странства. Будем говорить, что W_n, n=1,… , N, (или соответствующие проекторы) обеспечивают восстановлениенормы, если для любых x, uиз H^M равенства $\|P_n x\|=\|P_n y\|$ дляn=1,… , Nобеспечивают равенство

$$\|x\|=\|y\|.$$

Если набор подпространств обеспечивает восстановление фазы[1],то он обеспечивает восстановление нормы. Обратное, вообще говоря, неверно.Каждый набор ортонормированных векторов обеспечивает восстановление нормы,но в нем слишком мало элементов для восстановления фазы.

Доказано следующее утверждение.ПустьW_n, n=1,… , N, -наборподпространстввН^M,который обеспечивает восстановление фазы, и пустьP_n, _n=1,… , N, -ортопроекторы на эти подпространства. Следующие утверждения эквивалентны:

1) I-P_n, n=1,… , N, обеспечивают восстановление фазы.
2) I-P_n, n=1,… , N, обеспечивают восстановление нормы.

Литература

1. Новиков С.Я. Восстановление сигнала по модулям коэффициентов. Перспективные информационные технологии (ПИТ 2014): труды Международной научно-технической конференции / под ред. С.А. Прохорова. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2014. С. 223.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания, проект №204.

С.Я. Новиков, М.Е. Федина

ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА[1]

(Самарский государственный университет)

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания, проект №204.

Дискретизация и квантование аналогового сигнала приводят к рассмотрению сигнала как элемента некоторого конечномерного пространства V . В таком пространстве, вообще говоря, комплексном, вводится комплексное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ и соответствующая эрмитова норма $\|\cdot\|$. По ортонормированному базису (ОНБ) $\{u_i\}_{i=1}^M$ «сигнал» $v \in V$ единственным образом представляется суммой

$$v = \sum_{i=1}^{M} (v, u_i) u_i.$$

Комплексные коэффициенты описываемого представления $\langle v, u_i \rangle$ дают возможность полного восстановления сигнала и часто понимаются как «измерения» сигнала. Реальные измерения получаются вещественными, и зазор между $\langle v, u_i \rangle$ и амплитудами измерений $|\langle v, u_i \rangle|$ оказывается непреодолимым при восстановлении сигнала.

Представляя сигнал в различных базисах, можно получить о нем разностороннюю информацию. Так, переход от представления по ортам к представлению в базисе Фурье, позволяет получить частотные характеристики сигнала, дающие широкие возможности для его цифровой обработки.

Последние годы значительное количество работ [3–6] посвящено решению следующей задачи: построить системы $\Phi=\{\varphi_i\}_{i\in I}$, для которых возможно восстановить v по набору чисел $|\langle v, \varphi_i \rangle|$.

В классе ОНБ такая задача не имеет решения.

В англоязычной литературе сформулированная выше задача и связанные с ней вопросы составляют раздел прикладных исследований под названием «PHASE RETRIEVAL» (возвращение, воспроизведение фазы).

Пионерской работой в этом направлении является работа [3], в которой была доказана теоретическая возможность точного восстановления сигнала (с точностью до унимодулярного множителя), если в качестве системы представления используются полные избыточные системы.

Дальнейшее развитие идет по двум направлениям:

1) поиск таких систем «измерительных» векторов $\Phi=\{\varphi_i\}_{i\in I}$, которые позволят восстановить произвольный сигнал $v \in V$ по набору вещественных чисел $|\langle v, \varphi_i \rangle|$;

2) обоснование возможности восстановления произвольного сигнала с большой вероятностью для относительно небольшого числа «случайно выбранных» измерительных векторов.

Второй подход близок теории сжатого зондирования.

Следующее определение конкретизирует свойство инъективности отображения

$$v \to \{|\langle v, \varphi_i \rangle|\}_{i\in I},$$

которое является ключевым в описываемом круге вопросов.

Определение. *Набор векторов* $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ *в* $\mathbf{R}^M$ *(или* $\mathbf{C}^M$*) обеспечивает* **воспроизведение фазы (ВФ)**, *если для любых* $x, y \in \mathbf{R}^M$ *(или* $\mathbf{C}^M$*), таких, что* $|\langle x, \varphi_i \rangle| = |\langle y, \varphi_i \rangle|$ *для всех* $i = 1, \dots, N$, *получается равенство* $x = cy$, *где* $c = \pm 1$ *для* $\mathbf{R}^M$ *(и* $c \in \boldsymbol{T}$ *для* $\mathbf{C}^M$, *где* $\boldsymbol{T}$ *— единичная окружность на комплексной плоскости).*

Фреймом конечномерного пространства называется любая полная система векторов, состоящая из, возможно, линейно зависимых элементов. Полнота системы означает, что ее линейная оболочка равна V [1, 2].

Фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbf{R}^M$ обеспечивает восстановление фазы тогда и только тогда, когда он обладает свойством альтернативной полноты.

Альтернативная полнота системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ означает, что при произвольном выборе $S \subset \{1,\ldots,N\}$ либо $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, либо $\{\varphi_n\}_{n\in S^C}$ полны в V.

В частности, полный спарк, содержащий, по крайней мере, $2M-1$ векторов, допускает восстановление фазы. Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ допускает восстановление фазы в $\mathbf{R}^M$, то $N \geq 2M-1$, никакое подмножество из $2M-2$ элементов не может обеспечить восстановление фазы.

Спарком системы называется мощность наименьшего линейно зависимого подмножества этой системы. Если спарк системы больше размерности пространства, то любое подмножество из M элементов линейно независимо, в этом случае систему называют *полным спарком [7]*.

В пространстве $\mathbf{C}^M$ свойство альтернативной полноты является лишь необходимым условием инъективности, а известный критерий [5] имеет лишь теоретическое значение.

Как для вещественного, так и для комплексного пространства актуальны поиски алгоритмов восстановления.

Для комплексного пространства до сих пор неизвестно минимально возможное количество векторов системы, обеспечивающей восстановление фазы. Довольно давно высказана гипотеза, что такое число равно .

Однако недавно был построен пример системы в **R**^4, состоящей из 11 векторов и допускающей восстановление фазы. Что это: особенность 4-мерного пространства или выражение общей закономерности, неизвестно.

Переходим к рассмотрению другого подхода решения задачи восстановления фазы. Он основан на синтезе идей сжатого зондирования и т. н. «подъема фазы» [8]. Подъем фазы поднимает нелинейную задачу в более высокие размерности и превращает ее в линейную.

Пусть $\mathcal{A}(x)(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 = b_n, \quad n = 1, \ldots, N.$

Вещественные числа b_n предполагаются известными результатами измерения амплитуды.

Определим вещественное M^2-мерное пространство $\mathbf{H}^{M\times M}$ самосопряженных $M \times M$ матриц.

Для заданного множества «измерительных векторов» $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbf{C}^M$ определяется *оператор матричного анализа* $\boldsymbol{A}\colon \mathbf{H}^{M\times M} \to \mathbf{R}^N$ соотношением $\boldsymbol{A}H(n) = \langle H, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS}$, здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{HS}$ обозначает скалярное произведение Гильберта-Шмидта, индуцирующее матричную норму Фробениуса $\|\cdot\|_F$ [9].

Подробнее,

$$\langle H, G\rangle_{HS} = \sum_{m,n=1}^{M} h_{mn}\overline{g_{mn}} = Tr[G^*H]$$

.

Заметим, что $\boldsymbol{A}$ - линейный оператор, и $\boldsymbol{A}\, xx^*(n) = Tr[\varphi_n^* xx^*\varphi_n] = \mathcal{A}\,(x)(n).$

Полученное равенство показывает, что при таком расширении процесс измерения амплитуды становится линейным за счет увеличения размерности пространства. Добавим теперь к проделанному подъему фазы вероятностные идеи сжатого зондирования. Задача восстановления фазы допускает вероятностную формулировку:

минимизировать $Tr[X]$ на множестве неотрицательных матриц $X \succcurlyeq 0$ таких, что $Tr[\varphi_n \varphi_n^* X] = b_n$, $n = 1, \dots, N$, здесь $\varphi_n(\omega)$ - независимые одинаково распределенные векторы в V.

В комплексном пространстве в качестве векторов $\varphi_n(\omega)$ рассматривают векторы с равномерным распределением на комплексной сфере радиуса $\sqrt{M}$ или с нормальным распределением $\mathcal{N}\left(0, \frac{I_M}{2}\right)$+i $\mathcal{N}\left(0, \frac{I_M}{2}\right)$.

В вещественном пространстве, соответственно, - равномерное распределение на сфере радиуса $\sqrt{M}$ или нормальное распределение $\mathcal{N}(0, I_M)$.

Теорема [8]. *Для всех* $x \in \mathbb{C}^M$ *или* $x \in \mathbb{R}^M$ *точное решение задачи подъема фазы существует с вероятностью* $\geq 1 - O(e^{-\gamma N})$, *если количество измерений* $N \geq c_0 M$, *где* c_0 *и* γ – *абсолютные константы.*

Таким образом, точное восстановление сигнала с большой вероятностью возможно сразу для всех входящих сигналов.

