В. Д. БОГАТЫРЕВ

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ АКТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ РЫНОЧНЫХ УСЛОВИЙ

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассмотрим ситуацию, когда менеджер (инвестор) управляет непосредственно исполнителем, выпускающим какую-либо продукцию. С одной стороны, менеджер преследует свои цели – стремится повысить свой доход, а с другой стороны, исполнитель, работающий на менеджера, имеет свои цели по достижению максимальной собственной прибыли. Данная задача в настоящее время пользуется большой популярностью, поскольку позволяет найти наиболее оптимальное решение по управлению в данной системе, либо показать, что без внешних воздействий, система не работоспособна.

Предположим, что целевые функции менеджера G и исполнителя g следующие:

$$G(x) = R(x) - C(x), \qquad (1)$$

$$g(x) = C(x) - Z(x), \qquad (2)$$

где x – количество выпускаемой исполнителем продукции, G(x) – чистый доход менеджера, R(x) – совокупный доход менеджера, C(x) – затраты менеджера – сумма получаемая исполнителем, g(x) – чистый доход исполнителя, Z(x) – затраты исполнителя на производство продукции x.

Система (1-2) называется активной, так как содержит внутри себя активный элемент – исполнителя, преследующего свои цели. При этом исполнителю выплачивается зарплата C(x) зависящая от результатов его деятельности. Данная зависимость называется функцией стимулирования, которая однозначно определяет трудовой договор или контракт между менеджером и исполнителем. При отказе менеджера от использования стимулирования вообще (выбирается C(x)=0), то, в силу (1), исполнитель выберет действие x=0, минимизирующее затраты, то есть предпочтет не работать.

Если, работа системы менеджер-исполнитель происходит на протяжении нескольких временных периодов, то такая активная система будет еще и динамической. Так как стоимость денежных средств во времени разная, то необходимо проводить дисконтирование финансовых потоков системы. Вследствие всего вышесказанного система (1-2) приобретает следующий вид:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{R_n(x_n) - C_n(x_n)}{\prod_{r=1}^{n}(1 + i_r)} \to \max, \qquad (3)$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{C_n(x_n) - Z_n(x_n)}{\prod_{r=1}^{n}(1 + q_r)} \to \max, \qquad (4)$$

где N – число временных периодов работы системы, n (n=1, ..., N) – текущий период, x_n – количество выпускаемой исполнителем продукции в период n, $G(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ – чистый доход менеджера, $R_n(x_n)$ – совокупный доход менеджера, $C_n(x_n)$ – затраты менеджера – сумма получаемая исполнителем, $g(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ – чистый доход исполнителя, $Z_n(x_n)$ – затраты исполнителя на производство продукции x_n, i_r и q_r – коэффициенты дисконтирования в период r для менеджера и исполнителя соответственно.

Естественным обязательным условием согласованной работы систем (1-2) и (3-4) является то, что менеджер должен выплачивать исполнителю сумму превышающую затраты последнего, а также премию U. Величина U может интерпретироваться как доход, который исполнитель может получить, не участвуя в данном проекте (контракте). Например, U – доход от участия в другом контракте или пособие по безработице. Вышеописанным условием для системы (1-2) будет (5), а для системы (3-4) – (6).

$$C(x) \geq Z(x) + U. \qquad (5)$$

$$C_n(x_n) \geq Z_n(x_n) + U_n. \qquad (6)$$

Для нахождения оптимального взаимодействия в системе менеджер – исполнитель предлагается использовать следующую функцию стимулирования:

$$C(x) = \begin{cases} Z(x) + U, x = y \\ 0, x \neq y \end{cases}. \qquad (7)$$

Предложенная функция оплаты работы (7) подразумевает, что при выпуске исполнителем согласно его договора (контракта) продукции y, он получает компенсацию своих затрат Z(x), а также премию в ее минимальном размере U. Если же исполнитель не выполняет условия менеджера по выпуску продукции, он ничего не получает. Для случая оптимизации динамической системы формула (7) будет выглядеть следующим образом:

$$C_n(x_n) = \begin{cases} Z_n(x_n) + U_n, x_n = y_n \\ 0, x_n \neq y_n \end{cases}. \qquad (8)$$

Учитывая все вышесказанное и подставляя (7) в систему (1-2), получим оптимальную систему стимулирования, определяющую возможности менеджера по управлению исполнителем:

$$G(x) = R(x) - Z(x) - U \rightarrow \max. \qquad (9)$$

При рассмотрении проекта, функционирующего в течение конечного числа N периодов, формула (9) примет вид:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{R_n(x_n) - Z_n(x_n) - U_n}{\prod_{r=1}^{n}(1 + i_r)} \rightarrow \max. \qquad (10)$$

Решение задачи стимулирования представляет собой поиск локального максимума целевой функции менеджера (9) при заданных ограничениях на выпуск продукции: $x_{max} \geq x \geq 0$. Решение задачи по формуле (10) при "слабой зависимости" или ее отсутствии между периодами представляет собой сумму решений задачи (9) для каждого периода отдельно с умножением на соответствующие коэффициенты дисконтирования. Если зависимость между периодами явно присутствует, то решение задачи (10) становится менее тривиальным и выходит за рамки рассмотрения данной работы.

