II. ТЕЧЕНИЕ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ В ЭЛЕМЕНТАХ ГТД

УДК 533.6.011.3

Е. Д. Стенькин

СОВМЕСТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ПОДВОДОМ ТЕПЛА

Условные обозначения

c_p — удельная теплоемкость в изобарическом процессе, Дж/кг·град;
F — площадь поперечного сечения потока, м^2;
k — показатель изоэнтропы;
m — массовый расход газа, кг/с;
p — давление, бар;
$\bar{p}=p_2/p_1$ — отношение давления на выходе к давлению на входе;
R — газовая постоянная, Дж/кг·град;
S — энтропия, Дж/К;
T — температура, К;
u — внутренняя энергия, Дж/кг;
v — удельный объем, м^3/кг;
V — функция Ляпунова [1];
$y=m_{II}/m_I$ — отношение массовых расходов (в ТРДД — степень двухконтурности);
$\Delta=T_2^*/T_1^*$ — степень повышения температуры в канале;
λ — приведенная скорость;
ξ — коэффициент сопротивления;
$\Theta=T_{(II}^*/T_{II}^*$ — отношение температур на входе в канал;
π, q, z, τ — газодинамические функции числа λ [2];
σ — коэффициент восстановления полного давления;
τ — время, с;
$\delta x=\mathrm{d}x/x$ — относительный дифференциал параметра x;
$\omega=y\sqrt{\Theta}$ — комплексный параметр взаимодействия потоков;

$$C_1=\sqrt{\frac{k_I}{k_{II}}\,\frac{k_{II}+1}{k_I+1}};\quad \bar{m}=\sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}};\; C_2=\frac{\bar{m}_I}{\bar{m}_{II}}.$$

Индексы.

* — полный параметр;
1, 2 — вход и выход из канала;
I, II — I и II потоки
тр — трение.

Проектирование нового и анализ работы существующего ТРДД с общей форсажной камерой (ТРДДФсм) выполняются в предположении, что на входе в камеру газовые потоки основного и наружного контуров полностью перемешались [3—5]. В действительности, вследствие ограничения по массе и длине в существующих конструкциях ТРДДФсм [6, 7], потоки из контуров, не перемешиваясь, сразу поступают в общую форсажную камеру. На режиме без подвода и сжигания топлива она частично является камерой смешения. При сжигании топлива (подводе тепла) в камере два газовых потока имеют весьма различные параметры. В связи с высокими степенями подогрева и большой разницей между повышениями температуры в одном и другом газовых потоках задача по изучению их совместного течения является актуальной.

В прикладной газовой динамике [2] рассматривается задача с подводом тепла в одномерный газовый поток при его движении по цилиндрическому каналу. Устанавливаются соотношения для определения параметров газа и, в том числе, уменьшения полного давления в газовом потоке.

Рассматриваемая задача представляет собой более сложный случай совместного течения двух газовых потоков. С целью упрощения анализа и выяснения влияния степеней подогрева и начальных условий на входе в камеру на параметры на выходе будем рассматривать крайний случай, когда потоки движутся совместно без перемешивания. Такой подход является плодотворным, например, при изучении совместного течения двух потоков через общее реактивное сопло [8—11].

Движение в цилиндрическом канале вначале рассматривается без трения, а затем с учетом трения потоков с одинаковыми

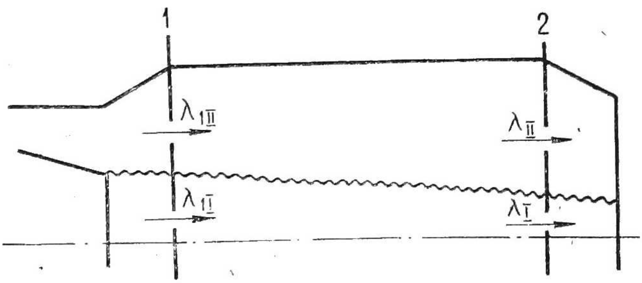

Рис. 1. Схема совместного течения двух газовых потоков с подводом тепла на участке 1—2

газовыми постоянными и различными показателями изоэнтропы ($k_{\rm I}$ и $k_{\rm II}$). Схема течения показана на рис. 1. Подвод тепла осуществляется на участке 1—2. Для упрощения параметры в сечении 2 будем записывать без индекса 2, например $\lambda_{\rm I}$ и $\lambda_{\rm II}$.

Параметры потоков на выходе из канала определяются с использованием основных уравнений газовой динамики: уравнения энергии, уравнения неразрывности и уравнения количества движения. Уравнение энергии устанавливает связь между полными температурами на входе $T^*_{1\rm I}$, $T^*_{1\rm II}$, количеством подведенного тепла и полными температурами на выходе $T_{\rm I}{}^*$ и $T_{\rm II}{}^*$. Решение этого уравнения для рассматриваемой задачи тривиально, поэтому будем предполагать температуры заданными $T_{\rm I}{}^*$ и $T_{\rm II}{}^*$. Остальные два уравнения запишем с привлечением газодинамических функций числа λ.

