К 70-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА С.А. ПРОХОРОВА

С.А. Прохоров, И.М. Куликовских

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва)

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия [1].

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов.

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которые невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Theta},t)$, с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$ □□ $\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta})$, используемое для построения искомой модели объекта;
5. анализирует полученные результаты;
6. если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3,4 (точность полученных результатов

неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\overline{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров $\overline{\Theta}$ с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;
5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой - зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно- измерительной и вычислительной техники.

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

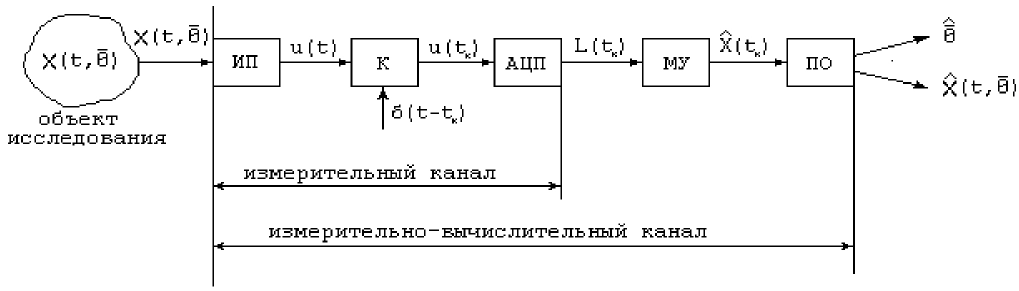

Рис.1. Измерительно-вычислительный канал

На рис. 1 приняты следующие обозначения.

- ИП - измерительный преобразователь (датчик);
- К - коммутатор;
- АЦП – аналого-цифровой преобразователь:
- МУ - масштабирующее устройство;
- ПО - процессор обработки.

Исследуемый сигнал, подвергнутый аналого-цифровому преобразованию, представляет собой временную последовательность (временной ряд), члены которой отстоят друг от друга на величину интервала дискретизации Δt_0.

Введем следующие обозначения: X(t) - случайный процесс; $x_j(t)$ - j-я реализация процесса X(t); $x_j(t_i)$ - мгновенное значение процесса X(t), соответствующее значению j-й реализации в i-й момент времени.

Совокупность мгновенных значений, соответствующих значениям различных реализаций в один и тот же момент времени t_i, назовем i-й последовательностью процесса X(t) и обозначим $x(t_i)$.

Отсюда следует, что в качестве аргументов случайного процесса выступают **время и номер реализации**. Хотя между этими координатами имеется принципиальное различие, заключающееся в том, что время может быть как непрерывным, так и дискретным, а номер реализации принимает только целочисленные значения, в теоретико-вероятностном плане они равноправны.

Следовательно, возможны два подхода к изучению свойств случайных процессов: первый - основан на анализе множества реализаций и второй - оперирует множеством последовательностей.

Для каждого случайного процесса могут быть установлены область определения T*N и область существования X: $t \in T$, $j \in N$ и $x \in X$. При этом T и X могут быть непрерывными, дискретными или смешанными, N - только дискретной. В процессе измерения интерес могут представлять как мгновенные значения $x_j(t_i)$, так и сами моменты измерения t_{ji} - потоки событий.

Выделим восемь классов важнейших процессов, которые встречаются на практике при решении самых разнообразных задач [2]:

1. детерминированные процессы - φ(t);

2. случайные процессы; - X(t);

3 детерминированные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами T = const - φ(iT);

4. случайные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами Δt_0 = const - $X_j(i\Delta t_0)$, где j - номер реализации;

5. детерминированные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами t_i = random - $\varphi(t_i)$;

6. случайные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами t_i = random - $X_j(t_i)$;

7. регулярный поток событий - $\delta(t\text{-}Ti) = \begin{cases} 1, \text{если } t = T_i \\ 0, \text{если } t \neq T_i \end{cases}$;

8. случайный поток событий - $\delta(t-t_i) = \begin{cases} 1, \text{если } t = t_i \\ 0, \text{если } t \neq t_i \end{cases}$, где t_i = random.

Различные комбинации этих процессов дает возможность построить более сложные модели процессов, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. 2).

Рис. 2. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

Следует подчеркнуть аналогию вероятностных характеристик, предназначенных для описания случайных процессов, с характеристиками, описывающими детерминированные процессы:

- математического ожидания m_x со средним значением $x_{ср}$;
- среднеквадратического отклонения σ_x с действующим значением x;
- пикфактора η с коэффициентом амплитуды k_a;
- коэффициента формы случайного процесса $k_ф$ с коэффициентом формы детерминированного процесса $k_ф$ и т. д.

