В.Н. Тарасов

МОДЕЛЬ ЗАДЕРЖКИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ С ОБЫЧНЫМИ ЭРЛАНГОВСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

(Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики)

Введение. Результаты массового обслуживания востребованы при моделировании различных систем передачи данных. В связи с тем, в теории систем массового обслуживания (СМО) G/G/1 с произвольными распределениями интервалов входного потока требований и времени обслуживания нельзя получить решения для общего случая, то их исследования проводят с использованием частных законов распределений.

В работе рассматривается СМО $E_2/E_2/1$, образованная двумя потоками, интервалы в которых описываются функциями плотности Эрланга второго порядка. Дело в том, что различают обычный закон распределения Эрланга с функцией плотности $f_\lambda(t)=\lambda^2 te^{-\lambda t}$, как частный случай Гамма распределения и нормированный закон распределения Эрланга с функцией плотности $f_\lambda(t)=4\lambda^2 te^{-2\lambda t}$. Результаты исследования СМО $E_2/E_2/1$ с нормированными законами распределения Эрланга приведены в [1]. Здесь предлагаются результаты исследования для этой системы с обычными распределениями Эрланга второго порядка. Далее для вывода решения для среднего времени ожидания в очереди, как главной характеристики системы, использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов теории вероятностей.

Рассмотрим различия между названными распределениями Эрланга. Для этого в таблицах 1 и 2 приведем их числовые характеристики: первый начальный момент $\overline{\tau}_\lambda$, второй начальный момент $\overline{\tau_\lambda^2}$, квадрат коэффициента вариации c_λ^2, а также параметр распределений λ.

Как было отмечено выше, обычное распределение Эрланга является частным случаем Гамма распределения с функцией плотности $f(t)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{-\alpha}t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$, где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, равная $\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ для любого вещественного числа $z>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ при $\lambda=1/\beta, k=\alpha=2$. Нормированное распределение Эрланга получено из обычного таким образом, чтобы математическое ожидание не зависело от порядка распределения k, следовательно, они еще отличаются и числовыми характеристиками [2].

Таблица 1. Числовые характеристики распределений

Распределение	$\overline{\tau}_\lambda$	$\overline{\tau_\lambda^2}$	c_λ^2
E_2 обычное	$2/\lambda$	$6/\lambda^2$	1/2
E_2 нормированное	$1/\lambda$	$3/(2\lambda^2)$	1/2

Таблица 2. Параметр распределения, полученный методом моментов

Распределение	Плотность $f_\lambda(t)$	Параметр λ
E_2 обычное	$\lambda^2 te^{-\lambda t}$	$\lambda = 2/\overline{\tau}_\lambda$
E_2 нормированное	$4\lambda^2 te^{-2\lambda t}$	$\lambda = 1/\overline{\tau}_\lambda$

Вывод решения для среднего времени ожидания в очереди для системы $E_2/E_2/1$. Рассмотрим СМО) на вход которой поступают требования, интервалы между которыми распределены по закону E_2 с функцией плотности

$$a(t) = \lambda^2 te^{-\lambda t} \tag{1}$$

Время обслуживания имеет функцию плотности:

$$b(t) = \mu^2 te^{-\mu t} . \tag{2}$$

Преобразования Лапласа функций (3) и (4) будут соответственно:

$$A^*(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^2; \; B^*(s) = \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^2.$$

Тогда спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для системы $E_2/E_2/1$ $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\mu + s}\right)^2 - 1 = \frac{\lambda^2\mu^2 - (\lambda - s)^2(\mu + s)^2}{(\lambda - s)^2(\mu + s)^2} = \frac{-s(s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(\lambda - s)^2(\mu + s)^2}.$$

Здесь коэффициенты кубического многочлена, собранные с помощью символьных операций Mathcad определяются следующими выражениями через параметры распределений (1) и (2):

$$c_0 = -2\lambda\mu(\lambda - \mu), \; c_1 = -(\lambda^2 - 4\lambda\mu + \mu^2), \; c_2 = -2(\mu - \lambda).$$