Уравнение неразрывности для одного потока обычно используется в виде [2] $m = \bar{m}P^*Fq/\sqrt{T^*}$. Решая это уравнение относительно площади F, а также учитывая, что из условия цилиндричности течения справедливы равенства

$$p_{\rm I} = p_{\rm II} = p; \quad F_{1\,\rm I} + F_{1\,\rm II} = F_{\rm I} + F_{\rm II},$$

для рассматриваемой задачи получим уравнение неразрывности в относительных параметрах:

$$\frac{1}{q_{1\,\rm I}}\left(1 + C_1\omega\,\frac{\lambda_{1\,\rm I}}{\lambda_{1\,\rm II}}\,\frac{\tau_{1\,\rm II}}{\tau_{1\,\rm I}}\right) = \frac{1}{\sigma_1 q_1}\times$$

$$\times\left(\sqrt{\Delta_{\rm I}} + C_1\omega\sqrt{\Delta_{\rm II}}\,\frac{\lambda_{\rm I}}{\lambda_{\rm II}}\,\frac{\tau_{\rm II}}{\tau_{\rm I}}\right). \qquad (1)$$

Для одномерного потока уравнение количества движения представляет собой равенство

$$mw + pF = \sqrt{\frac{k+1}{2k}RT^*}\,mz.$$

При совместном движении двух потоков по цилиндрическому каналу без трения уравнение количества движения, исходя из этого равенства, преобразуется в соотношение:

$$z_{1\,\rm I} + z_{1\,\rm II}C_1\omega = \sqrt{\Delta_{\rm I}}\,z_{\rm I} + C_1\omega\sqrt{\Delta_{\rm II}}\,z_{\rm II}. \qquad (2)$$

Итак, для определения трех независимых величин $\lambda_{\rm I}$, $\lambda_{\rm II}$ и $\sigma_{\rm I}$ получены уравнения (1) и (2). Необходимо еще одно условие для получения замкнутой системы уравнений. Такое положение возникает всегда в задачах с совместным движением различных материальных тел. В этих задачах граничные условия допускают существование нескольких форм совместного движения, из которых, в действительности, будет реализоваться одна, наиболее устойчивая, форма движения. Значит, дополнительным условием для решения рассматриваемой задачи является условие устойчивости совместного течения двух газовых потоков. Для определения этого условия воспользуемся вторым законом термодинамики. Он устанавливает, что реальные, необратимые процессы протекают с максимально возможным приращением энтропии [12]. Действительно, подвод тепла в поток газа является необратимым процессом. В термодинамике [13] в качестве критерия необратимости устанавливается изменение энтропии ΔS. Величина ΔS определяется через параметры газа следующим образом [13]:

$$\Delta S = \int_1^2 (du + pdv)/T.$$

Преобразуем это соотношение, переходя к полным параметрам и предполагая, что газ совершенен, т. е. что его параметры удовлетворяют уравнению состояния $pv=RT$, а удельные теплоемкости не зависят от температуры и давления. В результате получается равенство

$$\Delta S^* = c_p \ln (T_2^* / T_1^*) + R \ln (p_1^* / p_2^*). \tag{3}$$

Для рассматриваемой системы двух газовых потоков величина суммарного приращения энтропии ΔS^*_Σ, исходя из формулы (3), будет определяться выражением:

$$(1 + y)\, \Delta S^*_\Sigma = R \left(\frac{k_\mathrm{I}}{k_\mathrm{I} - 1} \ln \Delta_\mathrm{I}\, \Delta_\mathrm{II}^{C_2 y} - \ln \sigma_\mathrm{I}\, \sigma_\mathrm{II}^{y} \right). \tag{4}$$

Определим максимум функции ΔS_Σ, учитывая, что в равенстве (4) величины Δ_I и Δ_II являются заданными, а переменной величиной является комплекс

$$V = \sigma_\mathrm{I}\, \sigma_\mathrm{II}^{y}. \tag{5}$$

Комплекс (5) можно назвать энтропийной функцией в связи с тем, что он определяет изменение энтропии потоков.

Используя известные соотношения

$$\sigma_\mathrm{I} = p_\mathrm{I}^* / p_{1\,\mathrm{I}}^* = \overline{p}(\pi_{1\,\mathrm{I}}/\pi_\mathrm{I}); \quad \sigma_\mathrm{II} = \overline{p}\, (\pi_{1\,\mathrm{II}}/\pi_\mathrm{II}), \tag{6}$$

получим выражение для комплекса V, удобное для последующего анализа:

$$V = \left(\frac{\pi_{1\,\mathrm{II}}}{\pi_{1\,\mathrm{I}}}\, \frac{\pi_\mathrm{I}}{\pi_\mathrm{II}} \right)^{y} \sigma_\mathrm{I}^{1+y}. \tag{7}$$

Максимуму приращения ΔS_Σ соответствует минимум функции V (в реальном движении $V < 1$). Данный вывод справедлив и для течения при наличии сил трения. В этом случае в величины (6) должны входить затраты полного давления на преодоление сил трения.

Следует подчеркнуть, что выражение для энтропийной функции получено, опираясь на второй закон термодинамики, и оно справедливо настолько, насколько справедлив этот закон, который и устанавливает качественную сторону (направленность) процессов, происходящих в физических системах [5].

