Лапласу более простыми законами распределений, возможно его использование.

2. Гамма распределение также напрямую не может быть использовано в теории массового обслуживания, кроме как частного случая распределения Эрланга различного порядка.

Литература

1. Тарасов В. Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57-70.

2. Тарасов В. Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2018. №4 (47). С. 61-70.

3. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 12. С. 952-957.

4. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, Алгоритмы, Программы. - Оренбург, 2005. - 183 с.

В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

ТРАНСФОРМАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

(Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики)

Введение. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика для моделирования задержки в системах передачи данных, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Поэтому такие системы исследуются при частных законах распределений, для которых можно получить решение для основной характеристики систем массового обслуживания (СМО) – среднего времени ожидания заявок в очереди в явной форме.

Из теории массового обслуживания известно, что среднее время ожидания заявок в очереди связана с коэффициентами вариаций интервалов поступлений и обслуживания квадратичной зависимостью. Большинство классических СМО применимо только в случае фиксированных значений этих коэффициентов вариаций, что является для них серьёзным ограничением.

Целью данного доклада является представление нового класса СМО на одном примере классической системы M/M/1 для расширения области применения моделей массового обслуживания для широкого диапазона изменения коэффициентов вариаций интервалов поступлений и обслуживания. В отличие от классической теории, в данной работе приведены результаты исследований авторов по СМО со сдвинутыми входными законами распределений. Ввод в законы распределений параметра сдвига по времени трансформирует марковские СМО в не марковские системы с запаздыванием.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим трансформацию классической СМО M/M/1 путем ввода в законы распределения параметра сдвига $t_0 > 0$ (рис.1), т.е. рассматриваем СМО с сдвинутыми законами распределений

$$a(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \ge t_0 \\ 0, & 0 \le t < t_0 \end{cases}, \quad b(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(t-t_0)}, & t \ge t_0 \\ 0, & 0 \le t < t_0 \end{cases}, \tag{1}$$

где $t_0 > 0$ – параметр сдвига. Здесь $a(t)$ и $b(t)$ соответственно функции плотности интервалов поступлений заявок и времени их обслуживания. Требуется определить среднее время ожидания заявок в очереди в такой СМО в явной форме. Эту СМО в отличие от классической системы обозначим через $M^-/M^-/1$. Здесь и далее верхний индекс «–» будет означать операцию сдвига закона распределения на величину $t_0 > 0$ вправо по оси времени.

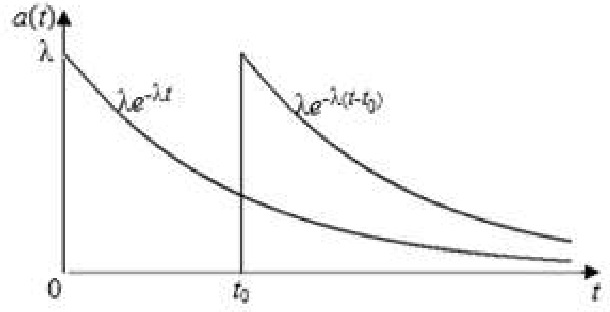

Рис. 1. Пример сдвинутой вправо функции плотности $a(t)$

В связи с тем, что при выводе решения для среднего времени ожидания заявок в очереди нам потребуются числовые характеристики распределений (1), их мы определим через преобразования Лапласа функций (1) $A^*(s) = \dfrac{\lambda e^{-t_0 s}}{s+\lambda}$.
$B^*(s) = \dfrac{\mu e^{-t_0 s}}{s+\mu}$. Найдя первые производные от преобразований Лапласа в т. s=0 со знаком минус, определим средние значения интервалов поступлений и времени обслуживания:

$$\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0, \ \bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0. \tag{2}$$

Аналогично через вторые производные определим начальные моменты второго порядка

$$\overline{\tau_\lambda^2} = t_0^2 + \frac{2t_0}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}, \ \overline{\tau_\mu^2} = t_0^2 + \frac{2t_0}{\mu} + \frac{2}{\mu^2},$$

