



Л.В. Яблокова¹, Д.Л. Головашкин²

НАЛОЖЕНИЕ ПОГЛОЩАЮЩЕГО СЛОЯ ПРИ СОГЛАСОВАННОМ РАЗНОСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДАЛАМБЕРА И МАКСВЕЛЛА

¹ ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)»,
² ФГБУН «Институт систем обработки изображений РАН»

Введение

Рассмотрение задачи дифракции на оптическом элементе уместно связывать с решением волнового уравнения в области непосредственного нахождения этого элемента, а организацию поглощения у границ вычислительной области (вне элемента) с решением уравнений Максвелла, моделирующим PML-слой. При этом сокращаются требования к системным ресурсам ЭВМ по сравнению с FDTD-методом (в двумерном случае) и используется современная методика наложения PML-слоя [1] вместо устаревшего подхода Мура [2], традиционно сопровождающего решение волнового уравнения.

Наложение поглощающего слоя при совместном решении

В поглощающем слое уравнения Максвелла имеют вид:

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma^* H_y = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (1)$$

где второе слагаемое в левой части определяет поверхностную плотность электрического и магнитного (воображаемого) токов. Следующее соотношение электрической и магнитной проводимостей $\sigma/\varepsilon_0 = \sigma^*/\mu_0$ и плавное возрастание значения σ от начала слоя к концу (при правильно подобранных параметрах) обеспечивает поглощение излучения без отражения.

Простейшая разностная аппроксимация уравнений Максвелла в поглощающем слое записывается как:

$$\mu_0 \frac{H_{y_{k+0,5}}^{m+0,5} - H_{y_{k+0,5}}^{m-0,5}}{h_t} + \sigma_{k+0,5}^* H_{y_{k+0,5}}^{m-0,5} = -\frac{E_{x_{k+1}}^m - E_{x_k}^m}{h_z},$$

$$\varepsilon_0 \frac{E_{x_k}^{m+1} - E_{x_k}^m}{h_t} + \sigma_k E_{x_k}^m = -\frac{H_{y_{k+0,5}}^{m+0,5} - H_{y_{k-0,5}}^{m+0,5}}{h_z},$$

где сеточная проекция электрического поля на ось $x - E_{x_k}^n$ определена в узлах $\{(t_n, z_k): t_n = nh_t, n = 0, 1, \dots, N = \frac{T}{h_t}, z_k = L^W + kh_z, k = 0, 1, \dots, K = \frac{L^M}{h_z}\}$, а сеточная проекция магнитного поля на ось $y - H_{y_{k+0,5}}^{n+0,5}$ в узлах $\{(t_{n+0,5}, z_{k+0,5}): t_{n+0,5} = (n+0,5)h_t, n = 0, 1, \dots, N-1, z_{k+0,5} = L^W + (k+0,5)h_z, k = 0, 1, \dots, K-1\}$ сеточной области D_h^M , наложенной (Рисунок 1) на область вычислительного эксперимента $D^M (0 < t \leq T, L^W \leq z \leq L^W + L^M)$, для простоты заданной в свободном пространстве.



Аналогично для одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

запишем разностную схему [3]

$$\frac{E_{x_m}^{n+1} - 2E_{x_m}^n + E_{x_m}^{n-1}}{h_t^2} = c^2 \frac{E_{x_{m+1}}^n - 2E_{x_m}^n + E_{x_{m-1}}^n}{h_z^2},$$

где функция $E_{x_m}^n$ определена в узлах $\{(t_n, z_m): t_n = nh_t, n = 0, 1, \dots, N = \frac{T}{h_t},$

$z_k = mh_z, m = 0, 1, \dots, M = \frac{L^W}{h_z}\}$, сеточной области D_h^W , наложенной (Рисунок 1) на $D^W (0 < t \leq T, 0 \leq z \leq L^W)$.

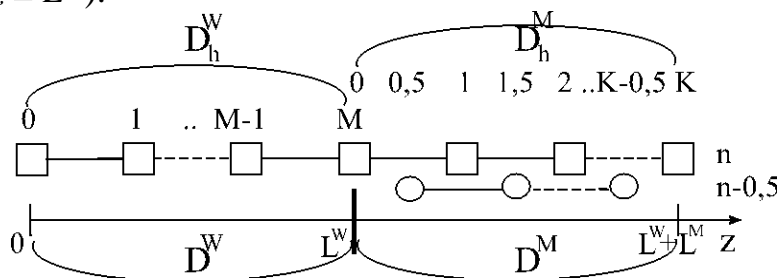


Рис. 1. Объединение сеточных областей. Квадратами изображены узлы для проекции электрического поля, окружностями - для магнитного.

Задавшись целью совместного отыскания разностного решения уравнений (1) и (2) согласуем вычисления на D^W и D^M , полагая значения $E_{x_M}^n$, определенные на D_h^W при $m = M$ (крайний правый узел) и $E_{x_0}^n$, определенные на D_h^M при $k = 0$ (крайний левый узел) равными (Рисунок 1).

$$\frac{E_{x_M}^{n+1} - 2E_{x_M}^n + E_{x_M}^{n-1}}{h_t^2} = c^2 \frac{E_{x_1}^n - 2E_{x_0}^n + E_{x_{M-1}}^n}{h_z^2}$$

На границах объединенной области $D = D^W \cup D^M$ установим электрическую стенку. За начальное условие примем отсутствие поля в момент времени $t = 0$.

При постановке вычислительных экспериментов расположим поглощающий слой длины λ у правого края D . Тогда σ задается на отрезке

$$[L^W + L^M - \lambda, L^W + L^M] \text{ по формуле: } \sigma = \sigma_{\max} \left(\frac{z + \lambda - L^W - L^M}{\lambda} \right)^q, \text{ где } \sigma_{\max} \text{ и } q \text{ зависят}$$

от дискретизации сеточной области согласно таблице 4 из [4].

