Литература

1. Боршевников А.Е. Сетевые атаки. Виды. Способы борьбы / А.Е. Боршевников / Междунар. науч. конф. «Современные тенденции технических наук». - Уфа, 2011. - 78 с.
2. Васин Н.Н. Моделирование атак посредника в сетях пакетной коммутации / Н.Н. Васин, А.А. Фирсова // Проблемы и перспективы внедрения инновационных телекоммуникационных технологий: сборник материалов VII Международной научно-практической очно-заочной конференции. - Оренбург, 2021. - 206 – 214 с.
3. Руководство по технологиям объединенных сетей. - 3-е изд. - М.: Вильямс, 2002. - 1039 с.: ил.

В.П. Цветов

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПО ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКЕ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Самарский университет)

Задачи решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) возникают в различных прикладных областях научного знания. Мы будем рассматривать подобные СЛАУ в контексте задач цифровой радиосвязи, использующих системы неортогональных несущих сигналов.

$$AX = Y, \tag{1}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \mathrm{Y}= \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix},\ x_i \in 0..M, y_i \in \mathbb{R}, i \in 0..N-1,$$

$$A = (a_{ij}) = \left(cos\left(\frac{\pi ij}{N_0}\right)\right), i,j \in 0..N-1, N_0 > N.$$

СЛАУ (1) моделирует спектрально эффективные многочастотные защищенные системы радиосвязи, которые разрабатываются в последнее время [1-2]. Целочисленный интервал $0..M$ описывает конечное число состояний цифрового передающего устройства.

При наличии помех в канале связи вместо решения СЛАУ (1) приходится искать решение СЛАУ (2)

$$A\tilde{X} = \tilde{Y}, \tag{2}$$

где $\tilde{Y} = Y + \Delta$, а $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \end{pmatrix}$ - вектор помех. Найденное решение СЛАУ (2) $\tilde{X} \in \mathbb{R}$ округляется методом ближайшего соседа и принимается за приближенное решение СЛАУ (1).

Хотя матрица A невырождена ее число обусловленности $\mu(A)$ достаточно велико при $M > N$, например, при $N = 16$, $M = 22$, $\mu(A) = 0.24 \cdot 10^{10}$.

Напомним, что число обусловленности невырожденной матрицы является мерой влияния аддитивной погрешности, которая появляется при измерении значений правой части СЛАУ, на погрешность найденного решения и определяется как

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

где

$$\|A\| = \max_{X \neq 0} {\|AX\|}/{\|X\|}, \|X\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2}.$$

Задачи, связанные с решением СЛАУ, называют хорошо обусловленными при небольших значениях $\mu(A)$, и плохо обусловленными, если $\mu(A)$ достаточно велико. На практике считается, что если $\mu(A) \approx 2^k$, то даже без учета погрешности арифметических вычислительных методов при определении X будет потеряна точность в k двоичных разрядов.

Плохо обусловленные задачи принято называть некорректными - неустойчивыми по отношению к погрешностям задания правой части. Для нахождения некорректных задач разработано множество методов. В частности метод регуляризации Тихонова [3] для нахождения устойчивого псевдорешения, который сводится к решению СЛАУ (3), при некотором значении параметра регуляризации α.

$$(A^T A + \alpha E)X = A^T Y. \tag{3}$$

Определение подходящего значения этого параметра представляет собой отдельную вычислительную задачу. Например метод невязки Морозова [4] опирается на итерационный процесс метода касательных Ньютона и требует значительных вычислительных ресурсов и временных затрат.

В реальных условиях передачи данных требуется высокоскоростная потоковая обработка цифровых сигналов, что приводит к необходимости поиска новых алгоритмов определения параметров регуляризации для СЛАУ (3).

Предлагаемый подход к решению этой задачи опирается на предварительное вычисление параметров регуляризации для различных отношений сигнал/шум на основе численных экспериментов, для их последующего использования в условиях априорно известной реальной помеховой обстановки.

Зададим обучающую выборку из K равномерно распределенных на целочисленной решетке $(0..M)^N$ случайных сигналов

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_{N-1}^1 \end{pmatrix},.., X^K = \begin{pmatrix} x_0^K \\ \vdots \\ x_{N-1}^K \end{pmatrix}, AX^1 = Y^1 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_{N-1}^1 \end{pmatrix}, .., AX^K = Y^K = \begin{pmatrix} y_0^K \\ \vdots \\ y_{N-1}^K \end{pmatrix}$$

и помеховую выборку

$$\Delta^1 = \begin{pmatrix} \delta_0^1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^1 \end{pmatrix},.., \Delta^K = \begin{pmatrix} \delta_1^K \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^K \end{pmatrix}.$$

Тогда $A(X^1+\Delta^1)=\tilde{Y}^1=\begin{pmatrix}\tilde{y}_1^1\\ \vdots\\ \tilde{y}_N^1\end{pmatrix}, .., A(X^K+\Delta^K)=\tilde{Y}^K=\begin{pmatrix}\tilde{y}_1^K\\ \vdots\\ \tilde{y}_N^K\end{pmatrix}$.

