

Б. Д. Фишбейн, П. Д. Вильнер

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕРАВНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

В технике и в природе часто наблюдается неравномерное распределение физических параметров в пространстве или во времени. Примером может служить неравномерное поле газодинамических и термодинамических параметров потока по сечению осесимметричных каналов ряда технических устройств. Опыт показывает, что та или иная форма неравномерного поля и степень неравномерности могут оказывать заметное влияние на важные интегральные свойства какого-либо физического явления и характеристики технических устройств. В этой области накоплены значительные знания, однако недостаточно разработаны методы количественной оценки неравномерности, позволяющие устанавливать связь между интегральными свойствами явления, с одной стороны, и формой и степенью неравномерности поля параметра, характеризующего это физическое явление, с другой стороны.

В большинстве случаев количественно оценивается лишь степень неравномерности (например, по среднеквадратичному отклонению параметра от среднего значения). Форма неравномерного поля при этом подробно описывается словами в полной зависимости от представлений автора, что затрудняет использование результатов проведенных исследований. Поэтому для инженерной практики представляет интерес задача количественной оценки как формы неравномерного поля, так и степени неравномерности. Это позволит идентифицировать и обобщать результаты исследований и прогнозировать изменение интегральных характеристик явления в зависимости от особенностей поля определяющего параметра.

Информация о неравномерном распределении параметра P по оси x может быть представлена различными способами. Например, в виде сложного аналитического выражения $P=P(x)$, в виде графика, отдельными точками и др.

Сущность предлагаемого метода оценки неравномерных распределений состоит в том, что известная информация о поле распределения некоторого параметра P по оси x аппроксимируется функцией $f(x)$, выбранной таким образом, чтобы определяющие ее параметры или их комбинации количественно характеризовали как форму, так и степень неравномерности. Эта характеристика выражена некоторым двумерным числовым массивом, геометрически интерпретируемым положением точки на плоской диаграмме.

В общих случаях аппроксимации функцию $f(x)$ находим в виде линейной комбинации некоторых заданных функций $f_n(x)$, т. е.

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x),$$

где $a_{0,1,\dots,n}$ — постоянные коэффициенты.

Значения коэффициентов наилучшего приближения $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ находят по методу наименьших квадратов [1].

Если зависимость $P = P(x)$ задана интегрируемым аналитическим выражением, то наиболее употребительно такое приближение $f(x)$ в интервале (a, b) , для которого наименьшее значение имеет величина

$$M = \int_a^b |f(x) - P(x)|^2 dx.$$

Следовательно, для определения наилучших в указанном смысле значений a_n необходимо решить систему линейных уравнений

$$\frac{\partial M}{\partial a_n} = 0.$$

В силу того, что в большинстве задач рассматривается распределение физических параметров, удовлетворяющих условиям Дирихле [1], функция $P(x)$, согласно теореме Дирихле, может быть представлена рядом Фурье [2]

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos k\pi x, \quad (1)$$

где a_k — коэффициенты ряда Фурье.

Как будет показано, использование приближающей функции $f(x)$ в форме уравнения (1) с ограниченным числом членов позволяет достаточно просто построить количественные характеристики неравномерности.

Если зависимость $P = P(x)$ задана отдельными точками, что часто бывает на практике, то условие приближения функции $f(x)$ к значениям $P(x)$ в заданных точках выразится наименьшим значением величины

$$S = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - P(x_i)]^2, \quad (2)$$

где n — число заданных точек.

В этом случае наилучшие значения коэффициентов a_k определяются решением системы линейных уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0. \quad (3)$$

Число членов ряда (1) определяется допустимой погрешностью аппроксимации исходной зависимости $P = P(x)$ и в боль-

шей степени — возможностями построения на плоскости с помощью коэффициентов ряда диаграммы неравномерности. Предварительный анализ показал, что целесообразно ограничиться тремя членами ряда (1).

Таким образом, используемая приближающая функция $f(x)$ приобретает вид

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x, \quad (4)$$

где a_0 — среднее значение функции;

a_1 — амплитуда первой гармоники;

a_2 — амплитуда второй гармоники.

На примере, в котором зависимость $P = P(x)$ задана отдельными точками, рассмотрим вычисление значений a_0, a_1, a_2 .

