3. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979.
4. *Биргер И. А.* Основы автоматизированного проектирования.— Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 8.
5. *Гаврилов М. А.* Интегрированные системы—современная тенденция в развитии систем автоматизированного проектирования.— Приборы и системы управления, 1979, № 1.
6. *Рычков Л. А., Кузьмин Б. А.* Принципы построения САПР нового поколения.— Приборы и системы управления, 1979, № 1.
7. *Сгилевский В. А., Тунаков А. П.* Машинное проектирование двигательных установок летательных аппаратов. Итоги науки и техники/ ВИНИТИ, Авиастроение, 1977, т. 4.

УДК 621.45.00.11—50

А. Н. Коварцев, В. Г. Маслов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЛАСТИ РАССЕЯНИЯ ИСХОДНЫХ ПРОЕКТНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ АВИАЦИОННЫХ ГТД В УСЛОВИЯХ ИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Одной из особенностей задачи выбора параметров рабочего процесса проектируемого ГТД является неоднозначный, прогнозный характер исходных проектных данных, неопределенность которых, как правило, порождается ненадежностью и недостаточным количеством информации об объекте исследования [1]. В работе [2, с. 111] показано, что при создании СУ отклонение исходных данных от запроектированных значений приводит к значительному проигрышу в эффективности ЛА. Так, например, недобор всех к. п. д. и коэффициентов потерь ТРДД от запроектированных значений в пределах лишь 0,5—1% может привести к проигрышу в технико-экономических показателях до 20—25% [2]. Из этого следует, что детерминированная постановка задачи выбора параметров ГТД может вызвать переоценку (или недооценку) достоинств проекта ЛА и его силовой установки. Однако качество оценки проектных решений можно значительно улучшить, если выбор параметров рабочего процесса ГТД производить с учетом возможного разброса значений исходных проектных данных от запроектированных значений.

Неопределенность исходной проектной информации обусловливает неоднозначность выбора рациональных параметров рабочего процесса ГТД. В этих условиях даже однокритериальная задача оптимизации ГТД по целевой функции $y(x, b)$ становится как бы многокритериальной (здесь x — вектор оптимизируемых параметров рабочего процесса ГТД, b — вектор исходных данных). Для ее решения целесообразно использовать конъюнктивный принцип оптимальности [3], смысл которого заключается в формировании области компромиссных решений как пересечения локально-оптимальных областей параметров рабочего процесса ГТД [2] (рис. 1) $X_c(b)=\{x: y(x,\ b)\leqslant\min\limits_x y(x,\ b)+\Delta y\}$ при выбранном векторе исходных данных b из области его возможных значений D_b: $X_c=\bigcap\limits_{b\in D_b} X_c(b)\ \forall b,\ b\in D_b$. Здесь Δy — допустимое отклонение целевой функции от своего оптимального значения. Выбор окончательного решения из области компромисса X_c можно осуществить, например, с помощью алгоритма, описанного в работе [4].

