



4. The Next Generation Encryption Solution Kit[Электронныйресурс]/ Сайт-компанииOSR. Режимдоступа: <http://www.osr.com/monadnock/>
5. WindowsDriverKit [Электронныйресурс]/ СайтWikipedia. Режим доступа: [http://en.wikipedia.org/wiki/Windows\\_Driver\\_Kit](http://en.wikipedia.org/wiki/Windows_Driver_Kit)
6. File System Filter Drivers[Электронныйресурс]/СайткомпанииMicrosoft. Режим доступа:  
[https://msdn.microsoft.com/en-us/library/windows/hardware/ff540382\(v=vs.85\).aspx](https://msdn.microsoft.com/en-us/library/windows/hardware/ff540382(v=vs.85).aspx)

В.П. Цветов

## ОБ ОДНОМ СИНТАКСИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ НА ГРАФАХ

(Самарский государственный университет)

Алгоритмы на графах представляют интерес для различных прикладных направлений, в частности, они могут быть полезны при проектировании информационных систем или построении систем безопасности. Существующие алгоритмы используют различные подходы, опирающиеся на специальные представления и структуры данных, обширная библиография по которым представлена, например в [1].

В статье рассматривается алгоритм нахождения оптимальных маршрутов на реберно-размеченных графах. Результат не претендует на практическую новизну, но демонстрирует возможный абстрактно алгебраический метод решения задач, связанных с построением степеней элементов ограниченной сверху структурно упорядоченной полугруппы [2] в матричном представлении.

Введем следующие обозначения.

$\mathbb{N}$ -множество натуральных чисел;

$1..n := \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ ;

$\mathcal{A} := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ - алфавит мощности  $n$ ;

$W_{\mathcal{A}}^k$ - множество слов длины  $k$  над алфавитом  $\mathcal{A}$ ;

$W_{\mathcal{A}} := \bigcup_{k=0}^{\infty} W_{\mathcal{A}}^k$ - множество слов над алфавитом  $\mathcal{A}$ ;

$\langle W_{\mathcal{A}}, (\cdot) \rangle$ - моноид слов над алфавитом  $\mathcal{A}$  с операцией сцепления;

$\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+$ - множество неотрицательных вещественных чисел;

$[0, 1] \subset \mathbb{R}$ - замкнутый интервал вещественных чисел от  $0$  до  $1$ ;

$\langle \mathbb{R}, (\cdot, +) \rangle$ - поле вещественных чисел;

$\langle \mathbb{R}, (\wedge, \vee, \cdot, +) \rangle$ - решетка вещественных чисел, где  $\xi_1 \wedge \xi_2 := \min(\xi_1, \xi_2)$ ,

$\xi_1 \vee \xi_2 := \max(\xi_1, \xi_2)$ ;

$\mathbb{R}^{\infty} := \mathbb{R} \cup \{l\}$ - расширенное множество вещественных чисел;

$\langle \mathbb{R}^{\infty}, (\wedge, \vee, \cdot, +) \rangle$ - расширенная алгебра вещественных чисел, где  $\xi \in \mathbb{R}$  и

$\xi \wedge l = l \wedge \xi := \xi$ ,  $\xi \vee l = l \vee \xi = \xi \cdot l = l \cdot \xi = \xi + l = l + \xi = l \cdot l = l + l := l$ ;

$\langle \mathbb{R}_+^{\infty}, (\wedge, \vee, \cdot, +) \rangle$ - подалгебра  $\langle \mathbb{R}^{\infty}, (\wedge, \vee, \cdot, +) \rangle$  с носителем  $\mathbb{R}_+^{\infty}$ ;



$2^V$ - булеан над множеством  $V$ ;

$|V|$ - мощность множества  $V$ ;

$U \times V$ - декартово произведение множеств  $U$  и  $V$ ;

$2^{V \times V}$ - множество бинарных отношений на  $V$ ;

$\langle 2^{V \times V}, (\circ) \rangle$ - моноид бинарных отношений на  $V$  с операцией произведения;

$R^k$ -  $k$ -ая степень бинарного отношения  $R \in 2^{V \times V}$ , где  $R^k := R^{k-1} \circ R$ ,  
 $R^1 := R, k > 1$ .

