ПОСТАНОВКА И ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕБОВАНИЙ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ПЕРЕВОЗОК АВИАКОМПАНИЕЙ

© 2002 Зорин К.А, Богатырев А.Д., Коптев В.А.

В терминах теории расписаний задача может быть сформулирована следующим образом. Имеется транспортная система перевозок грузов, состоящая из n самолетов типа АН-124-100. На перевозку грузов поступает конечный поток m требований. Возможности системы определяются матрицей

$\left\|t_{ij}\right\|(i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$, t_{ij} – длительность обслуживания i-го требования

j-м самолетом, оцененная аналитически. Самолеты в общем случае идентичны, и каждое требование может быть обслужено любым самолетом. В каждый момент времени отдельный самолет обслуживает не более одного требования. Обслуживание требования, находящегося на некотором из самолетов, не прерывается для передачи на другой самолет. Необходимо распределить требования таким образом, чтобы обеспечить минимальное время их обслуживания.

При отсутствии ограничений на возможные варианты расписания и без учета момента поступления требований задача сводится к разбиению множества требований $M = \{1, \dots, m\}$ на n непересекающихся подмножеств N_j $(j=1,\dots, n)$ и к упорядочению внутри каждого из них. Критерием разбиения, обеспечивающего оптимальность расписания по быстродействию, служит

$$\max_{1\le j\le n} T_j \to \min, \tag{1}$$

где $T_j = \sum_{i\in N_j} t_{ij}$ - общее время загрузки j-го самолета, при условиях

$$\begin{gathered} t_{ij} > 0,\ i=1, \dots, m,\ j=1, \dots, n, \\ N_k \bigcap N_\ell = \varnothing, k, \ell = 1,\dots, n, k \ne \ell \\ \bigcup_{j=1}^{n} N_j = M, \end{gathered} \tag{2}$$

а также

$$\left|N_j\right| \le k_j,\ 0 \le k_j \le m, \tag{3}$$

или

$$T_j \le T_{j\,\text{доп}},$$

где $\left|N_j\right|$ - число элементов подмножества N_j;

k_j – ограничение на число требований, назначаемых на j-й самолет;

$T_{j\,\text{доп}}$ – ограничение на временную загрузку j-го самолета.

Известны приближенные методы решения целочисленной комбинаторной задачи .

Рассмотрим алгоритм точного решения, построенный по схеме методов ветвей и границ. Правило оценки границ и способ формирования дерева вариантов основаны на следующих предположениях.

Пусть z< m требований уже распределены самолетом. Частично сформированные при этом множестве обозначим N_j^z $(j = 1, \dots, n)$. Тогда

$$T_j^z = \sum_{i\in N_j^z} t_{ij} \quad j = 1, \dots, n.$$

Предположим, что каждое из оставшихся m-z требований будет обслужено с максимальной для него производительностью, т.е. в течение

$$\tau_i = \min_{1 \le j \le n} t_{ij}, \quad i = z+1, z+2, \ldots, m,$$

и кроме того, эти требования распределяются между наименее загруженными самолетами так, чтобы их загрузка была равномерной. Очевидно, номера этих самолетов будут определяться первыми

$$r = \begin{cases} n, \text{ если } z \le m - n, \\ m - z, \text{ если } z \succ m - n \end{cases}$$

членами последовательности

$$\pi = (j_1, j_2, \ldots, j_s, j_{s+1}, \ldots, j_n)$$

отвечающей неравенству

$$T^z_{j1} \le T^z_{j2} \le \ldots \le T^z_{js} \le T^z_{js+1} \le \ldots \le T^z_{jn}$$

При сделанных допущениях условное время занятости каждого из самолетов составит

$$T^z = \frac{1}{r}\left(\sum_{s=1}^{r} T^z_{js} + \sum_{i=z+1}^{m} \tau_i\right).$$

