В.Е. Зотеев, Е.В. Башкинова, И.Н. Дубинина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Самарский государственный технический университет)

В сейсморазведке при математическом моделировании реальных сейсмограмм широко используются различные аппроксимации сейсмических волн, например, импульсы Берлаге, Гельфанда, Пузырева, Риккера [1]. Проблема достоверной оценки параметров сейсмического импульса на основе результатов наблюдений является одной из важнейших проблем, возникающих при мониторинге гидравлического разрыва пласта, который позволяет следить за пространственным развитием зоны трещиноватости. Эта проблема может быть решена методами нелинейного регрессионного анализа [2]. Одним из эффективных методов среднеквадратичного оценивания параметров нелинейных математических моделей по результатам эксперимента является численный метод, в основе которого лежат разностные уравнения, описывающие последовательность результатов наблюдений. Известные соотношения между коэффициентами разностных уравнений и параметрами нелинейной зависимости позволяют свести решение задачи к методам линейной алгебры и линейного регрессионного анализа [3,4]. В работе [4] применение этого подхода проиллюстрировано на примере математического моделирования сейсмической волны в форме импульса Берлаге.

В данной работе рассматривается численный метод оценки параметров математической модели сейсмической волны в форме импульса Пузырева, который описывается функцией вида

$$f(t) = ae^{-\beta t^2}\sin\left(\omega t + \varphi\right), \tag{1}$$

где a, β, ω, φ – параметры математической модели.

Предлагаемый численный метод включает следующие основные шаги:

– построение математической модели сейсмической волны в форме разностных уравнений;

– построение разностных уравнений, описывающих результаты эксперимента;

– формирование элементов обобщенной регрессионной модели;

– среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностных уравнений;

– оценка параметров нелинейной модели (1) на основе коэффициентов разностных уравнений;

– статистический анализ результатов оценивания, в том числе адекватности построенной модели результатам эксперимента.

Математическая модель в форме дискретной функции, описывающей значения $\hat{y}_k = f\left(t_k\right)$, вычисленные в моменты времени $t_k = t_0 + \tau k$, где τ –

период дискретизации, t_0 – момент времени первого наблюдения в выборке результатов эксперимента, имеет вид:

$$y_k = a_0 e^{-\beta\left(2t_0\tau k + \tau^2 k^2\right)} \sin\left(\omega\tau k + \psi_0\right), \tag{2}$$

где $a_0 = ae^{-\beta t_0^2}$, $\psi_0 = \omega t_0 + \varphi$, $k = 0,1,2,...,N-1$.

На основе дискретной функции (2) построена математическая модель импульса Пузырева в форме разностных уравнений вида:

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = \lambda_3; \\ -11\hat{y}_0 + 18\hat{y}_1 - 9\hat{y}_2 + 2\hat{y}_3 = -6\lambda_1 t_0 \hat{y}_0 + 6\tau\lambda_4; \\ \hat{y}_k - 2\hat{y}_{k-1} + \hat{y}_{k-2} = -\lambda_1 t_{k-1}\left(\hat{y}_k - \hat{y}_{k-2}\right) - \lambda_2 \hat{y}_{k-1} - \lambda_1^2 t_{k-1}^2 \hat{y}_{k-1}, \end{cases} \tag{3}$$

в которой коэффициенты в разностных уравнениях (3) связаны с параметрами модели импульса Пузырева (2) соотношениями:

$$\lambda_1 = 2\beta\tau, \quad \lambda_2 = \tau^2\left(2\beta + \omega^2\right), \qquad \lambda_3 = a_0 \sin\psi_0, \qquad \lambda_4 = a_0\omega\cos\psi_0. \tag{4}$$

С учетом формулы $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, $k = 0,1,2,...,N-1$, где y_k – результаты наблюдений, ε_k – случайная величина, описывающая разброс данных наблюдений относительно модели, N – объем выборки результатов наблюдений, систему разностных уравнений (3) можно привести к виду:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_3 + \eta_0; \\ -11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3 = -6\lambda_1 t_0 y_0 + 6\tau\lambda_4 + \eta_1; \\ y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2} = -\lambda_1 t_{k-1}\left(y_k - y_{k-2} + \lambda_1 t_k y_{k-1}\right) - \lambda_2 y_{k-1} + \eta_k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 2,3,...,N-1. \end{cases} \tag{5}$$

где зависимость эквивалентного случайного возмущения η_k от величины случайной помехи в результатах наблюдений ε_k описывается следующими формулами:

$$\begin{cases} \eta_0 = \varepsilon_0; \\ \eta_1 = \varepsilon_0\left(-11 + 6t_0\lambda_1\right) + 18\varepsilon_1 - 9\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3; \\ \eta_k = \varepsilon_{k-2}\left(1 - \lambda_1 t_{k-1}\right) + \varepsilon_{k-1}\left(-2 + \lambda_2 + \lambda_1^2 t_{k-1}^2\right) + \varepsilon_k\left(1 + \lambda_1 t_{k-1}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 2,3,...,N-1. \end{cases} \tag{6}$$

С учетом полученных соотношений построена обобщенная регрессионная модель вида

$$\begin{cases} b = F_\lambda \lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases} \tag{7}$$

