МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического моделирования в механике

Н.И.Клюев

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Учебное пособие к спецкурсу
для студентов механико-математического факультета

Издательство «Самарский университет»
2001

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

УДК 621.396.6:536.248.2.001
ББК 22.253
К 521

Клюев Н.И. Асимптотические методы решения уравнений с пограничным слоем: Учебное пособие к спецкурсу для студентов механико-математического факультета.- Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001.- 40с.

ISBN 5-86465-202-4

Данное учебное пособие является подробным изложением одноименного спецкурса кафедры математического моделирования в механике для специальности «Прикладная математика».

Предназначено для углубленного изучения спецкурса и выполнения курсовых и дипломных работ для студентов 4 - 5 курсов механико- математического факультета СамГУ.

Рецензент д-р физ.-мат.наук, проф. В.А.Соболев

ISBN 5-86465-202-4

Редактор Т.И.Кузнецова
Компьютерная верстка, макет Н.С.Комарова

ЛР №020316 от 04.12.96. Подписано в печать 27.03.01. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ.л.2.5.; уч.-изд.л.2.7.
Тираж 150 экз. Заказ № 607
Издательство «Самарский университет».443011,Самара,ул.Акад.Павлова, 1.
УОП СамГУ, ПЛД №67-43 от 19.02.98

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что характер движения жидкости и газа зависит от величины безразмерного параметра – числа Рейнольдса. Существует критическое значение числа Рейнольдса Re=2300, которое разделяет ламинарный и турбулентный режимы течения. Для Re<2300 течение является ламинарным, а для Re>2300 течение имеет турбулентный характер, Re=2300 характеризует переходный режим течения жидкости [1].

Число Рейнольдса выражается формулой $\mathrm{Re} = \dfrac{Vd}{\nu}$ и характеризует отношение сил инерции к силам вязкости в потоке жидкости или газа (V–характерная скорость течения, d–характерный размер тела, ν-коэффициент кинематической вязкости). В области ламинарных течений можно выделить течения, где преобладают силы вязкости, в этом случае можно считать, что Re«1, и течения, где преобладают силы инерции , тогда Re»1.

Такая классификация не только отражает физические особенности течения, но и накладывает отпечаток на внешний вид дифференциальных уравнений, описывающих движение жидкости и газа. Будем рассматривать так называемые автомодельные течения в каналах различной формы, когда уравнения движения Навье-Стокса и уравнение неразрывности сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям в полных производных.

Решения таких уравнений называют еще подобными, имея в виду, что профили продольных скоростей в различных поперечных сечениях канала отличаются лишь коэффициентом пропорциональности, т.е. являются подобными.

Для автомодельных течений с большим числом Рейнольдса (Re»1) введем малый положительный параметр ε=1/Re. Тогда уравнение движения будет иметь малый параметр при старшей производной [1]. Такое уравнение называется сингулярно-возмущенным. Решение сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений принципиально отличается от решения обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.

Сингулярно-возмущенные уравнения имеют медленные и быстрые переменные, роль которых обычно выполняют искомая функция и её первая производная. Методы возмущений с представлением решения в виде бесконечного степенного ряда по малому параметру не приводят к цели. Так как дифференциальное уравнение для нулевого приближения имеет порядок на единицу меньший, чем исходное дифференциальное уравнение, что не позволяет удовлетворить всем граничным условиям краевой задачи.

Решение сингулярно-возмущенного уравнения имеет область быстрого изменения функции, которая располагается, как правило, в окрестности одной (либо двух) граничных точек задачи. Такая область быстрого изменения функции называется областью математического пограничного слоя. Расположение математического пограничного слоя совпадает с гидродинамическим пограничным слоем.

Толщина пограничного слоя зависит от величины малого параметра, и при уменьшении малого параметра уменьшается и толщина пограничного слоя. Область интегрирования разбивается на внешнюю (вне пограничного слоя) и внутреннюю (внутри пограничного слоя).

