12. *Кириллин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Н.* Техническая термодинамика. М.: Энергия, 1966, с. 472.
13. *Кинан Дж.* Термодинамика. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963.
14. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.
15. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.

УДК 532.526

А. Н. Печенкин, Б. Д. Фишбейн

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В КАНАЛЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов (МКЭ) получает в инженерной практике все большее распространение для решения задач механики жидкости [1] благодаря простоте аппроксимации сложных геометрических поверхностей и большой гибкости алгоритмов и программ на основе этого метода. В связи с этим представляет интерес сопоставление результатов расчета трехмерного течения в каналах с помощью МКЭ и результатов, полученных ранее другими методами, обеспечивающими высокую точность, но применение которых для конкретных разнообразных геометрических сложных устройств затруднено.

Трехмерное безвихревое поле течения при расчете МКЭ [2] определяется через потенциальную функцию скорости φ с вектором скорости $\overline{W}$ выражением $\overline{W}=\nabla\varphi$.

Уравнение неразрывности для установившегося течения имеет вид:

$$\nabla(\rho\nabla\varphi)=0, \tag{1}$$

где $\rho=\rho_0(1-((k-1)/(k+1))(\nabla\varphi/a)^2)^{1/(k-1)}$ — плотность сжимаемой среды, выраженная через плотность заторможенного потока ρ_0 и критическую скорость a для газа с постоянным показателем изоэнтропы k согласно [3].

Метод конечных элементов включает дискретизацию области решения, интегральную постановку задачи и локальную аппроксимацию функции в каждом элементе [4—6]. Неизвестное решение для потенциала скорости φ в каждом элементе аппроксимируется выражением

$$\varphi^e=[N]\cdot\{\varphi\}^e, \tag{2}$$

где $\{\varphi\}^e$ — вектор-столбец значений потенциальной функции φ_i в узлах элемента e; $[N]$ — вектор-строка интерполяционных функций формы N_i.

Согласно методу Галеркина, требуется в пределах рассматриваемой области D свести к нулю взвешенное среднее значение погрешности, возникающей при подстановке (2) в (1). Заметив, что весовые функции имеют ту же форму, что и интерполяционные функции N_i, после указанной подстановки имеем:

$$\int_D N_i \cdot \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi)\, \mathrm{d}V = 0. \tag{3}$$

Применение теоремы Грина к уравнению (3) позволяет получить соотношение, включающее граничные условия:

$$\int_D \nabla N_i\, (\rho \nabla \varphi)\, \mathrm{d}V = \int_{\partial D} N_i\, \rho \nabla \varphi\, \mathrm{d}S, \tag{4}$$

причем, правая часть есть взвешенное среднее значение массового расхода через границу ∂D. Следовательно, необходимо задать значения плотности массы $\rho(\partial\varphi/\partial n)$ на всех границах области решения. Для расхода газа G через канал граничные условия $f = \rho(\partial\varphi/\partial n)$ выражаются следующим образом:

$$f = \begin{cases} 0 \text{ на твердых границах;} \\ f_1 = G/S_1 \text{ на входе с площадью сечения } S_1; \\ f_2 = G/S_2 \text{ на выходе с площадью сечения } S_2. \end{cases}$$

Уравнение (4) справедливо для всей области решения и для произвольного конечного элемента e. Тогда, подставив (2) в (4), получим для конечного элемента:

$$\int_D \nabla N_i\, (\rho \nabla [N]\, \{\varphi\}^e)\, \mathrm{d}V = \int_{\partial D} N_i\, \rho \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, \mathrm{d}S, \tag{5}$$

причем поверхностный интеграл в правой части необходимо вычислять только в случае, когда $\mathrm{d}S$ лежит на границе области.

Примем, что конечные элементы — тетраэдры с плоскими гранями и четырьмя узловыми точками. Тогда выражение (2) примет вид

$$\varphi^e = \sum N_i \cdot \varphi_j, \quad i, j = \overline{1, 4}.$$

Уравнение (5) для произвольного конечного элемента в этом случае запишется

$$\int_{D_e} \rho \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z}\right] \varphi_i\, dV =$$

$$= \int_{D_e} N_i \rho \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, \mathrm{d}S, \quad i, j = \overline{1, 4}. \tag{6}$$

Совокупность уравнений (6) для всех элементов в области течения образует систему алгебраических уравнений

$$[\mathrm{K}] \cdot \{\varphi\} = \{F\}, \tag{7}$$

где $[\mathrm{K}]$ — матрица жесткости, составленная из коэффициентов; $\{\varphi\}$ — вектор-столбец неизвестных потенциальных функций; $\{F\}$ — вектор нагрузки, зависящий от заданных граничных условий.

