Алгоритм реализации вычисления всех элементов матрицы M имеет верхние оценки временной и емкостной сложности порядка $O(n^4)$ и $O(n^2)$, соответственно.

Литература

1. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ [Текст] / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. 2-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1296 с.
2. Биркгоф, Г. Теория структур [Текст] / Г. Биркгоф. М.: Издательство иностранной литературы, 1952. 407 с.
3. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы [Текст] / М. Свами, М., К Тхуласираман. М.: Мир, 1984. 455 с.

В.П. Цветов, Г.И. Леонович, С.Я. Новиков,
М.Н. Осипов, Д.Э. Клепнев, Е.А. Савинов

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКОМ ДАННЫХ В РАДИОКАНАЛЕ

(Самарский государственный университет)

В последнее время широкое распространение получила схема цифровой квадратурной амплитудной модуляции, использующая мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов - QAM-OFDM-модуляция - [1]. В практических реализациях QAM-OFDM-сигналы получаются путем использования быстрого преобразования Фурье.

Математическая модель QAM-OFDM-модуляции состоит в следующем. Передаваемый символ кодируется кортежем комплексных значений $Z = \langle Z(0), Z(1),..., Z(N-1)\rangle$, где $Z(k) = I(k) + iQ(k)$; и в случае QAM-16 $I(k), Q(k) \in \{1,2,3,4\}$ – квадратурная и синфазная составляющие символа. Кодировка QAM-символа преобразуется в непрерывную функцию времени $s(t)$ на интервале $t \in [0,T]$, где T характеризует длительность передачи символа.

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot e^{\frac{i2\pi kt}{T}}, \tag{1}$$

На передающей стороне вещественная и мнимая части $s(t)$ поступают на вход квадратурного модулятора, а затем через антенну- в радиоканал. На принимающей стороне происходит демодуляция сигнала, который с учетом искажений может быть представлен в виде (2)

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Z}(k) \cdot e^{\frac{i2\pi kt}{T}}, \tag{2}$$

Для восстановления $Z = \langle Z(0), Z(1),..., Z(N-1)\rangle$ на принимающей стороне применяется дискретизация сигнала по временным отсчетам $t(n) = \frac{T}{N} \cdot n$, после чего кортеж значений $S = \langle S(0), S(1),..., S(N-1)\rangle$, где $S(n) = s(t(n)) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot e^{\frac{i2\pi kn}{N}}$, может трактоваться как обратное дискретное преобразование Фурье кортежа $Z = \langle Z(0), Z(1),..., Z(N-1)\rangle$.

Таким образом, для нахождения $Z = \langle Z(0), Z(1),..., Z(N-1)\rangle$ остается применить масштабированное прямое преобразование Фурье к кортежу $S = \langle S(0), S(1),..., S(N-1)\rangle$, воспользовавшись равенством $Z(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n) \cdot e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}$, при $n \in \{0,1,..., N-1\}$.

Тем самым, задача о восстановлении переданного QAM-символа на принимающей стороне сводится к измерению принятого сигнала на конечном числе временных отсчетов $t(n) = \frac{T}{N} \cdot n$, при $n \in \{0,1,..., N-1\}$, и решению системы линейных уравнений

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot e^{\frac{i2\pi kn}{N}}, \ n \in \{0,1,..., N-1\}, \tag{3}$$

относительно переменных $Z(k)$, исходя из равенства

$$Z(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n) \cdot e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}, \ k \in \{0,1,..., N-1\}. \tag{4}$$

В матричной форме (3) и (4) могут быть записаны в виде

$$\hat{F}_{NN} \bullet Z = S, \tag{5}$$

$$Z = \frac{1}{N} \cdot \hat{F}^{*}_{NN} \bullet S, \tag{6}$$

где $\hat{F}_{NN} = \left(\varepsilon_N^{nk}\right) = \left(e^{\frac{i2\pi kn}{N}}\right)$ - квадратная матрица размерности $N \times N$, $\hat{F}^{*}_{NN} = \left(\varepsilon_N^{-kn}\right) = \left(e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}\right)$ - эрмитово-сопряженная матрица к матрице $\hat{F}$.

Заметим, что в силу свойств $e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$ для восстановления значений $Z = \langle Z(0), Z(1),..., Z(N-1)\rangle$ можно использовать произвольную дискретизацию $t(n) = \frac{T}{M} \cdot n$ при $M \ge N$, измеряя значения $S = \langle S(0), S(1),..., S(M-1)\rangle$, где $S(n) = s(t(n)) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot e^{\frac{i2\pi kn}{M}}$. Нетрудно показать, что равенство $Z(k) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} S(n) \cdot e^{\frac{-i2\pi kn}{M}}$, при $n \in \{0,1,..., N-1\}$ будет сохраняться.