Решение сингулярно-возмущенного уравнения ищется в виде решения пригодного для внешней области, которое затем уточняется в окрестности граничной точки, где располагается пограничный слой. Существуют различные методы решения таких уравнений. Рассмотрим на учебном примере один из методов – метод сращиваемых асимптотических разложений [2].

ГЛАВА 1. МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Имеем краевую задачу, записанную в безразмерном виде

$$\varepsilon y'' + \left(1+\varepsilon^2\right)y' + \left(1-\varepsilon^2\right)y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0)=\alpha, \quad y(1)=\beta, \tag{1.2}$$

где ε - малый, положительный параметр, $y = y(x, \varepsilon)$.

Дифференциальное уравнение (1.1) является сингулярно-возмущенным, так как малый параметр стоит при старшей производной, и его решение предполагает наличие математического пограничного слоя в окрестности одной (или двух) граничных точек.

Если заранее неизвестно, где располагается пограничный слой, то поступают следующим образом: назначают место расположения слоя произвольно и, если сращивание асимптотических разложений удается осуществлять, то место выбрано правильно. В противном случае процедуру решения повторяют для другой точки.

Предположим, что пограничный слой располагается в окрестности граничной точки $x=0$. Общее решение дифференциального уравнения (1.1) ищется как составное: внешнее решение y^0, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению вне пограничного слоя, и внутреннее решение y^i, пригодное внутри пограничного слоя.

Внешнее решение представим в виде бесконечного степенного ряда по малому параметру

$$y^0 = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot \varepsilon^n . \qquad (1.3)$$

Подставим (1.3) в (1.1) и, ограничиваясь нулевым и первым приближением, запишем:

нулевое $$y_0' + y_0 = 0, \qquad y_0(1) = \beta \qquad (1.4)$$

и первое приближения $$y_1' + y_1 = -y_0'', \qquad y_1(1) = 0 . \qquad (1.5)$$

Решение для нулевого приближения имеет вид $y_0 = \beta e^{1-x}$. Решение для дифференциального уравнения (1.5) ищется как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. С учетом граничных условий внешнее разложение примет вид

$$y^0 = \beta e^{1-x} + \varepsilon\beta(1-x)e^{1-x} . \qquad (1.6)$$

Найдем внутреннее разложение в области пограничного слоя. Для этого введем в рассмотрение растягивающую координату в окрестности точки x = 0, т.е. $\xi = x/\varepsilon$. Запишем уравнение (1.1) для новой координаты, при этом учтем следующие соотношения:

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2}{d\xi^2}, \qquad (1.7)$$

получим

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\frac{dy}{d\xi} + (1-\varepsilon^2)y = 0 .$$

Переобозначим для краткости $\frac{dy}{d\xi} = y'$, $\frac{d^2y}{d\xi^2} = y''$, тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$y'' + (1+\varepsilon^2)y' + \varepsilon(1-\varepsilon^2)y = 0, \quad y(0) = \alpha . \qquad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.8) вновь ищем в виде ряда $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots$. После подстановки ряда в уравнение (1.8) и группировки слагаемых при одинаковых степенях малого параметра получим:

нулевое $$y_0'' + y_0' = 0, \quad y_0(0) = \alpha \tag{1.9}$$

и первое приближения $$y_1'' + y_1' = -y_0, \quad y_1(0) = 0. \tag{1.10}$$

Запишем решение для уравнения (1.9) $y_0 = \alpha - B_0 + B_0 e^{-\xi}$, где B_0 - константа интегрирования. С учетом нулевого приближения уравнение (1.10) перепишется

$$y_1'' + y_1' = -\alpha + B_0 - B_0 e^{-\xi}, \quad y_1(0) = 0,$$

тогда его решение примет вид

$$y_1 = -B_1 + B_1 e^{-\xi} - (\alpha - B_0)\xi + B_0 \xi e^{-\xi},$$

где $B_1 = \text{const}$. И окончательно получим внутреннее решение для области пограничного слоя

$$y^i = \alpha - B_0 + B_0 e^{-\xi} + \varepsilon\left[-B_1 + B_1 e^{-\xi} - (\alpha - B_0)\xi + B_0 \xi e^{-\xi}\right], \tag{1.11}$$

где константы интегрирования B_0 и B_1 определяются из условия сращивания внутреннего и внешнего решений.

