Ю.М. Заболотнов, А.А. Лобанков

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ В СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)»)

В работе рассматривается задача управления колебаниями в системе с двумя степенями свободы. Колебательная система представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую её малые колебания в окрестности положения равновесия. На систему действуют малые возмущения, характеризующие управление и другие неконтролируемые воздействия. Метод построения оптимальных управлений основывается на совместном применении принципа динамического программирования Беллмана, методов анализа устойчивости динамических систем Ляпунова и метода усреднения. Предлагается общая форма критерия оптимальности, наиболее рациональная для данных систем.

Настоящая работа посвящена построению приближенно оптимальных управлений колебательными системами при решении задач стабилизации (задачи демпфирования, гашения колебаний). Предлагаемый метод может быть применен как линейных систем, так и для нелинейных, в которых возможно возникновение автоколебательных режимов движения.

Рассматриваются колебательные системы, поведение которых описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + Cx = \varepsilon Q\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon m u, \qquad (1)$$

где x – двухмерный вектор переменных состояния системы, A и C – известные квадратные матрицы, ε – малый параметр задачи, $Q\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ – вектор-функция возмущений, действующих на систему; m – матрица, определяющая структуру управляющего устройства в конкретной задаче; u – скалярное управление.

Предполагается, что для системы (1) выполнены условия управляемости и наблюдаемости.

При $\varepsilon = 0$ получаем невозмущенную систему, описывающую малые колебания относительно положения равновесия. Решения этой системы записываются в известной форме

$$x = \sum_{i=1}^{2} K_i V^{(i)} \cos(\varphi_i), \qquad (2)$$

где K_i и φ_i – амплитуды и фазы колебаний, $V^{(i)}$ – собственные вектора невозмущенной системы, $\varphi_i = \omega_i t + \alpha_i$, ω_i – частоты невозмущенной системы. Для невозмущенного решения (2) параметры K_i и α_i являются произвольными постоянными.

Существование решения невозмущенной системы в форме (2) для конкретных задач управления обеспечивается положительной определенностью матриц A и C. В том случае частоты невозмущенной системы определяются из равенства нулю определителя $\det(C - \omega^2 A) = 0$ (частотное уравнение).

При $u = 0$ получаем систему без управления. В этом случае колебательная система может быть динамически устойчивой или неустойчивой в зависимости от свойств возмущающих функций $Q\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Динамическая устойчивость или неустойчивость определяется в этом случае медленным изменением амплитуд колебаний системы. Если хотя бы одна амплитуда колебаний увеличивается, то система называется динамически неустойчивой. Кроме того, наличие нелинейных возмущающих функций $Q\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ может приводить к возникновению автоколебательных режимов в неуправляемой колебательной системе.

Ставится задача об оптимальном демпфировании колебаний в системе (1), то есть целью управления является перевод системы в начало координат. Причем оптимальность управления u понимается в смысле минимума функционала

$$J = \varepsilon \int_0^{t_k} \left(K^T a\, K + u^T c u\right) dt, \tag{3}$$

где a и c –положительно определенные матрицы весовых коэффициентов критерия оптимальности, K – вектор амплитуд колебаний, $(\ )^T$ –знак транспонирования.

В простейшем случае матрицы a и c можно задать диагональными. Тогда, фиксируя одну из этих матриц, например, a, изменяя диагональные компоненты матрицы c и решая ряд задач оптимального управления, можно выбрать подходящее управление с точки зрения уровня возникающих ошибок управления, которые характеризуются первым слагаемым в интеграле (3) и затратами на управление, которые характеризуются вторым слагаемым в интеграле (3).

Применение метода усреднения к системе (1) предполагает замену переменных в этой системе вида $\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow (K, \varphi)$, φ – вектор фаз колебаний. Причем замена переменных осуществляется в соответствии с формулами

$$x = \sum_{i=1}^{2} K_i V^{(i)} \cos(\varphi_i), \quad \frac{dx}{dt} = -\sum_{i=1}^{2} K_i \omega_i V^{(i)} \sin(\varphi_i), \tag{4}$$

которые соответствуют виду невозмущенного решения (2).

Переходя к переменным «амплитуды – фазы», получим для новых переменных

$$\frac{dK_i}{dt} = \varepsilon X_i(K,\varphi) + \varepsilon D_i u \sin\varphi_i, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \varepsilon..., \tag{5}$$

где $X(K,\varphi)$ и D – известная вектор-функция и вектор.

Для определения оптимального управления используется принцип динамического программирования Беллмана. В соответствии с этим принципом оптимальное управление находится из условия

$$\min_u \left[\varepsilon K^T a K + \varepsilon u^T c u + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial K} \cdot (X(K,\varphi) + (Du)\sin\varphi) + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \cdot (\omega + \varepsilon...) \right] = 0. \tag{6}$$

где $W(K,\varphi)$ – производящая функция, $\sin\varphi = (\sin\varphi_1, \sin\varphi_2)^T$, $\omega = (\omega_1,.\omega_2)^T$, а точка означает скалярное произведение векторов.