Таким образом, будут иметь место аналоги равенств (5) и (6)

$$\hat{F}_{MN} \bullet Z = S\,, \tag{7}$$

$$Z = \frac{1}{M} \cdot \hat{F}^{*}_{NM} \bullet S\,, \tag{8}$$

с прямоугольными матрицами $\hat{F}_{MN} = \left(\varepsilon_M^{nk}\right) = \left(e^{\frac{i2\pi kn}{M}}\right)$, $\hat{F}^{*}_{NM} = \left(\varepsilon_M^{-kn}\right) = \left(e^{\frac{-i2\pi kn}{M}}\right)$ размерности $M \times N$ и $N \times M$, соответственно.

При этом, для матриц $\hat{F}_{MN}$ и $\hat{F}^{*}_{NM}$ и будут выполняться равенства (9), (10).

$$\frac{1}{M} \cdot \hat{F}_{MN} \bullet \hat{F}^{*}_{NM} = E_M\,, \tag{9}$$

$$\frac{1}{M} \cdot \hat{F}^{*}_{NM} \bullet \hat{F}_{MN} = E_N\,, \tag{10}$$

где E_M и E_N - единичные матрицы размерности $M \times M$ и $N \times N$.

Таким образом, матрица $\frac{1}{M} \cdot \hat{F}^{*}_{NM}$ является псевдообратной матрицей к матрице $\hat{F}_{MN}$.

Рассмотрим задачу об определении кодировки QAM-символа $Z = \langle Z(0), Z(1), ..., Z(N-1) \rangle$ по измерениям сигнала $s(t)$ на некотором подинтервале $[0, T_0]$ интервала длительности символа $[0, T]$.

Как это было сделано выше, зададим дискретизацию $t(n) = \frac{T}{M} \cdot n$ при $M > N$, измеряя значения $S(n) = s(t(n)) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot e^{\frac{i2\pi kn}{M}}$. для $n \in \{0, 1, ..., M_0 - 1\}$ где $M > M_0 \geq N$.

Поставим задачу о решении системы уравнений (11) относительно набора переменных $Z = \langle Z(0), Z(1), ..., Z(N-1) \rangle$.

$$\hat{F}^{M}_{M_0 N} \bullet Z = S\,, \tag{11}$$

с матрицей $\hat{F}^{M}_{M_0 N} = \left(\varepsilon_M^{nk}\right) = \left(e^{\frac{i2\pi kn}{M}}\right)$ размерности $M_0 \times N$.

Понятно, что отношение $\frac{M}{M_0}$ характеризует отношение длины интервала длительности символа $[0, T]$ к длине подинтервала $[0, T_0]$, при $T_0 = \frac{M_0}{M} \cdot T$, то есть является мерой возможного уменьшения времени передачи символа. Например, при $M = 2 \cdot N$ и $M_0 = N$ это время может быть уменьшено в два раза. При наличии обратной связи подобный подход позволяет изменять скорость передачи данных в радиоканале в зависимости от динамики помех без перестройки основных параметров схемы QAM-OFDM-модуляции.

Основная проблема, возникающая при решении задачи (11), вызвана ее неустойчивостью которая выражается, в частности, в плохой обусловленности матрицы $\hat{F}^{M}_{M_0 N}$ при $M >> N$ и $M_0 = N$. Зависимость числа обусловленности

$\mu\left(\widehat{F}_{M_0 N}^{M}\right)$ матрицы $\widehat{F}_{M_0 N}^{M}$ от отношения $\frac{M}{M_0}$ имеет экспоненциальный характер. В частности, при $N = 16$, $M_0 = N$ и $M \in \{N, N+1, ..., 2 \cdot N\}$, эта зависимость имеет вид $\mu\left(\widehat{F}_{M_0 N}^{M}\right) = e^{9.021086400 \cdot \frac{M}{M_0} - 0.77195513}$

Таким образом, решение задачи (11) при неточно заданной правой части, полученной в результате измерений искаженного сигнала (2), и вычисленных с погрешностью значений элементов матрицы $\widehat{F}_{M_0 N}^{M}$, может привести к значительной погрешности результата. Тем самым, задача уменьшения длительности сигнала, передаваемого с использованием QAM-OFDM-модуляции, в приведенной постановке является некорректной по Адамару и для своего решения требует применения методов регуляризации [2].

Литература

1. Прокис, Дж. Цифровая связь. Пер. с англ. [Текст] / Дж. Прокис. 2-е изд. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.

2. Тихонов, А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения [Текст] / А.Н. Тихонов. // ДАН СССР, 1965. Т. 163, №. С. 97– 102 с.