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.

На основании общей теории статистических измерений [1] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d\to\infty} S_d\, g[x_j(t)], \qquad (2)$$

где Θ - измеряемая вероятностная характеристика; S_d - оператор идеального усреднения; d - параметр усреднения (время T, совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN); g - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ; $x_j(t)$ - j-ая реализация случайного процесса.

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения), полученных с использованием

измерительно-вычислительного канала. Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки** [1]:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d\, g[x_j(t_i)]\,(j = 1,2,...N\ ;\ i = 1,2,...M), \qquad (3)$$

где $x_j(t_i)$ – значение j-ой реализации случайного процесса в точке t_i.

Выражение (3) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} g[x_j(t_i)]; \qquad (4)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} g[x_j(t_i)]; \qquad (5)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} g[x_j(t_i)]. \qquad (6)$$

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

Прямым методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (1).

Косвенным методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\hat{\Theta}[z(t)] = F\left\{S_{d1} g_x \left[x_j(t_i^{(x)})\right], S_{d2} g_y \left[y_l(t_i^{(y)})\right] ..\right\}, \qquad (7)$$

где $F\{\ \}$ представляет собой функциональное преобразование полученных оценок $\hat{\Theta}[x(t)]$и $\hat{\Theta}[y(t)]$ и т.д. с целью получения оценки $\hat{\Theta}[z(t)]$.

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\Xi_i \left\{S_{d1} g^{(1)} \left[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})\right], ... S_{dm} g^{(m)} \left[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})\right]\right\} = 0 \qquad (8)$$

$$\Xi_i \left\{F^{(1)} \left\{S_{d1} g^{(1)} \left[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})\right]\right\}, ... F^{(m)} \left\{S_{dm} g \left[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})\right]\right\}\right\} = 0 . \qquad (9)$$

Следует отметить, что выражения (4) – (9) позволяют получить оценки как в результате измерения значений реализации случайного процесса, так и в результате обработки данных, записанных в память ЭВМ.

Первый подход будем называть **статистическими измерениями**, второй - **статистической обработкой**.

Под **статистическими измерениями** будем понимать измерение вероятностных характеристик случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени.

Под **статистической обработкой** будем понимать оценку вероятностных характеристик случайных процессов на ЭВМ, записанных на промежуточный носитель, с задержкой в обработке информации.

Выделяют **первичную** и **вторичную** статистическую обработку (измерения). Под **первичной** статистической обработкой (измерения) будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** - построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик.

Если не принимать во внимание фактор реального времени или задержку в обработке информации, то с точки зрения получения оценки по одному и тому же объему данных два подхода с методической точки зрения не отличаются друг от друга. Существенное отличие заключается в том, что работа в реальном масштабе времени накладывает жесткие ограничения на быстродействие технических средств. Это заставляет, в свою очередь, при статистических измерениях применять упрощенные алгоритмы оценивания интересующих параметров, обладающих значительным быстродействием. Кроме того, работа в реальном масштабе времени не дает возможность получить требуемые оценки, воспользовавшись другими алгоритмами, так как данную реализацию повторить нельзя - она **случайна.** Требуемую оценку необходимо получить за время, отводимое на эксперимент. Реализация же, записанная на промежуточный носитель или в память, становится **детерминированной**, и с ней можно экспериментировать сколь угодно долго. Это важное преимущество статистической обработки позволяет: с целью повышения точности оценивания осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации; выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию; с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

Результаты измерений могут формироваться с использованием различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций, одних и тех же временных интервалов различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называются процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов: стационарные эргодические; стационарные неэргодические; нестационарные эргодические; нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Решая разнообразные задачи научных исследований, исследователь на основании физических представлений и задачи исследований определяет составляющие вектора параметров случайного процесса $\overline{\Theta}$, дающие его исчерпывающее описание.

Так, например, если модель исследуемого процесса задать в виде аддитивно-мультипликативной модели [1, 2]

$$X(t) = \varphi(t) + \vartheta(t)X^{\circ}(t), \quad (1)$$

где $\varphi(t), \vartheta(t)$ - детерминированные функции времени, $X^{\circ}(t)$ - центрированный стационарный эргодический процесс, - то в зависимости от сочетания составляющих этой модели и значения ее параметров получим следующие частные модели (см. таблицу 1).

