происшествий при организации и производстве воздушных перевозок // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2012, том 14, № 4-2, с. 380-385.

В.В. Любимов, Д.Д. Удобанг

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО ВИДА КОМПЛЕКСНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ

(Самарский университет)

Аннотация. В работе исследуется сходимость комплексных степенных рядов одной переменной с постоянными коэффициентами, а также рассматривается применение данных рядов в науке и технике. Найдена область равномерной абсолютной сходимости комплексного степенного ряда, полученная на основе использования двух известных признаков сходимости.

Введение

Определение: Под степенным рядом действительной переменной будем понимать бесконечную сумму следующего вида [1-4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 \dots, \qquad (1)$$

где a_n представляет собой коэффициент n-го члена ряда, а c является известной постоянной. Степенные ряды играют важнейшую роль в математическом анализе, где они часто рассматриваются как ряды Тейлора от бесконечно дифференцируемых функций. Во многих ситуациях на практике имеем c=0, например, при рассмотрении ряда Маклорена. В этих случаях степенной ряд принимает более компактный вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots . \qquad (2)$$

Помимо своей важнейшей роли в математическом анализе, степенные действительные ряды также встречаются в производящих функциях комбинаторики, в теории вероятностей, и т.д. Комплексные степенные ряды широко представлены в различных технических приложениях (при использовании Z-преобразования, и т.д.).

Исследование сходимости комплексных степенных рядов одного вида

Рассмотрим комплексный степенной ряд следующего вида:

$$\varepsilon \cdot f_1 \cdot z + \varepsilon^2 \cdot f_2 \cdot z^2 + \varepsilon^3 \cdot f_3 \cdot z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \cdot f_n \cdot z^n, \ \forall n \in N \qquad (3)$$

где ε>0 —малый параметр, f_1 — произвольная известная непрерывная функция действительной переменной, z — комплексная переменная. Пусть данный ряд равномерно сходится в точке z=0 и некоторой окрестности.

Из комплексного анализа известно, что z можно выразить в тригонометрической форме и показательной формах:

$$z = r\ (cos\varphi + i\ sin\varphi\ ) = re^{i\varphi}. \qquad (4)$$

Тогда, по теореме Муавра получаем:

$$z^n = r^n(cos\varphi + i\ sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}. \qquad (5)$$

Подстановкой (5) в (3) получаем ряд в показательной форме:

$$\varepsilon \cdot f_1 \cdot re^{i\varphi} + \varepsilon^2 \cdot f_2 \cdot r^2 e^{i2\varphi} + \varepsilon^3 \cdot f_3 \cdot r^3 e^{i3\varphi} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \cdot f_n \cdot r^n e^{in\varphi}. \qquad (6)$$

Используя критерий Даламбера и радикальный критерий Коши, найдем область сходимости данного комплексного степенного ряда. При этом будем рассматривать функции f_n следующим образом:

$f_n = f_{n+1} = C = \text{const}$.

Применим критерий Даламбера для получения условия абсолютной сходимости ряда [5]: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon^{n+1}\cdot r^{n+1}\cdot f_{n+1}\cdot e^{i(n+1)\varphi}}{\varepsilon^n\cdot r^n\cdot f_n\cdot e^{in\varphi}}\right| < 1$, $\varepsilon r\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}e^{i\varphi}\right| < 1$. Так как $f_i = const$, то $\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1$. При этом $\varepsilon r\lim\limits_{n\to\infty}|e^{i\varphi}| < 1$. Здесь $|e^{i\varphi}| = 1$. Таким образом, получаем $\varepsilon r < 1$, где $r > 0$. Следовательно, радиус равномерной сходимости данного ряда r_1 определяется из условия $0 < r_1 < r < \frac{1}{\varepsilon}$.

Применим радикальный критерий Коши для получения условия абсолютной сходимости ряда [5]: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\varepsilon^n\cdot f_n\cdot r^n\cdot e^{in\varphi}} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\varepsilon\cdot f_n^{\frac{1}{n}}\cdot r\cdot e^{i\varphi}\right| < 1$. Если $f_n^{\frac{1}{n}} \to 1$, то $\frac{1}{n}\to 0$. При этом получаем: $\varepsilon r\lim\limits_{n\to\infty}|e^{i\varphi}| < 1$. Здесь $|e^{i\varphi}| = 1$. Таким образом, получаем $\varepsilon r < 1$, где $r > 0$. Следовательно, радиус равномерной сходимости данного ряда r_1 определяется из условия $0 < r_1 < r < \frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, используя различные признаки сходимости для получения радиуса равномерной сходимости одного ряда, мы получили одинаковый результат. Следовательно, данный результат является верным.

Отметим, что представляет научный интерес рассмотрение возможности применения комплексного ряда вида (3) с постоянными коэффициентами в различных технических приложениях. Например, к такому виду рядов можно попытаться привести асимптотические разложения правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений для медленных переменных, полученные после использования нерезонансной схемы метода усреднения в задачах, близких случаю Лагранжа при возмущенном движении твердого тела относительно неподвижной точки [6-8].

Литература

1. Алан Джеффри. Высшая инженерная математика, Университет Ньюкасл-апон-Тайн. Харкорт Академик Пресс. 2002. – 1147 с.

2. H.K. Dass. Advanced Engineering Mathematics, SCHAND & COMPANY LTD. 1988. – p. 1358.

3. К. А. Страуд, Декстер Дж. Бут. Передовая инженерная математика. Пэлгрейв Макмиллан. 2003. - 1027 с.

4. С.В. Бушков, Л.В. Коломиец, О.Ю. Семенова. Числовые и функциональные ряды. Изд-во СГАУ. 2013. – 36 с.

5. А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. Учебное пособие. – М. Высшая школа. 2001. – 445 с.

6. Ю.М. Заболотнов, В.В. Любимов. Нелинейные резонансные эволюционные эффекты при движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Прикладная математика и механика. М: 2002. Т.66. № 3. – С.410-417.

7. В.В. Любимов. Внешняя устойчивость резонансов при движении асимметричного твердого тела с сильным магнитом в геомагнитном поле. Известия РАН. Механика твердого тела. М: 2010. №1. – С. 13-27.

8. V.V. Lyubimov. Direct and inverse secondary resonance effects in the spherical motion of an asymmetric rigid body with moving masses. Acta Mechanica. Springer-Verlag. 2020. Vol.231. № 12. – pp. 4933-4946.

Е.В. Орлова

ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАЗРАБОТКИ ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Аннотация. Определяются функции и задачи цифровых двойников объектов и процессов. Сформирована технология системного анализа объекта и системного синтеза его цифрового двойника. Технология содержит стадии, этапы, их содержание и результаты, и обеспечивает организационно-методическую поддержку процесса разработки и эксплуатации цифрового двойника объекта.

Ключевые слова: математические модели, цифровые модели, цифровые двойники, технология системного моделирования цифрового двойника

Драйвером инновационного развития высокотехнологичных предприятий в контексте четвертой промышленной революции становится передовая технология «цифровой двойник» как виртуальный прототип реальных производственных процессов, изделий, готовых продуктов. В России впервые в мире разработана нормативно-техническая документация, регламентирующая процессы разработки и применения цифровых двойников. В 2021 году принят национальный стандарт «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения» [1], определяющий общие положения построения и эксплуатации цифровых двойников изделий.

Согласно этому стандарту под цифровым двойником понимается «система, состоящая из цифровой модели изделия и двусторонних информационных связей с изделием и (или) его составными частями». Следуя стандарту в основе цифрового двойника лежит цифровая модель изделия в виде «системы математических и компьютерных моделей, а также электронных документов изделия, описывающих структуру, функциональность и поведение вновь