

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПУГОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ
ПРИ ПОСТОЯННЫХ И КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА
ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ**

Огородников Е.Н., Унгарова Л.Г.

Самарский государственный технический университет, г. Самара, algluiza@gmail.com

Ключевые слова: вязкоупругость, дробные интегро-дифференциальные уравнения, параметрическая идентификация, аппроксимация экспериментальных данных.

Появление новых материалов с вязкоупругими свойствами в промышленности естественным образом ставит задачу построения их математических моделей деформирования и прочности с использованием неклассических математических подходов. В работе исследованы математические модели, описывающие деформации вязкоупругих сред. Рассмотренные модели разработаны с помощью элементов дробного интегро-дифференциального исчисления [1]. В качестве примера приведём нелинейную одноосную модель типа Максвелла в интегральной форме, характеризующую зависимость между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ тела в момент времени t

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma(t)}{E} \right)^{1/n} + \left(I_{0t}^{\alpha} \frac{\sigma(t)}{\eta} \right)^{1/m}, \quad (1)$$

где $I_{0t}^{\alpha} \varphi$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ функции $\varphi(t)$, E , η , n , m – неотрицательные постоянные величины. Найдены решения интегрального уравнения (1) в следующих случаях:

- 1) при напряжении вида $\sigma(t) = \sigma_0 [H(t) - H(t - t_1)]$ ($\sigma_0 > 0$, $H(t)$ – функция Хевисайда), описывающем нагружение для $t: 0 < t \leq t_1$ и разгрузку для $t: t_1 < t \leq T$, решение имеет вид

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E} \right)^{1/n} + \left(\frac{\sigma_0}{\eta} \right)^{1/m} \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^{1/m}; \quad (2)$$

- 2) при кусочно-постоянном нагружении $\sigma(t) = \sigma_1 H(t) + \sum_{i=2}^N (\sigma_i - \sigma_{i-1}) H(t - t_{i-1}) - \sigma_N H(t - t_N)$,

в котором напряжения σ_i действуют при $t: t_{i-1} < t < t_i$, $i = \overline{2, N}$, и решение получено в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E^{1/n}} \left(\sigma_1 H(t) + \sum_{i=2}^N (\sigma_i - \sigma_{i-1}) H(t - t_{i-1}) - \sigma_N H(t - t_N) \right)^{1/n} + \frac{1}{(\eta \Gamma(\alpha + 1))^{1/m}} \left(\sigma_1 t^{\alpha} H(t) + \sum_{i=2}^N (\sigma_i - \sigma_{i-1}) (t - t_{i-1})^{\alpha} H(t - t_{i-1}) - \sigma_N (t - t_N)^{\alpha} H(t - t_N) \right)^{1/m}. \quad (3)$$

Разработана методика идентификации параметров для пятнадцати видов дробных моделей на основе базовой информации для экспериментальных кривых ползучести при постоянных напряжениях. На первом этапе используются характерные экспериментальные точки диаграмм, особенности поведения моделей при неограниченном возрастании времени. Таким образом, определяются начальные приближения параметров. На втором этапе осуществляется уточнение этих параметров методом покоординатного спуска и минимизации функционала среднеквадратического отклонения расчётных значений от экспериментальных. Идентификация параметров моделей дробного порядка реализована на основании известных экспериментальных данных одноосного вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при температурах 20 °С и 24 °С и пяти уровнях растягивающего напряжения. В результате аппроксимации экспериментальных данных для модели (1),(2) получены параметры: $\alpha=0,265$; $E=405,730$ МПа; $\eta=132,175$ МПа·с $^{\alpha}$; $\beta=1,262$; $\gamma=1,182$. Средняя погрешность аппроксимаций по пяти уровням нагружения $\sigma_0 = \{4,655; 6,288; 8,738; 10,372; 12,005\}$ МПа ($0 \leq t \leq 8$ час) и разгрузок ($t > 8$ час) равна $\bar{\Delta} = 10,202\%$.

На рис. 1 в качестве примера изображена реакция дробной модели (1) на кусочно-постоянные режимы нагружения, при которых значения деформаций вычислялись по формуле (3). Средняя погрешность аппроксимаций по восьми уровням напряжений равна $\bar{\Delta}=11,001\%$. Аналогичные результаты аппроксимаций получены для всех исследуемых моделей. Получена хорошая коррелированность расчётных и опытных данных как для квазистатических, так и для кусочно-постоянных режимов нагружений.

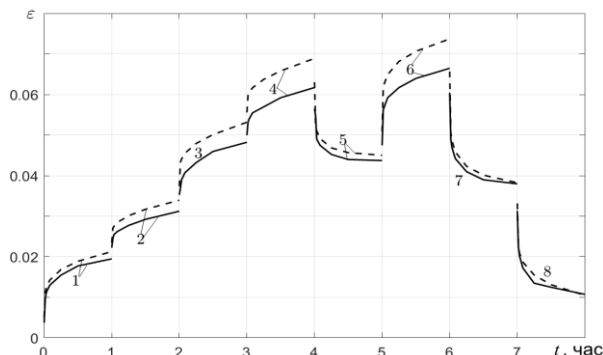


Рисунок 1 – Экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) кривые по модели (1) вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при кусочно-постоянной нагрузке с уровнями напряжений $\sigma_1=4,655$ МПа (1), $\sigma_2=6,288$ МПа (2), $\sigma_3=8,738$ МПа (3), $\sigma_4=10,372$ МПа (4), $\sigma_5=6,288$ МПа (5), $\sigma_6=10,372$ МПа (6), $\sigma_7=4,655$ МПа (7), с последующей разгрузкой $\sigma_8=0$ МПа (8) при $T=24$ °C

Список литературы

1. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математические модели нелинейной вязкоупругости с операторами дробного интегро-дифференцирования / Вестник ПНИПУ. Механика, 2018. № 2. С.147-161.

2. Унгарова Л.Г. Применение нелинейных дробных аналогов реологических моделей в задаче аппроксимации экспериментальных данных по растяжению поливинилхлоридного пластика / Вестник СамГТУ. Сер. физ.-мат. науки, 2016. Т.20. № 4. С. 691-706.

Сведения об авторах

Огородников Е. Н., к.ф.-м.н., доцент. Область научных интересов: дробное исчисление и его приложения.

Унгарова Л. Г., к.ф.-м.н., доцент. Область научных интересов: механика деформируемого твёрдого тела, дробное исчисление.

VISCOELASTIC MATERIALS MODELING UNDER CONSTANT AND PIECE-CONSTANT STRESSES USING FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION METHODS

Ogorodnikov E.N., Ungarova L.G.

Samara State Technical University, Samara, Russia, algluiza@gmail.com

Keywords: viscoelasticity, fractional integro-differential equations, parametric identification, approximation of experimental data.

The paper solves the problem of constructing deformation and strength mathematical models using elements of fractional integro-differential calculus. As an example, a nonlinear Maxwell-type model is given in integral form (1), which characterizes the relationship between stress $\sigma(t)$ and deformation $\varepsilon(t)$ of the body at time t . A parameter determination technique for fifteen types fractional models based on information for experimental creep curves at constant stresses has been developed. Responses of fractional models to piecewise constant loading modes were studied. A good correlation has been obtained between the calculated and experimental data for both quasistatic and piecewise constant loading modes.