ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕВОЗКАМИ ГРУЗОВ АВИАКОМПАНИЕЙ ЧАРТЕРНОГО ТИПА

© 2002 Зорин К.А., Богатырев А.Д., Коптев В.А.

Ежегодно авиакомпания разрабатывает календарный план услуг по перевозкам специальных грузов на плановый период, состоящий из N этапов. Обозначим:

x_n – услуги по перевозкам в течение отрезка времени t_n;

d_n - спрос на услуги в конце отрезка t_n,

$i_n = i_{n-1} + x_n - d_n$ – уровень резервов изделий на конец отрезка t_n (i_0 - начальный уровень резервов);

$c_n(x_n, i_{n-1})$ – затраты на отрезке t_n, связанные с оказанием услуг по перевозкам x_n грузов и резервы i_{n-1} на перевозку грузов.

Количество перевезенных грузов t_n ограничено производственными возможностями авиакомпании, т.е. $x_n = 0,1 \ldots, x_{max}$ Уровень возможных резервов также ограничен, т.е. $i_n = 0, 1, \ldots, i_{max}$ $(n=1, \ldots, N)$.

Необходимо спланировать работу авиакомпании таким образом, чтобы обеспечить заданный спрос на перевозки при минимальных затратах.

Обозначив

$$f_n(i_n) = \min \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j, i_{j-1}),$$

$$i_{j-1} + x_j \geq d_j,\ i_j = j_{j1} + x_j - d_j,$$

$$x_j = 0,1,\ldots,x_{max},\ i_j = 0,1,\ldots,i_{max},$$

получим функциональное уравнение

$$f_n(i_n) = \min[f_{n-1}(i_{n-1}) + c_n(x_n, i_n)], n = 1,\ldots,N,$$

при условиях

$$i_{n-1} + x_n \geq d_n, x_n \leq x_{max}, i_n = i_{n-1} + x_n - d_n \leq i_{max}.$$

Особенность рассмотренной задачи – учет динамики процесса планирования во времени.

Рассмотрим особенности решения сформулированной задачи табличным способом на численном примере со следующими исходными данными:

$N = 4; d_n = 3(n = 1,2,3,4), x_{max} = 4; i_{max} = 3; c_n(x_n, i_{n-1}) = c_n(x_n) + hi_{n-1};$

$c_n(x_n) = 10 + 4x_n$ при $x_n > 0$, $c_n(0) = 0$; $c_0(i_0) = 7i_0$ – затраты на создание первоначальных резервов, $h=1$. Требуется определить план перевозки грузов x_n ($n = 1, 2, 3, 4$), обеспечивающий минимальные затраты для значений $i_4 = 0,1,2,3$. С учетом введенных обозначений функциональное уравнение можно представить в виде

$$f_n(i_n) = \min[F_{n-1}(i_{n-1}) + c_n(x_n)], n = 1,2,3,4,$$

где $i_n = i_{n-1} + x_n - d_n, F_{n-1}(i_{n-1}) = f_{n-1}(i_{n-1}) + hi_{n-1}$.

Определив значения $F_0(i_0) = c_0(i_0) + hi_0$, можно найти решение функционального уравнения при $n=1$. Процесс определения $f_1(i_1)$ показан в таблице 1.

Таблица 1

i_0 / F_0 — x_1 / c_1	0 0	1 8	2 16	3 24
0 0				$i_1=0$ 24
1 14			$i_1=0$ 30	$i_1=1$ 38
2 18		$i_1=1$ 26	$i_1=1$ 34	$i_1=2$ 42
3 22	$i_1=0$ 22	$i_1=1$ 30	$i_1=2$ 38	$i_1=3$ 46
4 26	$i_1=1$ 26	$i_1=2$ 34	$i_1=3$ 42	

Таблица 2

i_1 / F_1 — x_2 / c_2	0 22	1 27	2 36	3 45
0 0				$i_2=0$ 45
1 14			$i_2=0$ 50	$i_2=1$ 59
2 18		$i_2=0$ 45	$i_2=1$ 54	$i_2=2$ 63
3 22	$i_2=0$ 44	$i_2=1$ 49	$i_2=2$ 58	$i_2=3$ 67
4 26	$i_2=1$ 48	$i_2=2$ 53	$i_2=3$ 62	

Таблица 3

i_2 / F_2 / x_3 / c_3	0 / 44	1 / 49	2 / 55	3 / 65
0 / 0				$i_3=0$ 65
1 / 14			$i_3=0$ 69	$i_3=1$ 79
2 / 18		$i_3=0$ 67	$i_3=1$ 73	$i_3=2$ 83
3 / 22	$i_3=0$ 65	$i_3=1$ 71	$i_3=2$ 77	$i_3=3$ 87
4 / 26	$i_3=1$ 70	$i_3=2$ 75	$i_3=3$ 81	

В верхнюю строку таблицы записаны значения $F_0(i_0)$, в левый столбец – значения функции $c_1(x_1)$. Поскольку $i_1 = i_0 + x_n - d_n \geq 0$ и $i_1 \leq i_{max}$, то некоторые из клеток табл.1 являются запрещенными. Определив значения $i_0 + x_{n-3}$ и найдя сумму $F_0(i_0) + c_1(x_1)$, определяем оптимальную последовательность $f_1(i_1)$, которая выделена в табл.1 стрелками. Рассчитав значения функции $F_1(i_1) = f_1(i_1) + hi_1$, заносим их в верхнюю строку таблицы 2. В левый столбец этой же таблицы заносятся значения функции $c_2(x_2)$. Рассчитав функцию $f_2(i_2)$ (с. выделенные стрелками клетки таблицы 2), аналогичным образом находим $F_2(i_2)$ и переходим к определению последовательности $f_3(i_3)$ (таблица 3) и $f_4(i_4)$ (таблица 4).

Таблица 4.

i_3 / F_3 / x_4 / c_4	0 / 65	1 / 71	2 / 77	3 / 84
0 / 0				$i_4=0$ 84
1 / 14			$i_4=0$ 91	$i_4=1$ 98
2 / 18		$i_4=0$ 89	$i_4=1$ 95	$i_4=2$ 102
3 / 22	$i_4=0$ 87	$i_4=1$ 93	$i_4=2$ 99	$i_4=3$ 106
4 / 26	$i_4=1$ 91	$i_4=2$ 97	$i_4=3$ 103	

В результате решения находим функцию $f_4(i_4)$. Для каждого значения $i_4=0,1,2,3$ определяем оптимальный план. Например, значению $i_4=0$ соответствуют $f_4=84$, $x_4=0$, $i_3=3$ (таблица 3). В таблице 3 находим, что $i_3=3$ соответствуют $x_3=4$ и $i_2=2$. Члену последовательности $f_2(i_2)=53$ ($i_2=2$) соответствуют $x_2=4$, $i_1=1$ (таблица 2). Для значения $i_1=1$ в таблице 1 окончательно находим $x_1=4$, $i_0=0$. Аналогичным образом определяем план при $i_4=1$ ($x_1=3, x_2=3, x_3=4, x_4=4, i_0=0$); $i_4=3(x_1=3, x_2=4, x_3=4, x_4=4)$.

Таким образом табличный способ позволяет сравнительно просто решить задачу управления резервами авиакомпании на планируемый период.