магнитного поля, когда в среде возможно распространение неустойчивых быстрых и медленных магнитоакустических волн.

Литература

1. Heyvaerts, J. The thermal instability in a magnetohydrodynamic medium [Текст] / J.Heyvaerts // Astronomy and Astrophysics. 1974. - V. 37, N. 1. - P. 65-73

2. Nakariakov, V M. Magnetoacoustic Waves of Small Amplitude in Optically Thin Quasi-isentropic Plasmas [Текст] / V M.Nakariakov, C A. Mendoza-Briceño, S.Ibáñez, H. Miguel // The Astrophysical Journal. - 2000. - V. 528, I.2. P. 767-775.

3. Chin, R. Self-organization of magnetoacoustic waves in a thermally unstable environment [Текст] / R.Chin, E.Verwichte, G.Rowlands, V.M.Nakariakov // Physics of Plasmas. - 2010. - V.17, I.3. - P. 032107-032107-12.

4. Zavershinskii, D.I., Molevich, N.E. A magnetoacoustic autowave pulse in a heat-releasing ionized gaseous medium // Technical Physics Letters, - 2013, - V. 39, I. 8, P 676-679

5. Field, G.B. Thermal instability [Текст] / G.B.Field // Astrophysical journal. 1965. - V. 142, P. 531-567.

Ю.М.Заболотнов, А.А. Лобанков

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет))

Целью работы является разработка метода синтеза оптимального регулятора для колебательной системы с двумя степенями свободы, описывающей малые колебания относительно ее программного движения или состояния покоя. Для решения данной задачи используются принцип динамического программирования Беллмана и теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) Летова [1]. Рассматриваемые методы предлагается использовать совместно с методом усреднения [2]. Такой подход позволяет понизить размерность задачи и, тем самым, значительно упростить ее решение.

Рассматриваются колебательные системы, поведение которых описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+C\,x=\varepsilon\,Q\left(x,\frac{dx}{dt}\right)+\varepsilon\,m\,u, \tag{1}$$

где x - n-мерный вектор переменных состояния системы, A и C - известные квадратные симметричные матрицы, ε - малый параметр задачи, $Q\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ - вектор-функция возмущений, действующих на систему; m - матрица, определяющая структуру управляющего устройства в конкретной задаче; u - скалярное управление.

Предполагается, что для системы (1) выполнены условия управляемости и наблюдаемости [3].

Решается задача определения оптимального управления системой (1) u^0 с целью демпфирования колебаний, то есть решается задача о переводе системы в начало координат. Причем оптимальность управления u понимается в смысле минимума квадратичного функционала

$$J = \varepsilon \int_0^{t_k} \left(K^T a\, K + cu^2 \right) dt, \tag{2}$$

где a - положительно определенная матрица весовых коэффициентов для ошибок управления, $\tilde{n} > 0$ - весовой коэффициент для управления, K - вектор амплитуд колебаний, $\left(^T\right)$ - знак транспонирования, t_k - время перехода.

Применение метода усреднения к системе (1) предполагает замену переменных в этой системе в соответствии с формулами

$$x = \sum_{i=1}^{n} K_i V^{(i)} \cos(\varphi_i), \quad \frac{dx}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} K_i \omega_i V^{(i)} \sin(\varphi_i), \tag{3}$$

где φ - вектор фаз колебаний.

Применяя стандартную процедуру перехода к переменным «амплитуды – фазы», получим дифференциальные уравнения для новых переменных

$$\frac{dK}{dt} = \varepsilon\, X(K, \varphi) + \varepsilon Y(\varphi)\, u, \tag{4}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon\, \Phi(K, \varphi) + \varepsilon\, \Psi(K, \varphi) u, \tag{5}$$

где вид функций известен.

Согласно принципу динамического программирования Беллмана, сформулированному для непрерывных динамических систем, оптимальное управление определяется из условия [1]

$$\min_u \left[\varepsilon \left(K^T a\, K + c\, u^2 \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial K} \right)^T \frac{dK}{dt} + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^T \frac{d\varphi}{dt} \right] = 0, \tag{6}$$

где $W(K, \varphi)$ - производящая функция.