Таким образом, для определения трех неизвестных величин λ_I, λ_{II} и σ_I получены уравнения (1), (2) и условие минимума энтропийной функции V. Для использования этого условия получим соответствующее уравнение, которое определяется при дифференцировании формул (7) и приравнивании результата нулю:

$$\frac{y}{1+y}\left(\delta\pi_I - \delta\pi_{1\,I} - \delta\pi_{II} + \delta\pi_{1\,II}\right) + \delta\sigma_I = 0. \tag{8}$$

В это уравнение входит относительный дифференциал $\delta\sigma_I$. Для него устанавливаем выражение, исходя из дифференциального уравнения расхода, получаемого из равенства (1):

$$\delta\sigma_I = \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \frac{C_{1\omega}\sqrt{\Delta_{II}}}{\tau_I^2} \frac{\tau_{II}(2-\tau_I)\,\delta\lambda_I - \tau_I(2-\tau_{II})\,\delta\lambda_{II}}{\sqrt{\Delta_I} + C_{1\omega}\sqrt{\Delta_{II}}\dfrac{\lambda_I}{\lambda_{II}}\dfrac{\tau_{II}}{\tau_I}} -$$

$$-\frac{\lambda_{1\,I}}{\lambda_{1\,II}} \frac{C_{1\omega}}{\tau_{1\,II}^2} \frac{\tau_{1\,II}(2-\tau_{1\,I})\,\delta\lambda_{1\,I} - \tau_{1\,I}(2-\tau_{1\,II})\,\delta\lambda_{1\,II}}{1 + C_{1\omega}\dfrac{\lambda_{1\,I}}{\lambda_{1\,II}}\dfrac{\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,I}}} -$$

$$-\delta q_I + \delta q_{1\,I}. \tag{9}$$

Формулы для дифференциалов δq и $\delta\pi$, необходимые в последующих преобразованиях, получаются в виде:

$$\delta q = \frac{1-\lambda^2}{\tau}\,\delta\lambda; \quad \delta\pi = -\frac{2k}{k+1}\frac{\lambda^2}{\tau}\,\delta\lambda. \tag{10}$$

Используя соотношения (9) и (10), преобразуем уравнение (8):

$$\frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \frac{C_{1\omega}\sqrt{\Delta_{II}}}{\tau_I^2} \frac{\tau_{II}(2-\tau_I)\,\delta\lambda_I - \tau_I(2-\tau_{II})\,\delta\lambda_{II}}{\sqrt{\Delta_I} + C_{1\omega}\sqrt{\Delta_{II}}\dfrac{\lambda_I}{\lambda_{II}}\dfrac{\tau_{II}}{\tau_I}} -$$

$$-\frac{\lambda_{1\,I}}{\lambda_{1\,II}} \frac{C_{1\omega}}{\tau_{1\,II}^2} \frac{\tau_{1\,II}(2-\tau_{1\,I})\,\delta\lambda_{1\,I} - \tau_{1\,I}(2-\tau_{1\,II})\,\delta\lambda_{1\,II}}{1 + C_{1\omega}\dfrac{\lambda_{1\,I}}{\lambda_{1\,II}}\dfrac{\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,I}}} +$$

$$+\frac{y}{1+y}\left[\frac{2k_{II}}{k_{II}+1}\left(\frac{\lambda_{II}^2}{\tau_{II}}\,\delta\lambda_{II} - \frac{\lambda_{1\,II}^2}{\tau_{1\,II}}\,\delta\lambda_{1\,II}\right) - \frac{2k_I}{k_I+1}\left(\frac{\lambda_I^2}{\tau_I}\,\delta\lambda_I - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\lambda_{1\,I}^2}{\tau_{1\,I}}\,\delta\lambda_{1\,I}\right)\right] - \frac{1-\lambda_I^2}{\tau_I}\delta\lambda_I + \frac{1-\lambda_{1\,I}^2}{\tau_{1\,I}}\,\delta\lambda_{1\,I} = 0. \tag{11}$$

Для определения связи между относительными дифференциалами $\delta\lambda_{II}$ и $\delta\lambda_I$, а также $\delta\lambda_{1II}$ и $\delta\lambda_{1I}$ используем уравнения возмущенного движения. При определении устойчивости предполагается, что возмущенные движения происходят под действием тех же внешних сил, которые учитывались при определении не-возмущенного движения [1, 14, 15]. В данной задаче невозмущенное движение в окрестности рассматриваемого сечения описывается уравнением количества движения

$$\sqrt{\Delta_1}\, z_1 + C_1\omega \sqrt{\Delta_{II}}\, z_{II} = \text{const}. \tag{12}$$

На основании этого равенства получаем уравнение возмущенного движения

$$\sqrt{\Delta_I}\,(z_I + dz_I) + C_1\omega \sqrt{\Delta_{II}}\,(z_{II} + dz_{II}) = \text{const}. \tag{13}$$

Из соотношения (13) вычитаем равенство (12) и, используя соотношение:

$$dz = -\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\,\delta\lambda,$$

получаем искомые связи между дифференциалами:

$$\delta\lambda_{II} = -\frac{1}{C_1\omega}\sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}}}\,\frac{\lambda_{II}}{\lambda_I}\,\frac{1-\lambda_I^2}{1-\lambda_{II}^2}\,\delta\lambda_I; \tag{14}$$

$$\delta\lambda_{1\,II} = -\frac{1}{C_1\omega}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{1-\lambda_{1\,I}^2}{1-\lambda_{1\,II}^2}\,\delta\lambda_{1\,I}. \tag{15}$$

Выражение (15) получено из соотношения (14) при значениях $\Delta_{1\,I}=1$ и $\Delta_{1\,II}=1$.