Эксперименты проводились при различных значениях дискретизации сеточной области Q, Qt и QT , где первый параметр характеризовал число узлов сеточной области по пространству (приходящееся на одну длину волны); второй – количество узлов по времени (приходящееся на временной интервал, за который плоский волновой фронт в вакууме пройдет расстояние в одну длину волны); третий – «длительность» запускаемого цуга в длинах волн. При этом



они менялись от (10,20,5) – минимальных значений, удовлетворительно описывающих распространение плоской однородной волны в свободном пространстве, до (100,200,15) – соответствующих весьма низким величинам погрешности. Протяженность области D составляла 12λ , что позволяло не учитывать влияние отраженной от левой границы волны на области регистрации.

Верифицируя предположение о возможности совместного решения волнового уравнения и системы уравнений Максвелла с поглощающим слоем, сначала (для получения эталонного решения) рассмотрим случай $D = D^M$ (первая серия экспериментов, Рисунок 2а); $L^W = 0$, $L^M = 12\lambda$. Для исследования отраженной волны зададим «прозрачный» источник [5] (в точке $z = 9,5\lambda$) и будем регистрировать в подобласти $[0\lambda, 11\lambda]$ величину $\delta = \max_k |A_k^{\text{refl}}|$, (A^{refl} – комплексная амплитуда отраженной волны) являющуюся абсолютной погрешностью вычислительного эксперимента (отраженной от PML слоя волны в идеальном случае быть не должно).

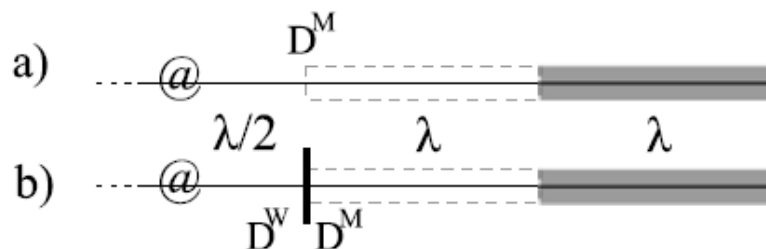


Рис. 2. Вычислительные области первой (а) и второй (б) серий экспериментов. Символом «@» обозначен «прозрачный» источник, в обведенной пунктиром области регистрируется погрешность, в закрашенной расположен поглощающий слой

Таблица 1. Погрешности $\delta \cdot 100$ первой серии вычислительных экспериментов

Q, Q_t	QT		
	5	10	15
10,20	0,3546	0,1032	0,1463
20,40	0,1713	0,1238	0,1261
50,100	0,1127	0,1068	0,1068
100,200	0,0129	0,0115	0,0115

Отметим удовлетворительное функционирование поглощающего слоя; даже на самой грубой сеточной области ($Q = 10, Q_t = 20$) при работе с не вполне монохроматической волной ($QT = 5$) модуль комплексной амплитуды отраженного поля составил треть процента от модуля амплитуды (теоретического) падающей волны (таблица 1). На более густых областях увеличение длины цуга не приводит к повышению точности в силу преобладания величины погрешности δ , связанной с наложением PML слоя, над ε , определяющейся заменой производных разностными отношениями.

При отыскании совместного разностного решения (1) и (2) (вторая серия экспериментов) примем $L^W = 10\lambda, L^M = 2\lambda$, расположенный в том же месте вы-



числительной области “прозрачный” источник теперь находится в D^w (Рисунок 2б).

Сравнивая результаты вычислительных экспериментов (таблица 2) с данными первой серии (таблица 1) отметим их совпадение в диапазоне $Q = 50, Q_t = 100, QT = 10 - Q = 100, Q_t = 200, QT = 15$ и незначительность отличий при остальных параметрах, что свидетельствует о возможности совместного разностного решения уравнений Даламбера и Максвелла в случае, когда последние используются для моделирования поглощающего слоя.

Таблица 2. Погрешности $\delta \cdot 100$ второй серии вычислительных экспериментов

Q, Q_t	QT		
	5	10	15
10,20	0,1287	0,1312	0,1483
20,40	0,1645	0,1232	0,1322
50,100	0,1136	0,1068	0,1068
100,200	0,0127	0,0115	0,0115

Благодарности

Исследования выполнены при поддержке гранта Президента РФ МД-6809.2012.9.

Заключение

В настоящей работе представлена технология наложения поглощающих слоев при совместном разностном решении уравнений Даламбера и Максвелла и продемонстрирована состоятельность предложенного подхода.

Литература

1. Berenger Jean-Pierre A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of computational physics, 1994.- № 114.- pp.185 – 200
2. Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations // IEEE Trans. Electromagnetic Compability, 1981. – vol. 23. – pp. 377 – 382
3. Taflove A., Hagness S. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method: 2nd. ed. // Boston: Artech House Publishers, 2000. – 852 p.
4. Головашкин Д.Л., Казанский Н.Л. Методика формирования падающей волны при разностном решении уравнений Максвелла (двумерный случай) // Автометрия, 2007. – Том 43, № 6. – с. 78 – 88
5. Головашкин Д.Л., Казанский Н.Л. Декомпозиция сеточной области при разностном решении уравнений Максвелла // Математическое моделирование, 2007. – Том 19, № 2. – с. 48 – 58
6. Prather D.W., Shi S. Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements // J. Opt. Soc. Am. A., 1999. – vol. 16, № 5. – pp. 1131 – 1142



7. Головашкин Д.Л., Казанский Н.Л. Методика формирования падающей волны при разностном решении уравнений Максвелла // Автометрия, 2006. – Том 42, № 6. – с. 78 – 85