Выполним сращивание внутреннего и внешнего решений по методу Ван-Дайка [2]. Для чего перейдем в уравнении (1.6) к растягивающей координате $\xi = x/\varepsilon$

$$y^0 = \beta e^{1-\varepsilon\xi} + \varepsilon\beta(1 - \varepsilon\xi)e^{1-\varepsilon\xi}. \tag{1.12}$$

Используем разложение слагаемых уравнения (1.12) в ряд по малому параметру ε при фиксированной координате ξ

$$e^{-\varepsilon\xi} = 1 - \varepsilon\xi + \frac{\varepsilon^2\xi^2}{2!} - \cdots$$

И, сохраняя в (1.12) величины до первого порядка малости, запишем так называемое внешнее-внутреннее разложение на границе слоя

$$\left(y^{0}\right)^{1}=\beta e+\varepsilon\beta e(1-\xi).$$

Возвращаясь к старой переменной x, получим внешнее-внутреннее разложение

$$\left(y^{0}\right)^{1}=\beta e-\beta e x+\varepsilon\beta e\ . \qquad (1.13)$$

Найдем внутреннее-внешнее разложение, для чего перейдем в уравнении (1.11) к переменной x

$$y^{1}=\alpha-B_{0}+B_{0}e^{-x/\varepsilon}+\varepsilon\left[-B_{1}+B_{1}e^{-x/\varepsilon}-(\alpha-B_{0})\frac{x}{\varepsilon}+\frac{x}{\varepsilon}B_{0}e^{-x/\varepsilon}\right]. \qquad (1.14)$$

Выполним разложение слагаемых в (1.14) при малых ε и фиксированных значениях x. Для чего вычислим следующие пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-1/\varepsilon}=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon}=\lim_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}}=0,$$

и уравнение (1.14) перепишется в виде внутреннего-внешнего разложения

$$\left(y^{1}\right)^{0}=\alpha-B_{0}-(\alpha-B_{0})x-\varepsilon B_{1}. \qquad (1.15)$$

Для сращивания внешнего-внутреннего и внутреннего-внешнего разложений приравняем выражения (1.13) и (1.15)

$$\beta e-\beta e x+\varepsilon\beta e=\alpha-B_{0}-(\alpha-B_{0})x-\varepsilon B_{1}. \qquad (1.16)$$

Затем, приравнивая в (1.16) коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, найдем $B_{0}=\alpha-\beta e,\quad B_{1}=-\beta e$

Выражение для внешнего разложения (1.12) и внутреннего разложения (1.14) представляют собой два отдельных решения, а именно: разложение y^{0} пригодно везде, за исключением окрестности точки x=0; и разложение y^{1} пригодно только в окрестности этой точки. Области пригодности разложений y^{0} и y^{1} перекрываются.

Для получения общего решения задачи, которое могло бы быть использовано на всем промежутке интегрирования, необходимо переключаться с одного разложения на другое в точке x_0. Однако значение x_0 точно не известно. Для того чтобы преодолеть указанное затруднение, из полученных разложений строят, так называемое, составное решение

$$y = y^0 + y^i - (y^0)^i = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)e^{-\xi} +$$
$$+ \varepsilon\left[\beta(1-x)e^{1-x} - \beta e^{1-\xi} + (\alpha - \beta e)\xi e^{-\xi}\right] + \cdots, \tag{1.17}$$

которое и является приближенным решением для данной краевой задачи.

