\equiv R_1^\pm(\tau,x,y),\quad P_2^\pm(\tau,x,y,0)\equiv R_2^\pm(\tau,x,y).$$

Следовательно, функции $\tau_1(x,y,\mu)$ и $\tau_2(x,y,\mu)$ имеют непрерывные по совокупности переменных частные производные по x_i, y_i, μ $(i=\overline{1,m-1};\ j=\overline{1,n};\ \mu\in[0,\mu_1])$.

Рассмотрим решение задачи Коши для системы (I0), выходящее из точки $(0,x,y)(x,y)\in U(V_+^*,\sigma)$. Решению этой задачи соответствует набор $\tau_i(x,y,\mu)$ моментов пересечения с поверхностью $S=0$. Тогда при $i=1,2$ для $(a,b)\in U(V_+^*,\sigma)$, $\mu\in[0,\mu_1]$

$$|\tau_i(x,y,\mu)-\tau_i(a,b,0)|<K\|(x,y,\mu)-(a,b,0)\|. \tag{II}$$

Отображению $\Phi_\mu(x,y)$ соответствует преобразование области $U(V_+^*,\sigma)$ задаваемое суперпозицией функции $P_1^\pm, P_2^\pm$.
Обозначив

$$T=\sup_{(x,y,\mu)\in U(V_+^*,\sigma)\times[0,\mu_0]}\tau_2(x,y,\mu); \qquad M=\sup_{(S,x,y)\in\bar G}\|H(S,x,y,V(S))\|;$$

$$B=\sup_{(x,y,\mu)\in U(V_+^*,\sigma)\times[0,\mu_0]}\left(\max\left\|\frac{\partial\Phi_\mu^\kappa}{\partial x}(x,y)\right\|;\ \left\|\frac{\partial\Phi_\mu^*}{\partial y}(x,y)\right\|;\ \left|\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial\mu}(x,y)\right|\right),$$

при всех $(x,y)\in U(V_+^*,\sigma)$ и $\tau\in[0,T]$ будем иметь

$$\|\Phi_\mu(x,y)-x^*(\check y(\tau,\mu,x,y)\|\leqslant\|\Phi_\mu(x,y)-\Phi(x,y)\|+$$
$$+\|\Phi(x,y)-x^*(y)\|+\|x^*(y)-x^*(\check y(\tau,\mu,x,y))\|\leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant q_1\|x-x^*(y)\|+\mu B(1+MT)=q_1\|x-x^*(y)\|+\mu B_1.$$

Следовательно, при отображении $\Phi_\mu(x,y)$ образ окрестности $U(x^*(y),r)$ $(\sigma>r>\frac{\mu B_1}{1-q_1})$ лежит в окрестности $U(x^*(\check y(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y)r)$ $(\tau\in[0,T])$.

Рассмотрим $(\check S(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y), \check x(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y), \check y(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y))$-решение системы (10), выходящее из точки $(0,\mathring x,\mathring y)$. Ему соответствует набор $\tau_i(\mathring x,\mathring y,\mu)$ моментов пересечения с плоскостью $S=0$. Положим, что при $\tau\in[\tau_{i-2}(\mathring x,\mathring y,\mu),\tau_i(\mathring x,\mathring y,\mu)]$ (i – четное)

$$\psi_1(\tau,\mu)=T(\check y(\tau\mu,\mathring x,\mathring y))\left[i-2+\frac{(\tau-\tau_{i-2}(\mathring x,\mathring y,\mu))}{\tau_i(\mathring x,\mathring y,\mu)-\tau_{i-2}(\mathring x,\mathring y,\mu)}\right]. \tag{13}$$

Из формулы (13) следует, что $\psi(\tau_i(\mathring x,\mathring y,\mu),\mu)=i\,T(\check y(\tau_i(\mathring x,\mathring y,\mu),\mu,\mathring x,\mathring y))$.

$$|\psi_1(\tau,\mu)-(i-2)T(\check y(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y))-(\tau-\tau_{i-2})(\mathring x,\mathring y,\mu))|<(1+$$
$$+2\kappa r)(\tau-\tau_{i-2}(\mathring x,\mathring y,\mu)). \tag{14}$$

Нетрудно показать, что для некоторых $B_2, B_3>0$.

$$\|(\check S(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y),\check y(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y))-(\tilde S_0(\psi_1(\tau,\mu),\check y(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y)),\tilde x_0(\psi_1(\tau,$$
$$\mu),\check y(\tau,\mu,\mathring x,\mathring y)))\|<B_2\mu+B_3 r. \tag{15}$$

Положив $\psi(t,\mu)=\psi_1(\mu t,\mu)$, $c=\frac{B_1}{(1-g_1)}$ $C_1=B_2+B_3C$, $\mu_1<\min\left\{\frac{(1-q_1)}{B_1}\sigma, \mu_0\right\}$, получим утверждение леммы 2.

