



### Литература

1. Ulrich R., Simon A. Polarization optics of twisted single-mode fibers // Appl. Opt. 1979. V.18, №13, P.2241-2251.
2. Laming R.I., Payne D.N. Electric current sensor employing spun highly birefringent optical fibers // J. Lightw. Technol. 1989. V.7, №12, P.2084-2094.
3. Шерклифф У. Поляризованный свет. Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 264 с.
4. Ловчий И.Л. Численное моделирование и исследование поляриметрического датчика тока со световодом типа *spun* // Оптический журнал. 2010. Т. 77, № 12, С. 25-33.

В.В. Любимов, Д.Д. Бобылёв

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ БОРТОВЫХ МИКРОУСКОРЕНИЙ МИКРОСПУТНИКА НА БОЛЬШИХ ИНТЕРВАЛАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(Самарский университет)

### Постановка задачи

Рассматривается задача о математическом моделировании относительно движения микроспутника по круговой околоземной орбите. В качестве силовых факторов, действующих на спутник в его движении относительно центра масс, учитываются гравитационный и аэродинамический моменты [1-8]. При численном интегрировании системы уравнений движения микроспутника применяется семиэтапный метод Рунге-Кутты. Производится сравнение результатов численного интегрирования величин бортовых микроускорений при использовании семиэтапного и четырехэтапного явных методов Рунге-Кутты. В семиэтапном методе используется формула Дормана-Принса. Четырехэтапный метод является классическим, и в дальнейшем будем использовать общепринятое сокращенное название РК4.

### Явный семиэтапный метод Рунге-Кутты

Семейство явных одношаговых методов Рунге-Кутты задается формулами [9]:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

где  $h$  – величина шага интегрирования. Здесь вычисление нового значения проходит в  $s$  этапов:

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1),$$

...

$$k_s = hf(x_n + c_s h, y_n + a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}).$$



Выбранный численный метод определяется числом  $s$  и коэффициентами  $b_i$ ,  $a_{ij}$  и  $c_i$ . Данные коэффициенты упорядочивают в виде таблицы [9], называемой таблицей Бутчера. Учитывая коэффициенты из таблицы Бутчера, составим выражения для семиэтапного метода Рунге-Кутты (РК7):

$$k_1 = f(x_n, y_n);$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{5}h, y_n + \frac{1}{5}k_1h);$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{3}{10}h, y_n + h(\frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2));$$

$$k_4 = f(x_n + \frac{4}{5}h, y_n + h(\frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3));$$

$$k_5 = f(x_n + \frac{8}{9}h, y_n + h(\frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4));$$

$$k_6 = f(x_n + h, y_n + h(\frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 + \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5));$$

$$k_7 = f(x_n + h, y_n + h(\frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6));$$

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6).$$

### Численные результаты

Рассмотрим зависимость погрешности результатов интегрирования микроускорений, которые находятся с посредством численных методов РК4 и РК7, от величины шага интегрирования. С этой целью составим таблицы 1 и 2, где  $\varepsilon_{a_x}, \%$ ,  $\varepsilon_{a_y}, \%$ ,  $\varepsilon_{a_z}, \%$  – расхождение результатов, получаемых методами РК4 и РК7 в процентах. В таблицах 1 и 2 содержатся величины расхождения результатов расчетов микроускорений, определяемых посредством вычисления их расхождений при использовании методов РК4 и РК7.

Из таблицы 1 следует, что чем больше шаг интегрирования, тем больше величина расхождения решений между РК4 и РК7. При шаге 0,1 погрешность не превышает 0,5 %. При шаге большем 0,5 погрешность превышает 5%.

Из таблицы 2 следует, что чем больше интервал интегрирования, тем больше величина расхождения решений между РК4 и РК7. При 20 периодах вращений по орбите (один период принимался равны 90 минутам) погрешность сводится к величине менее 1%. При шаге большем 40 погрешность превышает 5%. На рис.1 показан пример расхождения результатов вычисления микроускорений при использовании РК4 и РК7.