Метод конечных элементов был применен в разработанной программе для расчета течения в канале, образованном поверхностями тока при обтекании сферы и двумя пересекающимися плоскостями, проходящими через ось симметрии. Как известно [7], для такого канала в сферических координатах (R, Θ, α) существует аналитическое решение для линии тока

$$\psi = \frac{1}{2} W_\infty R^2 [1 - (\mathrm{d}/R)^3] \sin^2 \Theta,$$

потенциала

$$\varphi = W_\infty R \left[1 + \frac{1}{2} (\mathrm{d} / R)^3\right] \cos \Theta \qquad (8)$$

и составляющих скорости

$$W_R = W_\infty [1 - (\mathrm{d}/R)^3] \cos \Theta;$$

$$W_\Theta = - W_\infty \left[1 + \frac{1}{2} (\mathrm{d}/R)^3\right] \sin \Theta,$$

где d — диаметр сферы; W_∞ — скорость невозмущенного потока.

Известное аналитическое решение и решение, полученное с применением МКЭ, сравнивались по составляющим скорости в декартовых координатах (x, y, z):

$$W_x = (W_R \cos \Theta - W_\Theta \sin \Theta) \cos \alpha;$$

$$W_y = (W_R \cos \Theta - W_\Theta \sin \Theta) \sin \alpha;$$

$$W_z = W_R \sin \Theta + W_\Theta \cos \Theta,$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\alpha = \mathrm{arctg}\,(y/x)$;

$$\Theta = \mathrm{arctg}\,(\sqrt{x^2 + y^2} / z).$$

Канал, разбитый на кубические элементы, каждый из которых образован пятью тетраэдрами, имел следующие параметры: $\mathrm{d} = 1{,}0$; $W_\infty = 1{,}0$; $\psi_1 = 0{,}1$; $\psi_2 = 0{,}2$; $\alpha_1 = \pi/4$; $\alpha_2 = \pi/4 + 0{,}05$; $z_1 = 0$; $z_2 = 4{,}0$ (рис. 1).

Область решения включала 3355 тетраэдальных элементов и 1488 узловых точек. Для этой области было получено решение системы линейных уравнений (7) относительно потенциала скорости, которое отличалось от значений потенциала по соотношению (8) не более, чем на 0,1%. Составляющие скорости рассчитывались с помощью теории сопряженной аппроксимации [4], позволяющей получать производные функции в узлах элементов. Результаты расчета и аналитические решения для составляющих скоростей, отнесенных к W_∞, представлены на рис. 2.

Метод конечных элементов был применен для расчета течения в сужающемся сопле с учетом сжимаемости. Для проведения расчетов и сопоставления результатов было взято сопло [8], спрофилированное таким образом, чтобы обеспечить заданное распределение скорости вдоль оси x:

$$W = W_\infty + (1 - W_\infty)/(1 + Ax^2); \quad W_\infty = 0{,}1; \quad A = 10$$

при прямолинейной звуковой линии на выходе $W = 1{,}0$. Сжимаемость учитывалась в итерациях с переменной плотностью при решении системы линейных уравнений

$$[K(\rho_{вх})]\{\varphi_{n+1}\} = [K(\rho_{вх}) - K(\rho_n)]\{\varphi_n\} + \{F\}, \tag{9}$$

причем для начального приближения ($n=0$) принималась постоянная плотность

$$\rho_{вх} = \rho_0 [1 - ((k-1)/(k+1))(W_{вх}/a)^2]^{1/(k-1)},$$

где $W_{вх}$ — скорость на входе.

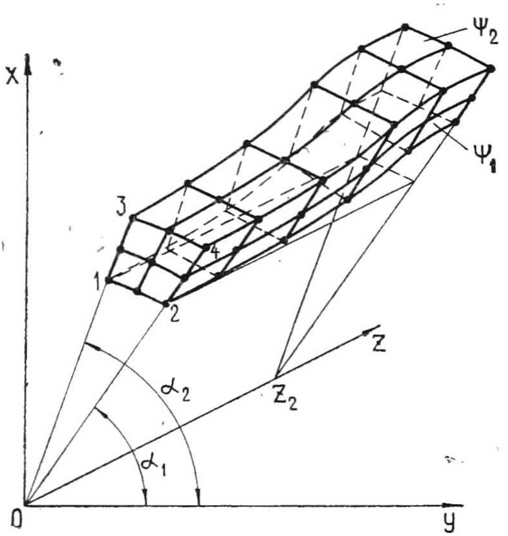

Рис. 1. Схема дискретизации криволинейного канала

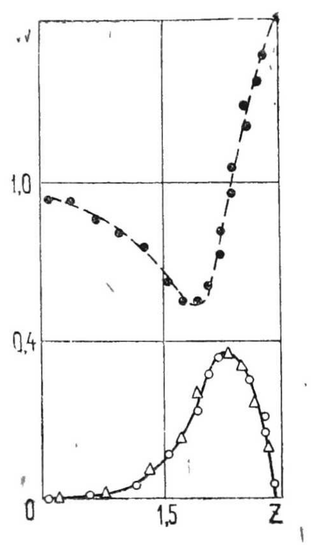

Рис. 2. Распределение составляющих скорости, отнесенной к W_∞ в криволинейном канале: расчет методами работы [7]: —$W_y = W_x$, - - -W_z; расчет МКЭ: △—W_x; ○—W_y; ●—W_z

Приведенная схема итераций удобна тем, что матрица преобразовывалась лишь один раз и в приближениях применялась прямая и обратная прогонка правой части уравнения (9). Для ускорения сходимости и сокращения числа итераций при слабом изменении произведения ρW использовался метод искусственной вязкости [9], согласно которому плотность в данном приближении определяется в виде

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \mu \cdot \Delta S \cdot \rho_n,$$

где $\mu = \max[0,1 - M_{от}^2/M^2]$ — коэффициент искусственной вязкости; $M_{от}$ — число Маха отсечки (принято $M_{от}=0,8$); M — число Маха в данном элементе; ΔS — размер элемента в направлении потока.

