



П.С. Воеводин, Ю.М. Заболотнов

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ НА ОКОЛОЗЕМНОЙ ОРБИТЕ

(Самарский университет)

Анализируется движение электродинамической тросовой системы (ЭДТС) на околоземной орбите. Исследуется устойчивость движения ЭДТС положений равновесия ЭДТС, расположенных вблизи местной вертикали. ЭДТС состоит из двух малых космических аппаратов (МКА), соединенных проводящим ток тросом. Система предназначена для изменения параметров орбиты МКА посредством взаимодействия с магнитным полем Земли. Показано, что в зависимости от соотношения масс МКА возможны различные эволюционные движения ЭДТС. Приводятся численные расчеты, подтверждающие проведенные исследования и сформулированные выводы.

Рассматриваемая ЭДТС работает в режиме генерации тяги, то есть по проводящему тросу с помощью бортовых источников энергии пропускается ток заданного направления. На проводник в магнитном поле Земли, по которому пропускается электрический ток, действует сила Ампера, которая и изменяет орбитальные параметры центра масс системы.

Для анализа устойчивости положений равновесия используется математическая модель, полученная в работе [1] с помощью метода Лагранжа с использованием методики, изложенной в [2]

$$\ddot{r} - r \left[\dot{\varphi}^2 + (\dot{\theta} + \omega)^2 \cos^2 \varphi + v^{-1} \omega^2 (3 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) \right] = Q_1 / m_e, \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} + \dot{\omega} + 2(\dot{\theta} + \omega)(\dot{r} / r - \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi) + 1.5 v^{-1} \omega^2 \sin 2\theta = Q_2 / m_e r^2 \cos^2 \varphi, \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} \dot{r} / r + \left[0.5(\dot{\theta} + \omega)^2 + 1.5 v^{-1} \omega^2 \cos^2 \theta \right] \sin 2\varphi = Q_3 / m_e r^2, \quad (3)$$

где r - расстояние между МКА, θ, φ - углы, определяющие положение троса относительно местной вертикали [1]; $m_e = m_1 m_2 / m$; $m_{1,2}$ - массы МКА; $m = m_1 + m_2$; $\omega = \dot{\vartheta} = (K / p^3)^{0.5} v^2$; $\dot{\omega} = \ddot{\vartheta} = -2K e \sin \vartheta / p^3$; K - гравитационный параметр Земли, $v = 1 + e \cos \vartheta$; e - эксцентриситет орбиты; ϑ - истинная аномалия; p - параметр орбиты; $Q_{1,2,3}$ - обобщенные силы Ампера.

Сила Ампера на единицу длины, действующая в магнитном поле Земли, определяется выражением

$$\mathbf{F} = I \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$



где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ - единичный вектор, направленный по касательной к тросу; τ_x, τ_y, τ_z - направляющие косинусы в орбитальной подвижной системе координат [1]; \mathbf{B} - вектор магнитной индукции Земли.

Используется модель магнитного поля Земли - прямой диполь [2], поэтому

$$\mathbf{B} = B_0 [\mathbf{e}_z - 3(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R], \quad (5)$$

где $B_0 = \mu_m / R_c^3$, $\mu_m = 8 \cdot 10^6 \text{Тл км}^3$ - магнитный момент земного диполя, $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}_c / R_c$; R_c - модуль радиус-вектора, \mathbf{e}_z - единичный вектор, направленный по оси вращения Земли; $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_R)$ - скалярное произведение.

С учетом допущения о форме троса (часть окружности) обобщенные силы вычисляются из следующих выражений [1], [2]

$$\begin{aligned} Q_1 &= -0.5 B_0 \cos i |I| r (\text{ctg} \psi \cos^2 \varphi + \psi^{-1} \sin^2 \varphi), \\ Q_2 &= B_0 I r \Delta [\cos \varphi \cos i - \sin \varphi \sin i \sin(\theta + u)] + \Delta Q_2, \\ Q_3 &= Q_{3\psi} + B_0 I r \Delta \sin i [\cos(\theta + u) + 3 \sin \theta \sin u], \end{aligned} \quad (6)$$

где I - величина тока, i - наклонение орбиты, u - аргумент широты, ψ - угол между касательной к окружности, проведенной в концевых точках, и хордой их соединяющей;

$$Q_{3\psi} = 0.5 B_0 \cos i |I| r^2 \sin \varphi \cos \varphi (\text{ctg} \psi - \psi^{-1}),$$

$\Delta Q_2 = 3 B_0 I r \Delta \sin i \cos \theta \sin \varphi \sin u$, $\Delta = 0.5 r (m_2 - m_1) / m$. В отличие от [13], где использовалась более простая модель для магнитного поля $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$, здесь приводятся обобщенные силы $Q_{2,3}$, которые соответствуют модели (5). Для определенности величина тока I считается положительной, если он направлен от точки m_1 к точке m_2 .

Угол ψ определяется из решения нелинейного уравнения [1]

$$r = L \gamma / \left[\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi (\psi / \sin \psi)^2 \right]^{0.5}, \quad (7)$$

где L - недеформированная длина троса, $\gamma = 2E\psi / (2E\psi - B|I|L)$ - относительное удлинение троса (при растяжении трос подчиняется закону Гука), E - жесткость троса.

