УДК 681.3.07

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЛОГИСТИЧЕКОЙ МОДЕЛИ ЭФФЕКТА СВЕРХМАЛЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Золотарева А.А.

Научный руководитель: д.т.н., д.э.н., профессор Семенычев В.К.

Самарский государственный аэрокосмический университет

им. акад. С.П. Королева

Качественные исследования различных сложных систем на предмет их устойчивости к внешним воздействиям демонстрируют так называемый эффект сверхмалых воздействий. Его суть заключается в том, что сверхмалые внешние воздействия на динамическую систему приводят к сильному разрушительному эффекту (участок *A* на рис. 1), тогда как малые воздействия сравнительно легко компенсируются этой системой (участок *B*). Достаточно сильные воздействия вновь вызывают разрушительный эффект (участок *C*), т.к. внутренние защитные механизмы системы с ними не справляются.

Данная закономерность была установлена в различных системах, в том числе:

1. *В медицине*. Ряд медиков и биологов описывают эффект сверхмалых воздействий на примерах защищенности человеческого организма от поражающего воздействия вредоносных бактерий и отравляющих веществ: иммунная система человека реагирует лишь на определенную их концентрацию, а более слабые воздействия, не превышающие порога чувствительности, воспринимает как «белый шум».

2. *В динамике сложных социально-экономических систем*. В качестве примера внешнего воздействия возьмем параметр, характеризующий объем потока иммигрантов, незаконно въезжающих на территорию определенного региона или страны (численность в единицу времени). Эффект от данного воздействия — это угроза национальной безопасности страны. Против организованного вооруженного вторжения через государственную границу неизбежно

будут приняты адекватные меры, тогда как постепенное заселение территории мигрантами создает впечатление ненужности и неэффективности ответных действий. В результате угроза национальной безопасности, вызванная «тихой экспансией» такого рода, способна превысить угрозу, исходящую от вооруженного вторжения, и даже привести к тому, что часть территории суверенной страны окажется под контролем другого государства.

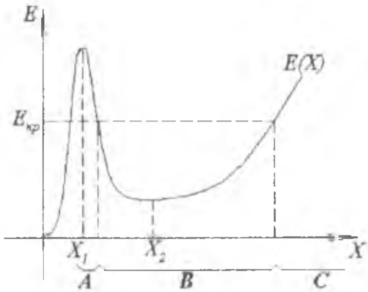

рис. 1

3. *В технике.* Подавляющее большинство техногенных аварий и катастроф происходит вследствие протекания хорошо известных и ожидаемых процессов, которым не придают должного значения, считая их влияние слабым и безвредным, тогда как на самом деле их стабильное действие приводит к накоплению в функционирующей системе некомпенсируемых и необратимых изменений.

В [1] предложена модель эффекта сверхмалых

$$E(X)=\frac{rX^{\beta}}{Y}=\frac{rX^{\beta}}{k}(1+C_0e^{-\alpha kX}),$$

воздействий:

где $E(X)$ -разрушительный эффект

Y- сила внутренней защиты системы

$$Y(X)=\frac{k}{1+C_0e^{-\alpha kx}}$$

X- сила или интенсивность опасных внешних воздействий;

k- максимальный постоянный предел силы зашиты;

$C_0>1$- константа; $\alpha,\beta>0$ – const.

Критическое для функционирования системы значение эффекта от внешнего воздействия удовлетворяет условию $E(X_2)<E_{кр}<E(X_1)$.

$E_{кр}$ — это и есть критический уровень эффекта внешних воздействий, превышение которого приводит к разрушению системы.

