



Н.А. Андриянов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЕЙ С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева,
Ульяновский государственный технический университет)

1 Введение

Описание движения на плоскости удобно выполнять как изменение координаты в пространстве. Для этого могут быть использованы авторегрессионные СП [1-3], которые также позволяют описывать различные состояния физических объектов. При этом само описание траектории движения по анализу изображений и выделению ориентиров может быть качественным улучшением проблемы позиционирования автономного транспортного средства [4-5]. Однако авторегрессионные модели имеют слишком "колючие" траектории изменения во времени, что скажется также и на изменении координаты. Однако чаще всего необходимо плавное изменение координат. Описание таких процессов может быть получено с помощью моделей с кратными корнями характеристических уравнений [6,7]. Для описания сложных передвижений, подразумевающих резкие ускорения или скачки могут быть использованы дважды стохастические авторегрессионные модели [8,9].

2 Авторегрессия с кратными корнями характеристических уравнений

Представим процесс авторегрессии произвольного порядка m на базе следующего стохастического разностного уравнения

$$x_i = \rho_1 x_{i-1} + \rho_2 x_{i-2} + \dots + \rho_m x_{i-m} + \beta \xi_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $\xi_i, i=1, 2, \dots, n$, - последовательность независимых случайных величин, подчиняющихся нормальному (гауссову) закону распределения, имеющих нулевое математическое описание и единичную дисперсию; коэффициент β введен для того, чтобы обеспечить постоянство дисперсии случайного процесса x_i . Коэффициенты корреляции $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ в общем случае могут быть посчитаны по имеющимся наблюдениям с использованием системы уравнений Юла-Уокера [1].

Для модели (1) с использованием z -преобразования можно составить характеристическое уравнение при различных корнях $z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, m$,

$$z^m - \rho_1 z^{m-1} - \rho_2 z^{m-2} - \dots - \rho_m = 0, \quad (2)$$

а ковариационная функция такого случайного процесса представляется в виде суммы экспонент.



Если порядок авторегрессии m достаточно велик, то найти коэффициенты уравнения для модели (1), а также найти аналитический вид ковариационной функции такой модели не представляется возможным. При этом обычная авторегрессия приводит к формированию "колючих" процессов. Вид такой авторегрессии определяется выражением

$$x_i = \rho x_{i-1} + \beta \xi_i, i = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

а значения корреляционной функции рассчитываются по выражению

$$R_x(k) = \rho^{|k|} \quad (4)$$

Оптимальным вариантом получения близких к реальным СП, имеющих простое математическое описание, являются авторегрессионные модели высоких порядков с кратными корнями характеристических уравнений [6]. На рисунке 1 представлены для сравнения процессы, полученные с помощью авторегрессии первого порядка (толстая линия) и авторегрессии с кратными корнями кратности 2 (тонкая линия) (рисунок 1а), а также графики ковариационных функций для представленных процессов (рисунок 1б).

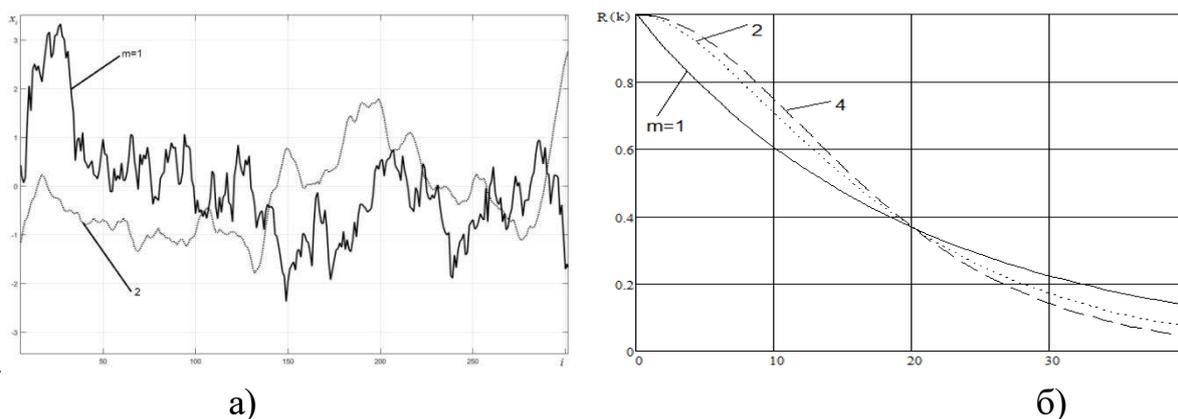


Рис. 1. Сравнение авторегрессии первого порядка и авторегрессии с кратными корнями характеристических уравнений

Характеристическое уравнение (2) с корнем $z = \rho$ кратности m имеет вид $(z - \rho)^m = 0$, а уравнение авторегрессии (1) принимает следующий вид

$$(1 - \rho z^{-1})^m x_i = \xi_i, \quad (5)$$

где $z^{-k} x_i = x_{i-k}$.

