



Заключение

Таким образом, классический четырех этапный явный одношаговый метод Рунге-Кутты позволяют эффективно решать задачи по численному моделированию относительного движения микроспутника по орбите в течение первых суток полёта. Действительно, результаты численного моделирования показывают, что при 20 периодах обращения спутника (30 часов) по орбите расхождение результатов при использовании семиэтапного метода Рунге-Кутты и классического метода РК4 не превышают 1%. Однако, при моделировании движения микроспутника на более значительных интервалах времени полёта требуется использовать методы более точные, чем РК4.

Литература

1. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.
2. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. - 248 с.
3. Lyubimov V.V., Malyshev V.I., Semkin N.D. Attitude control of small spacecraft with allowance made for failures in the system for decreasing angular momentums of flywheels// Gyroscopy and Navigation, 2013. Volume 4, Issue 4, Pages 216-222.
4. Любимов В.В. Об особенностях в возмущенном вращательном движении спутника с сильным магнитом на борту // Изв. вузов. Авиационная техника. 2009. №2. С.29-31.
5. Любимов В.В. Внешняя устойчивость резонансов при движении асимметричного твердого тела с сильным магнитом в геомагнитном поле// Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 1. С.13-27.
6. Лебедев А.С., Любимов В.В., Семкин Н.Д. Моделирование управляемого движения микроспутника с магнитными и гравитационными исполнительными органами / Полёт. 2012. №7. С.39-44.
7. Калаев М.П., Любимов В.В., Семкин Н.Д. Полунатурное и имитационное моделирование процесса отделения микроспутника// Гироскопия и навигация. № 2 (85). С.52-60.
8. Семкин Н.Д., Любимов В.В., Малышев В.И. Моделирование законов функционирования магнитных исполнительных органов при ориентации микроспутника по местной вертикали// Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Том.15, № 1. С.103-108.
9. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. – 512 с.



В.В. Любимов, Д.Д. Петров

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАЕКТОРИИ ФУТБОЛЬНОГО МЯЧА ПРИ УДАРЕ «СУХОЙ ЛИСТ»

(Самарский университет)

Постановка задачи

Рассматривается задача о полёте футбольного мяча по криволинейной траектории, называемой “сухой лист”. Следует отметить, что данный термин пришёл к нам из природы и чаще всего применяется для описания криволинейных траектории полёта мяча при пробитии угловых и штрафных ударов. Целью работы является расчёт кривизны и кручения траектории мяча с целью выяснения наиболее характерных особенностей геометрии пространственного движения футбольного мяча.

Математическая модель

Рассмотрим математическую модель полёта мяча при пробитии углового удара. Пусть мяч массой m , движется от удара футболиста с ненулевой начальной угловой скоростью ω и начальной скоростью движения центра тяжести V_0 в сторону ворот (рис. 1). При этом будем учитывать аэродинамическую силу сопротивления воздуха (с модулем равным F_c), аэродинамическую силу Магнуса (с модулем равным F_M) и силу тяжести мяча. Если мячу придано вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω , то сила Магнуса будет направлена в сторону плоскости ворот OYZ . Дифференциальные уравнения движения мяча имеют вид (g – ускорение свободного падения, mg – сила тяжести):

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= -F_M - F_c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} &= -F_{yc} - F_c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} &= -mg - F_c \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

При аналитическом интегрировании этих дифференциальных уравнений используем начальные условия:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ z(0) &= 0, \\ V_x(0) &= V_0 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \\ V_y(0) &= V_0 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, \\ V_z(0) &= V_0 \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \tag{2}$$



Здесь α – угол между вектором начальной скорости V_0 и горизонтальной плоскостью газона XY, β – угол между проекцией вектора V_0 на горизонтальную плоскость газона и плоскостью, содержащей ворота OYZ. При аналитическом интегрировании дифференциальных уравнений (1) с учетом начальных условий (2) получаем закон пространственного движения мяча [1]:

$$\begin{aligned} x &= V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \frac{F_c \cdot t^2}{2m} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \frac{F_M \cdot t^2}{2m}, \\ y &= V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - \frac{F_c \cdot t^2}{2m} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, \\ z &= V_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2} - \frac{F_c \cdot t^2}{2m} \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

При аналитическом интегрировании уравнений (1) аэродинамическая сила сопротивления и сила Магнуса предполагались неизменными. В реальности данные аэродинамические силы являются переменными величинами. В частности, они обе пропорциональны скорости полёта V .