Общее время обслуживания в системе с такой идеализированной дисциплиной будет определяться наибольшей из величин T_z и T^z_{jn}. Для любого реального распределения справедливо

$$\max_{N^z_j \subset N_j} T_j \ge \max\{T^z; T^z_{jn}\}. \tag{4}$$

Кроме того, в силу целочисленности задачи (1)- (3)

$$\max_{N^z_j \subset N_j} T_j \ge \max_{z+1 \le 1 \le m} \tau_i.$$

Таким образом, полученные выражения могут быть использованы для оценки нижней границы в зависимости от распределения первых z требований. Запишем эту оценку в следующем виде:

$$T_{zj} = \max\{T^z; T^z_{jn}; \max_{z+1 \le i \le m} \tau_i\}, \tag{5}$$

где T_{zj} – нижняя граница варианта распределения, при котором z-е требование назначено на j-й самолет.

Выражение (5) позволяет установить начальную нижнюю границу T_0 всего множества допустимых планов. Для этого достаточно положить z=0(r=n). Получим

$$T_0 = \max\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \tau_i; \max_{z+1 \le i \le m} \tau_i\right\}.$$

Процесс поиска оптимального решения состоит в направленном движении по вершинам дерева вариантов распределения требований. Стратегия ветвления заключается в следующем. На z-м уровне дерева формируется n вариантов распределения z-го требования, для чего последовательно принимается $z \in N^z_j (j = 1, \ldots, n)$. Полученные варианты оцениваются с помощью выражения (5). Вершина, соответствующая варианту с наименьшей оценкой

$$T_{zp} = \min_{1 \le j \le n} T_{zj}, \tag{6}$$

выбирается в качестве активной для дальнейшего ветвления. Остальные вершины данного уровня – концевые. При наличии нескольких вершин, отвечающих условию (6), выбирается любая из них, если не установлено правило предпочтения (например, по величине t_{ij}). Если при формировании j-го варианта не удовлетворены условия (3), его оценка полагается равной ∞.

Процесс продолжается до тех пор, пока дальнейшее ветвление становится невозможным. Решение оптимально, если дерево вариантов не имеет концевых вершин с оценками

$$T_{ij} < \;.^{*} \text{ при } i \notin N_j,\; j = 1, \ldots, n, \qquad (7)$$

где $T^* = \max\limits_{1 \le j \le n} T_j$ - значение целевой функции полученного решения.

В противном случае производится проверка и уточнение решения путем ветвления из вершин, отвечающих неравенству (7). Проверку целесообразно начинать с нижних уровней, так как при этом может быть достаточно быстро достигнуто улучшение решения, что, в свою очередь, сократит число вариантов верхних уровней, подлежащих проверке. Ветвление из проверяемой вершины прекращается, если на каком-либо уровне оценка нижней границы достигнет или превысит величину $.^*$. В случае получения нового решения для проверки используется соответствующее значение целевой функции.

Процедура проверки может быть ускорена, если оценки проверяемых вершин уточнять с учетом дополнительного ограничения

$$\tau_i \ne t_{ij}, \text{при } t_{ij} \ge T^* - T_j^z, i = z+1, z+2, \ldots, m, j = 1, \ldots, n. \qquad (8)$$

При этом в качестве τ_i потребуется выбирать не минимальный, а один из следующих по величине элементов t_{ij}, что может привести к увеличению T^z и оценки. Если в какой-либо строке матрицы $\|t_{ij}\|$ все $t_{ij} > T^* - T^z$, то можно, не производя ветвления, утверждать, что при данном распределении z требований нижняя граница решения обязательно достигнет или превысит T^*. Таким образом, введение условия (8) позволяет сократить число проверяемых вариантов. заметим, что в зависимости от структуры исходной матрицы в ряде случаев достигается равенство $T^* = T_0$. Поэтому при организации вычислительной процедуры целесообразно проверять это условие прежде, чем просматривать концевые вершины.

После получения оптимального в смысле (1) распределения каждое подмножество N_j может быть упорядочено по другим критериям теории расписаний