Преобразуем уравнение (11), используя формулы (14) и (15):

$$\frac{2y}{1+y}\left[\left(\frac{k_I}{k_I+1}\,\frac{\lambda_{1\,I}^2}{\tau_{1\,I}} + \frac{k_{II}}{k_{II}+1}\,\frac{\lambda_{1\,II}^2}{\tau_{1\,II}}\,\frac{1}{C_1\omega}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{1-\lambda_{1\,I}^2}{1-\lambda_{1\,II}^2}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{\delta\lambda_{1\,I}}{\delta\lambda_1} - \frac{k_I}{k_I+1}\,\frac{\lambda_I^2}{\tau_I} - \frac{k_{II}}{k_{II}+1}\,\frac{\lambda_{II}^2}{\tau_{II}}\,\frac{1}{C_1\omega}\sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}}}\times$$

$$\left.\times\frac{\lambda_{II}}{\lambda_I}\,\frac{1-\lambda_I^2}{1-\lambda_{II}^2}\right] - \frac{2-\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,II}}\times$$

$$\times\frac{\dfrac{\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,I}}\,\dfrac{2-\tau_{1\,I}}{2-\tau_{1\,II}} + \dfrac{1}{C_1\omega}\,\dfrac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\dfrac{1-\lambda_{II}^2}{1-\lambda_{1\,II}^2}}{1+\dfrac{1}{C_1\omega}\,\dfrac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\dfrac{\tau_{1\,I}}{\tau_{1\,II}}}\,\frac{\delta\lambda_{1\,I}}{\delta\lambda_I} +$$

$$+\frac{2-\tau_{II}}{\tau_{II}}\,\frac{\dfrac{\tau_{II}}{\tau_I}\,\dfrac{2-\tau_I}{2-\tau_{II}} + \dfrac{1}{C_1\omega}\sqrt{\dfrac{\Delta_I}{\Delta_{II}}}\,\dfrac{\lambda_{II}}{\lambda_I}\,\dfrac{1-\lambda_I^2}{1-\lambda_{II}^2}}{1+\dfrac{1}{C_1\omega}\sqrt{\dfrac{\Delta_I}{\Delta_{II}}\,\dfrac{\lambda_{II}}{\lambda_I}\,\dfrac{\tau_I}{\tau_{II}}}} +$$

$$+\frac{1-\lambda_{1\,I}^2}{\tau_{1\,I}}\,\frac{\delta\lambda_{1\,I}}{\delta\lambda_I} - \frac{1-\lambda_I^2}{\tau_I} = 0. \tag{16}$$

В это уравнение входит отношение $\delta\lambda_{1\,I}/\delta\lambda_{I}$, для определения которого делим формулу (15) на (14):

$$\frac{\delta\lambda_{1\,II}}{\delta\lambda_{II}} = \sqrt{\frac{\Delta_{II}}{\Delta_{I}}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{II}}\,\frac{\lambda_{I}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{1-\lambda_{1\,I}^{2}}{1-\lambda_{I}^{2}}\,\frac{1-\lambda_{II}^{2}}{1-\lambda_{1\,II}^{2}}}\,\frac{\delta\lambda_{1\,I}}{\delta\lambda_{I}}. \tag{17}$$

Индексы I и II равноправны по отношению к исследуемым потокам. Отсюда следует, что отношения $\delta\lambda_{1\,I}/\delta\lambda_{I}$ и $\delta\lambda_{1\,II}/\delta\lambda_{II}$:

а) должны быть инвариантны к индексам, т. е. переходить одно в другое при взаимной замене индексов, так как это — формальная операция, не изменяющая физическую картину;

б) должны удовлетворять уравнению связи (17);

в) должны равняться единице при $\lambda_{I}=\lambda_{1\,II}$ и $\lambda_{1\,I}=\lambda_{1\,II}$, так как это случай идеального теплоизолированного течения, в котором нет изменения скоростей.

Нетрудно убедиться, что выражения, установленные на основе уравнения связи (17):

$$\frac{\delta\lambda_{1\,I}}{\delta\lambda_{I}} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\Delta_{I}}{\Delta_{II}}\,\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{1\,II}}\,\frac{\lambda_{1\,I}}{\lambda_{I}}\,\frac{1-\lambda_{I}^{2}}{1-\lambda_{1\,I}^{2}}\,\frac{1-\lambda_{1\,II}^{2}}{1-\lambda_{II}^{2}}}\right); \tag{18}$$

$$\frac{\delta\lambda_{1\,II}}{\delta\lambda_{II}} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\Delta_{II}}{\Delta_{I}}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{II}}\,\frac{\lambda_{I}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{1-\lambda_{1\,I}^{2}}{1-\lambda_{I}^{2}}\,\frac{1-\lambda_{II}^{2}}{1-\lambda_{1\,II}^{2}}}\right), \tag{19}$$

удовлетворяют сформулированным условиям.

Используя формулу (18), преобразуем уравнение (16):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2y}{1+y}\left(\frac{k_{I}}{k_{I}+1}\,\frac{\lambda_{1\,I}^{2}}{\tau_{1\,I}}+\frac{k_{II}}{k_{II}+1}\,\frac{\lambda_{1\,II}^{2}}{\tau_{1\,II}}\,\frac{1}{C_{1\omega}}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{1-\lambda_{1\,I}^{2}}{1-\lambda_{1\,II}^{2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2-\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,II}}\,\frac{\dfrac{\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,I}}\,\dfrac{2-\tau_{1\,I}}{2-\tau_{1\,II}}+\dfrac{1}{C_{1\omega}}\,\dfrac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\dfrac{1-\lambda_{1\,I}^{2}}{1-\lambda_{1\,II}^{2}}}{1+\dfrac{1}{C_{1\omega}}\,\dfrac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\dfrac{\tau_{1\,I}}{\tau_{1\,II}}}+\frac{1-\lambda_{1\,I}^{2}}{\tau_{1\,I}}\right]\times$$