Таблица 1. Некоторые модели исследуемых процессов

$\varphi(t)$	$\vartheta(t))$	$X(t) = \varphi(t) + \vartheta(t)X^{\circ}(t)$	Название процесса
$\varphi(t)$	0	$X(t) = \varphi(t)$	детерминированный
m_x	1	$X(t) = m_x + X^{\circ}(t)$	стационарный
$\varphi(t)$	1	$X(t) = \varphi(t) + X^{\circ}(t)$	нестац. по мат. ожиданию
0	$\vartheta(t)$	$X(t) = \vartheta(t)X^{\circ}(t)$	нестац. по дисперсии
$\varphi(t)$	$\vartheta(t)$	$X(t) = \varphi(t) + \vartheta(t)X^{\circ}(t)$	нестац. по мат. ожиданию и дисперсии

Отсюда следует, что необходимо определить тренд процесса - $\varphi(t)$, среднеквадратическое отклонение - $\vartheta(t)$ и характеристики $X^{\circ}(t)$.

Приведенные модели случайных процессов не являются исчерпывающими, но часто являются достаточными при решении разнообразных прикладных задач в различных предметных областях.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных. Следует отметить, что исследователя в первую очередь интересует возможность оценки вероятностной характеристики по одной реализации.

Это возможно только для стационарных эргодических процессов с помощью выражения (3) и для нестационарных эргодических процессов (в частности, для аддидивно-мультипликативной модели (1)) с использованием оператора текущего сглаживания или с использованием аппроксимативного подхода в ортогональных базисах [1, 3, 7].

При исследовании сложных объектов проводят, как правило, большое число испытаний. При этом происходит и накопление большого числа массивов числовых и функциональных характеристик, что в значительной степени затрудняет хранение, анализ и интерпретацию полученных результатов.

Один из возможных способов решения этой проблемы заключается в применении аппроксимативных методов, суть которых заключается в нахождении подходящего аналитического выражения $\varphi(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n)$ с неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$, удовлетворяющими заданному критерию оптимальности, которое бы описывало найденные экспериментальные результаты. Аппроксимативный подход оказывается эффективным и при обработке результатов имитационного моделирования (вычислительного эксперимента) [3].

Основными преимуществами аппроксимативного подхода являются:

- наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;
- возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований, с целью получения обобщенных вероятностных характеристик;
- сокращения объёма хранимых данных.

К недостаткам метода следует отнести наличие методической погрешности, возникающей при замене полученных экспериментальных данных или другой функции более простым аналитическим выражением.

В общем случае, для реализации аппроксимативного подхода необходимо выполнить следующие этапы:

1. на основании анализа решаемой задачи определить требования к реализации входного процесса (последовательности): длине реализации (объёму выборки), интервалу дискретизации, числу уровней квантования и т.д. с целью получения оценок вероятностных характеристик для последующей аппроксимации с допустимыми погрешностями;
2. по измеренным значениям входного процесса (последовательности) оценить значения функциональной характеристики в заданных точках;
3. проанализировать полученный результат и выбрать подходящее аналитическое выражение, по возможности, с минимальным количеством неиз-

вестных параметров, подлежащих определению, так как количество параметров в значительной мере определяет сложность аппаратуры или вычислений, его сходимость и устойчивость;

4. выбрать и обосновать критерий приближения;
5. составить и решить систему уравнений относительно неизвестных параметров аналитического выражения и определить погрешность приближения;
6. разработать структурную схему аппаратуры (программы) и рассчитать её параметры;
7. изготовить и отладить аппаратуру (написать и отладить программное обеспечение);
8. провести экспериментальные исследования (обработать полученные экспериментальные данные).
9. аналитически определить все интересующие обобщённые вероятностные характеристики.

Следует отметить, что определять аналитические выражения возможно как при анализе стационарных, так и нестационарных процессов. В первом случае анализируются функциональные характеристики, во втором - и моментные, являющиеся функциями времени. Определять параметры аналитических выражений возможно как с помощью **статистических измерений**, так и в результате **статистической обработки**.

Под **статистическими измерениями с аппроксимацией** будем понимать измерение (оценку) параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени. Самыми популярными среди таких технических средств являются **коррелометры** и **спектроанализаторы** с аппроксимацией параметрическими моделями. В литературе их часто называют **статистическими анализаторами**. Статистические анализаторы, как правило, специализированные аппаратно-программные средства, определяющие **параметры реального процесса** (см. рис. 3).