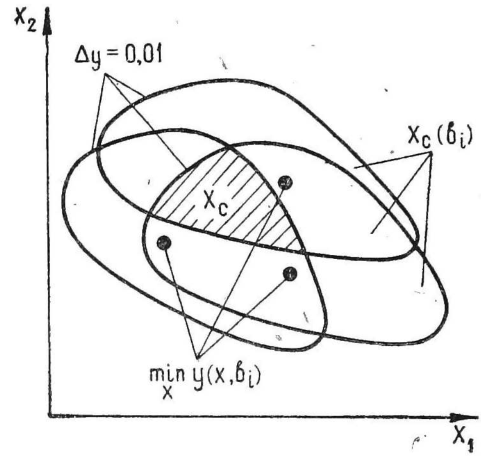

Рис. 1. Область компромиссных решений

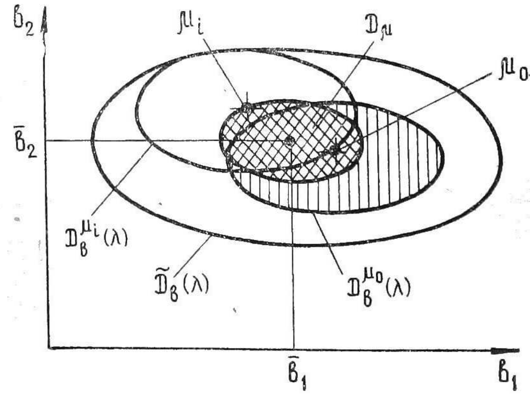

Рис. 2. Области рассеяния исходных данных

Таким образом, влияние возможного разброса исходных данных на оптимизируемые параметры рабочего процесса ГТД (учет неопределенности) определяется областью рассеяния исходных данных D_b, сформировать которую можно, используя статистику разброса параметров существующих авиационных

ГТД и решающее правило, заключающееся в удовлетворении заданного уровня вероятности принадлежности вектора исходных данных области их рассеяния $P_{дов}=P\{b\in D_b\}$.

Предположим, что исходные проектные данные b_i независимы и распределены по нормальному закону с неизвестными параметрами: математическими ожиданиями μ_i и дисперсиями σ_i^2. Уровень доверительной вероятности области рассеяния исходных данных можно оценить по следующей формуле:

$$P_{дов} = (1-\alpha_г)\, P_\mu\, P_\sigma\, P_{D_b}(\lambda),$$

где вероятность $\alpha_г$ оценивает степень неадекватности гипотезы нормального закона распределения исходных данных;

P_μ, P_σ — доверительные вероятности оценки соответственно математического ожидания и дисперсии исходных данных;

$P_{D_b}(\lambda)$ — вероятность принадлежности исходных данных области их рассеяния.

Если параметры закона распределения исходных данных известны, то в качестве области рассеяния целесообразно использовать эллипсоид рассеяния [6]:

$$D_b(\lambda)=\{b:(b-\mu_0)'S^{-1}(b-\mu_0)\leqslant\lambda^2\}, \tag{1}$$

который является проекцией (в пространство исходных данных) сечения многомерной функции плотности распределения гиперплоскостью параллельной этому пространству. С практической точки зрения множество $D_b(\lambda)$ состоит из векторов b, имеющих плотность распределения не ниже заданного уровня, а на границе равную плотности вероятностей. Здесь μ_0 — известный центр распределения исходных данных; S — ковариационная матрица (в случае независимости компонент вектора b она принимает диагональный вид $S=\mathrm{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots \sigma_m^2]$); λ — отношение полуосей эллипсоида рассеяния к главным среднеквадратичным отклонениям. Вероятность $P_{D_b}(\lambda)=P\{b\in D_b(\lambda)\}$ можно оценить по формуле [6]:

$$P_{D_b}(\lambda)=\iint\limits_{D_b(\lambda)}\ldots\int\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}\,\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\sigma_m}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(b_i-\mu_{0i})^2}{\sigma_i^2}\right)\times$$

$$\times\, db_1 db_2\ldots db_m. \tag{2}$$

Поскольку в нашем случае параметры нормального закона распределения считаются неизвестными, а их оценки

$\overline{b_i}=\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{m}b_i^{(j)}$; $\hat{\sigma}_i^2=\frac{1}{N-1}\sum\limits_{j=1}^{N}(b_i^{(j)}-\overline{b_i})^2$ (N — размерность выборки экспериментальных данных) можно определить лишь с известной степенью доверительной вероятности P_μ и P_σ, то необходимо уточнить модель области рассеяния исходных проектных данных $D_b(\lambda)$ (1). Нетрудно убедиться, что погрешности оценки дисперсий $\hat{\sigma}_i^2$ исходных данных лишь незначительно влияют на область их рассеяния $D_b(\lambda)$ (например, уменьшение на 2% дисперсии вызывает уменьшение диаметра области $D_b(\lambda)$ на 0,5%) в то время как неточности при оценке центра распределения вызывают изменение положения области рассеяния в пространстве исходных данных. Кроме того, абсолютная величина погрешности оценки σ_i^2 значительно меньше, чем погрешность оценки вектора средних, поэтому при построении области рассеяния исходных данных будем учитывать лишь погрешность оценки вектора средних, условно считая, что $\hat{\sigma}_i^2$ достаточно верно оценивает реальные величины. В работе [5] показано, что доверительная область оценки вектора средних $b(D_\mu)$ определяется неравенством

$$D_\mu = (\bar{b} - \mu)' S^{-1} (\bar{b} - \mu) \ll \frac{m\,(N-1)}{N\,(N-m)} F_{(1-P_\mu);\ m,\ N-m} = \sqrt{T}, \quad (3)$$