Л е м м а 3. При выполнении условий I–III существует такой "момент времени" $t_0(\mu)=O(\mu)$ и постоянная μ_3, что при всех $\mu\in[0,\mu_3]$

$$(x(t_0(\mu),\mu),\ y(t_0(\mu),\mu))\in U(x^*(y(t_0(\mu),\mu),\sigma).$$

Доказательство. Рассмотрим системы (3') с начальными условиями $\tilde S(0,y)=S(z^0)$; $\tilde X_i(0,y)=X_i^0=z_{i+1}^0$, $(i=\overline{1,m-1})$. Условие III гарантирует существование такого момента времени τ_0, что $\tilde S(\tau_0,y)=0$, $\|\tilde x(\tau_0,y^0)-x^*(y^0)\|<\frac{\sigma}{3}$. Предположим, что уравнение $\tilde S(\tau,y^0)=0$ имеет на промежутке $[0,\tau_0]$ ровно ℓ корней $\tau_i\ (i=\overline{1,\ell})$, причем из условия II следует, что для некоторых $\Delta_3>0$ $\frac{\partial S}{\partial z}(z_i,y^0)>\Delta_3$ при всех $i=\overline{1,\ell}$. Выберем μ_2 так, чтобы при $i=\overline{1,\ell}$ $\check S(\tau_i(\mu)y^0)=0$; $\frac{\partial \check S}{\partial \tau_i}(\tau_i(\mu),\mu)>\frac{\Delta_3}{2}$. Тогда существуют такие $\tau_0(\mu), K_1,\ T_3>0$, что при $\mu\in[0,\mu_2]$

$$\check S(\tau_0(\mu),\mu,\overset{o}{x},\overset{o}{y})=0,\quad |\tau_0(\mu)|<T_3,\quad |\tau_0(\mu)-\tau_0|<K_1\mu;$$

$$\|\check x(\tau_0(\mu),\mu,x^0,y^0)-\tilde x(\tau_0,y^0)\|\leq\|\check x(\tau_0(\mu),\mu;x^0,y^0)-\tilde x(\tau_0(\mu),y^0)\|+$$

$$+\|\tilde x(\tau_0(\mu),y^0)-\tilde x(\tau_0,y^0)\|<\mu(B+KN)\quad \left(N=\sup_{(s,x,y)\in G}\|F(s,x,y,V(S))\|\right)$$

$$\|x^*(y(\tau_0(\mu),\mu,x^0,y^0))-x^*(y^0)\|<B\|y(\tau_0(\mu),\mu,x^0,y^0)-y^0\|<\mu BMT_3.$$

Следовательно, для $\mu_3<\min\left(\frac{\sigma}{3(B+KN)};\frac{\sigma}{3BMT_3};\frac{T_3-\tau_0}{K};\mu_2\right)$

$$\|x^*(y(\tau_0(\mu),\mu,x^0,y^0))-\check x(\tau_0(\mu),\mu,\tilde x^0,y^0)\|<\sigma,\ t_0(\mu)=\mu\tau_0(\mu).$$

Неподвижная точка $x^*(y)$ соответствует периодическому решению $\tilde x_0(\tau,y)$, а значит, существует такая "начальная фаза" $\varphi_0(\mu)$, что $\tilde x_0(\varphi_0(\mu)+\tau_0(\mu),y(\tau_0(\mu),\mu,x^0,y^0)=x^*(y,(t_0(\mu),\mu,x^0,y^0))$.