Функция, стоящая под знаком минимума в соотношении (6), является квадратичной функцией управления. Поэтому не составляет трудности найти ее минимум по u. Для этого надо взять производную от этой функции по вектору u и приравнять эту производную к нулю (необходимые условия экстремума). В итоге получим следующее оптимальное управление

$$u^0 = -\frac{1}{2}\tilde{n}^{-1} D^T \left(\frac{\partial W}{\partial K} \sin\varphi \right) + \ldots, \tag{7}$$

где $\frac{\partial W}{\partial K} \sin\varphi = \left(\frac{\partial W}{\partial K_1} \sin\varphi_1, \frac{\partial W}{\partial K_2} \sin\varphi_2 \right)^T$.

Оптимальное управление (7) найдено с точностью до производящей функции $W(K,\varphi)$. Причем в соотношениях (6) и (7) не записаны некоторые слагаемые, равные нулю с точки зрения применяемого далее для определения функции $W(K,\varphi)$ метода усреднения.

Подставляя оптимальное управление (7) в условие (6) получим уравнение в частных производных для определения функции $W(K,\varphi)$

$$\varepsilon K^T a K + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial K} \cdot X(K,\varphi) + ... - \frac{\varepsilon}{4} \left[\tilde{n}^{-1} D^T \left(\frac{\partial W}{\partial K} \sin\varphi \right) \right]^T \left[D^T \left(\frac{\partial W}{\partial K} \sin\varphi \right) \right] = 0. \tag{8}$$

При решении уравнения в частных производных (8) применяется метод усреднения, который заключается в поиске решения в виде асимптотических рядов

$$W(K^0,\varphi^0) = W_0(K^0) + \varepsilon W_0(K^0,\varphi^0) + \varepsilon^2 + ... \tag{9}$$

$$K = K^0 + \varepsilon u_1(K^0,\varphi^0) + \varepsilon^2..., \quad \varphi = \varphi^0 + \varepsilon v_1(K^0,\varphi^0) + \varepsilon^2..., \tag{10}$$

Асимптотические ряды (9), (10) можно интерпретировать как формулы перехода к новым переменным K^0, φ^0, причем эти переменные удовлетворяют дифференциальным уравнениям, правые части которых не содержат фазы φ^0

$$\frac{dK^0}{dt} = \varepsilon A_1(K^0) + \varepsilon^2..., \quad \frac{d\varphi^0}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(K^0) + \varepsilon^2... \tag{11}$$

Функции $u_1(K^0,\varphi^0)$, $v_1(K^0,\varphi^0)$, $A_1(K^0)$, $B_1(K^0)$ определяются по известной методике метода усреднения. Причем функции $u_1(K^0,\varphi^0)$, $v_1(K^0,\varphi^0)$ периодичны по каждой из фаз с периодом 2π и имеют нулевое среднее.

Подставляя ряды (9), (10) и соотношения (11) в уравнение (8), усредняя это уравнение по фазам φ_i^0 и удерживая слагаемые только порядка ε, получим

$$
\begin{aligned}
&(K^0)^T a K^0 + \frac{\partial W_0}{\partial K^0}\cdot\left\langle X(K^0,\varphi^0)\right\rangle - \\
&-\frac{1}{4}\left\langle\left[\tilde{n}^{-1}D^T\left(\frac{\partial W_0}{\partial K^0}\sin\varphi^0\right)\right]^T\left[D^T\left(\frac{\partial W_0}{\partial K^0}\sin\varphi^0\right)\right]\right\rangle = 0.
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

где оператор $\langle\ldots\rangle$ есть стандартный оператор усреднения.

Уравнение (12) существенно проще исходного уравнения (8), так как слагаемые в него входящие зависят только от амплитуд и не зависят от фаз, причем, то же самое справедливо и для производящей функции $W_0(K^0)$.

Для обеспечения динамической устойчивости точки равновесия колебательной системы $x=0$ функция $W_0(K^0)$, удовлетворяющая уравнению (12), должна быть положительно определенной. В этом случае функцию $W_0(K^0)$ можно рассматривать как функцию Ляпунова, обеспечивающую устойчивость решения $K^0=0$ для усредненной системы.

Здесь надо отметить, что при усреднении возмущений $\left\langle X(K^0,\varphi^0)\right\rangle$ в уравнении (12) можно учитывать только линейную часть функции $Q\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$, входящей в исходную систему (1), что гарантирует устойчивость решения $K^0=0$ в некоторой окрестности начала координат. В этом случае функция $W_0(K^0)$ ищется в наиболее простом виде: в виде положительно определенной квадратичной формы $W_0(K^0)=(K^0)^T PK^0$, где P – положительно определенная матрица. Подставив решение это решение в уравнение (12), получим алгебраическое уравнение для матрицы P, решение которого не представляет трудности.

Окончательно приближенно оптимальное управление (7) примет вид

$$
u^0 = -\frac{1}{2}\tilde{n}^{-1}D^T\left(\frac{\partial W_0}{\partial K^0}\sin\varphi^0\right). \qquad (13)
$$

Подставляя управление (13) в систему (5) и проводя усреднение можно выявить все особенности колебательной системы с управлением, определив ее особые точки, наличие устойчивых или неустойчивых автоколебательных режимов и т п.

Приводятся примеры применения изложенной методики для различных возмущающих функций $Q\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, характеризующих исходную колебательную систему, и определены возможные изменения фазовых портретов на плоскости амплитуд колебаний (K_1, K_2) при введении оптимального управления.