До настоящего времени не решена задача параметризации логистической модели эффекта сверхмалых воздействий.

$$E(X)=X^{\beta}(A_0+A_1e^{-\alpha kx})\ (1)$$

Для этого разложим степенную функцию X^{β} в биномиальный ряд, ограничиваясь первыми тремя членами:

$$x^{\beta} = 1 + \beta(x-1) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}(x-1)^2 + \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-1)^3 + \ldots$$

$$k\Delta = x - 1$$

(2)

Тогда ряд наблюдений T_k разрушительного эффекта $E(X)$ примет вид:

$$T_k = A_0 + A_0\beta k\Delta + A_1 e^{-\alpha K}\cdot e^{-\alpha Kk\Delta} + A_1\beta k\Delta e^{-\alpha K}\cdot e^{-\alpha Kk\Delta} + + A_0\frac{\beta(\beta-1)}{2}(k\Delta)^2 + A_1\frac{\beta(\beta-1)}{2}e^{-\alpha K}\cdot e^{-\alpha Kk\Delta}\cdot(k\Delta)^2 \quad (3)$$

Построим разностную схему для T_k с использованием z- преобразования [2]. Для того, чтобы получить возможность параметризации модели через наблюдаемые уровни Y_k, выразим $T_k = Y_k - \xi_k$ (рассматривается аддитивное вхождение помехи). Авторегрессия скользящего среднего принимает вид:

$$Y_k = 3(\lambda+1)\cdot Y_{k-1} - 3(\lambda^2+3\lambda+1)\cdot Y_{k-2} + (\lambda^3+9\lambda^2+9\lambda+1)\cdot Y_{k-3} - -3\lambda\cdot(\lambda^2+3\lambda+1)\cdot Y_{k-4} + 3\lambda^2(\lambda+1)\cdot Y_{k-5} - \lambda^3\cdot Y_{k-6} + \eta_k$$

(4)

где η_k - новая стохастическая компонента равная:

$$\eta_k = \xi_k - (\lambda+1)\cdot\xi_{k-1} + 3(\lambda^2+3\lambda+1)\cdot\xi_{k-2} - (\lambda^3+9\lambda^2+9\lambda+1)\cdot\xi_{k-3} + +3\lambda\cdot(\lambda^2+3\lambda+1)\cdot\xi_{k-4} - 3\lambda^2(\lambda+1)\cdot\xi_{k-5} + \lambda^3\cdot\xi_{k-6}$$

Выразим помеху из уравнения и сгруппируем относительно параметра λ:

$$\eta_k = (Y_k - 3Y_{k-1} + 3Y_{k-2} - Y_{k-3}) + \lambda(-3Y_{k-1} + 9Y_{k-2} - 9Y_{k-3} + 3Y_k + \lambda^2(3Y_{k-2} - 9Y_{k-3} + 9Y_{k-4} - 3Y_{k-5}) + \lambda^3(-Y_{k-3} + 3Y_{k-4} - 3Y_{k-5}$$

Обозначим

$$\lambda = \mu_1, \lambda^2 = \mu_2, \lambda^3 = \mu_3;\ a = (Y_k - 3Y_{k-1} + 3Y_{k-2} - Y_{k-3}), b = (-3Y_{k-1} + 9Y_{k-2} - 9Y$$

$$c = (3Y_{k-2} - 9Y_{k-3} + 9Y_{k-4} - 3Y_{k-5}),\ d = (-Y_{k-3} + 3Y_{k-4} - 3Y_{k-5} + Y_{k-6}).$$

На первом этапе из (4) можем найти параметр λ, точнее его оценку λ^0, методами статистического сглаживания, например, МНК. Для этого реализуем условие:

$$\lambda^0 = \arg\min_{\lambda}\sum_{k=6}^{N}\left[\begin{array}{l}(Y_k - 3Y_{k-1} + 3Y_{k-2} - Y_{k-3}) + \lambda(-3Y_{k-1} + 9Y_{k-2} - 9Y_{k-3} + 3Y_{k-4}) + \\ + \lambda^2(3Y_{k-2} - 9Y_{k-3} + 9Y_{k-4} - 3Y_{k-5}) + \lambda^3(-Y_{k-3} + 3Y_{k-4} - 3Y_{k-5} +\end{array}\right.$$

$$= \arg\min_{\lambda}\sum_{k=6}^{N}[a + \mu_1\cdot b + \mu_2\cdot c + \mu_3\cdot c]^2$$

Реализовав МНК, получим нормальную СЛАУ третьего порядка, решая которую найдем параметр λ и подставим в исходное уравнение.

На втором шаге определим оценки параметров A_0, A_1, β.