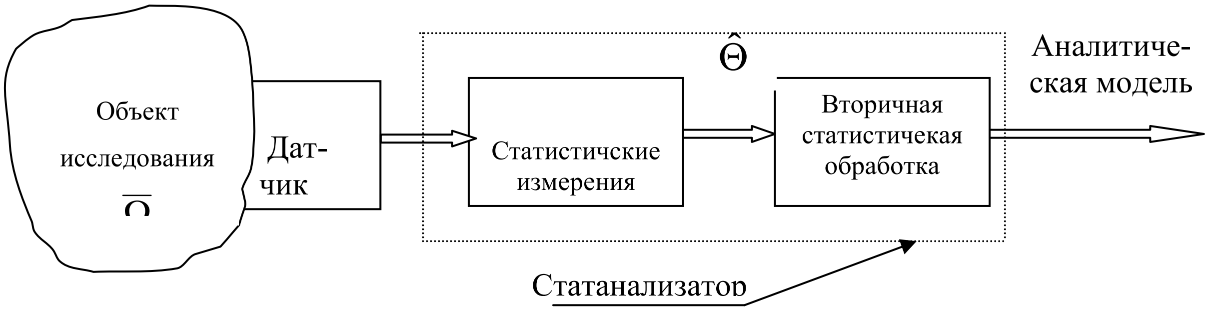

Рис. 3. Аппаратно-программные средства статистических измерений и обработки информации

Под статистической обработкой с аппроксимацией будем понимать оценку параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью ЭВМ, записанных на промежуточный носитель или память. При этом происходит временная задержка в обработке информации.

Аппроксимативные методы, основанные на применении ЭВМ, можно отнести к методам **вторичной обработки** информации. Однако, воспользовавшись принципом аппаратно-программного дуализма, возможно алгоритмы, положенные в основу работы статистических анализаторов, реализовать и чисто программным способом.

Следующим шагом является построение математической модели анализируемой вероятностной функциональной характеристики в виде параметрической модели. Следует отметить, что модель должна сохранять основные свойства анализируемой характеристики, особенно условие нормировки [1, 7]. Учитывая большое разнообразие функциональных вероятностных характеристик наиболее целесообразно искать их модель в виде ряда в том или ином ортогональном базисе $\psi_k(x,\gamma)$ с весом $\mu(x)$, где γ – параметр масштаба [7].

Представив модель вероятностной функциональной характеристики в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \, \psi_k(x,\gamma), \tag{10}$$

$$\int_a^b \psi_k(x,\gamma)\psi_n(x,\gamma)\mu(x)\,dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, \text{если } k = n; \\ 0, \text{если } k \neq n. \end{cases}$$

Для минимизации квадратической погрешности приближения

$$\Delta_m(\gamma) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m} \beta_k\psi_k(x,\gamma)\right]^2 \mu(x)dx \to min \tag{11}$$

лишь коэффициенты разложения – коэффициенты Фурье с учетом свойств ортогональных функций автоматически определяются выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_a^b f(x)\psi_k(x,\gamma)\mu(x)\,dx. \tag{12}$$

Для определения же остальных параметров модели необходимо решать дополнительные задачи.

Таким образом, для построения ортогональной модели необходимо:

1. выбрать ортогональный базис – $\psi_k(x,\gamma)$;
2. определить численное значение параметра масштаба γ;
3. определить коэффициенты разложения $\beta_k(\gamma)$;
4. определить количество членов разложения ряда (10) m;
5. определить корректирующие коэффициенты, обеспечивающие выполнения моделью основных свойств вероятностной функциональной характеристики, как правило, условия нормировки [1, 3-7].

Графические интерпретации аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов представлены ниже [4].

Преобразование процесса во временной ряд и получение оценки вероятностной характеристики случайного процесса в соответствии с выражением (3)

$$\left\{x_j(t)\right\}_{j=0\ldots N}^{t\in[0,Tj]} \Longrightarrow \left\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\right\}_{j=0\ldots N}^{i=1,M\,j} \Longrightarrow \hat{\Theta}\left[X(t)\right] = S_d\, g\left[\left\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\right\}_{j=0\ldots N}^{i=1\ldots M\,j}\right]$$

где $\left\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\right\}_{j=0\ldots N}^{i=1,M\,j}$ - временной ряд;

Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ случайных процессов

$$\hat{\Theta}\left[X(t)\right] = \sigma_x^2\, \hat{\rho}_x(\tau)$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{\rho}_x(\tau) \arrow[r, Rightarrow] & \hat{\rho}_{ax}(\tau, \overline{\beta}_m) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \hat{S}_{ax}(\omega, \overline{\beta}_m) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \hat{F}_{ax}(\omega, \overline{\beta}_m) \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \tau_k^{(n)}, \mu_k & \Delta\omega_э, \omega_э, S_x(\omega_э) & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2)
\end{tikzcd}$$

Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов

$$\hat{\Theta}\left[X(t), Y(t)\right] = \sigma_{xy}^2\, \hat{\rho}_{xy}(\tau)$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{\rho}_{xy}(\tau) \arrow[r, Rightarrow] & \hat{\rho}_{axy}(\tau, \overline{\beta}_m) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \hat{S}_a(\omega, \overline{\beta}_m) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \hat{F}_a(\omega, \overline{\beta}_m) \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \tau_k^{(n)}, \mu_k & \Delta\omega_э, \omega_э, S_x(\omega_э) & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2)
\end{tikzcd}$$

В области цифровой фильтрации возможность разложения функциональной характеристики в ряд по базисным функциям Лагерра согласно выражению (10) нашла наиболее широкое применение. В частности, непрерывные и дискретные фильтры Лагерра используются при решении задач идентификации, фильтрации и анализе динамических систем, так как позволяют представить длинную временную последовательность в виде более короткого спектра разложения. При описании нестационарных систем и систем с запаздыванием данный результат может быть улучшен за счет обобщения фильтров Лагерра и включения дополнительного параметра [17]. Данные обобщенные модели получили название обобщенных фильтров Лагерра в непрерывной области и фильтров Мейкснера в дискретной области.

Особый интерес к данной системе фильтров связан с наличием существованием аналитического решения задачи оптимизации полюсов фильтра, что позволяет понизить его порядок. При этом заметим, что значение полюса напрямую связано с величиной параметром масштаба, предлагаемого в рамках аппроксимативного подхода.

Впервые аналитическое решение оптимизации полюса фильтра Лагерра было предложено в работе Дж. Кловса [18] (1965), который показал, что решение достигается приравниванием как минимум одного из пары заданных коэффициентов (12) к нулю. Данная работа послужила фундаментом для большого числа исследований, направленных на улучшение данного результата. В частности, работы [19, 20, 21] провели исследования знака произведения двух коэффициентов для исключения неподходящего коэффициента Лагерра, что позволяло снизить вычислительную сложность на решение задачи оптимизации в два раза. Важно заметить, что независимо от результатов, представленных в [18-21], авторы [8] (1974) получили идентичный результат, указав на однозначность коэффициента, ведущего к оптимальному значению полюса.

Тем не менее, хотя многие исследования указывали на уникальность подходящего коэффициента Лагерра для решения задачи оптимизации полюса как частного случая, но при этом не приводилось убедительных теоретических обоснований и существующие решения ограничивались частными случаев – фильтрами Лагерра. Таким образом, в работах [11, 15, 16] расширяются результаты предыдущих исследований, и предлагается строгое теоретическое обоснование единственности коэффициента, ведущего к оптимальному значению полюса обобщенных фильтров Лагерра как в непрерывной области [11], так и в дискретной [15, 16]. Основу данного обоснования составляет следующая теорема.

Введем область полюсов дискретного фильтра $\Xi = \left\{\xi : \xi \in |z| < 1\right\}$. Тогда, имея область полюсов непрерывного фильтра $\Gamma=\{\gamma>0: \gamma\in \mathbf{R}\}$, зададим композицию областей определения полюсов в виде $\Phi \in \{\Gamma, \Xi\}$. Приведем теорему, сформулированную и доказанную в работе [16] на основе определений (11) и (12) для системы фильтров с дополнительным параметром $\alpha > -1$.

Теорема.

При любом $m\in \mathbf{N}$, $\alpha \in A$, где $A=\{\alpha>-1: \alpha\in \mathbf{R}\}$, $\phi\in\Phi$ каждое решение $\phi^* = \phi^*(\alpha) \in \Phi$ при условии $\beta_k^{\alpha+1}(\phi) = \beta_k^{\alpha}(\phi) \pm \beta_{k+1}^{\alpha}(\phi)$ может быть представлено в виде $\phi^* = \arg\min_{\phi\in\Phi} \Delta_m^{\alpha}(\phi)$ или $\phi^* = \arg\max_{\phi\in\Phi} \Delta_m^{\alpha}(\phi)$. При этом в первом случае $\beta_{m+1}^{\alpha}(\phi^*) = 0$, а во втором случае $\beta_m^{\alpha}(\phi^*) = 0$.