Л е м м а 4. При выполнении условий I–IV существует такой момент времени $t_1(\mu)=O(\mu\ln\mu)$, постоянные γ, C_2, μ_4 и функция $\psi(t,\mu)$, такая что при всех $t\in[t_0(\mu);t_1(\mu)]$, $\mu\in[0,\mu_4]$.

$$\|(s(t,\mu),x(t,\mu))-(\tilde{s}_0(\psi(t,\mu),y(t,\mu)),\tilde{x}_0(\psi(t,\mu),y(t,\mu)))\|<C_1\mu+$$
$$+C_2 e^{\frac{-\gamma(t-t_0(\mu))}{\mu}}.$$

Доказательство. Рассмотрим теперь решение системы (10) с начальными условиями

$$\check{s}(0,\mu)=0\ ;\ \check{x}(0,\mu)=\hat{x}=x(t_0(\mu),\mu),\ \check{y}(0,\mu)=\hat{y}=y(t_0(\mu)\mu). \quad (16)$$

Из неравенства (12) следует, что для $q_2(q_1<q_2<1)$ и всех $\mu\in[0,\mu_4]$ $\mu_4=\frac{\sigma(q_2-q_1)}{B_1}$ образ окрестности $U(x^*(\hat{y}),\sigma)$ при отображении функцией $\Phi_\mu^{\kappa n}(\hat{x},\hat{y})$ лежит внутри окрестности $U(x^*(y(\tau_{2\,n}^*,\mu,\hat{x},\hat{y}),q_2^{n-1}\sigma)\ |\tau_{2\,n}^*|$ – момент времени, когда решение задачи (10), (16) в $2n$-й раз пересекает поверхность $S=0$ до тех пор, пока $q_2^{n-1}\sigma\geqslant\frac{B_1\mu}{q_2-q_1}$. Выберем $p=2n$ так, чтобы $\|\check{x}(\tau_p(\mu),\mu,\hat{x},\hat{y})-x^*(\check{y}(\tau_p,\mu,\hat{x},\hat{y}))\|<C_\mu$. Для этого достаточно, чтобы $\sigma q_2^{p-1}<\frac{B_1\mu}{(1-q_1)}$, и, следовательно $p>p_0=$ $=\left[\log q_2\left(\frac{B_1\mu}{1-q_1}\right)\right]+1$. Определим $\psi_2(\tau,\mu)$ по формулам (13), заменив $\tau_{2i}(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{y},\mu)$ на τ_{2i}^*. Тогда из неравенства (15) при $\tau\in[\tau_{2\,i}^*,\tau_{2\,(i+1)}^*](2\kappa i<p_0-1)$ будем иметь

$$\|(\check{s}(\tau,\mu,\hat{x},\hat{y}),\check{x}(\tau,\mu,\hat{x},\hat{y})-(\tilde{s}_0(\psi_1(\tau,\mu),\check{y}(\tau,\mu,\hat{x},\hat{y}),\tilde{x}_0(\psi_1(\tau,\mu),\check{y}(\tau,\mu,\hat{x},\hat{y}))\|\leqslant B_2\mu+B_3q_2^{n-1}\sigma<C_1\mu+C_2e^{-\gamma\tau}\left(C_2=B_3e^{\sigma-1},\ \gamma=-\frac{\ln q_2}{T}\right). \quad (17)$$

Доказательство леммы будет завершено, если положить

$$\psi(t,\mu)=\psi_1(\mu\tau,\mu);\ t_1(\mu)=t_0(\mu)+\mu\tau_{p0}^*=O(\mu\ln\mu).$$

Предположим, что решение задачи (1') (2') при $t\in[0,t_D^*]$ не выходит из области D. Тогда для любого $t\in[t_0(\mu),t_D^*]$ справедливо неравенство $\|(s(t,\mu),x(t,\mu))-(\tilde{s}_0(\psi(t,\mu),y(t,\mu)),$ $y(t,\mu)),\tilde{x}_0(\psi(t,\mu),y(t,\mu))\|<C_1\mu+C_2e^{\frac{-\gamma(t-t_0(\mu))}{\mu}}.$

4. Отображения, осуществляемые уравнениями медленных движений. Рассмотрим системы

$$\frac{d\eta}{d\theta}=\mu(1+\mu\theta\,\mathrm{grad}\,\eta\,T(\eta))H_1(S_1(\theta,\mu),x_1(\theta,\mu),\eta,V(S_1(\theta,\mu))), \quad (18)$$

$$\frac{d\xi}{d\theta}=\mu H_1(\tilde S_1(\theta,\xi),\tilde x_1(\theta,\xi),\xi,V(\tilde S_1(\theta,\xi))), \tag{I9}$$

$$\frac{d\bar y}{d\theta}=\mu\overline{g(\bar y)}T(\bar y), \tag{20}$$

где $H_1(a,b,c,d)=H(a,b,c,d)T(c)$, $S_1(\theta,\mu)=S(t-t_0(\mu)/T(\eta)\mu,\mu)$

$x_1(\theta,\mu)=x(t-t_0(\mu)/T(\eta)\mu,\mu)$, $\tilde S_1(\theta,\xi)=\tilde S_0(\tau/T(\xi),\xi)$, $\tilde x_1(\theta,\xi)=$
$=\tilde x_0(\tau/T(\xi),\xi)$.

