6. Гизатуллин З.М., Гизатуллин Р.М. Анализ качество электроэнергии в однофазной сети электропитания 220 Вольт 50 Герц // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2012. – №7-8. – С. 63-71.

7. Гизатуллин З.М., Гизатуллин Р.М., Назметдинов Ф.Р., Набиев И.И. Повышение помехоустойчивости электронных средств при электромагнитных воздействиях по сети электропитания // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. – 2015. – №6.- С. 2.

8. Гизатуллин З.М. Сквозное прогнозирование помехоустойчивости электронно-вычислительных средств внутри зданий при внешних электромагнитных воздействиях // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева . – 2011. – №2. – С. 123-128.

9. Гизатуллин З.М. Повышение эффективности экранирования корпуса электронных средств // Технологии электромагнитной совместимости. – 2010. – №3. – С. 37-43.

10. Гизатуллин З.М., Гизатуллин Р.М. Экспериментальные исследования помехоустойчивости персонального компьютера при импульсном разряде статического электричества // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева . – 2011. – №3. – С. 78-83.

11. Гизатуллин З.М. Электромагнитная совместимость электронно-вычислительных средств при воздействии электростатического разряда // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2009. - №1-2. – С. 104-112.

12. Гизатуллин З.М., Гизатуллин Р.М. Исследование электромагнитной совместимости локальных вычислительных сетей при наносекундных электромагнитных воздействиях // Радиотехника и электроника. – 2014. – №5. – С. 463–467.

13. Гизатуллин З.М. Анализ магнитных полей внутри здания при воздействии разряда молнии на внешнею систему молниезащиты здания // Технологии электромагнитной совместимости. – 2010. - №3. - С. 30-36.

В.П. Цветов

О ДВОЙСТВЕННЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева)

Теория упорядоченных полугрупп, в частности, полугрупп бинарных отношений, представляет самостоятельный интерес, а также находит обширные приложения, например, в теории графов, теории автоматов, теории кодирования и т.п. [1-3].

В работе рассматривается алгебраическая структура бинарных отношений, порожденная операциями булевой алгебры и композиции.

Введем следующие обозначения и определения.

$\mathbb{D} = \{0,1\}$- множество логических значений;

$|U|$- мощность множества U;

2^U- булеан над множеством U;

$U \times V = \{(u, v) \mid u \in U \wedge v \in V\}$- декартово произведение множеств U и V;

$2^{U\times V}$- множество бинарных отношений из U в V;

uRv- альтернативная запись для $(u, v) \in R \in 2^{U\times V}$;

$2^{U\times U}$- множество бинарных отношений на U;

$1_{U\times V} = U \times V$- универсальное бинарное отношение из U в V;

$0_{U\times V} = \emptyset$- пустое бинарное отношение из U в V;

$I_{U\times U} = \{(u, u)|u \in U\} \in 2^{U\times U}$- тождественное бинарное отношение на U;

$\bar{R} = \{(u_1, u_2)|(u_1, u_2) \notin R\} \in 2^{U\times U}$- дополнение к бинарному отношению $R \in 2^{U\times U}$;

$R_1 \cup R_2 = \{(u_1, u_2)|\ (u_1, u_2) \in R_1\ \vee (u_1, u_2) \in R_2\} \in 2^{U\times U}$- объединение бинарных отношений $R_1, R_2 \in 2^{U\times U}$;

$R_1 \cap R_2 = \{(u_1, u_2)|\ (u_1, u_2) \in R_1 \wedge (u_1, u_2) \in R_2\} \in 2^{U\times U}$- пересечение бинарных отношений $R_1, R_2 \in 2^{U\times U}$;

$R^{-1} = \{(u_2, u_1)|(u_1, u_2) \in R\} \in 2^{U\times U}$- обратное к бинарному отношению $R \in 2^{U\times U}$;

$R_1 \subseteq R_2 \rightleftharpoons R_1 \cap R_2 = R_1 \Leftrightarrow R_1 \cup R_2 = R_2$- включение бинарных отношений $R_1, R_2 \in 2^{U\times U}$;

$R_1 \circ R_2 = \{(u_1, u_2)|\exists u_3 \in U\ (u_1, u_3) \in R_1 \wedge (u_3, u_2) \in R_2\} \in 2^{U\times U}$- произведение бинарных отношений $R_1, R_2 \in 2^{U\times U}$;

