

ЗАДАЧА ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ ДРОБНЫХ АНАЛОГОВ МОДЕЛЕЙ ФОЙХТА И РЖАНИЦЫНА

Красильникова А.А., Огородников Е.Н.

Самарский государственный технический университет, г. Самара,
krasilnikova.aa@samgtu.ru

Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, реология, толстостенные трубы, ортотропия, дробное интегро-дифференцирование, модель Фойхта, модель Ржаницына.

Изучению поведения толстостенных труб в условиях интенсивного силового и теплового нагружения посвящено множество работ (см., напр., [1, 2]), но в подавляющем большинстве из них материал конструкций не обладает реологическими свойствами и/или является изотропным. Учёт фактора ползучести необходим для корректного расчёта конструкций. Классические модели вязкоупругости не всегда корректно описывают поведение материалов. Поэтому изучение вязкоупругого поведения труб, изготовленных из анизотропных материалов, является актуальной задачей.

Хорошо известно, что вязкоупругость некоторых механических сред адекватно моделируется в рамках наследственной механики с использованием аппарата дробного интегро-дифференцирования [2]. В настоящей работе рассмотрена плоская задача Ламе для толстостенной трубы из ортотропного материала с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2 , на которую действуют симметрично распределённые относительно оси трубы постоянные внутренние и внешние давления q_1 и q_2 . Определены радиальное и окружное напряжения: $\sigma_r(r) = c_1^* r^{k-1} + c_2^* r^{-k-1}$, $\sigma_\theta(r) = c_1^* k r^{k-1} - c_2^* k r^{-k-1}$, где $k^2 = \mu_{r\theta} / \mu_{\theta r} = E_{\theta 1} / E_{r 1} = E_{\theta 2} / E_{r 2} = \eta_\theta / \eta_r$ – коэффициент пропорциональности параметров модели, $\mu_{r\theta}$ и $\mu_{\theta r}$ – коэффициенты Пуассона, $E_{r 1}$, $E_{r 2}$, $E_{\theta 1}$ и $E_{\theta 2}$ – модули упругости, η_r и η_θ – коэффициенты вязкости вдоль соответствующих осей, $c_1^* = \frac{q_1 r_1^{k+1} - q_2 r_2^{k+1}}{r_2^{2k} - r_1^{2k}}$, $c_2^* = \frac{r_1^{k+1} r_2^{k+1} (q_2 r_1^{k-1} - q_1 r_2^{k-1})}{r_2^{2k} - r_1^{2k}}$.

Получены определяющие соотношения для деформаций в интегральной форме на основе дробного аналога модели Ржаницына:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_{r 1} + E_{r 2}} - \frac{\mu_{r\theta} \sigma_\theta}{E_{\theta 1} + E_{\theta 2}} + E_{0r;\lambda}^{\alpha,\alpha} \left(\frac{(E_{r 2} + \lambda \eta_r) \sigma_r}{(E_{r 1} + E_{r 2}) \eta_r} - \frac{\mu_{r\theta} (E_{\theta 2} + \lambda \eta_\theta) \sigma_\theta}{(E_{\theta 1} + E_{\theta 2}) \eta_\theta} \right), \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{\mu_{\theta r} \sigma_r}{E_{r 1} + E_{r 2}} + \frac{\sigma_\theta}{E_{\theta 1} + E_{\theta 2}} + E_{0r;\lambda}^{\alpha,\alpha} \left(-\frac{\mu_{\theta r} (E_{r 2} + \lambda \eta_r) \sigma_r}{(E_{r 1} + E_{r 2}) \eta_r} + \frac{(E_{\theta 2} + \lambda \eta_\theta) \sigma_\theta}{(E_{\theta 1} + E_{\theta 2}) \eta_\theta} \right), \end{aligned}$$

где ε_r и ε_θ – радиальная и окружная деформации, $E_{0r;\lambda}^{\alpha,\alpha}$ – интегральный оператор [3, с. 171],

$$\alpha \in (0,1) \text{ – порядок дробного интегрирования, } \lambda = -\frac{E_{r 1} E_{r 2}}{(E_{r 1} + E_{r 2}) \eta_r} = -\frac{E_{\theta 1} E_{\theta 2}}{(E_{\theta 1} + E_{\theta 2}) \eta_\theta}.$$

Так как $\sigma_r = \sigma_r(r)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$, то радиальная и окружная деформации принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_{r 1} + E_{r 2}} - \frac{\mu_{r\theta} \sigma_\theta}{E_{\theta 1} + E_{\theta 2}} + \left(\frac{(E_{r 2} + \lambda \eta_r) \sigma_r}{E_{r 1} E_{r 2}} - \frac{\mu_{r\theta} (E_{\theta 2} + \lambda \eta_\theta) \sigma_\theta}{E_{\theta 1} E_{\theta 2}} \right) [1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)], \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{\mu_{\theta r} \sigma_r}{E_{r 1} + E_{r 2}} + \frac{\sigma_\theta}{E_{\theta 1} + E_{\theta 2}} + \left(-\frac{\mu_{\theta r} (E_{r 2} + \lambda \eta_r) \sigma_r}{E_{r 1} E_{r 2}} + \frac{(E_{\theta 2} + \lambda \eta_\theta) \sigma_\theta}{E_{\theta 1} E_{\theta 2}} \right) [1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)], \end{aligned}$$

где $Exp(\alpha, \beta; \lambda; t)$ – обобщённая дробная экспоненциальная функция [3, с. 171].

При $E_{r_2} \rightarrow \infty$ и $E_{\theta_2} \rightarrow \infty$ полученное решение сводится к решению рассматриваемой задачи на основе дробного аналога модели Фойхта:

$$\varepsilon_r = \left(\frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\mu_{r\theta} \sigma_\theta}{E_\theta} \right) [1 - Exp(\alpha, 1; \lambda; t)], \quad \varepsilon_\theta = \left(-\frac{\mu_{\theta r} \sigma_r}{E_r} + \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} \right) [1 - Exp(\alpha, 1; \lambda; t)].$$

При $\alpha \rightarrow 1$ полученные решения задачи редуцируются к соответствующим решениям в рамках классических реологических моделей.

Список литературы

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения). М.: Наука, 1973. 288 с.
3. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля / Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. № . С. 167-194.

Сведения об авторах

Красильникова А.А., магистрант, инженер. Область научных интересов: механика деформируемого твёрдого тела, дробное исчисление.

Огородников Е.Н., к. ф.-м. н., доцент. Область научных интересов: дробное исчисление и его приложения.

THE PROBLEM OF VISCOELASTIC DEFORMATION OF A THICK-WALL PIPE FROM ORTHOTROPIC MATERIAL ON THE BASIS OF FRACTIONAL ANALOGUES OF THE VOICHT AND RZHANITSYN MODELS

Krasilnikova A.A., Ogorodnikov E.N.

Samara State Technical University, Samara, Russia, krasilnikova.aa@samgtu.ru

Keywords: viscoelasticity, creep, rheology, thick-walled pipes, orthotropy, fractional integro-differentiation, Voigt model, Rzhaniatsyn model.

The viscoelasticity of some mechanical media is adequately modeled within the framework of hereditary mechanics using the apparatus of fractional integro-differentiation. In this paper, we consider the plane Lamé problem for a thick-walled pipe made of an orthotropic material, which is subjected to constant internal and external pressures symmetrically distributed relative to the pipe axis. The radial and circumferential stresses are determined. Radial and hoop deformations are obtained based on fractional analogues for the Voigt and Rzhaniatsyn models.