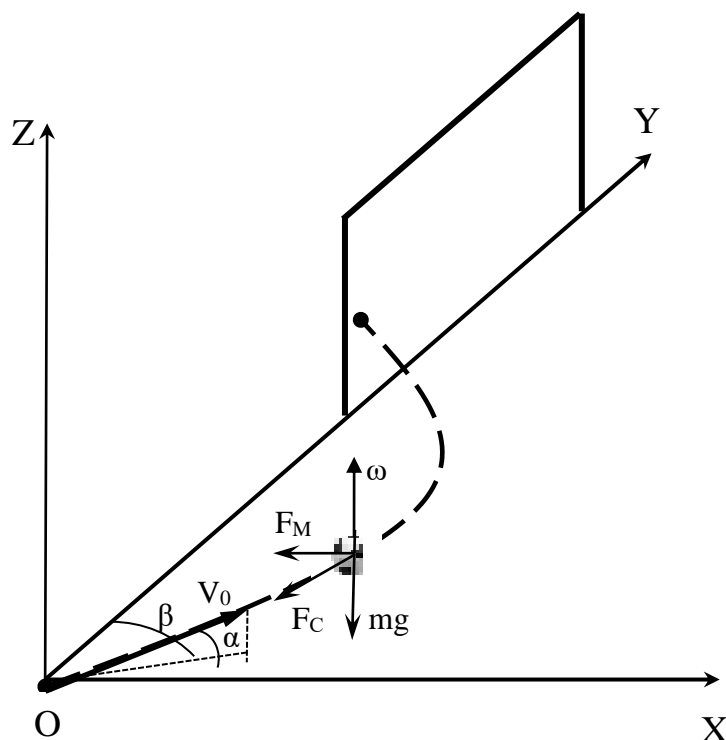


Рис.1. Траектория полёта мяча при пробитии углового удара.

Расчёт кривизны и кручения траектории мяча

Произведём расчёт кривизны траектории полёта мяча. При этом применяем известное выражение [1]:

$$k = \frac{\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right|}{\left| \frac{dr}{dt} \right|^3}. \quad (4)$$



Посредством нахождения первых и вторых производных координат (3), определения их векторного произведения, получения модуля от данного векторного произведения в числителе и возведения в третью степень производной в знаменателе получаем следующую формулу для расчёта кривизны траектории мяча:

$$k = \frac{|\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}|}{|\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}|^3}. \quad (5)$$

При расчёте кручения траектории полёта мяча используем формулу [1]:

$$\sigma = \frac{\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} \frac{d^3r}{dt^3}}{\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right|^2}. \quad (6)$$

Посредством нахождения производных, вычисления смешанного произведения векторов в числителе и подсчёта квадрата векторного произведения в знаменателе получаем формулу для кручения:

$$\sigma = \frac{\dot{x}(\ddot{y}\ddot{z} - \ddot{z}\ddot{y}) - \dot{y}(\ddot{x}\ddot{z} - \ddot{z}\ddot{x}) + \dot{z}(\ddot{x}\ddot{y} - \ddot{y}\ddot{x})}{\left| \sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2} \right|^2}. \quad (7)$$

Численное моделирование кривизны и кручения

При численном моделировании пространственного движения мяча применялись закон движения (3). При этом использовались следующие параметры мяча и начальные условия интегрирования: $m=0,45$ кг, $\alpha=20^\circ$, $\beta=25^\circ$, $g=9.8$ м/с², $F_M=4,5$ Н, $F_C=1,5$ Н, $V(0)=30$ м/с. На рис.2 показано изменение кривизны траектории. Рис.2 построен с использованием формулы (5). Из рис.2 следует, что значение кривизны достигаем максимума в начале полёта. В дальнейшем, происходит уменьшение кривизны до минимума с последующим монотонным возрастанием. На рис.3 показано изменение кручения траектории. Рис.3 построен с использованием формулы (7). На графике видно, что значение кручения монотонно возрастает в течение всего времени полёта мяча.