Вернемся к уравнению (1),

$$T_k = A_0 + Dk\Delta + A_1 e^{-\alpha K} \cdot e^{-\alpha K k\Delta} + D_1 k\Delta e^{-\alpha K} \cdot e^{-\alpha K k\Delta} + D_2 (k\Delta)^2 + D_3 e^{-\alpha K} \cdot e^{-\alpha K k\Delta} \cdot ($$

,

где $A_0\beta$=D, $A_1\beta$=D_1, $A_0 \frac{\beta(\beta-1)}{2}$=$D_2$, $A_1 \frac{\beta(\beta-1)}{2}$=$D_3$.

Тем самым мы упростили уравнение и теперь можем применить МНК и получить **нормальную СЛАУ шестого порядка.**

$$D^0, D_1^0, D_2^0, D_3^0, A_0, A_1 = \underset{D^0, D_1^0, D_2^0, D_3^0, A_0, A_1}{\arg\min} M^0 \begin{pmatrix} (T_k \quad A_0 - Dk\Delta - A_1 e^{-\alpha K} \cdot e^{-\alpha K k\Delta} - D_1 \\ - D_2 (k\Delta)^2 - D_3 e^{-\alpha K} \cdot e^{-\alpha K k\Delta} \cdot (k\Delta)^2 \end{pmatrix}$$

На рис.2 построена кривая с параметрами: A_0=0,0008, A_1=0,932,

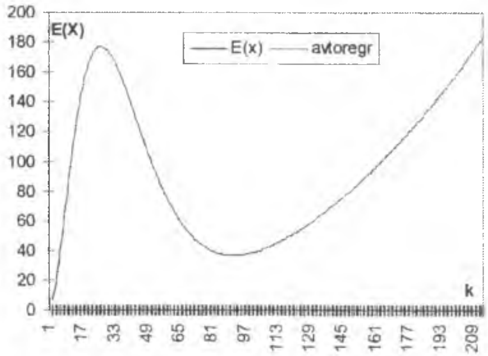

рис. 2

β=2,3, α=0,00423, к=20,5, λ=0,917.

С помощью полученной модели мы сможем прогнозировать значения ход развития событий в критических ситуациях, обладая выборкой всего в *18-24* значений [2], что дает большое преимущество с практической точки зрения.

Литература:

1. Нижегородцев Р.М. Информационная экономика. Книга 1. Информационная Вселенная: Информационные основы экономического роста. Москва — Кострома, 2002. —163с.

2. Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В. Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций./СГАУ; Самара, 2006.-240с.

УДК 336 (ББКУ.В6)

МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

Куранова А. А.

Научный руководитель: д. т. н., профессор Горлач Б. А.

Самарский государственный аэрокосмический университет

им. акад. С.П. Королева

Известным учёным-экономистом В.В. Леонтьевым (1906-1999) создана балансовая модель необходимая для планирования производственной деятельности предприятия, дающая достаточную информацию для анализа межотраслевого баланса и продуктивности производства.

Рассмотрим эту модель. Предположим, что всё хозяйство анклава представлено совокупностью n отраслей. Тогда производство этих отраслей характеризуется следующими показателями. Всё производство X, состоящий из i элементов, каждый из которых характеризует производство i-й отрасли. Вектор Y - доля продукции, идущая на потребление в непроизводственной сфере с каждой j-й отрасли. Продукция всех отраслей идущая на производство i-й отрасли выразится тогда вектором $(a_{i1}\, x_1\, \dots\, a_{in}\, x_n)$. Коэффициенты a_{ij} характеризуют долю продукции j-й отрасли идущую на производство продукции i-й отрасли. Таким образом, мы можем составить матрицу описанных коэффициентов $A = (a_{ij})$. Тогда вектор затрат отраслей анклава на собственное производство определяется произведением матриц A и X.

Теперь можно составить балансовую модель Леонтьева, в которой общий объём продукции X складывается из продукции, идущей на производство AX и на потребление Y:

$X = AX+Y.$ (1)

Так как $X = IX$, уравнение можно переписать в виде

$(I - A)X = Y.$

Отсюда, в случае невырожденности матрицы $I - A$, получаем решение:

$X = (I - A)^{-1} Y.$

Если потребность непроизводственной сферы определяется вектором Y, то встаёт вопрос о том, может ли