В дальнейшем будем рассматривать сингулярно-возмущенные уравнения движения на примере уравнений движения для пара и жидкости в тепловой трубе [3-5].

ГЛАВА. 2. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ОТСОСОМ МАССЫ

Рассмотрим течение газа в плоском канале с равномерным отсосом массы (конденсатор тепловой трубы). Пусть ширина канала значительно превосходит его высоту. В этом случае краевыми эффектами можно пренебречь и принять течение за плоское. Воспользуемся моделью ламинарного течения вязкой, несжимаемой жидкости при больших поперечных числах Рейнольдса. Для выполнения этих условий считаем, что числа Рейнольдса $Re_0 < 2300$, $Re \gg 1$, а число Маха $M < 0,3$.

При равномерном по длине канала отсосе массы задача сводится к автомодельной, и в безразмерном виде краевая задача для продольной и поперечной скоростей запишется в виде [7]

$$\bar{V} = \left(\frac{L}{b} - \bar{y}\right)\bar{W}' \tag{2.1}$$

$$\varepsilon\bar{W}''' + \bar{W}'^2 - \bar{W}\cdot\bar{W}'' = k, \qquad \bar{W} = \bar{W}(\bar{z}), \tag{2.2}$$

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{W} = 0, \quad \bar{W}'' = 0, \tag{2.3}$$

$$\bar{z} = 1, \quad \bar{W} = 1, \quad \bar{W}' = 0, \tag{2.4}$$

где обозначения соответствуют ранее принятым [5] , L -длина канала, $2b$ - высота канала, $\bar{z} = z/b$, $\bar{y} = y/b$ - безразмерные поперечная и продольная координаты, $\bar{W} = W/W_и$, $\bar{V} = V/W_и$ - безразмерные поперечная и продольная скорости в канале, $k = const$, $\varepsilon = 1/Re$, $W_и$ - скорость вдува массы, Re_0 и Re - соответственно продольное и поперечное числа Рейнольдса [5].

Будем искать внешнее решение для поперечной скорости в виде нулевого приближения

$$\overline{W}_0'^2 - \overline{W}_0' \cdot \overline{W}_0'' = k, \tag{2.5}$$

$$\bar{z} = 0, \quad \overline{W}_0 = 0, \quad \overline{W}_0'' = 0, \tag{2.6}$$

$$\bar{z} = 1, \quad \overline{W}_0 = 1, \quad \overline{W}_0' = 0. \tag{2.7}$$

Одним из решений нелинейного дифференциального уравнения (2.5) является функция $\overline{W}_0 = A \cdot \mathrm{sh}\bar{z}$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой, при $k = A^2$. При этом граничные условия (2.6) тождественно выполняются. Из граничных условий (2.7) может быть выполнено лишь первое условие, откуда $A = \dfrac{2e}{e^2 - 1}$.

Граничное условие $\bar{z} = 1, \quad \overline{W}_0' = 0$ не выполняется. Следовательно, можно сделать вывод о наличии пограничного слоя в окрестности точки $\bar{z} = 1$. Разобьем область интегрирования на две части: внешнюю $0 \le \bar{z} \le \bar{z}_0$ и внутреннюю $\bar{z}_0 \le \bar{z} \le 1$, где $\bar{z}_0$ характеризует границу слоя. Таким образом, внешнее решение для нулевого приближения будет иметь вид

$$\overline{W}^0 = \frac{e}{e^2 - 1}\left(e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}\right) \quad , \qquad 0 \le \bar{z} \le \bar{z}_0. \tag{2.8}$$

Для нахождения внутреннего решения введем растягивающую координату в окрестности точки $\bar{z} = 1$, а именно $\xi = \dfrac{1 - \bar{z}}{\varepsilon}$. Для новой переменной уравнение движения (2.2) перепишется

$$-\overline{W}''' + \overline{W}'^2 - \overline{W} \cdot \overline{W}'' = \varepsilon^2 k, \quad \text{где} \quad \overline{W} = \overline{W}(\xi) \;. \tag{2.9}$$