$D_R = \{u_1|\exists u_2 \in U\ (u_1, u_2) \in R\} \in 2^U$- область определения бинарного отношения $R \in 2^{U\times U}$;

$E_R = \{u_2|\exists u_1 \in U\ (u_1, u_2) \in R\} = D_{R^{-1}} \in 2^U$- область значений бинарного отношения $R \in 2^{U\times U}$;

$R \in 2^{U\times V}$- функционально (функция из U в V), если и только если $R^{-1} \circ R \subseteq I_{V\times V}$;

$R \in 2^{U\times V}$- тотально, если и только если $D_R = U$;

$V^U \subseteq 2^{U\times V}$- множество тотальных функций из U в V;

$\mathbb{D}^{U\times U}$- множество двуместных предикатов на U;

$T_P = \{(u_1, u_2)|P(u_1, u_2) = 1\} \in 2^{U\times U}$- множество истинности предиката $P \in \mathbb{D}^{U\times U}$;

$\mathcal{L}_{R(U\times V)} = \langle 2^{U\times V}, (\cup,\cap)\rangle$- ограниченная дистрибутивная решетка бинарных отношений из U в V;

$\mathcal{M}_{R(U\times V)} = \langle 2^{U\times V}, (\subseteq)\rangle$- ограниченное решеточно упорядоченное множество бинарных отношений из U в V;

$\mathcal{R}^1_{R(U\times V)} = \langle 2^{U\times V}, (\cup,\cap, 0_{U\times V}, 1_{U\times V})\rangle$, $\mathcal{R}^2_{R(U\times V)} = \langle 2^{U\times V}, (\cap,\cup, 1_{U\times V}, 0_{U\times V})\rangle$- полукольца (идемпотентные) бинарных отношений из U в V.

$\mathcal{B}_{R(U\times V)} = \langle 2^{U\times V}, (\cup, \cap, ^{-}) \rangle$- булева алгебра (ограниченная дистрибутивная решетка с дополнением) бинарных отношений из U в V;

Нетрудно показать, что $\forall R_1, R_2, R_3 \in 2^{U\times U}$ $R_1 \subseteq R_2 \to (R_1 \cup R_3 \subseteq R_2 \cup R_3 \wedge R_1 \cap R_3 \subseteq R_2 \cap R_3 \wedge R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3 \wedge R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2)$, то есть $\langle 2^{U\times V}, (\cup, \subseteq) \rangle$, $\langle 2^{U\times V}, (\cap, \subseteq) \rangle$, $\mathcal{S}_{R(U\times U)} = \langle 2^{U\times U}, (\circ, \subseteq) \rangle$- упорядоченные полугруппы, вообще говоря, решеточно упорядоченные.

При изучении бинарных отношений обычно оперируют терминами алгебраических систем $\mathcal{L}_{R(U\times V)}$, $\mathcal{M}_{R(U\times V)}$, $\mathcal{R}^1_{R(U\times V)}$, $\mathcal{S}_{R(U\times U)}$, то есть не учитывают существование дополнения в структуре $\mathcal{S}_{R(U\times U)}$. Тем не менее, многие свойства бинарных отношений удобно формулировать, используя понятие дополнительного элемента. В частности, свойство линейности бинарного отношения $I_{U\times U} \cup R \cup R^{-1} = 1_{U\times U}$ удобно определять, как свойство антисимметричности его дополнения $\bar{R} \cap \bar{R}^{-1} \subseteq I_{U\times U}$, или наоборот.

Рассмотрим алгебраическую структуру $\mathcal{H}_{R(U\times U)} = \langle 2^{U\times U}, (\cup, \cap, ^{-}, ^{-1}, \circ, \subseteq) \rangle$.

Напомним логические следования и равносильности операций квантификации логики предикатов, которые потребуются нам в дальнейшем.