Подставив уравнение (4) в выражение (2), получим:

$$S = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cos \pi x_i + a_2 \cos 2\pi x_i - P_i)^2. \quad (5)$$

Далее, используя зависимости (3) и (5), запишем систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cos \pi x_i + a_2 \cos 2\pi x_i - P_i) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n (a_0 \cos \pi x_i + a_1 \cos^2 \pi x_i + a_2 \cos \pi x_i \cdot \cos 2\pi x_i - P_i \cos \pi x_i) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^n (a_0 \cos 2\pi x_i + a_1 \cos \pi x_i \cdot \cos 2\pi x_i + a_2 \cos^2 2\pi x_i - P_i \cos 2\pi x_i) = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$c_{11} = n, \quad c_{12} = c_{21} = \sum_{i=1}^n \cos \pi x_i, \quad c_{13} = c_{31} = \sum_{i=1}^n \cos 2\pi x_i;$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^n \cos^2 \pi x_i, \quad c_{23} = c_{32} = \sum_{i=1}^n \cos \pi x_i \cdot \cos 2\pi x_i, \quad c_{33} = \sum_{i=1}^n \cos^2 2\pi x_i;$$

$$d_1 = \sum_{i=1}^n P_i, \quad d_2 = \sum_{i=1}^n P_i \cos \pi x_i, \quad d_3 = \sum_{i=1}^n P_i \cos 2\pi x_i.$$

Тогда систему линейных уравнений (6) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} c_{11} a_0 + c_{12} a_1 + c_{13} a_2 &= d_1, \\ c_{21} a_0 + c_{22} a_1 + c_{23} a_2 &= d_2, \\ c_{31} a_0 + c_{32} a_1 + c_{33} a_2 &= d_3, \end{aligned} \right\}$$

откуда достаточно просто определяются значения a_0, a_1, a_2 .

Заметим, что значения x всегда могут быть представлены в относительном виде, тогда $x_i = \bar{x}_i$ может принимать значения от 0 до 1. Число точек n в общем случае может быть произвольным, но не менее пяти, так как при $n < 5$ возрастает погрешность аппроксимации зависимости $P = \bar{P}(x)$, что не всегда приемлемо. При $n = 5, 7, 9$ и при некоторых других значениях и равномерном распределении точек по оси x в интервале $0 - 1$ особенно просто вычисляются тригонометрические функции $\cos 2\pi x$ и $\cos 4\pi x$ и, следовательно, значения a_0, a_1, a_2 . Так, например, при $n = 5$ и равномерной разбивке интервала по x получаем очень удобные для расчета формулы:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{14} (2P_1 + 3P_2 + 4P_3 + 3P_4 + 2P_5), \\ a_1 &= \frac{1}{3} [P_1 - P_5 + 0,7071 (P_2 - P_4)], \\ a_2 &= \frac{1}{14} (4P_1 - P_2 - 6P_3 - P_4 + 4P_5). \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 являются исходными для построения основных характеристик неравномерного поля.

Из выражения (4) видно, что при фиксированном значении a_0 отношения $\frac{a_1}{a_0}$ и $\frac{a_2}{a_0}$ будут количественно характеризовать форму неравномерного поля, а степень неравномерности будет количественно характеризоваться величиной

$$\bar{a} = \left| \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2} \right|.$$

Наличие всего двух независимых величин $\frac{a_1}{a_0}$ и $\frac{a_2}{a_0}$ дает возможность наглядно представить неравномерное поле параметра точкой на плоской диаграмме. На рис. 1 показана часть общего вида такой диаграммы в области $\left(\frac{a_1}{a_0} = \pm 1, \frac{a_2}{a_0} = \pm 1\right)$ для некоторого параметра P со средним значением $P_0 = a_0$.

Здесь в относительном масштабе изображены наиболее характерные поля параметра P (см. элемент 1), различные по форме и степени неравномерности, но с одним и тем же значением P_0 (полагается, что для всех полей величина P_0 имеет определенный физический смысл).

Точки диаграммы над осью $\frac{a_1}{a_0}$ соответствуют «вогнутым», а точки под этой осью — «выпуклым» полям. Точки диаграммы справа от оси $\frac{a_2}{a_0}$ соответствуют «падающим» полям, т. е. таким, для которых $P_{x=0}^- \geq P_{x>0}^-$. Точки слева от оси соответствуют «растущим» полям ($P_{x=0}^- \leq P_{x>0}^-$).

