



С.А. Прохоров, А.А. Столбова

## ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПРОЦЕССОВ БЕЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОПУЩЕННЫХ ОТСЧЕТОВ

(Самарский национальный исследовательский университет  
 имени академика С.П. Королёва)

Одним из активно развивающихся методов спектрального анализа данных является вейвлет-преобразование, коэффициенты которого вычисляются следующим образом [1, 2]:

$$W_{\psi}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (1)$$

где  $x(t)$  – случайный процесс,  $\psi(t)$  – выбранный анализирующий вейвлет,  $a \neq 0$  – параметр масштаба,  $b \geq 0$  – параметр сдвига.

Часто исследователю приходится иметь дело с данными, которые являются нерегулярными, т.е.  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}$ . Типовые модели процессов с нерегулярной дискретизацией данных рассмотрены в [3-5].

При вычислении оценки вейвлет-коэффициентов нерегулярных процессов *методом прямоугольников* выражение (1) преобразуется к следующему виду:

$$W_{\psi}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i=1}^{M-2} (t_{i+1} - t_i) x_i \psi\left(\frac{t_i - b}{a}\right). \quad (2)$$

Выражение для оценки коэффициентов *методом трапеций* имеет следующий вид:

$$W_{\psi}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( x_0 \psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right) \frac{(t_1 - t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{M-2} x_i \psi\left(\frac{t_i - b}{a}\right) \frac{(t_{i+1} - t_{i-1})}{2} + x_{N-1} \psi\left(\frac{t_{N-1} - b}{a}\right) \frac{(t_{N-1} - t_{N-2})}{2} \right). \quad (3)$$

Для проведения экспериментов качестве базового вейвлета выберем вейвлет Гаусса 1 порядка и два вида модельных процессов:

$$\psi(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (4)$$

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1), \quad (5)$$

$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \sin(\omega_3 t + \phi_3). \quad (6)$$

где  $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ ,  $\omega_1 = 2$  рад/с,  $\omega_2 = 1$  рад/с,  $\omega_3 = 5$  рад/с,  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ , число отсчетов сигнала  $N = 2000$ , интервал дискретизации  $\Delta t_0 = 0,2$ .

Методом имитационного моделирования из исходных регулярных процессов (5) и (6) были смоделированы процессы с *пропусками наблюдений*, с *дрожанием* (с распределением интервалов по закону Симпсона и равномерному закону) и *с аддитивной случайной дискретизацией* с экспоненциальным законом распределения.



Относительная погрешность оценки скейлограммы, вычисленная по формуле (7) для сигналов с различными типами нерегулярной дискретизации представлена в таблицах 1, 2 и 3. Графики представлены на рисунках 1 и 2.

$$\delta(s_g^*) = \frac{\sqrt{\sum_i^{N_a} (s_g(a_i) - s_g^*(a_i))^2}}{\sqrt{\sum_i^{N_a} s_g^2(a_i)}}, \quad (7)$$

где  $s_g(a_i) = \frac{1}{N_{shift}} \sum_{j=0}^{N_{shift}-1} |W_\psi(a_i, b_j)|^2$ .

Таблица 1 – Относительная погрешность оценки скейлограммы процесса с пропусками наблюдений

	$A1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$					
<b>p</b>	<b>1</b>	<b>0,9</b>	<b>0,8</b>	<b>0,7</b>	<b>0,6</b>	<b>0,5</b>
$\delta_r, \%$	0,62	3,324	7,253667	14,45933	26,029	40,157
$\delta_t, \%$	0,61	1,862	4,971333	8,983333	16,11667	28,641
	$A2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + A3 \sin(\omega_3 t + \phi_3)$					
$\delta_r, \%$	0,82	4,0133	10,395	19,334	30,4193	52,1383
$\delta_t, \%$	0,85	2,6123	6,407	14,2443	22,2057	36,511

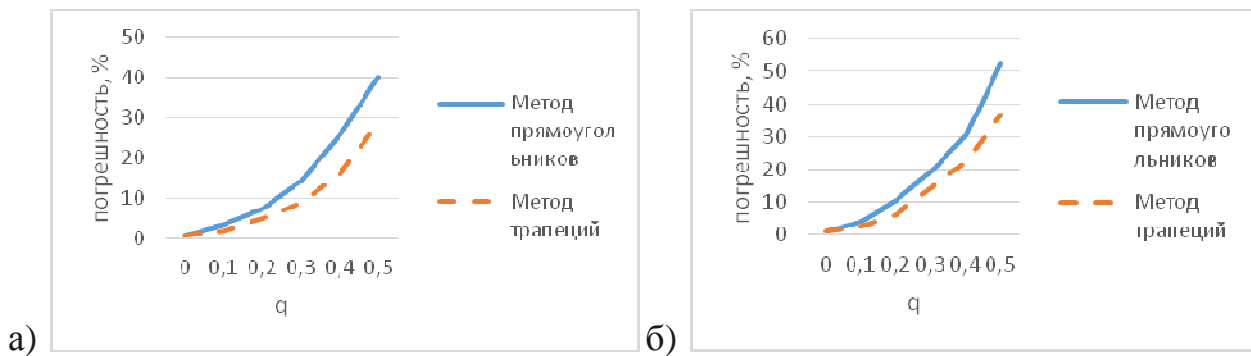


Рис. 1. График зависимости погрешности скейлограммы от числа пропусков: а) для синуса; б) для суммы синусов