$$\times\left(1+\sqrt{\frac{\Delta_{I}}{\Delta_{II}}\,\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{1\,II}}\,\frac{\lambda_{1\,I}}{\lambda_{I}}\,\frac{1-\lambda_{I}^{2}}{1-\lambda_{1\,I}^{2}}\,\frac{1-\lambda_{1\,II}^{2}}{1-\lambda_{II}^{2}}}\right)-$$

$$-\frac{2y}{1+y}\left(\frac{k_{I}}{k_{I}+1}\,\frac{\lambda_{I}^{2}}{\tau_{I}}+\frac{k_{II}}{k_{II}+1}\,\frac{\lambda_{II}^{2}}{\tau_{II}}\,\frac{1}{C_{1\omega}}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{\Delta_{I}}{\Delta_{II}}\,\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{I}}\,\frac{1-\lambda_{I}^{2}}{1-\lambda_{II}^{2}}}\right)+\frac{2-\tau_{II}}{\tau_{II}}\times$$

$$\times \frac{\frac{\tau_{II}}{\tau_I} \frac{2-\tau_I}{2-\tau_{II}} + \frac{1}{C_1\omega} \sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}} \frac{\lambda_{II}}{\lambda_I} \frac{1-\lambda_1^2}{1-\lambda_{II}^2}}}{1 + \frac{1}{C_1\omega} \sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}} \frac{\lambda_{II}}{\lambda_I} \frac{\tau_I}{\tau_{II}}}} -$$

$$- \frac{1-\lambda_I^2}{\tau_I} = 0. \tag{20}$$

Это уравнение совместно с уравнением (2) образуют систему для определения величин λ_I и λ_{II}. Из уравнения (1) определяется коэффициент σ_I. При $\Delta_I = 1$ и $\Delta_{II} = 1$ получается частное решение системы уравнений (2) и (20) $\lambda_I = \lambda_{1\,I}$ и $\lambda_{II} = \lambda_{1\,II}$, которое отражает известное положение, что при движении двух потоков в цилиндрической трубе без трения и взаимного смешения, а также без теплоподвода не происходит изменения параметров. В общем случае после определения величин λ_I и λ_{II} из уравнения (1) определяется величина σ_I. Структура уравнений (2) и (20) такова, что их решение возможно методом последовательного приближения.

Представляют интерес предельные величины степеней повышения температуры, соответствующие значениям:

$$\lambda_I = 1 \text{ и } \lambda_{II} = 1. \tag{21}$$

Определим их в случае

$$\lambda_{1\,I} = \lambda_{1\,II} = \lambda_1 \text{ и } k_I = k_{II} = k. \tag{22}$$

Из равенства (2) получаем первое соотношение для определения искомых величин

$$\sqrt{\Delta_I} + \omega \sqrt{\Delta_{II}} = \frac{z_1}{2} (1 + \omega). \tag{23}$$

Второе соотношение устанавливаем, используя уравнение (20), которое при условиях (21) и (22) преобразуется в равенство:

$$\frac{1}{k+1} \frac{1}{1+y} \left(\frac{1}{\sqrt{\Theta}} - 1 \right) \left(1 + \sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}}} \right) -$$

$$- \frac{y}{1+y} \left(1 + \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}}} \right) + 1 = 0. \tag{24}$$

Из уравнений (23) и (24) получаем предельные величины

$$\Delta_{II} = \left[\frac{z_1 (1 + y\sqrt{\Theta})}{2 (y\sqrt{\Theta} + d_1)} \right]^2; \tag{25}$$

$$\Delta_I = \Delta_{II}\, d_1^2, \tag{26}$$

где

$$d_1 = \frac{1+\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\Theta}}-1\right)\frac{\lambda_1^2}{\tau_1}}{\frac{1}{\sqrt{\Theta}}-\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\Theta}}-1\right)\frac{\lambda_1^2}{\tau_1}}. \tag{27}$$

При $\lambda_1=1$ получаем $d_1=1$, а из формул (25), (26) $\Delta_I=\Delta_{II}=1$, что вполне соответствует физическому смыслу. При $y=0$ и $y=\infty$ вместо двух потоков имеем один поток, для которого как из формулы (25) при $y=0$, так и из формулы (26) при $y=\infty$ получаем одно и то же выражение для величины Δ, что также соответствует физическому смыслу задачи. Единая формула для величины Δ получается также при $\Theta=1$.