соответствующую реализации равномерно распределенных на интервале $[0,\delta]$ независимых случайных величин.

Будем определять параметр регуляризации α для СЛАУ (3), как значение, доставляющее минимум функции

$$f(\alpha)=\sum_{k=1}^{K}\left\|(A^TA+\alpha E)X^k-A^T\tilde{Y}^k\right\|^2 \quad (4)$$

из условия

$$f'(\alpha_0)=0.$$

Нетрудно показать, что

$$\alpha_0=\sum_{k=1}^{K}\langle X^K,A\Delta^K\rangle \Big/ \sum_{k=1}^{K}\|X^K\|^2,$$

где $\langle X,Y\rangle=\sum_{i=0}^{N-1}x_iy_i$, или в координатной форме

$$\alpha_0=\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N-1}x_i\sum_{j=0}^{N-1}a_{ij}\delta_j \Big/ \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N-1}x_i^2. \quad (5)$$

Соотношение (5) было положено в основу численных экспериментов по определению параметров регуляризации α_0 на обучающих выборках объемом $k\in\{128,256,512\}$ случайных векторов $X^k\in(0..M)^N$, при $M=3, N=16$. Считалось, что $N_0\in\{20,22\}$. Компоненты векторов погрешностей правой части СЛАУ (2) моделировались при помощи независимых случайных величин, равномерно распределенных на интервале $[0,10^{-1}]$.

Качество обучения оценивалось в сравнении с методом определения параметра регуляризации по невязке в сериях из 200 тестовых экспериментов. Для каждого параметра регуляризации вычислялся процент ошибочно распознанных состояний передающего устройства.

В таблицах 1, 2 приведены процентные отношения ошибочно распознанных состояний по каждой из 16 компонент случайных векторов для параметров регуляризации α_0, найденных методом обучения, и α_δ, определенных методом невязки.

Таблица 1. Покомпонентная процентная мера ошибочно распознанных символов, $\mathrm{N}_0=20$, $\mathrm{N}=16$, $\mu(A)=0.33\cdot10^8$.

	K = 128		K = 256		K = 512	
№	α_0	α_δ	α_0	α_δ	α_0	α_δ
1	26	26	23	25.5	27	28
2	54	56.5	54	58.5	53	58
3	45	45.5	44	45.5	42	43
4	34.5	35	35	36	29.5	31
5	30.5	28	29	36	25.5	27
6	33.5	37	39	41.5	27	36
7	39	39.5	41.5	48	35	40.5

8	39.5	39	40.5	42.5	40	38
9	33	31	33	30	36	38
10	30.5	30.5	30.5	27.5	28	34
11	32.5	36	26.5	33	24	38.5
12	31.5	37.5	19.5	31.5	18.5	40.5
13	25.5	30	13	28.5	11.5	35.5
14	16	20.5	2.5	20.5	4	23
15	2	5	0	4	0	6
16	0	0	0	0	0	0

Таблица 2. Покомпонентная процентная мера ошибочно распознанных символов, $\mathrm{N}_0 = 22$, $\mathrm{N} = 16$, $\mu(A) = 0.24 \cdot 10^{10}$.

	K = 128		K = 256		K = 512	
№	α_0	α_δ	α_0	α_δ	α_0	α_δ
1	31	34	24	24.5	34.5	36
2	58.5	62	51.5	54	62	61
3	43.5	45	38	39.5	44.5	43.5
4	36.5	39.5	32.5	36	36	38.5
5	44.5	43	42	47	40	45
6	40	39.5	41.5	41.5	42	41
7	33.5	33	38.5	38.5	40	40
8	35	38.5	35	39.5	37.5	42
9	34.5	38.5	42.5	42.5	42	44.5
10	34.5	36	43.5	42	42.5	41.5
11	35.5	36.5	37.5	38	40.5	42
12	29	37.5	30.5	48.5	35.5	39
13	27.5	37	25	48	27	42
14	20	31.5	11.5	39	13	35.5
15	3.5	16.5	1	17	1	16.5
16	0	1	0	5	0	0.5

Табличные данные указывают на некоторое преимущество определения параметра регуляризации по обучающей выборке перед методом невязки Морозова в части точности приближения решения СЛАУ (3) к решению СЛАУ (1). Однако главная его особенность состоит в значительном уменьшении времени потоковой обработки цифровых сигналов за счет упрощения схемы вычислений. Заметим, что разброс значений ошибок по компонентам векторов определяется структурой подпространств собственных векторов матрицы A.

Литература

1. Цветов В. П. Об одной задаче декодирования символов по неполным данным в радиоканале // Сборник научных трудов III Международной конфе-

ренции и молодежной школы ИТНТ-2017. Самара: Издательство Новая техника, 2017. – С. 954 957.

2. Цветов В.П. Некорректные задачи и защита данных // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2019. № 4.   С. 86 93.

3. Тихонов, А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения / А.Н. Тихонов // ДАН СССР, 1965, т. 163, № 3, с. 591–594.

4. Морозов, В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации / В.А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. –1966. – Т. 6, № 1. – С. 170-175.