2, 3 квазилинейно по своей природе и прямо пропорционально зависит от напряжения питания моста и чувствительно к знаку поля (рис. 2, б).

Таким образом, выражение (3) представляет собой универсальную модель мостового АМР-сенсора, учитывающую основные процессы, протекающие в «*barber-pole*» тонких магнитных пленках, имеющую при этом лаконичную форму записи, а потому удобную при инженерно-технических расчетах.

Литература

1. Воробьев А.В. Магнитные материалы и элементы электронных устройств – Уфа: Издательство УГАТУ, 2012. – 154 с.
2. Воробьев А. В., Зигангиров Л.Р. Автоматизированная система управления подмагничиванием прецизионных магниторезистивных измерительных преобразователей // Приборы №4 (130), 2011. – С. 24-27.
3. Analog Devices Методы практического конструирования при нормировании сигналов с датчиков. – М.: Автекс 2003, С. 17 - 20.
4. Патент 125398 РФ, Магниторезистивный сенсорный модуль / А.В Воробьев, А.И. Заико, Э.А. Кильметов. – Опубл. 24.04.13. Бюл. №16 – 4с.:ил.

В.Е. Зотеев, А.А. Свистунова

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЕННОГО СЛОЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗДЕЛИЯ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

(Самарский государственный технический университет)

При расчете и исследовании полей остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно-упрочненном цилиндрическом изделии одной из основных задач является задача достоверной оценки параметров аппроксимации экспериментальных зависимостей остаточных напряжений $\sigma_\theta^{res}(r)$. Эта зависимость от глубины r упрочненного слоя цилиндрического образца, как правило, описывается аналитической функцией вида

$$\sigma_\theta^{res}(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left[-\alpha(a-r)^2\right] \tag{1}$$

где σ_0, σ_1 и b – параметры, подлежащие определению [1]. Известный подход к решению этой задачи не предполагает в своих алгоритмах применения статистических методов обработки результатов эксперимента [1]. Он, как правило, использует информацию о двух, специальным образом выбранных, точках кривой (1) и дополнительное условие, связывающее её параметры. При этом практически все точки эксперимента в вычислениях параметров зависимости (1) не участвуют, что является существенным недостатком такого метода.

Предлагается новый численный метод определения на основе экспериментальных данных параметров напряженного состояния поверхностно упрочненного слоя цилиндрического изделия. В основе метода лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты эксперимента для компоненты остаточных напряжений, возникающих в упрочненном слое цилиндрического образца после процедуры поверхностного пластического деформирования. Алгоритм этого метода включает следующие основные этапы [2]:

– построение рекуррентной формулы, связывающей несколько последовательных дискретных значений зависимости (1) компоненты напряжений $\sigma_{\theta}^{res}(r)$;

– разработка разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений и учитывающих случайный разброс в данных эксперимента;

– формирование на основе разностных уравнений обобщенной регрессионной модели, коэффициенты которой известным образом связаны с параметрами исследуемой зависимости (1);

– среднеквадратичное оценивание коэффициентов обобщенной регрессионной модели, в основе которого лежит минимизация суммы квадратов отклонений модели (1) от результатов наблюдений по всем точкам эксперимента;

– вычисление параметров компоненты остаточных напряжений, возникающих в упрочненном слое цилиндрического образца;

– оценка погрешности результатов вычислений, а также адекватности построенной модели результатам эксперимента.

В соответствие с методикой, изложенной в [2], построена система разностных уравнений при отсутствии ограничений, описывающая результаты эксперимента для компоненты напряжений $\sigma_{\theta}^{res}(r)$, и лежащая в основе численного метода параметрической идентификации напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_3 + \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_1(1-\sqrt{\lambda_2^{(i)}}) + \lambda_3\sqrt{\lambda_2^{(i)}} + \varepsilon_1, \\ y_{k-2}y_k = \lambda_1(y_{k-2} + y_k - \lambda_1^{(i)}) + \lambda_2(y_{k-1}^2 - 2\lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2^{(i)2}) + \eta_k, \\ \eta_k = \varepsilon_k(y_{k-2} - \lambda_1) + 2\lambda_2\varepsilon_{k-1}(\lambda_1^{(i)} - y_{k-1}) + \varepsilon_{k-2}(y_k - \lambda_1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k = \overline{2, N-1}. \end{cases} \tag{2}$$

где $y_k = \sigma_{\theta}^{res}(k\Delta r)$, $k = 0,1,2,3,...,N-1$, – результаты эксперимента, Δr – шаг дискретизации зависимости (1); N – объем выборки результатов наблюдений; ε_k – случайный разброс в данных эксперимента;

$$\lambda_1 = \sigma_0, \lambda_2 = \exp[-2\alpha\tau^2], \lambda_3 = \sigma_0 - \sigma_1 \tag{3}$$

Формулы (3) позволяют по найденным среднеквадратичным оценкам коэффициентов разностного уравнения (2) вычислить σ_0, σ_1 и α модели (1).