Пренебрегая величиной второго порядка малости в уравнении (2.9), получим краевую задачу в области пограничного слоя

$$\overline{W}''' - \overline{W}'^2 + \overline{W} \cdot \overline{W}'' = 0, \tag{2.10}$$

$$\xi = 0, \quad \overline{W} = 1, \quad \overline{W}' = 0, \tag{2.11}$$

где $0 \ge \xi \ge \xi_0, \xi_0 = \dfrac{1 - \bar{z}_0}{\varepsilon}, \overline{W} = \overline{W}(\xi), \overline{W}' = \dfrac{d\overline{W}}{d\xi}, \overline{W}'' = \dfrac{d^2\overline{W}}{d\xi}, \overline{W}''' = \dfrac{d^3\overline{W}}{d\xi^3}$.

Найти аналитическое решение уравнения (2.10) не удается. Поэтому воспользуемся тем обстоятельством, что толщина пограничного слоя является величиной порядка малого параметра ε. Будем считать, что граничные условия (2.11) приближенно выполняются во всем диапазоне $0 \ge \xi \ge \xi_0$. При этом вносимая погрешность будет тем меньше, чем тоньше пограничный слой. Подставим (2.11) в (2.10), тогда краевая задача перепишется в виде

$$\overline{W}''' + \overline{W}'' = 0, \qquad (2.12)$$

$$\xi = 0, \quad \overline{W} = 1, \quad \overline{W}' = 0. \qquad (2.13)$$

Интегралом уравнения (2.12) является функция

$$\overline{W} = C_1 e^{-\xi} + C_2 \xi + C_3,$$

где C_2,C_3-константы интегрирования, определяемые из граничных условий (2.13) через константу C_1.

С учетом найденных констант интегрирования запишем решение для внутренней области пограничного слоя

$$\overline{W}^{i} = C_1 e^{-\xi} + C_1 \xi - C_1 + 1, \qquad \xi_0 \le \xi \le 0. \qquad (2.14)$$

Оставшуюся константу C_1 определим из условия сращивания внешнего и внутреннего решений по методу Ван-Дайка.

Выполним процесс сращивания. Для этой цели необходимо построить пределы $\left(\overline{W}^0\right)^i$ и $\left(\overline{W}^i\right)^0$ на границе слоя. Для этой цели перейдем во внешнем решении (2.8) к растягивающей координате

$$\overline{W}^0 = \frac{e}{e^2 - 1}\left(e^{1-\varepsilon\xi} - e^{\varepsilon\xi - 1}\right). \qquad (2.15)$$

Воспользуемся разложением по малому параметру в ряд Маклорена при фиксированной координате ξ следующих функций:

$$e^{-\varepsilon\xi} = 1 - \varepsilon\xi + \frac{\varepsilon^2\xi^2}{2!} - \cdots \quad , \qquad e^{\varepsilon\xi} = 1 + \varepsilon\xi + \frac{\varepsilon^2\xi^2}{2!} + \cdots$$

и, ограничиваясь величинами нулевого и первого порядка малости, подставим полученные разложения в (2.15). Возвращаясь к первоначальной координате, найдем внешнее-внутреннее разложение в окрестности точки $\overline{z} = \overline{z}_0$

$$\left(\overline{W}^0\right)^i = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}\overline{z} - \frac{2}{e^2 - 1}. \qquad (2.16)$$

Для нахождения внутреннего-внешнего разложения перейдем в (2.14) к координате $\overline{z}$ и оценим слагаемые решения

$$\left(\overline{W}'\right)^0 = C_1 e^{\frac{\bar{z}-1}{\varepsilon}} + \frac{C_1}{\varepsilon} - \frac{C_1 \bar{z}}{\varepsilon} - C_1 + 1. \tag{2.17}$$