На основе уравнения (5) можем записать в явном виде модели авторегрессии при различных кратностях характеристического уравнения

$$x_i = \rho x_{i-1} + \xi_i, \quad m = 1, \quad (6)$$

$$x_i = 2\rho x_{i-1} - \rho^2 x_{i-2} + \xi_i, \quad m = 2, \quad (7)$$

$$x_i = 3\rho x_{i-1} - 3\rho^2 x_{i-2} + \rho^3 x_{i-3} + \xi_i, \quad m = 3, \quad (8)$$

$$x_i = 4\rho x_{i-1} - 6\rho^2 x_{i-2} + 4\rho^3 x_{i-3} - \rho^4 x_{i-4} + \xi_i, \quad m = 4. \quad (9)$$



3 Модель изменения координат

Запишем модель изменения координат в соответствии с авторегрессией второго порядка, т.е. выражением (7). При этом можно обозначить координату по оси x , как случайный процесс x_i , а координату по оси y , как случайный процесс y_i

$$\begin{aligned}x_i &= 2\rho_x x_{i-1} - \rho_x^2 x_{i-2} + \xi_{xi}, \\y_i &= 2\rho_y y_{i-1} - \rho_y^2 y_{i-2} + \xi_{yi}.\end{aligned}\tag{10}$$

На рисунке 2 приведен пример имитации траектории движения с помощью модели (10). На рисунке 3 для сравнения показан аналогичный пример с использованием авторегрессии первого порядка. Параметры были выбраны следующим образом: $\sigma_x^2 = 40$, $\sigma_y^2 = 900$, $\rho_x = \rho_y = 0.99$, $m_x = m_y = 5$.