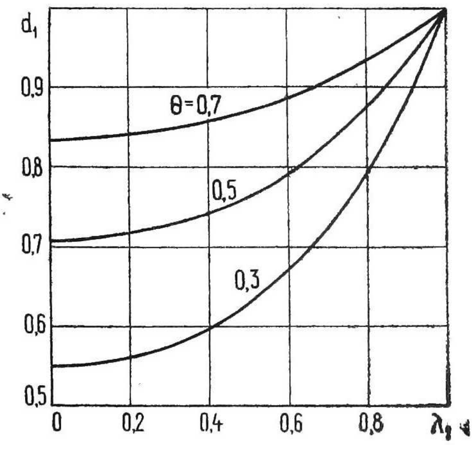

Рис. 2. Зависимость коэффициента d_1 от числа λ_1 и отношения температур Θ

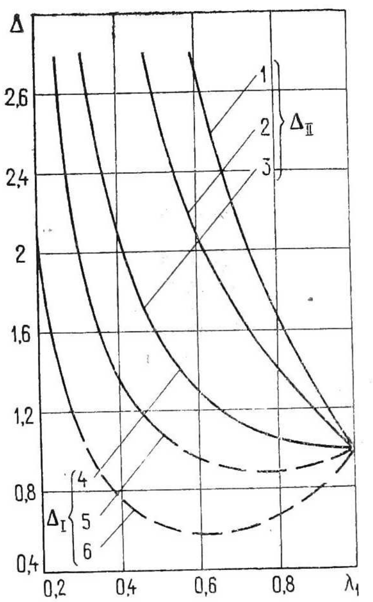

Рис. 3. Зависимость предельных величин Δ_I и Δ_{II} от числа λ_1 и соотношения массовых расходов y:
$\Theta=0,3$; 1, 4 — $(1+y)^{-1}=1$; 2, 5 — $(1+y)^{-1}=0,5$; 3, 6 — $(1+y)^{-1}=0$

На рис. 2 приводятся графики зависимостей $d_1=f(\lambda_1, \Theta)$, рассчитанных по формуле (27), а на рис. 3 — графики величин Δ_I и Δ_{II}, рассчитанных по формулам (25) и (26). Видно, что предельные величины Δ_I и Δ_{II} существенно различны.

Рассмотрим течение газовых потоков с трением. Учитывая, что потери давления на преодоление сил трения определяются соотношениями

$$\Delta p^*_{\text{тр I}} = \xi_{\text{тр I}} \frac{\rho_{\text{I}} w^2_{\text{I}}}{2}; \quad \Delta p^*_{\text{тр II}} = \xi_{\text{тр II}} \frac{\rho_{\text{II}} w^2_{\text{II}}}{2},$$

уравнение количества движения, в отличие от уравнения (2), запишется в виде:

$$z_{1\,\text{I}} + C_1 \omega z_{1\,\text{II}} = \sqrt{\Delta_{\text{I}}}\, z_{\text{I}} + C_1 \omega \sqrt{\Delta_{\text{II}}}\, z_{\text{II}} + \frac{P_{\text{тр I}}}{m_{\text{I}} \sqrt{\frac{k_{\text{I}}+1}{2k_{\text{I}}} R T^*_{1\,\text{I}}}} +$$

$$+ C_1 \omega \frac{P_{\text{тр II}}}{m_{\text{II}} \sqrt{\frac{k_{\text{II}}+1}{2k_{\text{II}}} R T^*_{1\,\text{II}}}},$$

где сила трения $P_{\text{тр}} = \Delta P^*_{\text{тр}} F$.

Используя формулу для массового расхода $m = \rho w F$, получаем окончательное выражение уравнения количества движения:

$$z_{1\,\text{I}} + C_1 \omega z_{1\,\text{II}} = \sqrt{\Delta_{\text{I}}} \left(z_{\text{I}} + \frac{k_{\text{I}}}{k_{\text{I}}+1} \xi_{\text{тр I}} \lambda_{\text{I}} \right) +$$

$$+ C_1 \omega \sqrt{\Delta_{\text{II}}} \left(z_{\text{II}} + \frac{k_{\text{II}}}{k_{\text{II}}+1} \xi_{\text{тр II}} \lambda_{\text{II}} \right). \tag{28}$$

Дифференцируем правую часть этого уравнения для того, чтобы установить связь между относительными дифференциалами, аналогичную зависимости (14) и необходимую для определения величин λ_{I}, λ_{II}, σ_{I} при течении потоков с трением. В результате дифференцирования и преобразований получаем

$$\delta \lambda_{\text{II}} = -\frac{1}{C_1 \omega} \sqrt{\frac{\Delta_{\text{I}}}{\Delta_{\text{II}}}} \frac{1 - \left(1 + \frac{k_{\text{I}}}{k_{\text{I}}+1} \xi_{\text{тр I}}\right) \lambda^2_{\text{I}}}{1 - \left(1 + \frac{k_{\text{II}}}{k_{\text{II}}+1} \xi_{\text{тр II}}\right) \lambda^2_{\text{II}}} \frac{\lambda_{\text{II}}}{\lambda_{\text{I}}} \delta \lambda_{\text{I}}. \tag{29}$$

Преобразуем уравнение (11), используя формулы (15) и (29):

$$\frac{2y}{1+y} \left[\left(\frac{k_{\text{I}}}{k_{\text{I}}+1} \frac{\lambda^2_{1\,\text{I}}}{\tau_{1\,\text{I}}} + \frac{k_{\text{II}}}{k_{\text{II}}+1} \frac{\lambda^2_{1\,\text{II}}}{\tau_{1\,\text{II}}} \frac{1}{C_1 \omega} \frac{\lambda_{1\,\text{II}}}{\lambda_{1\,\text{I}}} \frac{1 - \lambda^2_{1\,\text{I}}}{1 - \lambda^2_{1\,\text{II}}} \right) \times \right.$$

$$\times \frac{\delta \lambda_{1\,\text{I}}}{\delta \lambda_{\text{I}}} - \frac{k_{\text{I}}}{k_{\text{I}}+1} \frac{\lambda^2_{\text{I}}}{\tau_{\text{I}}} - \frac{k_{\text{II}}}{k_{\text{II}}+1} \frac{\lambda^2_{\text{II}}}{\tau_{\text{II}}} \frac{1}{C_1 \omega} \times$$