Уравнения (1-3) совместно с выражениями (5-7) описывают движение ЭДТС относительного своего центра масс с учетом изгибных колебаний троса. Изгибные колебания троса здесь характеризуются изменением расстояния меж-



ду концевыми точками r и соответственно угла ψ (7), значения которых соответствуют радиусу части окружности $r_i = r/2 \sin \psi$.

Положения относительного равновесия ЭДТС вблизи вертикали ЭДТС можно определить для круговой ($e=0$) и экваториальной ($i=0$) орбиты из системы (1-3) из условий $Q_{1,2,3} = 0$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin(\sigma), \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi, \quad (8)$$

где $\sigma = \frac{\mu I (m_2 - m_1)}{3K m_1 m_2}$.

Анализ линеаризованной системы для положений равновесия (8) показывает, что ее собственные числа всегда являются комплексными. Причем уравнения для угла φ отделяются от остальных уравнений линеаризованной системы и имеют чисто мнимые собственные числа. Другие две пары комплексно сопряженных чисел обязательно имеют положительные и отрицательные вещественные части. Поэтому положения равновесия (8) всегда неустойчивы, что также было отмечено ранее в работе [2].

Однако анализ эволюционных движений ЭДТС по нелинейной системе (1-3) в окрестности положений равновесия (8) показывает, что обнаруженная неустойчивость проявляется по-разному в зависимости от знака параметра σ . Если $\sigma < 0$, то амплитуда колебаний по углу θ (колебания в плоскости орбиты) уменьшается, а амплитуда колебаний по углу φ увеличивается (колебания троса перпендикулярно плоскости орбиты). Если $\sigma > 0$, то наоборот. Причем потеря устойчивости (переход системы во вращение) для случая $\sigma < 0$ затягивается, так как время перехода системы во вращение увеличивается в несколько раз. Так, например, для параметров ЭДТС и круговой начальной экваториальной орбиты, приведенных в табл.1, время перехода системы во вращение для случая $\sigma < 0$ приблизительно в 3.5 раза больше, чем для случая $\sigma > 0$ (соответственно 250 и 70 витков вокруг Земли).

Таблица 1. Параметры ЭДТС

| | |
|---|-----------|
| Массы МКА $m_{1,2}, кг$ | 2, 6 |
| Длина троса $L, км$ | 1 |
| Сила тока $I, А$ | ± 0.1 |
| Жесткость троса $E, н$ | 7070 |
| Высота начальной орбиты $H, км$ | 1000 |
| Начальные значения $\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0$ | 0 |

При разработке активных алгоритмов стабилизации ЭДТС для компенсации неустойчивости ее движения естественно необходимо учитывать имеющую место существенную асимметрию эволюционных движений системы с течением времени. Так, например, если $\sigma > 0$, то, прежде всего, надо стабилизировать колебания ЭДТС в плоскости орбиты (по углу θ). Если $\sigma < 0$, то необходимо обратить внимание на стабилизацию колебаний по углу φ .



На рис.1 в качестве примера показано, как изменяется угол θ в зависимости от безразмерного времени $\tau = t/T$, где T - период обращения центра масс системы на начальной орбите, для случая $\sigma < 0$. Рассматривался случай эллиптической начальной орбиты ($e = 0.01$) с наклоном $\pi/3$. Сначала угол θ стремится к положению равновесия θ_1 (8), но затем из-за возрастания амплитуд колебаний по углу φ система переходит во вращение, то есть теряет устойчивость.

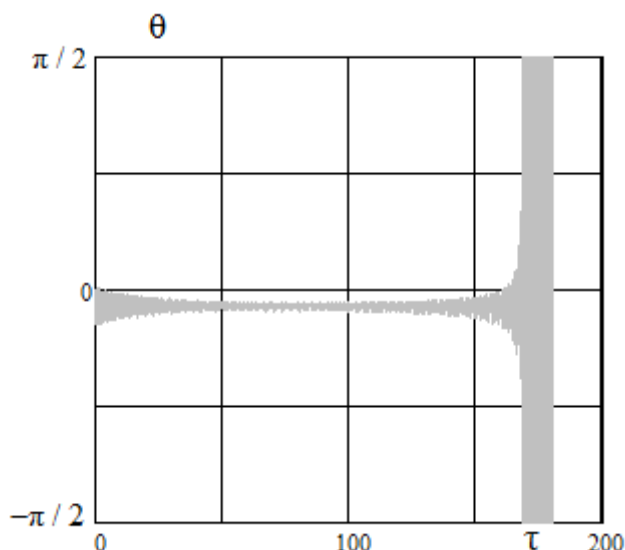


Рис. 1

Работа поддержана грантом РФФИ РФ 16-41-630637.

Литература

1. Воеводин, П.С., Заболотнов, Ю.М. Моделирование и анализ колебаний электродинамической тросовой системы на орбите спутника Земли // Математическое моделирование. 2017. Т.29. №6. С.21-34.
2. Белецкий, В.В., Левин, Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.

Э.Б. Галиева

АНАЛИЗ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОСТАВЛЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ПРОГРАММ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ НА СТАНКАХ С ЧПУ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Для всех современных крупных производственных предприятий актуальными являются проблемы оптимизации технологии производства в процессе работы предприятия, разработки мер с целью повышения производительности и уменьшения издержек, повышения качества продукции и снижения брака. Кроме того, в настоящее время в машиностроении прослеживается тенденция