Таблица 2 – Погрешность оценки скейлограммы процесса с дрожанием

	$A1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$	
	<b>Равномерный</b>	<b>Симпсона</b>
$\delta_r, \%$	6,4317	1,7807
$\delta_t, \%$	5,8807	1,3833
	$A2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + A3 \sin(\omega_3 t + \phi_3)$	
$\delta_r, \%$	18,7537	2,423
$\delta_t, \%$	15,2817	2,3743



Таблица 3 – Погрешность оценки скейлограммы процесса с аддитивной случайной дискретизацией

	$A1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$						
$\lambda$	3	4	6	10	20	30	40
$\delta_r, \%$	47,4647	34,754	19,2643	8,3433	6,3627	1,946	1,6183
$\delta_t, \%$	36,1657	27,0357	12,8017	6,0013	3,1783	1,8363	1,7837
	$A2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + A3 \sin(\omega_3 t + \phi_3)$						
$\delta_r, \%$	63,615	33,281	28,80133	15,3137	8,8553	5,3397	2,475
$\delta_t, \%$	56,117	33,6913	22,323	14,6573	8,714	4,8767	2,255

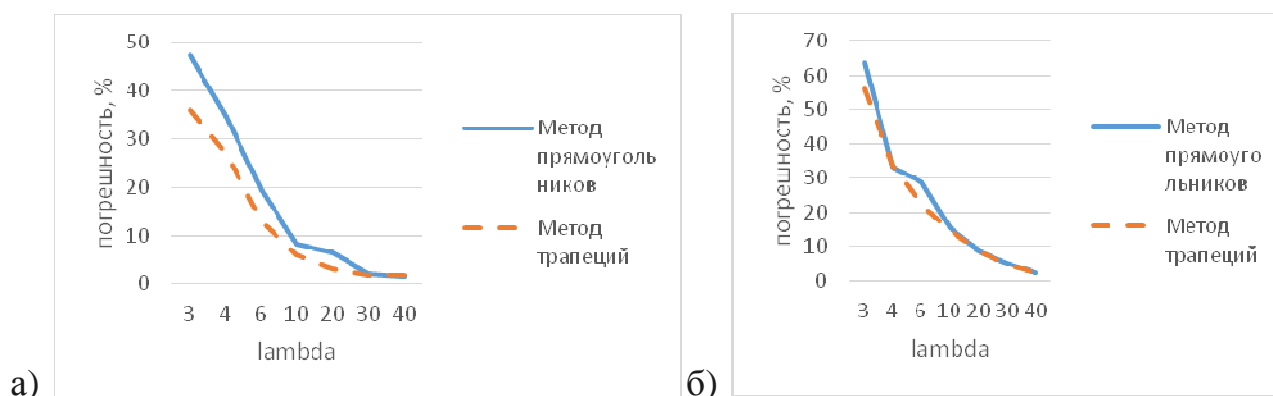


Рис. 2. График зависимости погрешности скейлограммы процесса с аддитивной случайной дискретизацией от  $\lambda$ : а) для синуса; б) для суммы синусов

Таким образом, как и ожидалось, метод трапеций показал лучшие результаты при вычислении коэффициентов. Для сигналов с пропусками наблюдений погрешность растет с увеличением пропущенных отсчетов. Для сигналов с дрожанием с интервалами, распределёнными по закону Симпсона погрешность вычислений меньше, чем при равномерном распределении. При аддитивной случайной дискретизации погрешность уменьшается с увеличением параметра  $\lambda$  экспоненциального закона распределения.

### Литература

- 1 Витязев, В. В. Вейвлет-анализ временных рядов: учебное пособие / В.В. Витязев. – СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001.-58 с.
- 2 Короновский, А.А. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения / А.А. Короновский, А.Е. Храмов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
- 3 Прохоров, С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов / С.А. Прохоров. – Самара: СГАУ, 2001. – 209 с.
- 4 Прохоров, С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов / С.А. Прохоров. – Самара: СГАУ, 2001, 375 с.
- 5 Прохоров, С.А. Прикладной анализ случайных процессов / под ред. С.А. Прохорова. – Самара: СНЦ РАН, 2007. – 582 с.