Система (I8) получена из последнего уравнения системы (I') заменой $\theta=(t-t_0(\mu))/\mu T(y)$. Система (20) совпадает с системой (5), если положить $\theta=t/\mu T(\bar y)$.

В статье [5] доказана теорема метода усреднения для разрывных систем в предположении, что левая часть уравнений поверхности разрыва дважды дифференцируема. Дословное повторение рассуждений, проведенных в этой работе, показывает, что теорема Крылова-Боголюбова справедлива и в случае, когда указанное условие заменено условием непрерывной дифференцируемости вторых производных моментов переключения. Следовательно, для решений задач Коши для систем (I9) и (20) с начальными условиями $\xi(0,\mu)=\bar y(0,\mu)=y(t_0(\mu),\mu)=y'$ при всех $\theta\in[0,L^*/\mu]$ $\sup\limits_{\theta\in[0,L^*/\mu]}\|\bar y(\theta,\mu)-\xi(\theta,\mu)\|=O(\mu)$ при любом конечном L^*.

Л е м м а 5. При выполнении условий I–У для $\eta(0,\mu)$ решения задачи Коши для системы (I8) с начальными условиями $\eta(0,\mu)=y'$

$$\sup_{\theta\in[0,L/\mu]}\|\xi(\theta,\mu)-\eta(\theta,\mu)\|=O(\mu) \qquad L_1=t_D^*/T(y(t_D^*,\mu))\mu.$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{L}_{i+1}y'$ и $\mathfrak{M}_{i+1}y'$ точечные отображения гиперплоскостей $\theta=iK$ пространства $R^n\times[0,L_1/\mu]$ в гиперплоскости $\theta=(i+1)K$, осуществляемые системами (I8) и (I9) соответственно. Тогда

$$\mathcal{L}_i y'=\mathcal{L}_{i-1}y'+\mu\int_{(i-1)K}^{iK}H_1(S_1(\theta,\mu),x_1(\theta,\mu),\mathcal{L}_{i-1}y_1'V/S_1(\theta,\mu)))d\theta+$$
$$+\mu W_1(\mu,\mathcal{L}_{i-1},y')$$

$$\mathfrak{M}_i y'=\mathfrak{M}_{i-1}y'+\mu\int_{(i-1)K}^{iK}H_1(\tilde S_1(\theta,\mathfrak{M}_{i-1}y'),\tilde x_1(\theta,\mathfrak{M}_{i-1}y')\mathfrak{M}_{i-1}y',$$
$$V(\tilde S(\theta,\mathfrak{M}_{i-1}y')))d\theta+\mu W_2(\mu,\mathfrak{M}_{i-1}y').$$

Оценим величины W_1, W_2.

$$\|W_1(\mu,\mathcal{X}_{i-1}y^1)\| \| \int_{(i-1)\kappa}^{i\kappa} [H_1(S_1(\theta,\mu), x_1(\theta,\mu), \eta(\theta,\mu), V(S_1(\theta,\mu))) -$$

$$- H_1(S(\theta,\mu), x(\theta,\mu), \mathcal{X}_{i-1}y^1, V(S(\theta,\mu)))] d\theta +$$

$$+ \mu \int_{(i-1)\kappa}^{i\kappa} \theta H_1(S(\theta,\mu), x_1(\theta,\mu), \eta(\theta,\mu), V(S(\theta,\mu))) d\theta \| \leqslant \mu (B_4 +$$

$$+ i\kappa - \kappa + \frac{\kappa^2}{2}) MT$$

$$(B_4 = \max_{(S,x,\eta)\in G} \left\{ \|H_1\|, \left\|\frac{\partial H_1}{\partial S}\right\|; \left\|\frac{\partial H_1}{\partial x}\right\|; \left\|\frac{\partial H_1}{\partial \eta}\right\|; \left|\frac{\partial H_1}{\partial V}\right| \right\});$$