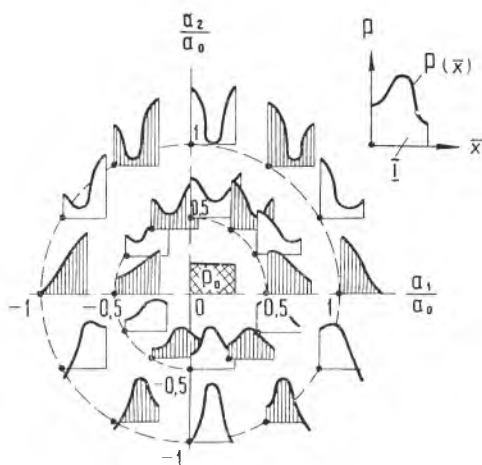


Рис. 1. Общий вид диаграммы неравномерности:

1 — отдельный элемент диаграммы, показывающий направление координатных осей зависимости $P=P(\bar{x})$

Очевидно, что точка на диаграмме неравномерности характеризует относительную неравномерность, так как ее положение зависит от соотношения значения a_0 и амплитуд гармоник a_1 и a_2 , возмущающих равномерное распределение, а не от абсолютных значений a_0, a_1, a_2 . Как видно из рис. 1, координаты точки на диаграмме неравномерности достаточно хорошо отражают основные локальные особенности формы неравномерного поля — наличие максимумов и минимумов зависимости $P=P(\bar{x})$ и расположение экстремальных значений.

Все это делает удобной идентификацию различных неравномерных полей параметров, которые отличаются, допустим, величиной a_0 , но сводятся к одинаковым значениям $\frac{a_1}{a_0}$ и $\frac{a_2}{a_0}$, так как чаще всего именно этот фактор оказывает влияние на интегральные характеристики различных явлений или устройств.

Для удобства пользования диаграммой неравномерности целесообразно нанести на нее линии постоянных значений величины z интересующей нас интегральной характеристики z и тем самым связать изменение z с характеристиками неравномерного поля (рис. 2). Такая дополнительная сетка наносится по имеющимся результатам расчетов и экспериментальных исследований, в дальнейшем она может служить для прогнозирования ожидаемых интегральных характеристик.

Рассмотрим некоторые примеры из практики аппроксимации и оценки температурных полей T на выходе из двухконтурного турбореактивного двигателя (ТРДД).

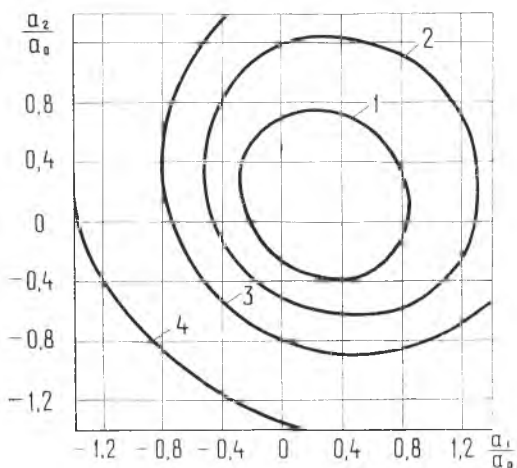


Рис. 2. Кривые $\delta z = \text{const}$ на диаграмме не-
равномерности (условно принято $\delta z_4 > \delta z_3 >$
 $> \delta z_2 > \delta z_1$)

Были исследованы эквивалентные радиально неравномерные поля, полученные по экспериментальным данным Фроста [3] и Хартмана [4] с применением гармонического анализа [2] и осреднения параметров в нескольких выделенных кольцевых струйках [5], [6]. Величина x определялась по формуле

$$\bar{x} = \left(\frac{r}{r_{\max}} \right)^2,$$

где r — радиус канала; r_{\max} — максимальный радиус канала. Интервал $(0 - r_{\max}^2)$ полагался равным полупериоду разложения функции $T = T(r^2)$ в радиальном направлении, и рассматривалось четное продолжение функции в этом направлении для использования приближающей функции $f(\bar{x})$ в форме уравнения (1).

Аппроксимирующие функции при этом характеризовались следующими значениями коэффициентов Фурье и их соотношениями, приведенными в таблице.