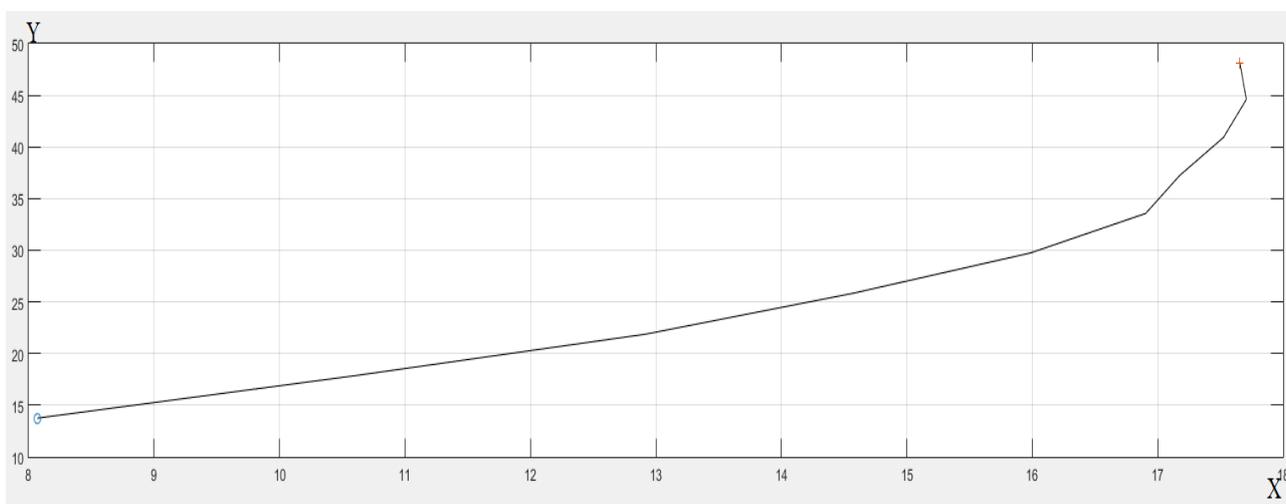


Рис. 2. Имитация движения с помощью авторегрессии с кратными корнями кратности 2

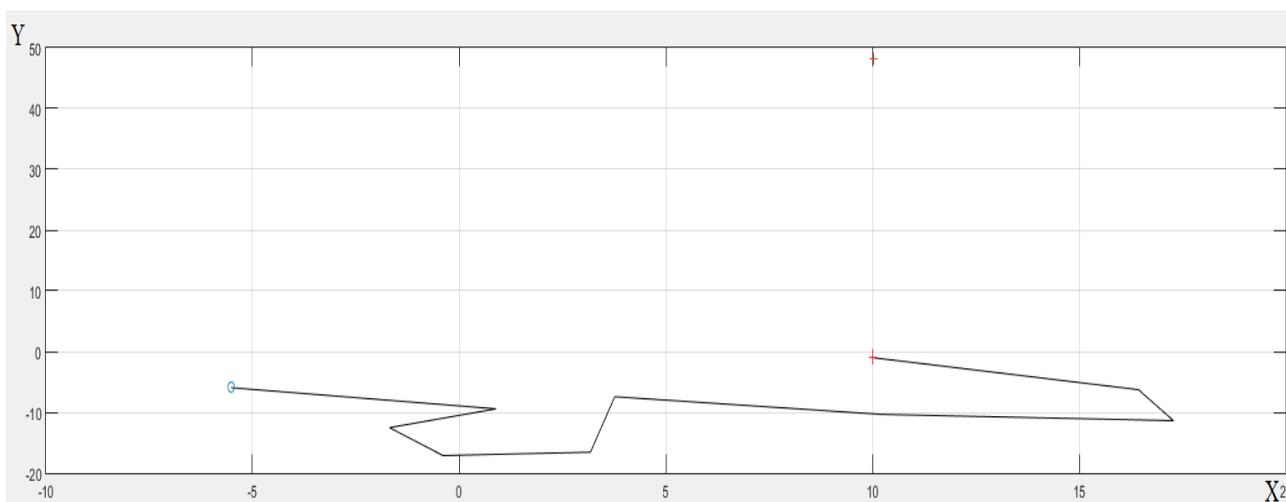


Рис. 3. Имитация движения с помощью авторегрессии первого порядка

Анализ полученных графиков показывает, что применение моделей с кратными корнями позволяет значительно сгладить моделируемые траектории



движения. При этом такое изменение координат больше похоже на изменение координат реальных объектов.

4 Заключение

Предложена модель сглаживания траекторий движения автономного аппарата авторегрессиями с кратными корнями характеристических уравнений, которые обеспечивают более гладкие случайные процессы. В программном комплексе реализована данная модель для имитации траектории движения и получены различные варианты движений транспортного средства. При этом более правдоподобные траектории обеспечивает модель с кратными корнями.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Гранта РФФИ № 17-01-00179

Литература

1. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение. 1986. – 320 с.
2. Box G. E. P., Jenkins C. M. Time series analysis: Forecasting and control. San Francisco: Holden-Day, 1970. 245 с.
3. Гарбарь С. В. Моделирование стационарных марковских случайных процессов с заданной плотностью распределения методом авторегрессии // Вестник НовГУ. 2012. №67, с. 13-15
4. Матвиенко Ю.В., Борейко А.А., Костенко В.В., Львов О.Ю., Ваулин Ю.В. Комплекс ро-бототехнических соедств для выполнения поисковых работ и обследования подводной ин-фраструктуры на шельфе // Подводные исследования и робототехника. - 2015. - № 1 (19). - С. 4-15.
5. Шубин А.Б., Александров Е.Г., Харченков Г.Г., Управление траекториями подвижных объектов. // XXXVII Всероссийская конференция «Управление движением корабля и специальными аппаратами». 21-23 июня 2011 г. Сборник трудов. С. 217-224.
6. Andriyanov N. A., Vasiliev K. K. Use autoregressions with multiple roots of the characteristic equations to image representation and filtering // CEUR Workshop Proceedings, Volume 2210, 2018, Pages 273-281.
7. Васильев К.К., Андриянов Н.А., Абдулкадим Х.А. Эффективность фильтрации случайных полей с кратными корнями характеристических уравнений // Радиотехника. 2018. № 6. С. 20-23.
8. Андриянов Н.А. Сравнительный анализ фильтров Винера и Калмана при обработке авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений // Современные проблемы проектирования, производства и эксплуатации радиотехнических систем. 2018. № 1 (11). С. 138-141.
9. Андриянов Н.А., Гаврилина Ю.Н. Псевдоградиентный поиск разрывов в сигнале и адаптивная фильтрация такого сигнала // Радиоэлектронная техника. 2018. № 1 (11). С. 136-138.