а затем – коэффициенты вариаций

$$c_\lambda = (1+\lambda t_0)^{-1},\ c_\mu = (1+\mu t_0)^{-1}. \tag{3}$$

Найденные числовые характеристики позволяют определить неизвестные параметры распределений (1) λ, μ и t_0 методом моментов из системы уравнений (четыре уравнения с тремя неизвестными):

$$\begin{cases} \lambda^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\lambda \\ (1+\lambda t_0)^{-1} = c_\lambda \\ \mu^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\mu \\ (1+\mu t_0)^{-1} = c_\mu \end{cases}. \tag{4}$$

Задавая значения параметра сдвига t_0 из интервала (0, $\bar{\tau}_\mu$), получим ограничение на один из коэффициентов вариаций

$$c_\mu = 1 - (1 - c_\lambda)/\rho, \tag{5}$$

где коэффициент загрузки $\rho=\lambda/\mu$.

Таким образом, входные параметры системы $\bar{\tau}_\lambda$, c_λ, $\bar{\tau}_\mu$ и c_μ строго связаны соотношением (5).

Здесь делаем первый вывод о том, что сдвиг закона распределения приводит к уменьшению коэффициентов вариаций. Если для классической системы M/M/1 $c_\lambda = c_\mu = 1$, то для системы с сдвинутыми распределениями c_λ и c_μ меньше единицы. Следовательно, марковская система M/M/1 трансформируется в не марковскую систему $\mathrm{M}^-/\mathrm{M}^-/1$. Второй вывод – из-за уменьшения коэффициентов вариаций, среднее время ожидания в очереди в новой системе будет меньше, чем в системе M/M/1, т.к. оно связано с коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью.

Метод спектрального разложения интегрального уравнения Линдли приводит к результату для среднего времени ожидания в виде формулы

$$\overline{W} = \frac{\lambda/\mu}{\mu - \lambda}, \tag{6}$$

где параметры этой формулы определяются из уравнений моментов (4) при заданных значениях входных параметров для системы $\mathrm{M}^-/\mathrm{M}^-/1$.

Результаты численных экспериментов в Mathcad представлены в таблице 1 для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}9$ для широкого диапазона изменения коэффициентов вариаций c_λ, c_μ и параметра сдвига t_0.

Таблица 1. Результаты численных экспериментов

Входные параметры				Средняя задержка	
ρ	c_λ	c_μ	t_0	для СМО $M^- / M^- / 1$	для СМО M/M/1
0,1	0,999	0,99	0,01	0,109	0,11
	0,99	0,90	0,1	0,090	
	0,95	0,50	0,5	0,028	
	0,91	0,10	0,9	0,001	
	0,901	0,01	0,99	0,00	
0,5	0,995	0,99	0,01	0,98	1,0
	0,95	0,90	0,1	0,81	
	0,75	0,50	0,5	0,25	
	0,55	0,10	0,9	0,01	
	0,505	0,01	0,99	0,00	
0,9	0,991	0,99	0,01	8,82	9,0
	0,91	0,90	0,1	7,29	
	0,55	0,50	0,5	2,25	
	0,19	0,10	0,9	0,09	
	0,11	0,01	0,99	0,00	

Данные таблицы рассчитаны для удобства при нормированном времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu$=1.

Заключение. Анализ представленных результатов приводит к следующим выводам.

1. Трансформация классических систем массового обслуживания влечет с одной стороны уменьшение коэффициентов вариаций временных интервалов и как следствие, многократное уменьшение среднего времени ожидания заявок в очереди по сравнению с классической системой.

2. С другой стороны данное действие приводит к интервальному изменению коэффициентов вариаций от нуля до единицы, тогда как для классической системы эти коэффициенты вариаций фиксированы и равны единице в случае системы M/M/1. Таким образом, функциональные возможности классической системы значительно расширяются.

3. Адекватность представленной математической модели массового обслуживания однозначно подтверждается тем фактом, что при стремлении параметра сдвига к нулю, среднее время ожидания в трансформированной системе приближается к его значению в обычной системе.

4. Предложенных подход и выводы справедливы для всех классических систем массового обслуживания.

Литература

1. Тарасов В. Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57-70.

2. Тарасов В. Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2018. №4 (47). С. 61-70.

3. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 12. С. 952-957.

4. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, Алгоритмы, Программы. - Оренбург, 2005. - 183 с.