где $F_{(1-P_\mu);\, m,\, N-m}$ — квантиль распределения Фишера.
В данном случае, множество D_μ (с центром b) с вероятностью P_μ покрывает реальное значение вектора средних μ_0.

Учитывая этот факт, построим область рассеяния исходных данных $D_b(\lambda)$, объединив области локальных эллипсоидов рассеяния $D_b^{\mu_i}(\lambda)$ с центрами из множества D_μ (3) (рис. 2):

$$\tilde{D}_b(\lambda) = \bigcup_{\mu_i \in D_\mu} D_b^{\mu_i}(\lambda). \quad (4)$$

Построенное множество позволяет уменьшить вероятность ошибки предсказания возможного разброса исходных данных из-за неточности оценки вектора средних $\bar{b}$ (положения центра рассеяния исходных данных $D_b(\lambda)$, поскольку расширенная область $\tilde{D}_b(\lambda)$ с вероятностью P_μ покрывает область рассеяния исходных данных при известных параметрах нормального закона μ_0—$D_b^{\mu_0}(\lambda)$ (см. рис. 2).

Метод формирования множества (4) содержится в следующей теореме, доказательство которой мы опускаем.
Теорема. Объединение эллипсоидов

$$D_b^{\mu_i}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} (b_j - \mu_j^{(i)})^2/(\hat{\sigma}_j \lambda)^2 \ll 1$$

по переменным μ_i из множества

$$D_\mu = \sum_{j=1}^{m} (\mu_j - \bar{b}_j)^2/(\hat{\sigma}_j T)^2 \leq 1$$

является также эллипсоидом, но с другими параметрами:

$$\tilde{D}_b(\lambda + T) = \sum_{j=1}^{m} (b_j - \bar{b}_j)^2/(\hat{\sigma}_j(T + \lambda))^2 \leq 1. \quad (5)$$

Из теоремы следует, что учет влияния неоднозначности оценки вектора средних $\bar{b}$ сводится к некоторому увеличению геометрических размеров множества $D_b(\lambda)$ на величину $T = \sqrt{\frac{m\,(N-1)}{N\,(N-m)} F_{(1-P_\mu);\; m,\; N-m}}$ по сравнению со случаем, когда центр распределения известен. Вероятность попадания случайной величины b в новую область $D_b(\lambda+T)$ вычисляется согласно формуле (2).

Таким образом, показано, что в случае, когда параметры нормального закона распределения неизвестны, в качестве модели множества рассеяния исходных данных можно использовать модель (5), а доверительную вероятность оценивать по формуле

$$P_{дов} = (1 - \alpha_г)\, P_\mu\, P_\sigma\, P_{\widetilde{D}b(\lambda+T)}.$$

В качестве примера рассмотрим применение разработанной математической модели при выборе параметров ТРДД для случая, предложенного в работе [2, с. 111]. В данной работе учет неопределенности исходной информации производится заданием субъективных интервальных оценок разброса исходных данных, а точнее выбором двух характерных вариантов (благоприятного и критического, с худшими значениями исходных проектных данных ТРДД). Причем оценка доверительной вероятности рассмотренной области рассеяния исходной информации в этой работе не производилась. Изложенный выше метод позволяет произвести оценку этой вероятности, для случая, выбранного в работе [2] ($\sigma=1{,}1$), вероятность равна 0,23. В качестве «оптимального» решения в работе [2] (из области компромиссных решений) были выбраны параметры рабочего процесса ТРДД, установленных на ЛА типа В-747-200 $\pi_{к\Sigma}=24{,}0$; $\pi_в{}^*=1{,}75$; $m=6{,}0$ при следующих расчетных условиях: $H=11$ км; $M_п=0{,}8$; $L_п=3300$ км; $G_{км}=16{,}7$ т; $T^*_{г.\,кр}=1400$ К.