$Qu_1 P(u_1) \Leftrightarrow Qu_2 P(u_2),$ (1)
$Qu_2 P(u_1) \Leftrightarrow P(u_1),$ (2)
$Qu_1 Qu_2 P(u_1, u_2) \Leftrightarrow Qu_2 Qu_1 P(u_1, u_2),$ (3)
$\exists u_1 P(u_1) \Leftarrow P(u_1),$ (4)
$\forall u_1 P(u_1) \Rightarrow P(u_1),$ (5)
$\exists u_1 \forall u_2 P(u_1, u_2) \Rightarrow \forall u_2 \exists u_1 P(u_1, u_2),$ (6)
$\exists u_1 \big(P_1(u_1) \vee P_2(u_1)\big) \Leftrightarrow \big(\exists u_1 P_1(u_1)\big) \vee \big(\exists u_1 P_2(u_1)\big),$ (7)
$\exists u_1 \big(P_1(u_1) \vee P_2(u_2)\big) \Leftrightarrow \big(\exists u_1 P_1(u_1)\big) \vee P_2(u_2),$ (8)
$\exists u_1 \big(P_1(u_1) \wedge P_2(u_1)\big) \Rightarrow \big(\exists u_1 P_1(u_1)\big) \wedge \big(\exists u_1 P_2(u_1)\big),$ (9)
$\forall u_1 \big(P_1(u_1) \wedge P_2(u_1)\big) \Leftrightarrow \big(\forall u_1 P_1(u_1)\big) \wedge \big(\forall u_1 P_2(u_1)\big),$ (10)
$\forall u_1 \big(P_1(u_1) \vee P_2(u_2)\big) \Leftrightarrow \big(\forall u_1 P_1(u_1)\big) \vee P_2(u_2),$ (11)
$\forall u_1 \big(P_1(u_1) \vee P_2(u_1)\big) \Leftarrow \big(\forall u_1 P_1(u_1)\big) \vee \big(\forall u_1 P_2(u_1)\big),$ (12)
где $P, P_1, P_2 \in \mathbb{D}^{U\times U}$, $Q \in \{\exists, \forall\}$.

Также напомним, что $P_1(u_1) \Rightarrow P_2(u_1)$, если и только, если $T_{P_1} \subseteq T_{P_2}$, а $P_1(u_1) \Leftrightarrow P_2(u_1)$, если и только, если $P_1(u_1) \Rightarrow P_2(u_1)$ и $P_2(u_1) \Rightarrow P_1(u_1)$.

Из (7), (9) и характеристического условия, определяющего результат операции композиции бинарных отношений, непосредственно следует, свойство дистрибутивности относительно :

$$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3),$$
$$(R_2 \cup R_3) \circ R_1 = (R_2 \circ R_1) \cup (R_3 \circ R_1),$$

и свойство полудистрибутивности относительно :

$$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3),$$
$$(R_2 \cap R_3) \circ R_1 \subseteq (R_2 \circ R_1) \cap (R_3 \circ R_1).$$

Также очевидно, что $0_{U\times U} \circ \mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_1 \circ 0_{U\times U} = 0_{U\times U}$, для произвольного R_1. Таким образом, $\mathcal{R}^3_{R(U\times U)} = \langle 2^{U\times U}, (\cup, \circ, 0_{U\times U}, I_{U\times U})\rangle$- идемпотентное полукольцо.

Введем бинарную операцию , двойственную к операции   на множестве $2^{U\times U}$ по правилу:

$$R_1 \star R_2 = \overline{\bar{R}_1 \circ \bar{R}_2} = \{(u_1, u_2) | \forall u_3 \in U\ (u_1, u_3) \in R_1\ \vee (u_3, u_2) \in R_2\} \in 2^{U\times U}.$$