$$\left. \times \sqrt{\frac{\Delta_{\text{I}}}{\Delta_{\text{II}}}} \frac{\lambda_{\text{II}}}{\lambda_{\text{I}}} \frac{1 - \left(1 + \frac{k_{\text{I}}}{k_{\text{I}}+1} \xi_{\text{тр I}}\right) \lambda^2_{\text{I}}}{1 - \left(1 + \frac{k_{\text{II}}}{k_{\text{II}}+1} \xi_{\text{тр II}}\right) \lambda^2_{\text{II}}} \right] - \frac{2 - \tau_{1\,\text{II}}}{\tau_{1\,\text{II}}} \times$$

$$\times \frac{\frac{\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,I}}\,\frac{2-\tau_{1\,I}}{2-\tau_{1\,II}}-\frac{1}{C_{1\omega}}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{1-\lambda_{1I}^2}{1-\lambda_{1\,II}^2}}{1+\frac{1}{C_{1\omega}}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{\tau_{1\,I}}{\tau_{1\,II}}}\,\frac{\delta\lambda_{1\,I}}{\delta\lambda_I}+$$

$$+\frac{2-\tau_{II}}{\tau_{II}}\,\frac{\frac{\tau_{II}}{\tau_I}\,\frac{2-\tau_I}{2-\tau_{II}}+\frac{1}{C_{1\omega}}\sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}}\,\frac{\lambda_{II}}{\lambda_I}}\,\frac{1-\left(1+\frac{k_I}{k_I+1}\,\xi_{\text{тр I}}\right)\lambda_I^2}{1-\left(1+\frac{k_{II}}{k_{II}+1}\,\xi_{\text{тр II}}\right)\lambda_{II}^2}}{1+\frac{1}{C_{1\omega}}\sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}}\,\frac{\lambda_{II}}{\lambda_I}\,\frac{\tau_I}{\tau_{II}}}}+$$

$$+\frac{1-\lambda_{1\,I}^2}{\tau_{1\,I}}\,\frac{\delta\lambda_{1\,I}}{\delta\lambda_I}-\frac{1-\lambda_I^2}{\tau_I}=0. \tag{30}$$

Для определения отношения $\delta\lambda_{1\,I}/\delta\lambda_I$, входящего в уравнение (30), выполним преобразования, аналогичные тем, с помощью которых была получена формула (18) для потоков без трения: делим формулу (15) на (29) и на основе полученного результата и рассуждений, которые были изложены при выводе формулы (18), приходим к искомой формуле:

$$\frac{\delta\lambda_{1\,I}}{\delta\lambda_I}=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}}\,\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{1\,II}}\,\frac{\lambda_{1\,I}}{\lambda_I}}\,\frac{1-\left(1+\frac{k_I}{k_I+1}\,\xi_{\text{тр I}}\right)\lambda_I^2}{1-\lambda_{1\,I}^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1-\lambda_{1\,II}^2}{1-\left(1+\frac{k_{II}}{k_{II}+1}\,\xi_{\text{тр II}}\right)\lambda_{II}^2}\right]. \tag{31}$$

Используем формулу (31) для окончательного преобразования уравнения (30)

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2y}{1+y}\left(\frac{k_I}{k_I+1}\,\frac{\lambda_{1\,I}^2}{\tau_{1\,I}}+\frac{k_{II}}{k_{II}+1}\,\frac{\lambda_{1\,II}^2}{\tau_{1\,II}}\,\frac{1}{C_{1\omega}}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{1-\lambda_{1\,I}^2}{1-\lambda_{1\,II}^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2-\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,II}}\,\frac{\frac{\tau_{1\,II}}{\tau_{1\,I}}\,\frac{2-\tau_{1\,I}}{2-\tau_{1\,II}}+\frac{1}{C_{1\omega}}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{1-\lambda_{1\,I}^2}{1-\lambda_{1\,II}^2}}{1+\frac{1}{C_{1\omega}}\,\frac{\lambda_{1\,II}}{\lambda_{1\,I}}\,\frac{\tau_{1\,I}}{\tau_{1\,II}}}+\frac{1-\lambda_{1\,I}^2}{\tau_{1\,I}}\right]\times$$

$$\times\left[1+\sqrt{\frac{\Delta_I}{\Delta_{II}}\,\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{1\,II}}\,\frac{\lambda_{1\,I}}{\lambda_I}}\,\frac{1-\left(1+\frac{k_I}{k_I+1}\,\xi_{\text{тр I}}\right)\lambda_I^2}{1-\lambda_{1\,I}^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1-\lambda_{1\,II}^2}{1-\left(1+\frac{k_{II}}{k_{II}+1}\,\xi_{\text{тр II}}\right)\lambda_{II}^2}\right]-$$

$$-\frac{2y}{1+y}\left(\frac{k_{\mathrm{I}}}{k_{\mathrm{I}}+1}\,\frac{\lambda_{\mathrm{I}}^2}{\tau_{\mathrm{I}}}+\frac{k_{\mathrm{II}}}{k_{\mathrm{II}}+1}\,\frac{\lambda_{\mathrm{II}}^2}{\tau_{\mathrm{II}}}\,\frac{1}{C_{1\omega}}\sqrt{\frac{\Delta_{\mathrm{I}}}{\Delta_{\mathrm{II}}}}\,\frac{\lambda_{\mathrm{II}}}{\lambda_{\mathrm{I}}}\times\right.$$