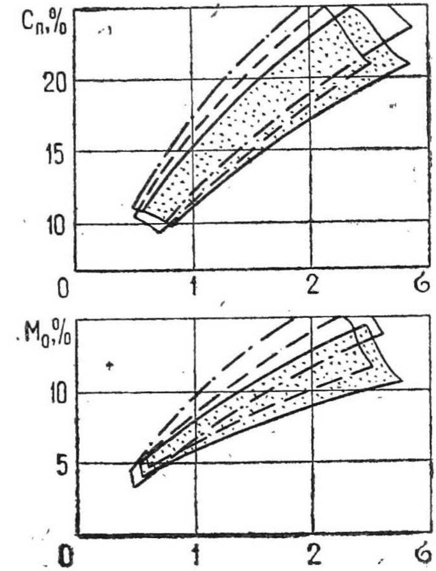

Рис. 3. Разброс значений критериев эффективности под влиянием разброса исходных данных (значения $C_п$ и M_0 заданы в % от решения выбранного в детерминированной постановке задачи оптимизации): ——— $\pi^*_{к\Sigma}=22{,}1$, $\pi^*_b=1{,}6$, $m=5{,}2$ (решение выбрано авторами с учетом неопределенности $\sigma=2{,}2$); — — — $\pi^*_{k\Sigma}=24{,}0$, $\pi^*_b=1{,}75$, $m=6{,}0$ ($\sigma=1{,}1$ [2]); — · — $\pi^*_{к\Sigma}=27{,}3$, $\pi^*_b=1{,}8$, $m=6{,}2$ (детерминированное решение $\sigma=0$)

По результатам статистического анализа величин к. п. д. и коэффициентов потерь отечественных и зарубежных двигателей авторами была произведена ориентировочная оценка параметров закона распределения исходных данных. Проведенное исследование позволило построить области рассеяния исходных данных для различных уровней доверительной вероятности, что в конечном итоге определило выбор рационального решения из области компромисса для заданного заранее уровня доверительной вероятности.

Так, рациональным параметрам рабочего процесса ТРДД $\pi^*_{\kappa\Sigma}=22{,}1$; $\pi_{в}^*=1{,}6$; $m=5{,}2$ соответствует уровень доверительной вероятности — 0,72. Представленные на рис. 3 графики характеризуют возможный разброс значений критериев эффективности M_0 и $C_п$ при вариации исходных проектных данных согласно выбранному статистическому закону распределения (ось σ определяет величину отклонения исходных данных от центра распределения). Предложенный метод сравнения различных вариантов проектных решений основывается на моделировании разброса значений к. п. д. и коэффициентов потерь как бы на готовых образцах ГТД, например, спроектированных в 100 различных КБ.

Графики наглядно показывают, что при отклонении исходных данных от запроектированных значений оптимальным является то решение, которое имеет больший уровень доверительной вероятности. Сравнительный анализ вариантов (см. рис. 3) указывает на необходимость учитывать неопределенность исходной проектной информации при выборе параметров рабочего процесса авиационных ГТД.

Литература

1. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. М Наука, 1981.
2. *Маслов В. Г* Теория выбора оптимальных параметров при проектировани авиационных ГТД. М.: Машиностроение, 1981.
3. *Козлецкий Ю.* Психологическая теория решений. М.: Прогресс, 1979.
4. *Коварцев А. Н.* Численный метод определения многомерных областей дл выбора оптимальных параметров авиационных ГТД с помощью ЭВМ.—I сб.: Проектирование и доводка авиационных газотурбинных двигателе /КуАИ, 1983.
5. *Болч Б., Хуань К. Дж.* Многомерные статистические методы для экономики. М.: Статистика, 1979.
6. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.