$$\|W_2(\mu, \mathfrak{M}_{i-1}y^1)\| = \| \int_{(i+1)\kappa}^{i\kappa} H_1(\tilde{S}_1(\theta,\xi(\theta,\mu)), \tilde{x}_1(\theta,\xi(\theta,\mu)), \xi(\theta,\mu),$$

$$\kappa(\tilde{S}_1(\theta,\xi(\theta,\mu))) - H_1(\tilde{S}_1(\theta, \mathfrak{M}_{i-1}y^1), \tilde{x}_1(\theta, \mathfrak{M}_{i-1}y^1), \mathfrak{M}_{i-1}y^1, V(\tilde{S}_1(\theta,$$

$$\mathfrak{M}_{i-1}y^1))) d\theta \| \leqslant 3\mu B B_4 T + B_4 \int_{(i-1)\kappa}^{i\kappa} |V(\tilde{S}_1(\theta,\xi(\theta,\mu)) - V(\tilde{S}_1(\theta, \mathfrak{M}_{i-1}y^1)) d\theta.$$

Обозначим $\theta_{2j+1}(\xi)$ – момент, когда $\tilde{S}_1(\theta_{2j+1}(\xi),\xi) = 0$ $(j < \theta_{2j+1}(\xi) < j+1)$.

Тогда

$$\|W_2(\mu\, \mathfrak{M}_{i-1}y^1)\| \leqslant 3\mu B B_4 + \sum_{j=(i-1)\kappa}^{i\kappa-1} (\tilde{\theta}_{2j+1}(\xi(\theta,\mu)) - \tilde{\theta}_{2j+1}(\mathfrak{M}_{i-1}y^1)) \leqslant$$

$$\leqslant \mu \left(3BB_4 + \frac{\kappa K M T}{T_1}\right).$$

Следовательно, для доказательства леммы 5 достаточно показать близость отображений $\Pi_i y^1$ и $R_i y^1$, где

$$\Pi_i y^1 = \Pi_{i-1} y^1 + \mu \int_{(i-1)\kappa}^{i\kappa} H_1(S_1(\theta,\mu), x_1(\theta,\mu), \Pi_{i-1}y^1, V(S_1(\theta,\mu))) d\theta,$$

$$R_i y^1 = R_{i-1} y^1 + \int_{(i-1)\kappa}^{i\kappa} H_1(\tilde{S}_1(\theta, R_{i-1}y^1), \tilde{x}_1(\theta, R_{i-1}y^1), R_{i-1}y^1, V(\tilde{S}_1(\theta, R_{i-1}y))) d\theta.$$

Введем в систему (I') "время" $\theta = t - t_0(\mu)/\mu T(y)$ и по решению полученной системы, выходящему из точки $(0, x(t_0(\mu),\mu), y(t_0(\mu),\mu))$, определим аналогично (I3) функцию $\psi_2(\theta,\mu)$. Тогда

$$\|\Pi_i y^1 - R_i y^1\| < \|\Pi_{i-1}y^1 - R_{i-1}y^1\| + \mu \| \int_{(i-1)\kappa}^{i\kappa} [H_1(S_1(\theta,\mu), x(\theta,$$

$$\mu), \Pi_{i-1}y^1 V(S_1(\theta,\mu))) - H_1(\tilde{S}_1(\psi_2(\theta,\mu), \Pi_{i-1}y^1), \tilde{x}(\psi_2(\theta,\mu), \Pi_{i-1}y^1),$$

$$\Pi_{i-1}y^1, V(\tilde{S}_1(\psi_2(\theta,\mu), \Pi_{i-1}y^1))) + H_1(\tilde{S}_1(\psi_2(\theta,\mu), \Pi_{i-1}y^1), \tilde{x}_1(\theta,\mu),$$

$$\Pi_{i-1} y^1), \Pi_{i-1} y^1, V(\tilde{S}_1(\psi_2(\theta,\mu), \Pi_{i-1} y^1))) -$$

$$-H_1(\tilde{S}_1(\theta, R_{i-1} y^1), \tilde{x}(\theta, R_{i-1} y^1), R_{i-1} y^1, V(\tilde{S}(\theta, R_{i-1} y^1)))]d\theta \|.$$

Используя леммы 3,4 и соотношения (I2)-(I5), можно показать, что существуют такие $A_1, A_2, A_3 > 0$ и $0 < q_3 < 1$, для которых

$$\|R_i y^1 - \Pi_i y^1\| < \|\Pi_{i-1} y^1 - R_{i-1} y^1\|(1+\mu A_1) + \mu^2 A_2 + \mu H_3 q_3^{i-1}.$$

