ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБЛЕМОСТИ И ТРЕНДОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ

© 2002 Нефедов А.Н.,Семенычев В.К , Семенычев Е.В.

На основе авторегрессии предложены методы параметрической и структурной идентификации практически важного класса моделей временных рядов экономических показателей, состоящих из суммы тренда (характеристики изменения показателя за длительное время) и колеблемости (отклонения уровней отдельных периодов времени от тренда). Методы, обладая широкими функциональными возможностями, в сравнении с известными требуют меньшее число отсчетов, имеют высокое быстродействие, малую вычислительную сложность.

Во многих прикладных задачах экономики актуальна задача точного и быстрого измерения, прогнозирования тренда (характеристики изменения явления за длительное время) и колеблемости (отклонения уровней отдельных периодов времени от тренда) [1,2].

Связь экономических показателей часто бывает гармонической, непосредственной и плавной по своему характеру, например, со сменой времен года для товарооборота отдельных видов одежды или продуктов, в сельскохозяйственном производстве, в сфере бытового обслуживания, транспорта и т.д. Сезонные колебания имеют обычно отчетливо выраженный годовой характер, хотя в отдельных случаях могут иметь и более высокие частоты.

Более "длинные" циклы связаны, например, с кризисами мировой экономической системы, с демографическими процессами. Достаточно привычным в экономике стало и представление периодических колебаний сложной формы в виде нескольких членов тригонометрического ряда Фурье [1].

Для временного (динамического) ряда отсчетов некоторого экономического показателя, изменяющегося по гармоническому закону

$$Y_к = A \operatorname{Cos}(\omega T_к + \phi) \qquad (1)$$

($T_к=\Delta к$, Δ- период опроса показателя (день, неделя, месяц, квартал, год), A-амплитуда колеблемости, ω-частота, к=0,1,2,...) выполним Z-преобразование [3], проведем несложные преобразования в области изображения и, вернувшись в область оригиналов, получим для (1) следующую модель авторегрессии - скользящего среднего

$$Y_к=\nu 1 Y_{к-1} - Y_{к-2} + C0\delta_к - C1\delta_{к-1} + \xi_к, \qquad (2)$$

где $\nu 1 = 2\operatorname{Cos}\omega\Delta$, $C0 = A\operatorname{Cos}\phi$, $C1=A\operatorname{Cos}(\omega\Delta-\phi)$, $\delta_к$-цифровой аналог дельта-функции, равный 1 при к=0 и 0 при других значениях к, $\xi_к$- присутствующая в отсчетах случайная помеха, принимаемая в большинстве случаев аддитивной и широкополосной.

Из (1) через три любых отсчета $Y_к$, $Y_{к-1}$, $Y_{к-2}$ (расположенных на доле периода колебательности, например, три месячных отсчета на годовом сезонном цикле) при $к \geq 2$ будем иметь возможность по разностной схеме второго порядка

$$Y_к= \nu 1 Y_{к-1} - Y_{к-2} + \xi_к \qquad (3)$$

рассчитать $\nu 1$ и, следовательно,

$$\omega = \frac{1}{\Delta} \operatorname{Arccos} \frac{\nu 1}{2}. \qquad (4)$$

Задавая в (2) последовательно к = 0 и 1, определив из (4) ω, можно рассчитать следующим образом и A, ϕ:

$$\phi = \mathrm{Arctg}\,\frac{\nu 1 Y0 - Y1 - Y0\cos\omega\Delta}{Y0\ \sin\omega\Delta\ \phi}, \quad A = \frac{Y0}{\cos\phi}.$$

Для обеспечения помехозащищенности оценки частоты ω (или периода, равного $2\pi/\omega$) колеблемости можно осуществить среднеквадратическую оценку

$$\hat{\nu}1 = \underset{\nu 1}{\mathrm{argmin}}\ M_{\nu,\Lambda}\{ Y_{к} - \nu 1 Y_{к-1} + Y_{к-2} \}^2 ,$$

затем, подставляя $\hat{\omega}$, рассчитанную из (4) по $\hat{\nu}1$, в

$$\hat{A}1, \hat{A}2 = \underset{A1,\ A2}{\arg\min} \sum_{к=0}^{N} \{ Y_{к} - A1 \cos\hat{\omega}\Delta к + A2\sin\hat{\omega}\Delta к) \}^2 ,$$

где $\quad M_{\nu,\Lambda}\{ \quad \} = \sum_{к=\nu}^{\Lambda+\nu-1} \{ \quad \}$ – оператор текущего сглаживания,

$A1= A\cos\phi$, $A2=A\sin\phi$, определим и остальные помехозащищенные оценки параметров модели (1).

$$\hat{A} = (\hat{A}1^2 + \hat{A}2^2)^{1/2}, \quad \hat{\phi} = \mathrm{Arctg}(\hat{A}2/ \hat{A}1). \qquad (5)$$

Условие argmin на A1, A2 приводит к соответствующим системам линейных алгебраических уравнений со статистическими моментами из отсчетов ряда (1).

