



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ПЛОЩАДНОМ ЗАВОДНЕНИИ

(Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева)

В процессе разработки нефтяной залежи используются различные методы воздействия на пласт, например, закачка воды или другого агента. Рассмотрим один элемент периодической пятиточечной системы площадного заводнения нефтяного пласта в виде квадрата с нагнетательной скважиной в центре и четырьмя добывающими скважинами в углах [1] (рис. 1).

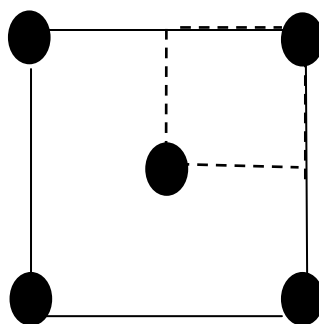


Рис. 1. Элемент пятиточечной системы заводнения нефтяного пласта.

Целью работы является расчет фильтрации жидкости от нагнетательной скважины к добывающим скважинам. При заданном перепаде давления в нагнетательной и добывающих скважинах требуется получить распределение давления в элементе, рассчитать поле скоростей жидкости и функцию тока.

При построении математической модели фильтрации жидкости в пятиточечном элементе в силу симметрии в качестве расчетной области достаточно взять область, выделенную на рис.1 пунктирными линиями. Предполагается, что пласт имеет постоянную мощность, которая мала по сравнению с его размерами в горизонтальной плоскости, и что кровля и подошва пласта непроницаемы. Это позволяет провести осреднение параметров пласта по мощности и свести трехмерную задачу к двумерной. Считается, что пласт однородный по проницаемости, фильтрация представляет собой изотермический процесс, а жидкость однофазная и несжимаемая.

В этих условиях движение жидкости описывается уравнением неразрывности и линейным законом фильтрации Дарси [2]:

$$\operatorname{div} u = 0,$$



$$u = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P .$$

Здесь  $u = (u, v)$  – вектор скорости жидкости,  $P$  – давление в жидкости,  $k$  – проницаемость пласта,  $\mu$  – коэффициент вязкости жидкости.

Отсюда получим уравнение для давления

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0,$$

которое решается в расчетной области при следующих граничных условиях: на границе нагнетательной скважины задано давление  $P = P_n$ , на границе добывающей скважины задано давление  $P = P_d$ , на боковых границах области выполняются условия симметрии: на левой и правой границах  $u = 0$  или  $\partial P / \partial x = 0$ , на нижней и верхней границах  $v = 0$  или  $\partial P / \partial y = 0$ .

После нахождения давления  $P$  могут быть найдены компоненты вектора скорости:

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y},$$

и функция тока  $\psi$  из соотношений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

Для численного решения сформулированной задачи фильтрации применим конечно-разностный метод [3]. Для этого перейдем к безразмерным переменным, заменим непрерывную область разностной сеткой и с помощью интегро-интерполяционного метода [3] аппроксимируем все дифференциальные соотношения конечно-разностными аналогами.

Особенность задачи состоит в нерегулярности расчетной области: площадь области фильтрации много больше площади сечения скважин. При построении неравномерной разностной сетки с узлами

$$(x_i, y_j), \quad i, j = 0, 1, \dots, N,$$

границы скважин делятся на заданное количество частей, и внутренние узлы сетки, лежащие вблизи границ скважин, согласуются с этими частями. Такое построение сетки обеспечивает необходимую аппроксимацию границ скважин. Узлы, лежащие внутри расчетной области, рассчитываются по специальным формулам так, чтобы сетка сгущалась вблизи скважин и становилась все более разреженной при приближении к центру расчетной области. Шаги сетки вычисляются по формулам

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Будем определять давление в центрах прямоугольных ячеек разностной сетки, компоненты скорости в серединах сторон ячеек сетки, а функцию тока в узлах сетки:



$$P_{i-1/2, j-1/2}, \quad u_{i, j-1/2}, \quad v_{i-1/2, j}, \quad \Psi_{i, j}.$$

Разностное уравнение для безразмерного давления во внутренних узлах сетки имеет вид:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[ \frac{P_{i+1/2, j-1/2} - P_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} - \frac{P_{i-1/2, j-1/2} - P_{i-3/2, j-1/2}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right] +$$

$$\frac{1}{\Delta y_j} \left[ \frac{P_{i-1/2, j+1/2} - P_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} - \frac{P_{i-1/2, j-1/2} - P_{i-1/2, j-3/2}}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \right] = 0.$$

В приграничных узлах сетки это уравнение модифицируется в соответствии с граничными условиями. Для решения системы разностных уравнений для давления используется эффективный итерационный попеременно-треугольный метод в сочетании с методом сопряженных градиентов [4]. По рассчитанному давлению вычисляются компоненты скорости:

$$u_{i, j-1/2} = -2 \frac{k}{\mu} \frac{P_{i+1/2, j-1/2} - P_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}, \quad v_{i-1/2, j} = -2 \frac{k}{\mu} \frac{P_{i-1/2, j+1/2} - P_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}},$$