Рассмотрим задачу стимулирования (9) и возможности инвестора по управлению исполнителем. Для этого, продифференцировав формулу (9) по параметрам количества выпускаемой продукции x и премии исполнителя U, найдем функции чувствительности:

$$\gamma_x^G = \frac{\partial G(x)}{\partial x} = \frac{\partial R(x)}{\partial x} - \frac{\partial Z(x)}{\partial x}. \qquad (11)$$

$$\gamma_U^G = \frac{\partial G(x)}{\partial U} = -1. \qquad (12)$$

Функция чувствительности γ_U^G к параметру U является константой и равна –1, то есть при увеличении премии исполнителя на 1 денежную единицу, доход менеджера будет уменьшаться на 1 денежную единицу. В то же время, функция γ_x^G к параметру x является двухкомпонентной, зависит от выпуска продукции, от скорости роста доходов и затрат при росте объема продукции. Очевидно, что при подстановке конкретных функций доходов и затрат данная чувствительность может быть знакопеременной, то есть, в одном интервале доходы менеджера будут увеличиваться при увеличении объема выпуска продукции, а в другом интервале доходы будут уменьшаться.

Используя первое приближение ряда Тейлора можно рассчитать изменение целевой функции менеджера при изменении параметров проекта на величины Δx и ΔU:

$$\Delta G = \gamma_x^G \cdot \Delta x + \gamma_U^G \cdot \Delta U. \qquad (13)$$

При изменяющихся рыночных условиях и необходимости поддержания фиксированного дохода ($\Delta G=0$) менеджер может использовать (13) следующим образом. При изменении размера премии U (если, например, повысился уровень оплаты аналогичного вида работ) менеджеру необходимо изменить объем выпуска продукции на величину:

$$\Delta x = -\frac{\gamma_U^G \cdot \Delta U}{\gamma_x^G} = \frac{\Delta U}{\gamma_x^G}. \qquad (14)$$

При изменении выпуска продукции на величину Δx, менеджеру необходимо изменить размер премии исполнителю (например, менеджер может “наказать” исполнителя за снижение выпуска продукции, снизив размер зарплаты):

$$\Delta U = -\frac{\gamma_x^G \cdot \Delta x}{\gamma_U^G} = \gamma_x^G \cdot \Delta x. \qquad (15)$$

Таким образом, в данной простой задаче стимулирования при изменении одного параметра проекта менеджер может, изменяя другой, оставлять свой изначально рассчитанный доход фиксированным.

При рассмотрении более сложной динамической задачи стимулирования, кроме параметров объема выпуска продукции и премии в каждом из периодов, необходимо еще рассматривать как переменную рыночную величину ставку дисконта. В этом случае функция чувствительности к объему выпуска продукции будет следующей:

$$\gamma^{G}_{x_S} = \frac{\partial G(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial x_S} = \frac{\dfrac{\partial R_S(x_S)}{\partial x_S} - \dfrac{\partial Z_S(x_S)}{\partial x_S}}{\prod\limits_{r=1}^{S}(1+i_r)}. \quad 16)$$

Функция (16) зависит исключительно от доходов и затрат в рассматриваемом периоде, от объема выпускаемой продукции и от ставок дисконтирования, действующих с начала проекта и до момента S.

Функция чувствительности к премии исполнителя в текущем периоде S будет так же, как и в формуле (12), со знаком минус:

$$\gamma^{G}_{U_S} = \frac{\partial G(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial U_S} = -\frac{1}{\prod\limits_{r=1}^{S}(1+i_r)}. \qquad (17)$$

В обеих формулах (16-17) коэффициент приведения $\prod\limits_{r=1}^{S}(1+i_r)$ будет ослаблять влияние изменяющихся параметров на проект по мере удаления во времени от начала проекта. Однако при приближении ставок дисконта к нулю, разница между влиянием изменяющихся параметров в начале и в конце проекта будет уменьшаться.

Что касается самой ставки дисконтирования, то ее рост будет только уменьшать чистый совокупный доход менеджера. Кроме того, процентная ставка в периоде S не окажет влияния на доходы и затраты проекта, которые имеют место в периодах следующих за S, что и требуется, чтобы не нарушать причинно-следственные связи:

$$\gamma^{G}_{i_S} = \frac{\partial G(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial i_S} = -\frac{1}{(1+i_S)} \cdot \sum_{n=S}^{N} \frac{R_n(x_n) - Z_n(x_n) - U_n}{\prod\limits_{r=1}^{n}(1+i_r)}.$$

(18)

Так же, как и в задаче стимулирования (9), в динамической задаче можно применить ряд Тейлора и провести анализ возможностей менеджера по управлению исполнителем на протяжении N периодов:

$$\Delta G = \sum_{n=1}^{N}\left(\gamma^{G}_{x_n} \cdot \Delta x_n + \gamma^{G}_{i_n} \cdot \Delta i_n + \gamma^{G}_{U_n} \cdot \Delta U_n\right). \qquad (19)$$

Таким образом, менеджер при изменении условий функционирования проекта имеет возможность управлять исполнителем и добиваться стабильности проекта (уменьшать зарплату при невыполнении работ исполнителем, либо увеличивать выпуск продукции при повышении оплаты аналогичного вида работ исполнителя).