Когда гармоническая колеблемость накладывается на стационарную составляющую, например, на постоянный спрос, регулярные поставки товаров и т.д.,то будем иметь временной ряд :

$$Y_{к} = B + A \cos (\omega T_{к}+\phi) . \qquad (6)$$

Аналогично предыидущему, для (5) получим модель авторегрессии-скользящего среднего

$$Y_{к}=(Y_{к-1}- Y_{к-2})\, \nu 2 + Y_{к-3} +\delta_{к} D0 + \delta_{к-1} D1 +\delta_{к-2} D2+ \xi_{к}, \qquad (7)$$

где $\nu 2 = 1 + 2\cos\omega\Delta$, $D0 = 1 + A\cos\phi$, $D1 = 2\cos\omega\Delta + A\cos\phi +$
$+ A\cos (\omega\Delta к - \phi)$, $D2 = 1 + A\cos(\omega\Delta к - \phi)$.

По любым трех при ($к \geq 3$) отсчетам модели (5) из

$$Y_{к}= (Y_{к-1} - Y_{к-2})\, \nu 2 + Y_{к-3} + \xi_{к} , \qquad (8)$$

определим частоту

$$\omega = \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{Arc}\cos\frac{\nu 2 - 1}{2}$$

(или среднеквадратическую оценку $\hat{\omega}$ при применении указанного выше оператора сглаживания и условия arg min на $\nu 2$), а затем, из условия

$$\underset{A1,A2,B}{\arg\min} \sum_{к=0}^{N} \{ Y_{к} - B - A1 \cos\hat{\omega}\Delta к + A2\sin\hat{\omega}\Delta к) \}^2$$

с учетом (5) будем иметь и остальные параметры $\hat{B}, \hat{A}, \hat{\phi}$ модели (6).

Видим, что в этом случае минимальный объем выборки для идентификации всех четырех параметров равен четырем.

Можно идентифицировать и модель с линейным аддитивным трендом

$$Y_к = C\,T_к + B + A\, Cos\,(\omega T_к+\phi), \qquad (9)$$

которой будет соответствовать (при к≥ 4) следующая модель авторегрессии

$$Y_к = Y_{к-1}\, 2(Cos\, \omega\Delta+1) - Y_{к-2}(2 + 4\, Cos\, \omega\Delta) +$$

$$+Y_{к-3}\,2(Cos\omega\Delta+1) - Y_{к-4} + \xi_к, \qquad (10)$$

позволяющая по пяти отсчетам временного ряда определить входящую в нее $\hat{\omega}$ (ω) и, затем, параметры $\hat{C}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{\phi}$ (с учетом (5)) из условия

$$\underset{C,\,B,\,A1,\,A2}{Argmin} \sum_{к=0}^{N}\{Y_к-C-B- A1\, Cos\, \hat{\omega}\Delta к+ A2 Sin\hat{\omega}\Delta к)\}^2 \qquad (11)$$

Прием можно распространить и на периодическую колеблемость общего вида, представляемую первыми тремя членами ряда Фурье

$$Y_к = A0 + A1 Cos\,(\omega 1 T_к+\phi 1) + A2\, Cos(\omega 2 T_к+\phi 2)\,,$$

которой будет соответствовать (при к≥ 5) модель

$$Y_к = (Y_{к-4}-Y_{к-1})(Cos\, \omega 2\Delta-1) + (Y_{к-3} - Y_{к-2})$$
$$(2+Cos\omega 1\Delta Cos\omega 2\Delta+Cos\omega 1\Delta-Cos\omega 2\Delta)+Y_{к-5} + \xi_к,$$

решаемой относительно Cos ω1Δ, Cos ω2Δ и, соответственно, ω1 и ω2, в том числе и помехозащищенных, без каких-либо трудностей. Аналогичен предыдущему и возможный способ оценки параметров

$$\hat{A}0\,,\ \hat{A}1,\ \hat{A}2,\ \hat{\phi}1,\ \hat{\phi}2$$

из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

В данной постановке минимально необходимое для идентификации число отсчетов временного ряда равно шести. Заметим,что можно проводить и структурную идентификацию моделей, т.е. начать с определения порядка разностной схемы ряда отсчетов[1]: если он будет равен второму, то адекватна модель (1), если - третьему, то следует обратиться к модели (5), а случае четвертого порядка имеем линейный тренд с гармоникой - (8), в случае пятого - (11).

Видим, что, обладая широкими функциональными возможностями, предложенные методы идентификации в сравнении с известными методами [1,2] требуют меньшее число отсчетов, имеют высокое быстродействие и малую вычислительную сложность.

Литература

1.Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование. М. : Финансы и статистика. 2001. - 227 с.

2.Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. М. : Экономика. 1985. – 259 с.

3.Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М. : Наука.1971 – 288 с.