Поскольку в области пограничного слоя $\bar{z} - 1 < 0$ и по нашему предложению $|\bar{z}_0 - 1| \sim \varepsilon$, то $C_1 e^{\frac{\bar{z}-1}{\varepsilon}} << \frac{C_1}{\varepsilon}$, кроме того, $C_1 << \frac{C_1}{\varepsilon}$. В этом случае (2.17) перепишется в виде

$$\left(\overline{W}'\right)^0 = -\frac{C_1}{\varepsilon}\bar{z} + \frac{C_1}{\varepsilon} + 1. \tag{2.18}$$

Приравняем правые части выражений (2.16) и (2.18)

$$\frac{e^2+1}{e^2-1}\bar{z} - \frac{2}{e^2-1} = -\frac{C_1}{\varepsilon}\bar{z} + \frac{C_1}{\varepsilon} + 1. \tag{2.19}$$

Для выполнения равенства (2.19) необходимо приравнять коэффициенты при $\bar{z}$. Откуда $C_1 = \varepsilon\frac{e^2+1}{1-e^2}$. Равенство свободных членов дает значение константы $C_1 = \varepsilon\frac{e^2+1}{1-e^2}$. Одинаковое значение константы C_1 говорит о том, что получено самосогласованное решение , и наше предположение о толщине пограничного слоя $1 - z_0 = \varepsilon$ является верным.

Общее решение задачи записывается как составное

$$\overline{W} = \overline{W}^0 + \overline{W}' - \left(\overline{W}^0\right)' = \frac{2e}{e^2-1}\operatorname{sh}\bar{z} + \varepsilon\frac{e^2+1}{1-e^2}\left(e^{\frac{\bar{z}-1}{\varepsilon}} - 1\right). \tag{2.20}$$

Таким образом, сращивание удалось выполнить, и мы получили решение для поперечной скорости течения. Выражение для продольной скорости найдем в соответствии с (2.1) и (2.20), тогда

$$\overline{V} = \left(\frac{2e}{e^2-1}\operatorname{ch}\bar{z} - \frac{e^2+1}{e^2-1}e^{\frac{\bar{z}-1}{\varepsilon}}\right)\left(\frac{L}{b} - \bar{y}\right). \tag{2.21}$$

Можно убедиться, что граничные условия краевой задачи (2.2)-(2.4) выполняются с точностью до первого порядка малости.

Построим эпюры для поперечной и продольной скоростей в соответствии с формулами (2.20) и (2.21) .

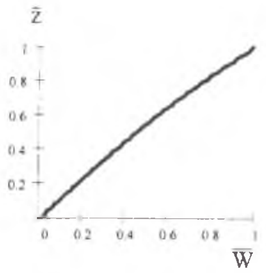

Рис.2.1. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

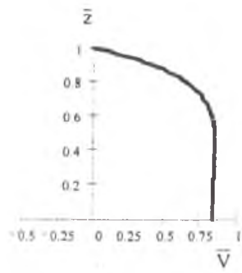

Рис. 2.2. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\bar{y}=1$

Из графика (рис.2.1) видно, что функция $\overline{W}(\bar{z})$ является медленной переменной, а функция $\overline{V}(\bar{y},\bar{z})$ (рис.2.2) имеет область быстрого изменения в окрестности точки $\bar{z}=1$, где располагается пограничный слой. На оси канала в точке $\bar{z}=0$ касательная к функции $\overline{V}(\bar{y},\bar{z})$ составляет с осью $\bar{z}$ угол α=0, что соответствует условию максимальной продольной скорости на оси симметрии потока. Знак «+» у продольной скорости означает, что направление потока совпадает с направлением оси y.