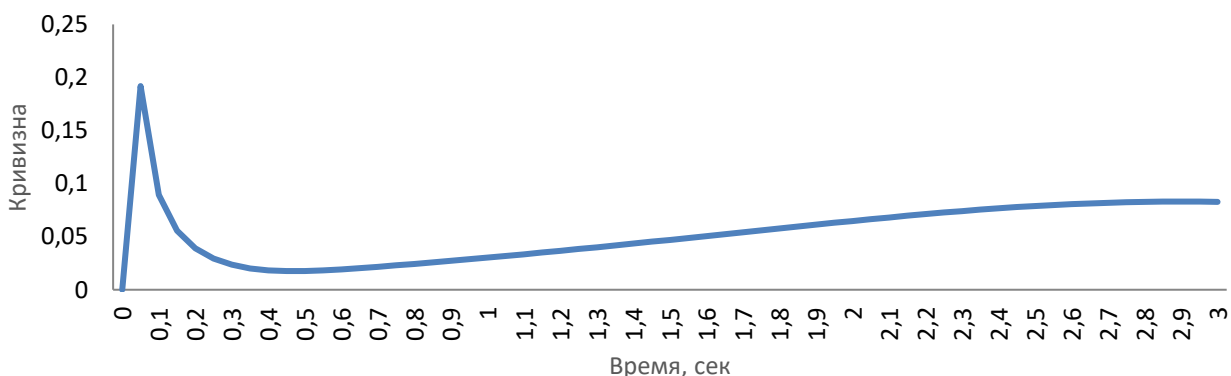


Рис.2. Изменение кривизны траектории полёта мяча от времени

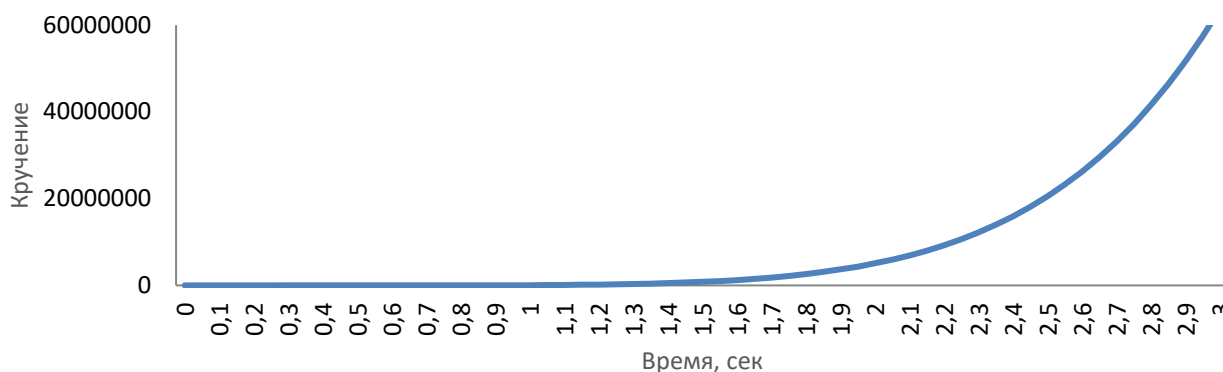


Рис.3. Изменение кручения траектории полёта мяча от времени

Заключение

В работе произведён численный анализ характеристик траектории футбольного мяча при ударе «Сухой лист» и получены зависимости кривизны траектории от времени и кручения мяча от времени. Из результатов работы следует, что максимальное кручения траектория мяча достигает в конце полёта, а максимальная кривизна траектории имеет место в самом начале своего пути полёта мяча. Следует отметить, что при численном моделировании не учитывалось изменение аэродинамических сил лобового сопротивления и силы Магнуса. Действительно, учёт переменности аэродинамических сил приводит невозможности аналитического интегрирования системы (1). В этом случае для получения описанных геометрических характеристик требуется производить численное интегрирование системы (1). Данные результаты выходят за рамки представленной работы, но могут быть рассмотрены в последующих публикациях.

Литература

1. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. — 7-е изд., испр. М.: ООО «Издательство АСТ», 2014. 816 с.

А.И. Матвеев

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНИРОВАНИЯ РЕСУРСОВ (НА ПРИМЕРЕ МЕТОДА ОТЖИГА)

(СНИУ Самарский университет)

Оптимизация функционирования любой системы, в том числе и социальной, является актуальной проблемой в различных областях жизнедеятельности. К настоящему времени накоплен огромный опыт решения оптимизационных задач, как для конкретных приложений, так и в обобщенном виде. Существующие