Легко понять, что одновременно

$$R_1 \circ R_2 = \overline{\bar{R}_1 \star \bar{R}_2} = \{(u_1, u_2) | \exists u_3 \in U\ (u_1, u_3) \in R_1\ \wedge (u_3, u_2) \in R_2\}$$
$$\in 2^{U\times U}, R_1 \star (R_2 \cap R_3) = (R_1 \star R_2) \cap (R_1 \star R_3),$$
$$(R_2 \cap R_3) \star R_1 = (R_2 \star R_1) \cap (R_3 \star R_1),$$
$$R_1 \star (R_2 \cup R_3) \supseteq (R_1 \star R_2) \cup (R_1 \star R_3),$$
$$(R_2 \cup R_3) \star R_1 \supseteq (R_2 \star R_1) \cup (R_3 \star R_1),$$
$$R_1 \star 1_{U\times U} = \overline{\bar{R}_1 \circ \bar{1}_{U\times U}} = \overline{\bar{R}_1 \circ 0_{U\times U}} = \bar{0}_{U\times U} = 1_{U\times U},$$
$$1_{U\times U} \star R_1 = \overline{\bar{1}_{U\times U} \circ \bar{R}_1} = \overline{0_{U\times U} \circ \bar{R}_1} = \bar{0}_{U\times U} = 1_{U\times U},$$
$$R_1 \star \bar{I}_{U\times U} = \overline{\bar{R}_1 \circ \bar{\bar{I}}_{U\times U}} = \overline{\bar{R}_1 \circ I_{U\times U}} = \bar{\bar{R}}_1 = R_1,$$
$$\bar{I}_{U\times U} \star R_1 = \overline{\bar{\bar{I}}_{U\times U} \circ \bar{R}_1} = \overline{I_{U\times U} \circ \bar{R}_1} = \bar{\bar{R}}_1 = R_1.$$

Кроме того,

$$\mathrm{R}_1 \star (\mathrm{R}_2 \star \mathrm{R}_3) = \mathrm{R}_1 \star \left(\overline{\bar{R}_2 \circ \bar{R}_3}\right) = \overline{\bar{\mathrm{R}}_1 \circ \left(\overline{\overline{\bar{R}_2 \circ \bar{R}_3}}\right)} = \overline{\bar{\mathrm{R}}_1 \circ (\bar{R}_2 \circ \bar{R}_3)} =$$
$$= \overline{(\bar{\mathrm{R}}_1 \circ \bar{R}_2) \circ \bar{R}_3} = \overline{\left(\overline{\overline{\bar{R}_1 \circ \bar{R}_2}}\right) \circ \bar{R}_3} = \overline{\overline{(\mathrm{R}_1 \star \mathrm{R}_2)} \circ \bar{R}_3} = (\mathrm{R}_1 \star \mathrm{R}_2) \star \mathrm{R}_3.$$

Таким образом, установлено, что $\bar{\mathcal{R}}^3_{R(U\times U)} = \langle 2^{U\times U}, (\cap, \star, 1_{U\times U}, \bar{I}_{U\times U})\rangle$- идемпотентное полукольцо, которое будем называть двойственным к полукольцу $\mathcal{R}^3_{R(U\times U)}$.

Далее, рассмотрим произвольные R_1, R_2. В предположении, что $R_1 \supseteq R_2$, можем записать

$$R_1 \supseteq R_2 \Leftrightarrow \bar{R}_1 \subseteq \bar{R}_2 \Longrightarrow \forall R_3\ \bar{R}_1 \circ \bar{R}_3 \subseteq \bar{R}_2 \circ \bar{R}_3 \Leftrightarrow \forall R_3\ \overline{\bar{R}_1 \circ \bar{R}_3} \supseteq \overline{\bar{R}_2 \circ \bar{R}_3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall R_3\ R_1 \star \mathrm{R}_3 \supseteq R_2 \star \mathrm{R}_3$$

Аналогично, устанавливается, что

$$R_1 \supseteq R_2 \Longrightarrow \forall R_3\ \mathrm{R}_3 \star R_1 \supseteq \mathrm{R}_3 \star R_2.$$

Из чего следует, что $\bar{\mathcal{S}}_{R(U\times U)} = \langle 2^{U\times U}, (\star, \supseteq)\rangle$- упорядоченная полугруппа, вообще говоря, решеточно упорядоченная, которую будем называть двойственной к полугруппе $\mathcal{S}_{R(U\times U)}$.

Исходя из характеристических условий, определяющих результат операций   и , можем записать

$$u_1 R_1 \circ (R_2 \star R_3) u_2 \Leftrightarrow \exists u_3 (u_1 R_1 u_3) \wedge (\forall u_4 u_3 R_2 u_4 \vee u_4 R_3 u_2).$$

(13)

Из (1)-(3), (6), (7), (10), (13) и свойств логических операций над предикатами следует, что

$$u_1 R_1 \circ (R_2 \star R_3) u_2 \Longrightarrow u_1 (\,R_1 \circ R_2) \star R_3 u_2\ \wedge$$
$$\wedge \left(\forall u_4 \big(\exists u_3 (u_1 R_1 u_3 \wedge u_3 R_2 u_4)\big) \vee \exists u_3 (u_1 R_1 u_3)\right). \qquad (14)$$