Если измерения искажены шумом w:

$$b_n = |\langle x_0, \varphi_n \rangle|^2 + w_n, \; n = 1, \dots, N,$$

то минимизируется сумма $\sum_{n=1}^{N} |Tr[\varphi_n \varphi_n^* X] - b_n|$ на множестве всех неотрицательных матриц $X \succcurlyeq 0$.

Решение последней задачи (обозначим его X_0) по случайным векторам равномерного и нормального распределения с вероятностями той же асимптотики, что указана в предыдущей теореме, удовлетворяет оценке

$$\|X_0 - x_0 x_0^*\|_F \leq C_0 \cdot \frac{\|w\|_1}{N},$$

с некоторой абсолютной константой C_0.

Литература

1. Новиков, И. Я. Теория всплесков/И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
2. Новиков, С.Я. Фреймы конечномерных пространств/С. Я. Новиков, М. А. Лихобабенко. Самара: Самарский университет, 2013. 52 с.
3. Balan, R. On signal reconstruction/R. Balan , P. Casazza, D. Edidin// Appl.Comput. Harmon. Anal. 2006. 20. P. 345-356.
4. Bodmann, B.G. Stable phase retrieval with low-redundancy frames/B.G. Bodmann, N. Hammen//Available online: arXiv:1302.5487.
5. Bandeira, A. S. Saving phase: Injectivity and stability/A.S. Bandeira, J. Cahill, D. G. Mixon, A. A. Nelson//Available online: arXiv:1302.4618v1.
6. Fickus, M. Phase retrieval from very few measurements/M. Fickus, D. G. Mixon, A. A. Nelson, Ya. Wang//Available online: arXiv:1307.7176v1.
7. Cahill, J. Full Spark Frames/J. Cahill, D. G. Mixon//Available online: arXiv:1110.3548.

8. Candes, E. J. PhaseLift: Exact and Stable Signal Recovery from Magnitude Measurements via Convex Programming// E. J. Candes, Th. Strohmer, V. Voroninski// Available online: arXiv: 1109.4499.

9. Хорн, Р. Матричный анализ/Р. Хорн, Ч. Джонсон. М.: Мир, 1989. 655 с.

М.Н. Осипов, Н.А. Шарафутдинов, Ю.Д. Щеглов, И.Н. Фалилеев, М.Е. Федина

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ КОМПЛЕКС ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

(Самарский государственный университет)

Классическая реализация интерферометрических измерений предполагает обеспечение жестких условий измерения, исключающих различного рода помехи. Как правило, интерферометрические установки стационарны и часто требуют механического контакта с контролируемым объектом. Расшифровка экспериментальных интерферограмм также является чрезвычайно трудоемким процессом, в результате которого могут появляться неоднозначные результаты. Особое внимание в настоящее время уделяется интерферометрическим методам основанных на применении цифровой спекл-интерферометрии. Цифровая спекл-интерферометрия позволяет исследовать реальные объекты в отличие от классической интерферометрии. Однако процесс записи и обработки интерферограмм в полном объеме не автоматизирован. Также не в полном объеме решены задачи определения частотных характеристик элементов механических конструкций при динамических нагрузках [1-5].

В данной работе представлена автоматизированная система определения форм колебаний и частотных характеристик колебательного процесса, состоящая из оптоэлектронного помехоустойчивого спекл-интерферометра с пакетом прикладного программного обеспечения.

Разработанный оптоэлектронный спекл-интерферометр представлен на рисунке 1. Основными элементами спекл-интерферометра являются: лазерный модуль LCM-S-111-50-NP25 (длина волны 532 нм, мощность 50 мВт, длина когерентности более 50 м), цифровая видеокамера ВИДЕОСКАН-285/П-USB с размером ячейки 6.45x6.45 мкм, разрешением 1392x1040 пикселей и скоростью записи информации 7.7 Гц [6].

Одной из особенностей разработанного оптоэлектронного спекл-интерферометра является то, что в качестве опорного сигнала используется диффузно-рассеянное излучение. При такой оптической схеме можно контролировать взаимное распределение в спекл-структурах опорного и предметного пучков и, следовательно, нет жестких требований на гладкость волнового фронта опорной волны. Для получения интерферограммы приемлемого качества опорный сигнал должен быть согласован с предметным сигналом. Теоретически и экспериментально показано, что для этого необходимо хотя бы при-