Если использовать условие, что твердого тела, эпюра напряжения $\sigma_\theta^{res}(r)$ должна быть самоуравновешенной, т.е. должно выполняться условие

$$\int_0^a \sigma_\theta^{res}(r)dr = 0 \qquad (4)$$

то система разностных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_1\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}a\sqrt{-\ln\lambda_2^{(i)}}}{\sqrt{\pi}\tau\operatorname{erf}\left(\dfrac{a\sqrt{-\ln\lambda_2^{(i)}}}{\sqrt{2}\tau}\right)}\right) + \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_1\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}a\sqrt{\lambda_2}\sqrt{-\ln\lambda_2^{(i)}}}{\sqrt{\pi}\tau\operatorname{erf}\left(\dfrac{a\sqrt{-\ln\lambda_2^{(i)}}}{\sqrt{2}\tau}\right)}\right) + \varepsilon_1, \\ y_{k-2}y_k = \lambda_1(y_{k-2} + y_k - \lambda_1^{(i)}) + \lambda_2(y_{k-1}^2 - 2\lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2^{(i)2}) + \eta_k, \\ \eta_k = \varepsilon_k(y_{k-2} - \lambda_1) + 2\lambda_2\varepsilon_{k-1}(\lambda_1^{(i)} - y_{k-1}) + \varepsilon_{k-2}(y_k - \lambda_1), \qquad k = 2, N-1. \end{cases} \qquad (5)$$

$$\lambda_1 = \sigma_0, \lambda_2 = \exp[-2\alpha\tau^2], \sigma_0 = \sigma_1\frac{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(a\sqrt{\alpha})}{2\sqrt{\alpha}a}. \qquad (6)$$

Формулы (6) позволяют по найденным среднеквадратичным оценкам коэффициентов разностного уравнения (5) вычислить параметры σ_0, σ_1 и b модели (1).

При обработке результатов эксперимента при исследовании остаточных напряжений, как правило, бывает, известна величина x_0, при которой $\sigma_\theta^{res}(x_0)dr = 0$. Тогда с учетом этого условия получаем соотношение:

$$\exp[-\alpha x_0^2] = \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(a\sqrt{\alpha})}{2a\sqrt{\alpha}}. \qquad (7)$$

Используя формулу простых итераций, получим численное решение для параметра α:

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + c\left(2a\sqrt{\alpha^{(k)}}e^{-\alpha^{(k)}x_0^2} - \sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(a\sqrt{\alpha^{(k)}}\right)\right), \text{ где } c \approx -0.5 \div (-0.9), \alpha^{(0)} = \frac{1}{2x_0^2}.$$

Параметры σ_0 и σ_1 можно найти по формулам:

$$\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_1 e^{-\alpha x_0^2}, \qquad \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_1\frac{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(a\sqrt{\alpha})}{2\sqrt{\alpha}a}$$

Для вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения (2) и (5), обеспечивающих минимум отклонения модели (1), описывающей компоненту напряжений $\sigma_\theta^{res}\left(r\right)$, от экспериментальных данных, используется обобщенная регрессионная модель вида $\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases}$, где $b = \left(y_0, y_1, y_0 y_2, \ldots, y_{N-3} y_{N-1}\right)^T$, $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)^T$, $\varepsilon = \left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{N-1}\right)^T$, $\eta = \left(\eta_1, ..., \eta_N\right)^T$.

Для выполнения условия $\left\|\varepsilon\right\|^2 = \left\|P_\lambda^{-1} b - P_\lambda^{-1} F\lambda\right\|^2 \to \min$ алгоритм численного метода на основе обобщенной регрессионной модели использует итерационную процедуру уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}_i$ коэффициентов разностного уравнения. Эта процедура может быть описана формулой:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left(F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F\right)^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b, \qquad \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}} = P_{\hat{\lambda}^{(i)}} P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^T, \tag{4}$$

где $i = 0,1,2,...$ – номер итерации. Начальное приближение вектора среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}^{(0)}$ может быть найдено из условия минимизации невязки $\left\|\eta\right\|^2 \to \min$ по формуле $\hat{\lambda}^{(0)} = \left(F^T F\right)^{-1} F^T b$. Достаточные условия сходимости итерационной процедуры рассматриваются и исследуются в [2].