Определим множества термов  $T(\mathbb{R}, W_{\mathcal{A}}) := \{\xi * w \mid \xi \in \mathbb{R}, w \in W_{\mathcal{A}}\}$ ,  
 $T(\mathbb{R}^{\infty}, W_{\mathcal{A}}) := \mathbb{R} \cup W_{\mathcal{A}} \cup T(\mathbb{R}, W_{\mathcal{A}}) \cup \{l\}$  и расширенную алгебру термов  
 $\langle T(\mathbb{R}^{\infty}, W_{\mathcal{A}}), (\odot, \oplus) \rangle$ , полагая для произвольных  $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}; w, w_1, w_2 \in W_{\mathcal{A}};$   
 $t = \xi * w, t_1 = \xi_1 * w_1, t_2 = \xi_2 * w_2 \in T(\mathbb{R}, W_{\mathcal{A}}); l$ :

$$\xi_1 \odot \xi_2 := \xi_1 + \xi_2;$$

$$\xi_1 \oplus \xi_2 := \xi_1 \wedge \xi_2;$$

$$\xi \odot w = w \odot \xi = \xi \oplus w = w \oplus \xi := \xi * w;$$

$$\xi \odot t_1 = t_1 \odot \xi := (\xi + \xi_1) * w_1;$$

$$\xi \oplus t_1 = t_1 \oplus \xi := \begin{cases} \xi * w_1, \xi \wedge \xi_1 = \xi \\ t_1, \xi \wedge \xi_1 = \xi_1 \end{cases};$$

$$\xi \odot l = l \odot \xi := l;$$

$$\xi \oplus l = l \oplus \xi := \xi;$$

$$w_1 \odot w_2 = w_1 \oplus w_2 := w_1 * w_2;$$

$$w_2 \odot w_1 = w_2 \oplus w_1 := w_2 * w_1;$$

$$w \odot t_1 := \xi_1 * (w * w_1);$$

$$t_1 \odot w := \xi_1 * (w_1 * w);$$

$$w \oplus t_1 = t_1 \oplus w := t_1;$$

$$w \odot l = l \odot w := l;$$

$$w \oplus l = l \oplus w := w;$$

$$t_1 \odot t_2 := (\xi_1 + \xi_2) * (w_1 * w_2);$$

$$t_1 \oplus t_2 := \begin{cases} t_1, \xi_1 = \xi_2 \text{ или } \xi_1 \wedge \xi_2 = \xi_1 \\ t_2, \xi_1 \neq \xi_2 \text{ и } \xi_1 \wedge \xi_2 = \xi_2 \end{cases};$$

$$t_1 \odot l = l \odot t_1 = l \odot l = l \oplus l := l;$$

$$t_1 \oplus l = l \oplus t_1 := t_1.$$

Введем обозначение  $\sum_{k=1}^n \tau_k := \tau_1 \oplus \tau_2 \oplus \dots \oplus \tau_n$ , где  $\tau_k \in T(\mathbb{R}^{\infty}, W_{\mathcal{A}})$ ,  
 $k \in 1..n$ .

Рассмотрим множество квадратных матриц порядка  $n$  над множеством термов  
 $M(T(\mathbb{R}^{\infty}, W_{\mathcal{A}}), n) := \{(\tau_{ij}) \mid \tau_{ij} \in T(\mathbb{R}^{\infty}, W_{\mathcal{A}})\}$ . Определим матричные  
 операции полагая для произвольных  $M_1 = (\tau_{ij}^1)$ ,  
 $M_2 = (\tau_{ij}^2) \in M(T(\mathbb{R}^{\infty}, W_{\mathcal{A}}), n)$ :

$$M_1 \square M_2 := (\sum_{k=1}^n \tau_{ik}^1 \odot \tau_{kj}^2);$$

$$M_1 \boxplus M_2 := (\tau_{ij}^1 \oplus \tau_{ij}^2);$$



$$M_1 \boxtimes M_2 := (\tau_{ij}^1 \odot \tau_{ij}^2).$$

Введем обозначение  $\sum_{k=1}^n M_k := M_1 \boxplus M_2 \boxplus \dots \boxplus M_n$ , где  $M_k \in \mathcal{M}(T(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{W}_{\mathcal{A}}), n)$ ,  $k \in 1..n$ .

Рассмотрим матричную алгебру  $\langle \mathcal{M}(T(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{W}_{\mathcal{A}}), n), (\boxplus, \boxtimes) \rangle$ .

Естественным образом определяются подалгебры  $\langle T(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}_{\mathcal{A}}), (\odot, \oplus) \rangle$ ,  $\langle \mathcal{M}(T(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}_{\mathcal{A}}), n), (\boxplus, \boxtimes) \rangle$ .

Рассмотрим тотальную функцию  $\rho: 1..n \times 1..n \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Значения функции  $\rho$  будем интерпретировать как длину ребра размеченного графа  $G$ , соединяющего вершины с номерами  $i$  и  $j$ , если  $\rho(i, j) \in \mathbb{R}_+$ , и как отсутствие ребра в случае, если  $\rho(i, j) = \iota$ . Воспользуемся матричным представлением функции  $\rho$ , полагая  $P := (\rho_{ij}) := (\rho(i, j))$ .