Исследование кубического уравнения, полученного из числителя разложения $s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0 = 0$ показывает, что оно имеет два действительных отрицательных корня и один положительный, т.к. в случае стабильной системы $\lambda<\mu$ т.е. $(\mu\text{-}\lambda) > 0$. Обозначим их для удобства через $-s_1$, $-s_2$ и s_3:

Теперь, с учетом условий метода спектрального разложения строим рациональные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$: $\psi_+(s) = s(s+s_1)(s+s_2)/(\mu+s)^2$, т.к. нули многочлена (4): $s=0$, $s=-s_1$, $s=-s_2$ и двукратный полюс $s=-\mu$ лежат в области $\mathrm{Re}(s)\le 0$, $\psi_-(s)=-\dfrac{(\lambda-s)^2}{(s-s_3)}$, т.к. ее нули и полюсы лежат в области $\mathrm{Re}(s)>D$. Далее по методике спектрального разложения найдем константу *K*: $K=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\psi_+(s)}{s}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{(s+s_1)(s+s_2)}{(s+2\mu)^2}=\dfrac{s_1 s_2}{\mu^2}$, где s_1, s_2 – абсолютные значения отрицательных корней $-s_1, -s_2$. Постоянная *K* определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной.

Отсюда преобразование Лапласа искомой функции плотности времени ожидания $W^*(s)=s\cdot\dfrac{K}{\psi_+(s)}$ будет равно $W^*(s)=\dfrac{s_1 s_2(s+\mu)^2}{\mu^2(s+s_1)(s+s_2)}$.

Заметим, что для системы $E_2/E_2/1$, образованной нормированными законами распределений Эрланга это преобразование также отличается $W^*(s)=\dfrac{s_1 s_2(2\mu+s)^2}{4\mu^2 s(s+s_1)(s+s_2)}$ [1]. Таким образом, фактически две системы $E_2/E_2/1$, образованные нормированными и обычными законами распределений Эрланга должны были бы различаться, тем более с учетом данных таблиц 1 и 2.

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$: $-\dfrac{dW^*(s)}{ds}\Big|_{s=0}=\dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{s_2}-\dfrac{1}{\mu}$.

Окончательно, среднее время ожидания для системы $HE_2/E_2/1$

$$\bar{W}=1/s_1+1/s_2-1/\mu. \tag{3}$$

Результаты вычислительных экспериментов. Ниже в табл.3 приведены данные расчетов для системы $E_2/E_2/1$, образованной обычными распределениями Эрланга для различных случаев нагрузки $\rho=0{,}1;\,0{,}3;\,0{,}5;\,0{,}7;\,0{,}9$. Для сравнения в правой колонке приведены данные для системы $E_2/E_2/1$, образованной нормированными распределениями Эрланга. Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов $\rho=\bar{\tau}_\mu/\bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в табл. 3 проведены для удобства для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu=1$.

Таблица 3. Результаты вычислительных экспериментов в Mathcad

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	λ	для системы с обычными распределениями Эрланга	для системы с нормированными распределениями Эрланга
0,1	0,2	0,017	0,017
0,3	0,6	0,131	0,131
0,5	1,0	0,390	0,390
0,7	1,4	1,039	1,039
0,9	1,8	4,359	4,359

Заключение. Полученные результаты приводят к следующим выводам.

Несмотря на большие различия между рассмотренными распределениями Эрланга, показанные в таблицах 1 и 2, а также различие между преобразованиями Лапласа функции плотности времени ожидания, данные таблицы 3 полностью подтверждают совпадение главной характеристики СМО – среднего времени ожидания требований в очереди с соответствующими данными для СМО $E_2/E_2/1$ с нормированными распределениями Эрланга. Похожие исследования приведены в [3,4].

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы и с его помощью выведена расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в замкнутой форме.

Литература

1. Тарасов В.Н. и др. Анализ новой системы массового обслуживания $E_2/E_2/1$ с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Э.Г. Ахметшина // Инфокоммуникационные технологии. - 2018. - №3. - С.277-282.

2. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. - СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.

3. Тарасов В.Н. и др. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров / В.Н. Тарасов, Л.В. Липилина, Н.Ф. Бахарева // Информационные технологии. - 2016. - Т. 22. - № 2. - С.121-126.

4. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, Алгоритмы, Программы. - Оренбург, 2005. - 183 с.