Для проведения численно аналитического исследовании эффективности численного метода определения параметров остаточных напряжений было разработано программное средство на языке C#. Используются результаты эксперимента, взятые из [3].

Был применен используемый в механике метод определения параметров остаточных напряжений, а также три разработанных алгоритма на основе разностных уравнений. Данные приведены в таблице 1.

	σ_0	σ_1	α	s^2
Известный метод	19.3	1019.3	156.25	11.4%
1 алгоритм – нет ограничений	-37.84	880.55	147.74	7.9%
2 алгоритм – условие равновесия	15.20	840.5	150.0	14.8%
3 алгоритм – условие равновесия и граничная точка	18.12	961.29	154.95	9.6%

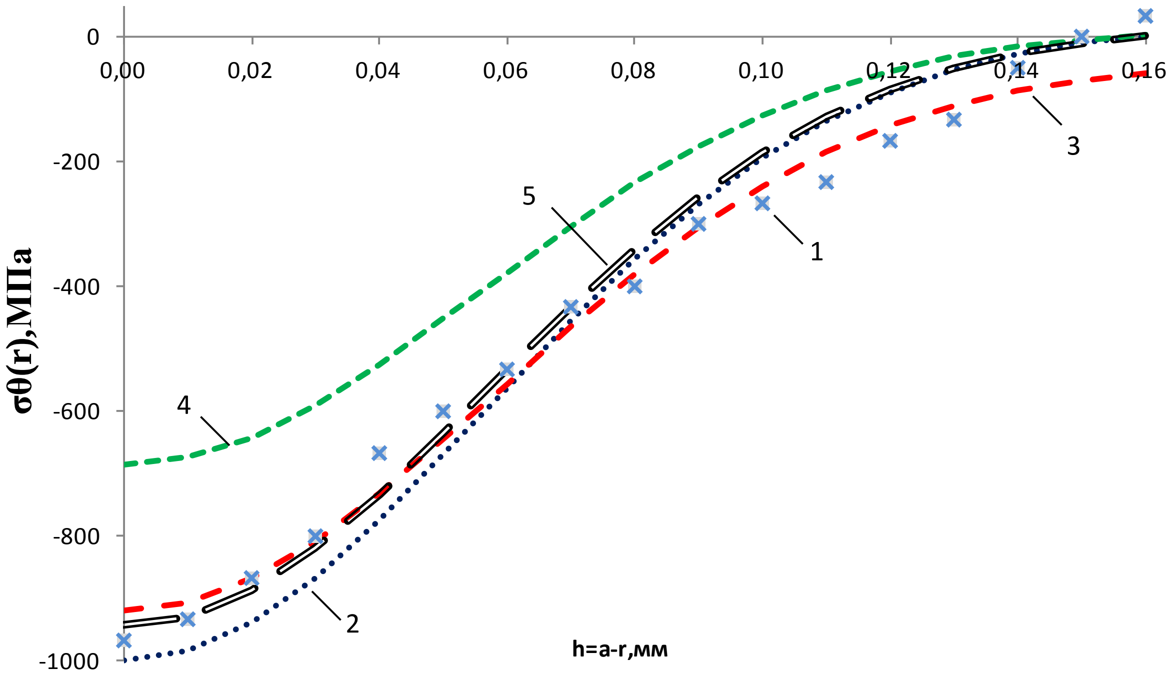

Рис. 1. Эпюры остаточных напряжений $\sigma_{\theta}^{res}(r)$ (сплав ЖС6 КП) в цилиндрическом образце радиуса $a = 3.76$ мм: 1 – экспериментальные данные; 2 – кривая построенная известным методом [1]; 3 – кривая, построенная по 1 алг.; 4 – кривая, построенная по 2 алг.; 5 – кривая, построенная по 3 алг.

Таким образом, применение численного метода, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения, при расчете и исследовании полей остаточных напряжений при поверхностном упрочнении цилиндрических изделий позволяет повысить адекватность модели экспериментальным данным и, тем самым, достоверность оценок параметров напряженно деформируемого состояния.

Литература

1. Радченко, В.П. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях/В. П. Радченко, М.Н. Саушкин М.: Машиностроение-1, 2005. – 226 с.

2. Зотеев, В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений/В. Е. Зотеев.- М.: Машиностроение, 2009.-344 с.

3. Гриневич, Е.В. Исследование полей остаточных напряжений при поверхностном упрочнении цилиндрических изделий // Прочность и долговечность элементов конструкций/Е.В. Гриневич, О.В. Колотникова – Куйбышев: КПтИ, 1983. – С. 88-97.