$$\times\frac{1-\left(1+\frac{k_{\mathrm{I}}}{k_{\mathrm{I}}+1}\,\xi_{\text{тр I}}\right)\lambda_{\mathrm{I}}^2}{1-\left(1+\frac{k_{\mathrm{II}}}{k_{\mathrm{II}}+1}\,\xi_{\text{тр II}}\right)\lambda_{\mathrm{II}}^2}+\frac{2-\tau_{\mathrm{II}}}{\tau_{\mathrm{II}}}\times$$

$$\times\frac{\frac{\tau_{\mathrm{II}}}{\tau_{\mathrm{I}}}\,\frac{2-\tau_{\mathrm{I}}}{2-\tau_{\mathrm{II}}}+\frac{1}{C_{1\omega}}\sqrt{\frac{\Delta_{\mathrm{I}}}{\Delta_{\mathrm{II}}}}\,\frac{\lambda_{\mathrm{II}}}{\lambda_{\mathrm{I}}}\,\frac{1-\left(1+\frac{k_{\mathrm{I}}}{k_{\mathrm{I}}+1}\,\xi_{\text{тр I}}\right)\lambda_{\mathrm{I}}^2}{1-\left(1+\frac{k_{\mathrm{II}}}{k_{\mathrm{II}}+1}\,\xi_{\text{тр II}}\right)\lambda_{\mathrm{II}}^2}}{1+\frac{1}{C_{1\omega}}\sqrt{\frac{\Delta_{\mathrm{I}}}{\Delta_{\mathrm{II}}}}\,\frac{\lambda_{\mathrm{II}}}{\lambda_{\mathrm{I}}}\,\frac{\tau_{\mathrm{I}}}{\tau_{\mathrm{II}}}}-$$

$$-\frac{1-\lambda_{\mathrm{I}}^2}{\tau_{\mathrm{I}}}=0. \tag{32}$$

Уравнение (32) совместно с уравнением (28) позволяет определить числа λ_{I} и λ_{II} при течении потоков с трением. Затем из уравнения (1) определяется величина σ_{I}.

Таким образом, в результате использования второго закона термодинамики получены соотношения для определения параметров совместного течения газовых потоков в коротком цилиндрическом канале.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л.: ГИТТЛ, 1952.
2. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969.
3. *Клячкин А. Л.* Теория воздушно-реактивных двигателей. М.: Машиностроение, 1969, с. 512.
4. Теория воздушно-реактивных двигателей /Под ред. *С. М. Шляхтенко.* М.: Машиностроение, 1975, с. 567.
5. Теория двухконтурных турбореактивных двигателей /Под ред. *С. М. Шляхтенко, В. А. Сосунова.* М.: Машиностроение, 1979, с. 432.
6. *Butz I. S.* Fan Burner Dominates Supersonic Desighs.— Aviation Week, 1960, 73, N2.
7. Developing a Military Turbofan.— Aircraft, 1970, Vol. 49, N 4, p. 22, 24, 44.
8. *Стенькин Е. Д.* Совместное истечение двух газовых потоков через реактивное сопло.— Изв. вузов. Авиационная техника, 1966, № 2, с. 88—89.
9. *Ahren M. S.* Note on the Cylindrical Ejector Supersonic Propelling Nozzle.— Journal of RAS, 1963, october.
10. *Dunham I. A.* Theory of the Cylindrical Ejector Supersonic Propelling Nozzle: Technical Note. Journal of RAS, 1963, january.
11. *Pearson H., Holliday I. B., Smith S. F.* A Theory of the Cylindrical Ejector. Supersonic Propelling Nozzle.— Journal of RAS, 1958, october.

12. *Кириллин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Н.* Техническая термодинамика. М.: Энергия, 1966, с. 472.
13. *Кинан Дж.* Термодинамика. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963.
14. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.
15. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.

УДК 532.526

А. Н. Печенкин, Б. Д. Фишбейн

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В КАНАЛЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов (МКЭ) получает в инженерной практике все большее распространение для решения задач механики жидкости [1] благодаря простоте аппроксимации сложных геометрических поверхностей и большой гибкости алгоритмов и программ на основе этого метода. В связи с этим представляет интерес сопоставление результатов расчета трехмерного течения в каналах с помощью МКЭ и результатов, полученных ранее другими методами, обеспечивающими высокую точность, но применение которых для конкретных разнообразных геометрических сложных устройств затруднено.

Трехмерное безвихревое поле течения при расчете МКЭ [2] определяется через потенциальную функцию скорости φ с вектором скорости $\overline{W}$ выражением $\overline{W}=\nabla\varphi$.

Уравнение неразрывности для установившегося течения имеет вид:

$$\nabla(\rho\nabla\varphi)=0, \tag{1}$$

где $\rho=\rho_0(1-((k-1)/(k+1))\,(\nabla\varphi/a)^2)^{1/(k-1)}$ — плотность сжимаемой среды, выраженная через плотность заторможенного потока ρ_0 и критическую скорость a для газа с постоянным показателем изоэнтропы k согласно [3].

Метод конечных элементов включает дискретизацию области решения, интегральную постановку задачи и локальную аппроксимацию функции в каждом элементе [4—6]. Неизвестное решение для потенциала скорости φ в каждом элементе аппроксимируется выражением

$$\varphi^e=[N]\cdot\{\varphi\}^e, \tag{2}$$

где $\{\varphi\}^e$ — вектор-столбец значений потенциальной функции φ_i в узлах элемента e; $[N]$ — вектор-строка интерполяционных функций формы N_i.

Согласно методу Галеркина, требуется в пределах рассматриваемой области D свести к нулю взвешенное среднее значение погрешности, возникающей при подстановке (2) в (1). Заметив,