Подставляя систему (4), (5) в условие (6) и собирая вместе слагаемые, зависящие от управления, получим функцию

$$\mathrm{H}(u) = \varepsilon\, c\, u^2 + \varepsilon\, u \left[\left(\frac{\partial W}{\partial K} \right)^T Y(\varphi) + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^T \Psi(K, \varphi) \right]. \tag{7}$$

Из условия минимума этой функции $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ нетрудно определить оптимальное управление

$$u^0 = -\frac{1}{2c}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)^T Y(\varphi) + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^T \Psi(K,\varphi)\right]. \qquad (8)$$

Оптимальное управление u^0 найдено с точностью до производящей функции $W(K,\varphi)$. Для определения дифференциального уравнения для этой функции необходимо подставить выражение (8) в условие (6), тогда

$$\varepsilon K^T a K + \varepsilon\left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)^T X(K,\varphi) + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^T [\omega + \varepsilon\Phi(K,\varphi)] - \frac{\varepsilon}{4c}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)^T Y(\varphi) + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^T \Psi(K,\varphi)\right]^2 = 0. \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) предлагается применить метод усреднения, который заключается в поиске решения в виде асимптотических рядов. Подставляя известные формулы метода усреднения в уравнение (9) и усредняя это уравнение по фазам φ_i^0 ($i = 1,...n$) и удерживая слагаемые только порядка ε, получим

$$(K^0)^T a K^0 + \frac{\partial W_0}{\partial K^0} \cdot \left\langle X\left(K^0, \varphi^0\right)\right\rangle - \frac{1}{4c}\left\langle\left[\left(\frac{\partial W_0}{\partial K^0}\right)^T Y\left(\varphi^0\right)\right]^2\right\rangle = 0. \qquad (10)$$

где оператор $\langle ... \rangle$ есть стандартный оператор усреднения.

Уравнение (10) существенно проще исходного уравнения (9), так как слагаемые в него входящие зависят только от амплитуд и не зависят от фаз, причем, то же самое справедливо и для производящей функции $W_0\left(K^0\right)$.

Для обеспечения динамической устойчивости точки равновесия колебательной системы $x = \frac{dx}{dt} = 0$ функция $W_0\left(K^0\right)$, удовлетворяющая уравнению (10), должна быть положительно определенной. В этом случае функцию $W_0\left(K^0\right)$ можно рассматривать как функцию Ляпунова, обеспечивающую устойчивость решения $K^0 = 0$ для усредненной системы [4].

Здесь надо отметить, что с учетом соотношений (8) и (10) оптимальное управление в первом приближении можно записать в виде

$$u^0 = -\frac{1}{2c}\left[\left(\frac{\partial W_0}{\partial K^0}\right)^T Y\left(\varphi^0\right)\right] + \varepsilon ..., \qquad (11)$$

то есть слагаемые пропорциональные ε можно не учитывать, так как при подстановке (11) в уравнение для амплитуд (4) эти члены изменяют только второе приближение метода усреднения.

Рассмотрим колебательную систему в форме (1) с двумя степенями свободы при наличии линейных возмущений, т.е когда $n = 2$ и $Q = R\frac{dx}{dt}$. Усреднение двухчастотной системы позволяет представить результаты анализа колебаний в наглядной форме с помощью метода фазовой плоскости в координатах $\left(K_1^0, K_2^0\right)$ [5].

Из приближенного уравнения для производящей функции $W_0\left(K^0\right)$ следует, что для ее определения в первом приближении достаточно рассмотреть только уравнения амплитуд (4). Эти уравнения для случая $n=2$ имеют вид

$$\frac{dK_1}{dt} = -\varepsilon\left[N_4\left(Q_1 + m_1 u\right) - N_2\left(Q_2 + m_2 u\right)\right]\sin\varphi_1. \tag{12}$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \varepsilon\left[N_3\left(Q_1 + m_1 u\right) - N_1\left(Q_2 + m_2 u\right)\right]\sin\varphi_2. \tag{13}$$

где $N_1 = \dfrac{A_{11} + A_{12}\chi_1}{\omega_2\left(\chi_2 - \chi_1\right)\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)}$, $N_2 = \dfrac{A_{11} + A_{12}\chi_2}{\omega_1\left(\chi_2 - \chi_1\right)\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)}$,

$$N_3 = \frac{A_{12} + A_{22}\chi_1}{\omega_2\left(\chi_2 - \chi_1\right)\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)}, \quad N_4 = \frac{A_{12} + A_{22}\chi_2}{\omega_1\left(\chi_2 - \chi_1\right)\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)}.$$

Здесь матрица собственных векторов невозмущенной системы представлена в виде $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix}$, где $\chi_{1,2}$ - коэффициенты форм колебаний. Полное преобразование к переменным «амплитуды – фазы» для двухчастотной системы вида (1) приводится в [5].