На рис. 3 представлены результаты расчета приведенных скоростей W в сопоставлении с данными [8]. Небольшие отличия объясняются погрешностями в задании геометрии сопла для расчета по МКЭ с числом узлов 1454.

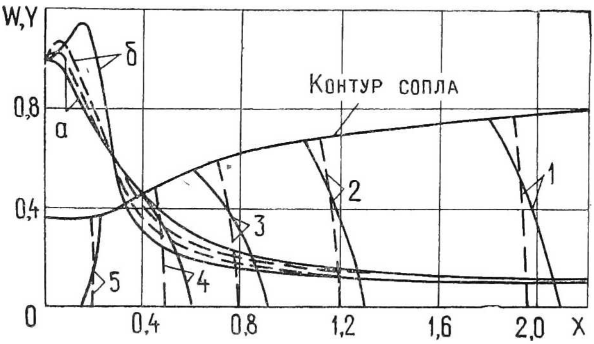

Рис. 3. Распределение приведенных скоростей в сужающемся сопле:
——— — данные работы [8]; — — — — — данные, полученные МКЭ; *1* — $W=0,12$; *2* — $W=0,15$; 3 — $W=0,2$; 4 — $W=0,5$; 5 — $W=0,8$; *а* — распределение скорости на оси; *б* — распределение скорости на стенке

Таким образом, проведенное сопоставительное исследование показало, что разработанная для ЭВМ ЭС-1033 программа пригодна для расчета трехмерных сжимаемых течений идеального газа в каналах сложной формы, например, в межлепестковом пространстве смесителей и в смесительных камерах ТРДД. Получаемое решение по распределению статического давления и скоростей может служить хорошим начальным приближением для проведения расчетов с учетом вязкости.

Литература

1. *Norrie D. H., Vries G de.* A Survey of the Finite Element Applications in Fluid Mechanics.— Finite Element Fluids, 1978, Vol. 3, pp. 363—394.
2. *Хамед А., Баскароне Е.* Анализ трехмерного течения в улитке турбины.— Теоретические основы инженерных расчетов /Тр. ASME, 1980, сер. Д, т. 102, № 3.
3. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976.
4. *Сегерлинд С.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.

5. *Норри Д., Фриз Ж. де.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
6. *Коннор Д., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979.
7. *Лойцянский А. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
8. *Пирумов У. Г.* Расчет течения в сопле Лаваля /ДАН СССР, 1967, Т. 126, № 2, с. 287—290.
9. *Экер А., Экей Х.* Расчет трансзвукового обтекания решетки профилей с помощью метода конечных элементов.— Ракетная техника и космонавтика, 1981, Т. 19, № 10, с. 82—103.

УДК 532.517.4

В. Н. Лавров

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ ГАЗА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СПУТНОМ ПОТОКЕ

Условные обозначения

$m=u_2/u_1$ — отношение скоростей спутного потока и струи;
$n=\rho_2/\rho_1$ — отношение плотностей спутного потока и струи;
C — весовая концентрация газа струи;
$\Delta\overline{u}=(u-u_2)/(u_1-u_2)$ — безразмерная избыточная скорость;
$\Delta\overline{T}=(T-T_2)/(T_1-T_2)$ — безразмерная избыточная температура;
R — радиус сопла;
$\overline{x}=x/R$ — безразмерное расстояние от выходного сечения струи вдоль оси;
$\overline{\delta^*}=\delta^*/R$; $\overline{\delta^{**}}=\delta^{**}/R$ — относительные толщины вытеснения и потери импульса в выходном сечении;
$\overline{c_p}=c_{p2}/c_{p1}$ — отношение теплоемкостей;
$\overline{\mu}=\mu_2/\mu_1$ — отношение молекулярных весов;
$\overline{\rho u^2}=\rho u^2/\rho_1 u_1^2$;
$\overline{b}=b/R$ — относительная полуширина струи.

Индексы

1 — струя;
2 — спутный поток;
0 — на оси.

Исследование газодинамических процессов в различных устройствах связано с определением параметров струи, втекающей в затопленное пространство или спутный поток. Широко известны полуэмпирические зависимости [1—3], позволяющие рассчитать все параметры струи. Однако удовлетворительное описание течения достигается, если оно достаточно близко к автомодельному, например для затопленных струй. При распространении струи в спутном потоке газа другой плотности на основном участке наблюдается существенное отличие измеряемых параметров от расчетных,