Таблица 1. Расхождение результатов при использовании РК4 и РК7 при использовании разных шагов интегрирования

$h$	$\varepsilon_{a_x}, \%$	$\varepsilon_{a_y}, \%$	$\varepsilon_{a_z}, \%$
00,1	0.34%	0.36%	0.41%
00,2	1.12%	1.35%	1.63%
00,3	1.96%	2.32%	2.48%
00,4	3.63%	3.78%	4.15%
00,5	5.1%	5.95%	6.35%
00,6	6.67%	6.13%	6.87%
00,7	7.14%	7.37%	9.75%

Таблица 2. Расхождение результатов при использовании РК4 и РК7 на разных интервалах интегрирования

Кол-во периодов	$\varepsilon_{a_x}, \%$	$\varepsilon_{a_y}, \%$	$\varepsilon_{a_z}, \%$
20	0.5%	0.31%	0.66%
40	5.8%	8.3%	6.6%
100	11.2%	2.7%	8.9%
110	17.4%	18.1%	15.6%
130	23%	26.8%	28.3%
140	30.9%	27.7%	26.1%

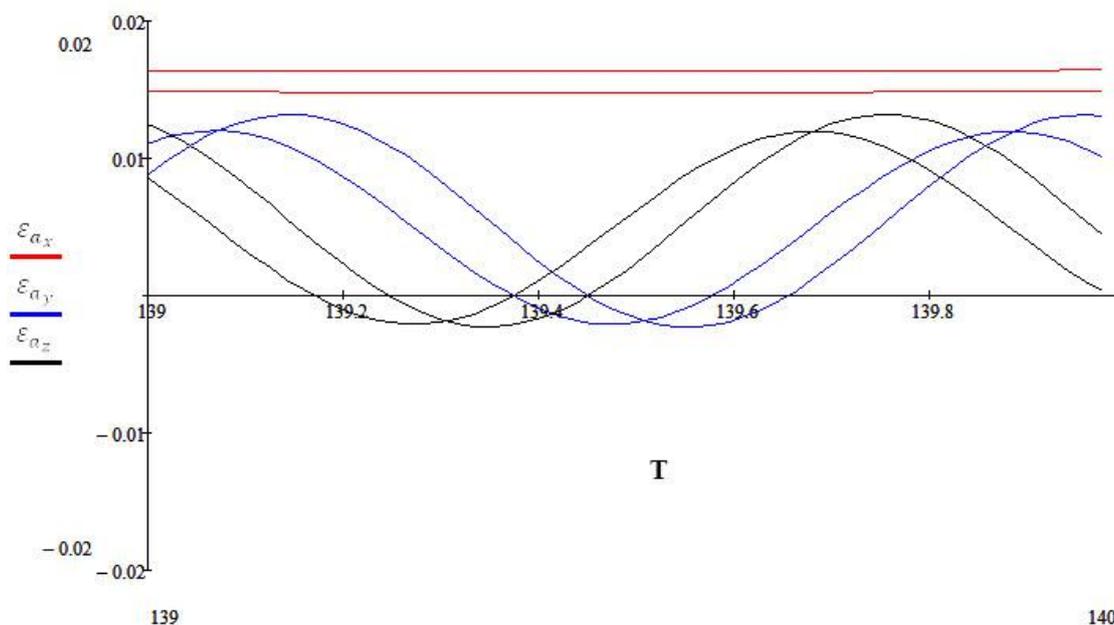


Рис 1. Расхождение результатов вычисления микроускорений при использовании РК4 и РК7



### **Заключение**

Таким образом, классический четырех этапный явный одношаговый метод Рунге-Кутты позволяют эффективно решать задачи по численному моделированию относительного движения микроспутника по орбите в течение первых суток полёта. Действительно, результаты численного моделирования показывают, что при 20 периодах обращения спутника (30 часов) по орбите расхождение результатов при использовании семиэтапного метода Рунге-Кутты и классического метода РК4 не превышают 1%. Однако, при моделировании движения микроспутника на более значительных интервалах времени полёта требуется использовать методы более точные, чем РК4.

### **Литература**

1. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.
2. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. - 248 с.
3. Lyubimov V.V., Malyshev V.I., Semkin N.D. Attitude control of small spacecraft with allowance made for failures in the system for decreasing angular momentums of flywheels// Gyroscopy and Navigation, 2013. Volume 4, Issue 4, Pages 216-222.
4. Любимов В.В. Об особенностях в возмущенном вращательном движении спутника с сильным магнитом на борту // Изв. вузов. Авиационная техника. 2009. №2. С.29-31.
5. Любимов В.В. Внешняя устойчивость резонансов при движении асимметричного твердого тела с сильным магнитом в геомагнитном поле// Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 1. С.13-27.
6. Лебедев А.С., Любимов В.В., Семкин Н.Д. Моделирование управляемого движения микроспутника с магнитными и гравитационными исполнительными органами / Полёт. 2012. №7. С.39-44.
7. Калаев М.П., Любимов В.В., Семкин Н.Д. Полунатурное и имитационное моделирование процесса отделения микроспутника// Гироскопия и навигация. № 2 (85). С.52-60.
8. Семкин Н.Д., Любимов В.В., Малышев В.И. Моделирование законов функционирования магнитных исполнительных органов при ориентации микроспутника по местной вертикали// Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Том.15, № 1. С.103-108.
9. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. – 512 с.