в которой $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов системы разностных уравнений (5); $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{N-1})^T$ – вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{N-1})^T$ –вектор эквивалентного случайного возмущения. Элементы вектора b, матрицы регрессоров $F_\lambda = [f_1 \vdots f_2 \vdots f_3 \vdots f_4]$ размера $[N \times 4]$ и матрицы P_λ линейного преобразования вектора случайной помехи ε формируются по формулам (5) и (6) и имеют вид:

$$b = (y_0,\ -11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3,\ y_2 - 2y_1 + y_0, ...,\ y_{N-1} - 2y_{N-2} + y_{N-3})^T,$$

$$f_1 = [0, -6t_0y_0,\ -t_1(y_2 - y_0 + \lambda_1 t_1 y_1), ...,\ -t_{N-2}(y_{N-1} - y_{N-3} + \lambda_1 t_{N-2} y_{N-2})]^T;$$

$$f_2 = [0, 0, -y_1, ..., -y_{N-2}]^T; \quad f_3 = [1, 0, 0, 0, ..., 0]^T; \quad f_4 = [0, 6\tau, 0, 0, ..., 0]^T,$$

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -11 + 6t_0\lambda_1 & 18 & -9 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 - \lambda_1 t_1 & -2 + \lambda_2 + \lambda_1^2 t_1^2 & 1 + \lambda_1 t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - \lambda_1 t_{N-2} & -2 + \lambda_2 + \lambda_1^2 t_{N-2}^2 & 1 + \lambda_1 t_{N-2} \end{pmatrix}.$$

Оценки коэффициентов $\hat{\lambda}_j$, $j = \overline{1,4}$, находятся из условия минимизации среднеквадратичного отклонения результатов вычислений $\hat{y}_k$ по модели (2) от результатов эксперимента y_k, $k = 0,1,2,..., N-1$: $\|\varepsilon\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 \to \min$. Разработанная итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностных уравнений (5) описывается формулой

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left(F_{\hat{\lambda}^{(i)}}^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F_{\hat{\lambda}^{(i)}}\right)^{-1} F_{\hat{\lambda}^{(i)}}^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b_{\hat{\lambda}^{(i)}}, \quad i = 0,1,2,... \tag{8}$$

где невырожденная матрица $\Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}} = P_{\hat{\lambda}^{(i)}} P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^T$ имеет размер $[N \times N]$.

Начальные приближения $\lambda_1^{(0)}$ и $\lambda_2^{(0)}$ можно найти из условия минимизации невязки: $\|\eta\|^2 = \|b - G\lambda\|^2 \to \min$, по формуле

$$\hat{\lambda}^{(0)} = \left(G^T G\right)^{-1} G^T b, \tag{9}$$

где матрица G размера $[N \times 5]$ имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6t_0y_0 & 0 & 0 & 0 & 6\tau \\ -t_1(y_2 - y_0 + \lambda_1 t_1 y_1) & -y_1 & -t_1^2 y_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -t_{N-2}(y_{N-1} - y_{N-3} + \lambda_1 t_{N-2} y_{N-2}) & -y_{N-2} & -t_{N-1}^2 y_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом найденных среднеквадратичных оценок коэффициентов $\hat{\lambda}_j$ параметры импульса Пузырева вычисляются по формулам

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\lambda}_1}{2\tau}, \qquad \hat{\omega} = \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_2 - \tau\hat{\lambda}_1}}{\tau}, \qquad \hat{a}_0 = \sqrt{\hat{\lambda}_3^2 + \frac{\hat{\lambda}_4^2}{\hat{\omega}^2}}, \qquad \hat{\psi}_0 = arctg\left(\frac{\hat{\lambda}_3\hat{\omega}}{\hat{\lambda}_4}\right). \qquad (10)$$

Численно-аналитические исследования на основе имитационного моделирования показали высокую помехозащищенность разработанного численного метода оценки параметров сейсмической волны в форме импульса Пузырева, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений.

Литература

1. Рабинович Е.В., Ганчин К.С., Пупышев И.М., Шефель Г.С. Модель сейсмического импульса, возникающего при гидравлическом разрыве пласта // Математические структуры и моделирование, 2014. №4(32). С. 105-111.
2. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. – 304 с.
3. Зотеев В.Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // Вест. Сам. гос. тех. ун-та: Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22, № 4. С. 669-701.
4. Зотеев В.Е., Дубинина И.Н. Математическое моделирование сейсмической волны в форме импульса Берлаге на основе разностных уравнений / Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (27-30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 1. Самара: СамГТУ, 2019. С. 304-308.

Э.А. Кильметов, А.И. Заико

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ИНВЕРТОРА ТОКА И ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ ЕГО МОДЕЛИ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

В настоящее время для нагрева различных металлов широко применяются высокочастотные преобразователи постоянного тока, выполненные на основе мостовой схемы параллельного инвертора [1]. Благодаря коммутации ключей силовой части, производимой в моменты перехода тока через нулевое значение, такие устройства обладают пониженными динамическими потерями и малым уровнем помех, генерируемых в питающую сеть. Принцип действия и схемотехника параллельных инверторов рассмотрены в литературе [2].

При практической реализации устройства зачастую возникают проблемы с выбором оптимальных значений параметров компонентов инвертора и силового колебательного контура. Обеспечение устойчивой работы преобразователя