Покажем, что для последовательности $\{u_n\}$, задаваемой рекуррентной формулой $u_0 = 0;\ u_i = u_{i-1}(1+\mu A_1) + \mu^2 A_2 + \mu A_3 q_3^{i-1}$ при всех $i = 1, [L_1/\mu]$ выполняются соотношения $|u_i| = O(\mu)$. Действительно,

$$u_i = \mu^2 A_2 \sum_{j=0}^{i-1} (1+\mu A_1)^j + \mu A_3 \sum_{j=0}^{i-1} (1+\mu A_1)^{i-j-1j} \cdot q_3 < \mu \frac{A_2}{A_1}(1+\mu A_1)^i + \tag{21}$$

$$+\mu A_3 \sum_{j=0}^{i-1} q_2^i (1+\mu A_1)^i < \mu\left(\frac{A_2}{A_1} + A_3 \frac{q_3^i - 1}{q_3 - 1}\right) e^{L_1 A_1}.$$

Учитывая, что $\|\Pi_i y^1 - R_i y^1\| < u_i$, для некоторых $A_4, A_5 > 0$ будем иметь

$$\sup_{\theta \in [0, L_1/M]} \|\check{y}(\theta,\mu)\| < \mu\left(\frac{A_2}{A_1} + \frac{A_3}{1-q_3}\right) e^{L_1 A_1} + A_4 \mu + A_5 \mu^2$$

и, следовательно,

$$\sup_{\theta \in [0, T^*/\mu]} \|\check{y}(\theta,\mu) - \bar{y}(\theta)\| = O(\mu).$$

Покажем, что $t_D^* = L$. Из условия У следует, что $\bar{y}(t)$ при $t \in [0, L]$ отстоит от границы области D не менее чем на $d > 0$ и, если бы было $t_D^* = t_\mu < L$, то при малых μ $\|y(t,\mu) - \bar{y}(t)\| < \frac{d}{2}$, следовательно, $y(t_\mu, \mu)$ лежит в D и отстоит от границы D не менее, чем на $d/2$, а значит, $y(t,\mu)$ еще не выходит из D.

5. Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mu \frac{dz_1}{dt} = -z_1 - \operatorname{sgn} z_2, \quad \mu \frac{dz_2}{dt} = z_1 + y \operatorname{sgn} z_2, \tag{22}$$

$$\frac{dy}{dt} = z_1 + z_2 + f(y) + \operatorname{sgn} z_2, \qquad (23)$$

где z_1, z_2, y – скаляры, $f \in C^2[\mathbb{R}]$. Покажем, как теорема, сформулированная в пункте 2, может быть использована для анализа поведения $y(t,\mu)$ – координаты решения задачи Коши для системы (22), (23) с начальными условиями $z_1(0,\mu) = z_1^0$, $z_2(0,\mu) = z_2^0$, $y(0,\mu) = y^0$.

Нетрудно убедиться, что система (23) при $\tau = t/\mu$ $\delta < y < 1-\delta (\delta > 0)$ удовлетворяет условиям I-IУ и при фиксированных y имеет симметричные $T(y)$ – периодические решения $(\tilde{z}_1^0(\tau,\mu), \tilde{z}_2^0(\tau,\mu))$ такие, что $\int_0^{T(y)} \tilde{z}_i^0(\theta,\mu)\,d\theta = 0$ $(i=1,2)$. Тогда, если существует $\bar{y}(t)$ такое решение системы $\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y})$ с начальным условием $\bar{y}(0) = y^0$, которое на отрезке $[0,L]$ удовлетворяет неравенству $\delta < |\bar{y}(t)| < 1-\delta$, то $\sup_{t \in [0,L]} |y(t,\mu) - \bar{y}(t)| = O(\mu)$.

Литература

I. Тихонов А.Н. Система дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных.- Мат.сб.,1952, 31(73), № 3, с.575-586.

2. Понтрягин Л.С., Родыгин Л.В. Приближенное решение одной системы - ДАН СССР, т.131, № 2, 1960.

3. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления.- М.: Наука, 1981.

4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.- М.: Мир, 1979.

5. Неймарк Ю.И. Метод усреднения с точки зрения метода точечных отображений.- Изв.вузов, Радиофизика, т.6, № 5, 1963, с.1021-1032.