Далее, из (5), (9) и свойств операции следует, что

$$\forall u_4\big(\exists u_3(u_1R_1u_3 \wedge u_3R_2u_4)\big) \Rightarrow \exists u_3(u_1R_1u_3 \wedge u_3R_2u_4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists u_3(u_1R_1u_3) \wedge \exists u_3(u_3R_2u_4) \Rightarrow \exists u_3(u_1R_1u_3).$$

Откуда получаем, что $\forall u_4\big(\exists u_3(u_1R_1u_3 \wedge u_3R_2u_4)\big) \vee \exists u_3(u_1R_1u_3) \Rightarrow \exists u_3(u_1R_1u_3)$, следовательно,

$$u_1R_1 \circ (R_2 \star R_3)u_2 \Rightarrow u_1(\,R_1 \circ R_2) \star R_3u_2 \wedge \exists u_3(u_1R_1u_3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u_1(\,R_1 \circ R_2) \star R_3u_2 \wedge u_1 \in D_{R_1}.$$

Таким образом,

$$R_1 \circ (R_2 \star R_3) \subseteq (\,R_1 \circ R_2) \star R_3 \cap \big\{(u_1,u_2)\big|u_1 \in D_{R_1}\big\} = (\,R_1 \circ R_2) \star R_3 \cap 1_{D_{R_1}\times U}.$$

Аналогично, используя (1)-(4), (6), (7), (9), (10), (12), можно показать, что

$$(R_2 \star R_3) \circ R_1 \subseteq R_2 \star (\,R_3 \circ R_1) \cap 1_{U\times E_{R_1}} = R_2 \star (\,R_3 \circ R_1) \cap 1_{U\times D_{R_1^{-1}}},$$
$$R_1 \star (R_2 \circ R_3) \supseteq (\,R_1 \star R_2) \circ R_3 \cup 1_{\bar{D}_{\bar{R}_1}\times U},$$
$$(R_2 \circ R_3) \star R_1 \supseteq R_2 \circ (\,R_3 \star R_1) \cup 1_{U\times \bar{E}_{\bar{R}_1}} = R_2 \circ (\,R_3 \star R_1) \cup 1_{U\times \bar{D}_{\bar{R}_1^{-1}}}.$$

Кроме того, очевидно,

$$(R_1 \star R_2)^{-1} = \big(\overline{\bar{R}_1 \circ \bar{R}_2}\big)^{-1} = \overline{(\bar{R}_1 \circ \bar{R}_2)^{-1}} = \big(\overline{\bar{R}_2^{-1} \circ \bar{R}_1^{-1}}\big) = R_2^{-1} \star R_1^{-1},$$
$$\bar{1}_{D_{R_1}\times U} = \overline{D_{R_1} \times U} = \big\{(u_1,u_2)\big|\,u_1 \notin D_{R_1} \vee u_2 \notin U\big\} = \big\{(u_1,u_2)\big|\,u_1 \notin D_{R_1}\big\} =$$
$$= \big\{(u_1,u_2)\big|\,u_1 \in \bar{D}_{R_1}\big\} = 1_{\bar{D}_{R_1}\times U}, 1^{-1}_{D_{R_1}\times U} = \big(D_{R_1} \times U\big)^{-1} = U \times D_{R_1}$$
$$= 1_{U\times D_{R_1}}.$$

Введем унарную операцию на множестве $2^{U\times U}$ по правилу:

$$\tilde{R} = 1_{U\times D_R}.$$

В силу сказанного, представляет интерес изучение алгебраической структуры $\mathcal{A}_{R(U\times U)} = \langle 2^{U\times U}, (\cup,\cap,{}^{-},{}^{\sim},{}^{-1},\circ,\star,\subseteq)\rangle$.

Литература

1. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп [Текст]: в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М.: Мир, 1972.

2. Биркгоф, Г. Теория решеток [Текст] / Г. Биркгоф. – М.: Наука, 1984.– 568 с.

3. Фукс, Л. Частично упорядоченные алгебраические системы [Текст] / Л. Фукс. – М.: Мир, 1965.– 342 с.