и функция тока:

$$\Psi_{i, j} = \Psi_{i-1, j} - \Delta x_i \cdot v_{i-1/2, j} \quad \text{или} \quad \Psi_{i, j} = \Psi_{i, j-1} + \Delta y_j \cdot u_{i, j-1/2}.$$

Проведены расчеты при различных геометриях расчетной области, перепадах давления в скважинах и различных параметрах разностной сетки. Результаты расчетов представлялись в виде картин изобар и линий тока жидкости как во всей расчетной области, так и в окрестностях нагнетательной и добывающей скважин. На рис. 2,3 представлены результаты расчетов одного из вариантов.

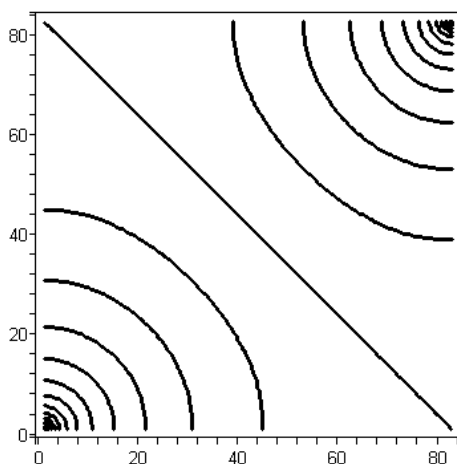


Рис. 2. Изобары в расчетной области.

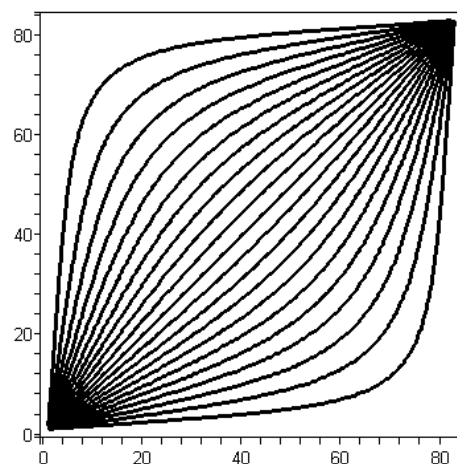


Рис. 3. Линии тока жидкости в расчетной области.



### Литература

- [1]. Гиматудинов, Ш.К. Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Проектирование разработки / Ш.К. Гиматудинов, Ю.П. Борисов, М.Д. Розенберг и др. – М.: Недра, 1983. – 463 с.
- [2]. Басниев, К.С. Подземная гидравлика: учебник для вузов / К.С. Басниев, А.М. Власов, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. – М.: Недра, 1986. - 303 с.
- [3]. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
- [4]. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

А.В.Суворов

### АНАЛИЗ ОЖИДАЕМОЙ ЗАГРУЖЕННОСТИ СЕКТОРОВ САМАРСКОГО УКРУПНЁННОГО ЦЕНТРА ОБСЛУЖИВАНИЯ ВОЗДУШНОГО ДВИЖЕНИЯ

(Высшая школа аэронавигации, Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации)

Диспетчерами Самарского Укрупнённого Центра обслуживания воздушного движения (ОВД) ежегодно обслуживается более миллиона воздушных судов [1]. Годовой рост количества обслуживаемых воздушных судов (ВС) достигает 7%. В этих условиях для обеспечения безопасности полетов при обслуживании воздушного движения необходимо заблаговременно проверять соответствие пропускной способности  $\mu$  секторов ОВД ожидаемым потребностям  $\lambda$  в использовании воздушного пространства [2,3]:

$$\lambda \leq \mu \quad (1)$$

Пропускная способность  $\mu$  для каждого сектора (диспетчерского пункта) определяется допустимым количеством поступающих в сектор ОВД воздушных судов (ВС) в единицу времени, при котором загруженность диспетчера не превышает его физических возможностей выполнять свою работу без ошибок и нарушений [3,4]. Фактическая же интенсивность  $\lambda$  потоков воздушных судов, поступающих в секторы УВД, может существенно изменяться по времени года и в течение часов суток [4,5]. Поэтому, гарантийный подход к обеспечению безопасности полетов предполагает принятие организационно-управленческих решений по совершенствованию системы организации воздушного движения (ОрВД) с учетом условия (1) в расчете на наиболее загруженные часы работы Центра ОВД - часы пик. Причем, решения по реорганизации структуры воздушного пространства должны приниматься в расчете на ожидаемое положение дел с прогнозом на будущее по крайней мере на 3-5 лет, т.к. на разработку и внедрение новых структурных решений потребуется дополнительное время [2,3]. Поэтому, в качестве ключевого показателя загруженности секторов ОВД необходимо использовать ожидаемую интенсивность  $\lambda$  потоков воздушных су-