После перехода к переменным «амплитуды-фазы», формула для определения управления примет вид

$$U^0 = \frac{1}{c}A_{11}\cdot K_1^0(N_4\cdot m_1 - N_2\cdot m_2)\sin(\varphi_1) - \frac{1}{c}A_{22}\cdot K_2^0(N_3\cdot m_1 - N_1\cdot m_2)\sin(\varphi_2), \tag{14}$$

где коэффициенты A_{11} и A_{22} будут положительными корнями уравнений

$$\begin{gathered} b_{11} - A_{11}\cdot\omega_1\cdot\left(-N_4\cdot\mu_{11} - N_4\cdot\mu_{12}\cdot\chi_1 + N_2\cdot\mu_{21} + N_2\cdot\mu_{22}\cdot\chi_1\right) - \\ -\frac{1}{2c}{A_{11}}^2(N_4\cdot m_1 - N_2\cdot m_2)^2 = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} b_{22} - A_{22}\cdot\omega_2\cdot\left(N_3\cdot\mu_{11} + N_3\cdot\mu_{12}\cdot\chi_2 - N_1\cdot\mu_{21} - N_1\cdot\mu_{22}\cdot\chi_2\right) - \\ -\frac{1}{2c}{A_{22}}^2(N_4\cdot m_1 - N2\cdot m_2)^2 = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

полученных путем подстановки функции Ляпунова $W_0\left(K^0\right)$ в уравнение (10) и приравнивании к нулю коэффициентов при K_1^2, K_2^2, $K_1 K_2$, а коэффициенты μ_{11}, μ_{12}, μ_{21}, μ_{22} определяются из вида возмущающей функции Q. Нетрудно показать, что $A_{12}=0$. При использовании положительных корней уравнений (15), (16) для A_{11} и A_{22} будут выполняться условия Сильвестра, что обеспечивает асимптотическую устойчивость усредненной системы.

В итоге усредненная система примет вид

$$\begin{gathered} \frac{dK_1^0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2}A_{11}\cdot K_1^0\,\frac{(N_4\cdot m_1 - N_2\cdot m_2)^2}{c}, \\ \frac{dK_2^0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2}A_{22}\cdot K_2^0\,\frac{(N_3\cdot m_1 - N_1\cdot m_2)^2}{c}. \end{gathered} \tag{17}$$

Учитывая, что

$$K_1 \sin(\varphi_1) = \frac{-\chi_2}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)}\dot{x}_1 + \frac{1}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)}\dot{x}_2,$$

$$K_2 \sin(\varphi_2) = \frac{\chi_1}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)}\dot{x}_1 - \frac{1}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)}\dot{x}_2,$$

запишем управление в исходных координатах

$$U^0 = p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2, \tag{18}$$

где коэффициенты

$$p_1 = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\chi_2}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)}A_{11}\cdot(N_4\cdot m_1 - N_2\cdot m_2) - \frac{1}{c}\cdot\frac{\chi_1}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)}A_{22}\cdot(N_3\cdot m_1 - N_1\cdot m_2),$$

$$p_1 = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)}A_{11}\cdot(N_4\cdot m_1 - N_2\cdot m_2) + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)}A_{22}\cdot(N_3\cdot m_1 - N_1\cdot m_2).$$

Таким образом, применение метода усреднения в сочетании с методом динамического программирования Беллмана позволило получить аналитическое решение (18) для оптимального управления системой (1).

Литература

1. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с..
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. М:Наука, 1986. 191с.
5. Заболотнов Ю.М. Теория колебаний. Самара: СГАУ, 1999. 168 с.

Е.Г. Завьялова

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, ОСНОВАННЫХ НА РЕШЕНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

(Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет))

Работа посвящена сравнительному исследованию алгоритмов численного моделирования электромагнитного поля, основанных на использовании различных математических описаний этого поля. Описание электромагнитной волны в однородном пространстве осуществляется с помощью нижеследующих математических моделей.

Первая модель основана на использовании уравнений Максвелла: