В.В. Любимов, С.В. Подклетнова

О ЗАВИСИМОСТИ ГЛОБАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ ОТ ВЕЛИЧИНЫ ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(Самарский университет)

Аннотация. В работе рассматривается использование известных оценок локальной методической погрешности явных методов Рунге-Кутты при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. На основе данных оценок сформулирована закономерность погрешности, связывающая между собой шаг интегрирования и интервал интегрирования. Эта закономерность позволяет произвести выбор интервала интегрирования с учётом заданного постоянного шага интегрирования, обеспечивающего малую погрешность вычислений.

Метод Рунге-Кутты r-го порядка и его погрешность

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), (1)$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, для которого известно начальное условие

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до k-го порядка включительно.

При заданных предположениях решение уравнения (1) будет иметь непрерывные производные до $(k+1)$-го порядка и функция *y(x)* может в окрестности точки x_0 быть разложена в ряд Тейлора и её приращение с некоторым приближением может быть представлено в виде:

$$\Delta y = y(x_0+h) - y(x_0) \approx \frac{y'(x_0)}{1!}\cdot h + \frac{y''(x_0)}{2!}\cdot h^2 + ... + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k + \frac{y^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}\cdot h^{k+1}. (3)$$

В силу громоздкости вычисления производных в качестве приращения функции Рунге предложил использовать линейную комбинацию:

$$p_{r_1}k_1(h) + p_{r_2}k_2(h) + ... + p_{r_r}k_r(h), (4)$$

где

$$k_i(h) = h\cdot f(\xi_i, \eta_i), \ (i = 1,2,...,r) \quad (5)$$

$\xi_i = x_0 + \alpha_i \cdot h$, $\eta_i = y_0 + \beta_{i_1}\cdot k_1(h) + \beta_{i_2}\cdot k_2(h) + ... + \beta_{i_{i-1}}\cdot k_{i-1}(h)$, α_i, β_{i_j} – некоторые константы, причём $\alpha_1 = 0$.

Очевидно, что постоянные величины α_i, β_{i_j} и p_{r_i} нужно выбирать так, чтобы правая часть приближённого равенства (3) максимально совпадала с выражением (4), то есть, согласно рассматриваемому методу, функция

$$\varphi_r(h) = y(x_0 + h) - y_0 - \left[p_{r_1} k_1(h) + p_{r_2} k_2(h) + \ldots + p_{r_r} k_r(h) \right] \quad (6)$$

должна обладать свойствами:

$$\varphi_r(0) = \varphi_r'(0) = \ldots = \varphi_r^{(s)}(0) = 0,\ \varphi_r^{(s+1)}(0) \neq 0. \quad (7)$$

И при этом s должно быть возможно большим для произвольных значений h и $f(x, y)$.

При этом погрешность рассматриваемого численного метода на одном шаге интегрирования длиной h будет составлять величину, равную

$$R_r(h) = \frac{h^{s+1} \cdot \varphi_r^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}, \quad (8)$$

где $0 \le \xi \le h$. При приближённых вычислениях одним из основных, и порою главным, является вопрос о величине погрешности метода. Конечно, простота вычисления имеет очень важное значение, но если погрешность вычисления превосходит необходимое для практики значение, то применение метода теряет смысл. В методе Рунге-Кутты погрешность очень сильно зависит от выбора параметров вычисления, и конкретно – от значения шага h.

Обобщённая теорема о глобальной погрешности метода Рунге-Кутты

Теорема. При интегрировании с постоянным шагом на конечном шаге интервала интегрирования $h, 2h, \ldots, nh$, где n – число шагов интегрирования (здесь $n = h^{-s-1}$ - целое число) оценка глобальной методической погрешности является немалой относительно h величиной.

Доказательство. Предположим, что интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка производится методом Рунге-Кутты r-го порядка с постоянным шагом h. Пусть число шагов интегрирования равно $n = h^{-(s+1)}$. Тогда оценка глобальной методической погрешности можно получить путём сложения локальной методической погрешности (2) на n шагах интегрирования. В результате получаем:

$$\Delta_r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n=h^{-(s+1)}} h^{s+1} \varphi_r^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!} = \frac{h^s}{(s+1)!} \sum_{i=1}^{n=h^{-(s+1)}} h\varphi_i(\xi)^{(s+1)}. \ (9)$$

При малых h и существовании предела интегральных сумм $\lim\limits_{h \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n=h^{-(s+1)}} h\varphi_i(\xi)^{(s+1)} = S,$ применяя теорему о среднем, получаем приближенное равенство: $\sum\limits_{i=1}^{n=h^{-(s+1)}} h\varphi_i(\xi)^{(s+1)} \approx \int\limits_0^{nh} dx \varphi^{(s+1)}(x) = nh\varphi_*^{(s+1)}(x)$. Отсюда находим:

$$n\varphi_*^{(s+1)}(\xi) \approx \sum_{i=1}^{n=h^{-(s+1)}} \varphi_i(\xi)^{(s+1)}. \qquad (10)$$

Учитывая, приближенное равенство (10) в следующей формуле (11) при $n = h^{-(s+1)}$ получаем немалую оценку глобальной погрешности:

$$\Delta_r \approx \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} n\varphi_*^{(s+1)}(\xi) = \frac{1}{(s+1)!} \varphi_*^{(s+1)}(\xi) = O(1). \qquad (11)$$

Теорема доказана.

Данная теорема указывает на недопустимость применения метода Рунге-Кутты r-го порядка с постоянным малым шагом для нахождения численного решения уравнения (1) в рассматриваемом случае. Таким образом, глобальная погрешность интегрирования определяется количеством шагов интегрирования и порядком метода. Назовём число постоянных шагов интегрирования $n = h^{-s-1}$ в данной постановке задаче недопустимым, а шаг интегрирования - недопустимым.

Следствие 1. Согласно доказанной теореме, величина интервала интегрирования Δx выражается через величину недопустимого шага интегрирования и порядок метода посредством равенства:

$$\Delta x = \frac{1}{h^s}. \qquad (12)$$

Доказательство. Подставляя в правую часть равенства $\Delta x = nh$ число $n = h^{-s-1}$ получаем (12). Следствие доказано.

Следствие 2. Согласно данной теореме величина глобальной погрешности метода Рунге-Кутты r-го порядка при числе шагов интегрирования $n = h^{-s-1+k}$ (n и k –целые положительные числа) является малой величиной, имеющей порядок h^k.

Доказательство. Учитывая, приближенное равенство (10) в формуле (11) при $n = h^{-s-1+k}$ получаем оценку глобальной погрешности:

$$\Delta_r \approx \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} n\varphi_*^{(s+1)}(\xi) = \frac{h^k}{(s+1)!} \varphi_*^{(s+1)}(\xi) = O(h^k). \qquad (13)$$

Следствие доказано.

Пример выбора шага h при аппроксимации решения дифференциального уравнения с использованием метода Рунге-Кутты

Пусть требуется решить уравнение движения материальной точки, учитывая необходимую для этого точность вычислений. Рассмотрим данную задачу на примере, взяв для определённости основное уравнение динамики:

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}. \qquad (14)$$

И предположим, что сила, действующая на движущуюся точку не постоянна и пропорциональна кубу скорости тела, то есть

$$F = k \cdot v^3. \qquad (15)$$

Таблица 1

h	Δ_r	Δ_r/h
0,001	8,67E-05	0,086676
0,002	0,000168	0,084197
0,003	0,000259	0,086487
0,004	0,000347	0,086775
0,005	0,000434	0,086808
0,006	0,000524	0,087354
0,007	0,00061	0,08713
0,008	0,000695	0,086906
0,009	0,00078	0,086683
0,01	0,00087	0,086971
0,011	0,00096	0,087261
0,012	0,001032	0,086016
0,013	0,001135	0,087326
0,014	0,001198	0,085574
0,015	0,001326	0,08843
0,016	0,001428	0,089252
0,017	0,001496	0,087975
0,018	0,001608	0,089319
0,019	0,001693	0,089088
0,02	0,001746	0,087296

Тогда, с учётом выражения (14), уравнение (15) примет вид:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = k \cdot v^3 . \qquad (16)\ (16)$$

Положим, что в начальный момент времени скорость тела была

$$v\Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} , \qquad (17)\ (17)$$

Возьмём массу тела, к примеру 1 кг, а коэффициент пропорциональности $k = \frac{1}{2} \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$. С учётом всего сказанного точное решение уравнения имеет вид:

$$v = \sqrt{\frac{1}{2-t}} . \qquad (18)$$

Итак, точное решение найдено, и мы сможем определить точную скорость нашего тела в любой момент времени t. В дальнейшем это нам понадобится для определения погрешности приближённых вычислений. Для решения поставленной задачи, а именно нахождения скорости из уравнения движения

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^3}{2} . \qquad (19)$$

с учётом начального условия Коши (17) воспользуемся наиболее часто используемым на практике четырёх-этапным методом Рунге-Кутты. Рассмотрим численное решение уравнения (16) на отрезке $[0;1]$ с различными интервалами разбиения. Вычислим погрешность в точке $x=1$ и найдём отношение ошибки вычисления к длине интервала разбиения. Результаты вычислений приведены в таблице 1, из которой следует, что данные отношения, вообще говоря, остаются очень близкими друг к другу. Кроме того, присутствует некоторая вычислительная погрешность. Дело в том, что при указанном разбиении на отрезки интегрирования мы не можем полностью покрыть отрезок $[0;1]$, и значения величин бралось в точках, ближайших к 1. Очевидно, улучшить результат вычислений можно лишь увеличив количество интервалов разбиения (то есть уменьшив h).

Литература

1. Берёзин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т II. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 620 с.

2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. . Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 630 с.

3. Ильина В. А., Силаев П. К. Численные методы для физиков-теоретиков. Ч. 2. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 118 с.