Определим матрицы  $M_1 = (\tau_{ij}^1)$ ,  $M_2 = (\tau_{ij}^2) := (\tau_{ji}^1) = M_1^T$ , полагая  $\tau_{ij}^1 := \alpha_i$ .

Хорошо известно [3] следующее свойство транзитивного замыкания бинарного отношения  $R \in 2^{V \times V}$  на конечном множестве  $V$ :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \bigcup_{k=1}^{|V|} R^k,$$

из которого, в силу определения алгебры  $\langle \mathcal{M}(T(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{W}_{\mathcal{A}}), n), (\boxplus, \boxtimes) \rangle$ , следует, что элементы матрицы

$$M = (\tau_{ij}) := \left( \sum_{k=1}^n (P \boxtimes M_1)^k \right) \boxtimes M_2$$

будут иметь вид  $\tau_{ij} = \xi_{ij} * w_{ij} \in T(\mathbb{R}, \mathcal{W}_{\mathcal{A}})$ , если на графе  $G$  существует маршрут из вершины с номером  $i$  в вершину с номером  $j$ , и  $\tau_{ij} = \iota$  в случае, если такого маршрута не существует. При этом  $w_{ij} = \alpha_i \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_s} \alpha_j$  будет определять маршрут наименьшей длины из вершины с номером  $i$  в вершину с номером  $j$  в вершинной форме, а  $\xi_{ij}$  будет равно длине этого маршрута.

Предложенный метод допускает очевидную модификацию посредством переопределением операций

$$\begin{aligned} \xi_1 \odot \xi_2 &:= \xi_1 \cdot \xi_2, \\ \xi_1 \oplus \xi_2 &:= \xi_1 \vee \xi_2; \\ w \odot 0 &= 0 \odot w := 0, \\ t \odot 0 &= 0 \odot t := 0, \end{aligned}$$

а также функции  $\rho: 1..n \times 1..n \rightarrow [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^n \rho(i, j) = 1$ , и использования алгебр  $\langle T([0, 1], \mathcal{W}_{\mathcal{A}}), (\odot, \oplus) \rangle$ ,  $\langle \mathcal{M}(T([0, 1], \mathcal{W}_{\mathcal{A}}), n), (\boxplus, \boxtimes) \rangle$  для решения задач о блужданиях, порожденных стохастическими матрицами.



Алгоритм реализации вычисления всех элементов матрицы  $M$  имеет верхние оценки временной и емкостной сложности порядка  $O(n^4)$  и  $O(n^2)$ , соответственно.

### Литература

1. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ [Текст] / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. 2-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1296 с.
2. Биркгоф, Г. Теория структур [Текст] / Г. Биркгоф. М.: Издательство иностранной литературы, 1952. 407 с.
3. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы [Текст] / М. Свами, М., К Тхуласираман. М.: Мир, 1984. 455 с.

В.П. Цветов, Г.И. Леонович, С.Я. Новиков,  
М.Н. Осипов, Д.Э. Клепнев, Е.А. Савинов

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКОМ ДАННЫХ В РАДИОКАНАЛЕ

(Самарский государственный университет)

В последнее время широкое распространение получила схема цифровой квадратурной амплитудной модуляции, использующая мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов - QAM-OFDM-модуляция - [1]. В практических реализациях QAM-OFDM-сигналы получаются путем использования быстрого преобразования Фурье.

Математическая модель QAM-OFDM-модуляции состоит в следующем. Передаваемый символ кодируется кортежем комплексных значений  $Z = \langle Z(0), Z(1), \dots, Z(N-1) \rangle$ , где  $Z(k) = I(k) + iQ(k)$ ; и в случае QAM-16  $I(k), Q(k) \in \{1, 2, 3, 4\}$  – квадратурная и синфазная составляющие символа. Кодировка QAM-символа преобразуется в непрерывную функцию времени  $s(t)$  на интервале  $t \in [0, T]$ , где  $T$  характеризует длительность передачи символа.

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot e^{\frac{i2\pi kt}{T}}, \quad (1)$$

На передающей стороне вещественная и мнимая части  $s(t)$  поступают на вход квадратурного модулятора, а затем через антенну - в радиоканал. На принимающей стороне происходит демодуляция сигнала, который с учетом искажений может быть представлен в виде (2)

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Z}(k) \cdot e^{\frac{i2\pi kt}{T}}, \quad (2)$$