В докладе рассматриваются:

1. метод аппаратурной аппроксимации корреляционной функции стационарных случайных процессов параметрическими моделями, на основе которого синтезированы специализированные устройства [6, 7];

2. методы и алгоритмы повышения точности аппроксимации корреляционно-спектральных характеристик [1, 3, 4, 8-11], в различных ортогональных базисах с учетом временных и частотных свойств ортогональных функций и полиномов [1, 4, 12];

3. принципы построения и структуры автоматизированных систем для анализа различных функциональных характеристик случайных процессов в ортогональных базисах [1, 14];

4. новые результаты в области ортогональных моделей, относящиеся, в частности, к решению задачи оптимизации полюсов обобщенных фильтров Лагерра и фильтров Мейкснера, представленных в работах [11, 15, 16].

Литература

1. Прикладной анализ случайных процессов/Под ред. С.А. Прохорова. Самара: СНЦ РАН, 2007. – 582 с.

2. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов. Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. – 209 с.: ил.

3. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп. Самара: СНЦ РАН, 2001. – 380 с.: ил.

4. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум. Самара: СНЦ РАН, 2008. – 301 с.

5. .Прохоров С.А., Куликовских И.М. Основные ортогональные функции и их приложения. Часть 1. Ортогональные функции экспоненциального типа. Самара, СНЦ РАН, 2013. – 200 с.

6. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Об одном методе аппаратурной аппроксимации корреляционной функции стационарных процессов//ИВУЗов СССР, Радиофизика. – 1973. – XYI(11). – С. 1770-1771.

7 Volkov I.I., Motov V.V., Prokhorov S.A. A certain method of equipment approximation of the correlation functions of stationary random processes// Radiophysics and Quantum Electronics. 1975. – 16(11). – pp. 1370-1371.

8. Волков И.И., Прохоров С.А. Способ повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра// ИВУЗов СССР, Приборостроение. – 1974. – № 7. – С. 68-72.

9. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Алгоритм оценки параметра масштаба ортогональных функций, обеспечивающий минимум-миниморум квадратической погрешности аппроксимации//Труды Всероссийской конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании». – Самара, СГТУ, 2008. – С. 10-12.

10. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Сонина-Лагерра//Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2008. – №2 (17). – С. 185-191.

11. Prokhorov, S.A., Kulikovskikh, I.M. Unique condition for generalized Laguerre functions to solve pole position problem//Signal Processing. – 2015. – 108. – pp. 25-29.

12. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра//Вестник Самарского государственного технического

университета. Серия «Физико-математические науки». – 2007. – №2 (15). – С. 123-127.

13. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей//Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2009. – 2(19). – С. 140-146.

14. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Создание комплекса программ на основе пространственной схемы взаимодействия объектов//Программные продукты и системы. – 2012. – №3. – С. 5-8.

15. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Условие оптимальности фильтров Мейкснера//Журнал радиоэлектроники. – 2015. – № 4.

16. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Pole position problem for Meixner filters//Signal Processing. – 2016. – 120. – pp. 8–12.

17. den Brinker, A.C. Meixner-like functions having a rational z-transform//International Journal of Circuit Theory and Applications. – 1995. – 23. – pp. 237-246.

18. Clowes G. Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal Laguerre functions//IEEE Trans. Automatic Control. – 1965. – 10. – pp. 487-489.

19. King J.J., O'Canainn T. Optimum pole positions for Laguerre-function models//Electronics Letters. – 1969. – 5. – pp. 601-602.

20. King R.E., Paraskevopoulos P.N. Digital Laguerre filters//Int. J. Circuit Theory and Appl. – 1977. – 5(1). – pp. 81-91.

21. Wang L., Cluett W.R. Optimal choice of time-scaling factor for linear system approximations using Laguerre models//IEEE Trans. Automatic Control. – 1994. – 39. – pp. 1463-1467.

Э.И. Коломиец

К ЮБИЛЕЮ ПРОФЕССОРА С.А. ПРОХОРОВА

(Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева)

Прохоров С.А. родился 08.03.1947 г. в пос. Суслонгер Звениговского района Марийской АССР в семье военнослужащего [1].

В 1954 году пошел в школу в городе Петропавловск-Камчатский. В связи с многочисленными переездами семьи по месту службы отца продолжил обучение в городах Москва, Саратов, Воронеж, Куйбышев.

В 1965 году с серебряной медалью закончил физико-математическую школу 135 в г. Куйбышеве и в том же году поступил в Куйбышевский политехнический институт имени В.В. Куйбышева