Обозначение	Величина коэффициента	
	Обработка данных [3]	Обработка данных [4]
a_0	524,6	490,1
a_1	73,54	-4,01
a_2	56,79	76,64
a_1/a_0	0,1402	-0,0082
a_2/a_0	0,1082	0,1564

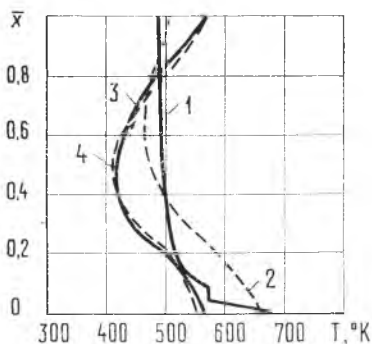


Рис. 3. Эквивалентные температурные поля на выходе из ТРДД и их аппроксимация функцией в виде тригонометрического полинома:

1 — по данным Фроста [3]; 2 — аппроксимация результатов Фроста; 3 — по данным Хортмана [4]; 4 — аппроксимация результатов Хортмана

риментальным, а величина погрешности аппроксимации

$$\delta = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - P(\bar{x}_i)]^2}}{\sum_{i=1}^n P(\bar{x}_i)} \cdot 100 \%$$

для равноотстоящих значений \bar{x}_i при $n=10$ вполне удовлетворительна для инженерной практики и находится в пределах 2—7%.

ВЫВОДЫ

1. Предложен метод количественной оценки формы и степени неравномерности поля произвольного параметра.

2. Построена плоская диаграмма неравномерности, позволяющая количественно идентифицировать наблюдения и обобщить интегральные результаты исследований полей с неравномерными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. М.-Л., ОГИЗ, 1952.
2. Серебренников М. Г. Гармонический анализ. М.-Л., ОГИЗ, 1948.
3. Frost G. H. Practical Bypass Mixing Systems for Fan jet Engines, «The Aeronautical Quarterly» v. XVIII, May, 1966, p. 2.
4. Hartman A. Theory and Test of Flow Mixing for Turbofan Engines, Journal of Aircraft, v. 5, 1968, N 6.

Для рассмотренных примеров числовые значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 , приведенные в таблице, правильно отражают особенности радиально неравномерных полей T (рис. 3).

Возможность перехода от пространственного поля T к эквивалентному плоскому радиально неравномерному в данном случае определялась тем, что по результатам гармонического анализа максимальное значение амплитуды окружной неравномерности T достигало величины не более 5—15% от среднего значения T . Интегральные характеристики потока при таком переходе остаются практически неизменными.

Как видно из рис. 3, аппроксимирующие кривые близки к экспериментальной среднеквадратичной

5. Седов Л. И., Черный Г. Г. Об осреднении неравномерных потоков газа в каналах. В сб.: «Теоретическая гидромеханика». Вып. 12. М., Оборонгиз, 1954.

6. Еременко А. С., Завалко А. Г. Об осреднении неравномерного пространственного потока. В сб.: «Гидромеханика и теория упругости», Вып. 9, Харьков, 1958.

Е. Д. Стенькин

МЕТОД ОЦЕНКИ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РЕЖИМОМ РАБОТЫ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- G — расход воздуха;
 M — масса воздуха в ресивере;
 V — объем ресивера;
 C — скорость;
 P — давление;
 T — температура;
 ρ — плотность;
 R — газовая постоянная;
 a — скорость звука;
 Re — число Рейнольдса;
 ν — коэффициент кинематической вязкости;
 d — внутренний диаметр трубопровода;
 f — площадь проходного сечения трубопровода;
 e — длина трубопровода;
 n — число датчиков;
 m — число датчиков, регистрирующих давление воздуха, вытекающего в ресивер;
 τ — время.

ИНДЕКСЫ

Верхние

- * — полный параметр;
(1), (k) — соответственно 1-е и k -е приближения;

Нижние

- 1 — начальное значение;
2 — конечное значение;
 i, q — номер датчика;
+ — параметр воздуха, вытекающего в ресивер;
— — параметр воздуха, вытекающего из ресивера;
 k — командное;
 n — переходный режим;
 p — ресивер;
 y — установившийся режим.

При неблагоприятных условиях эксплуатации на входе в турбореактивный двигатель возникает значительная неравномерность полей давлений и температур в воздушном потоке.