ГЛАВА 3. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КАНАВКЕ С ПЕРЕМЕННЫМ РАСХОДОМ МАССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ВНЕШНИМ ПОТОКОМ ГАЗА

Краевая задача, в безразмерном виде, о течении жидкости в прямоугольной канавке со вдувом или отсосом массы имеет следующий вид [6]:

$$\varepsilon\overline{W}''' + \overline{W}'^2 - \overline{W}\,\overline{W}'' = k, \tag{3.1}$$

$$\bar{z}=0, \quad \overline{W}=0, \quad \overline{W}'=0, \tag{3.2}$$

$$\bar{z}=1, \quad \overline{W}=\pm 1, \quad \overline{W}''=\bar{\tau}, \tag{3.3}$$

где $\overline{W}=\overline{W}(\bar{z})$ - поперечная составляющая скорости, знак «+» в граничном условии (3.3) соответствует течению с отсосом массы (испаритель тепловой трубы), знак «-» соответствует течению со вдувом массы (конденсатор тепловой трубы).

Выражение для продольной составляющей скорости для течения с отсосом массы (испаритель тепловой трубы) запишем в виде

$$\overline{V} = -\overline{y}\,\overline{W}', \tag{3.4}$$

и выражение для продольной составляющей скорости для течения со вдувом массы (конденсатор тепловой трубы)

$$\overline{V} = (\frac{L}{b} - \overline{y})\,\overline{W}'. \tag{3.5}$$

Величина $\overline{\tau}$ в граничном условии (3.3) характеризует напряжение трения на поверхности раздела фаз между жидкостью и внешним потоком газа. Трение задается из решения внешней задачи. Рассматриваются три варианта взаимодействия между жидкостью и газом:

$\overline{\tau} < 0$ - встречное движение жидкости и газа;

$\overline{\tau} > 0$ - движение жидкости и газа в одном направлении;

$\overline{\tau} = 0$ - при отсутствии контакта между жидкостью и газом.

Для решения краевой задачи (3.1)-(3.3) воспользуемся методом прямого сращивания асимптотических разложений. Будем искать внешнее решение вне области пограничного слоя и внутреннее решение в области пограничного слоя.

Внешнее решение найдем в виде нулевого приближения уравнения (3.1) по степеням малого параметра

$$\overline{W}_0'^2 - \overline{W}_0\,\overline{W}_0'' = k, \tag{3.6}$$

$$\overline{z} = 0, \quad \overline{W}_0 = 0, \quad \overline{W}_0' = 0, \tag{3.7}$$

$$\overline{z} = 1, \quad \overline{W}_0 = \pm 1, \quad \overline{W}_0'' = \overline{\tau}. \tag{3.8}$$

Уравнение движения (3.6) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка и его интегралами могут быть несколько функций.

Рассмотрим решения уравнения (3.6) в виде линейной функции $\overline{W}_0 = A\,\overline{z}$, тригонометрической функции $\overline{W}_0 = A\sin\frac{\pi}{2}\overline{z}$ и гиперболической функции $\overline{W}_0 = A\,\mathrm{sh}\,\overline{z}$ [8]. Легко убедиться простой подстановкой, что указанные функции могут удовлетворять граничным условиям (3.8) и ни при каких обстоятельствах не удовлетворяют второму граничному условию (3.7) $\overline{z} = 0,\ \ \overline{W}_0' = 0$. Следовательно, можно сделать вывод, что в окрестности точки $\overline{z} = 0$ у стенки канала располагается пограничный слой. Для получения решения краевой задачи (3.1)...(3.3) разобьем область интегрирования на внутреннюю и внешнюю. Рассмотрим различные варианты внешних решений.

3.1. Интеграл нулевого приближения в виде линейной функции

Полагая решение уравнения (3.6) в виде $\overline{W}_0 = A\bar{z}$, удовлетворим граничным условиям при $\bar{z} = 1$. Откуда получим $A = \pm 1$ при $k = 1$ и напряжении трения $\bar{\tau} = 0$. Такое решение соответствует течению жидкости в прямоугольной канавке с переменным расходом массы без взаимодействия между жидкостью и газом.

Итак, внешнее решение примет вид

$$\overline{W}^0 = \pm\bar{z}, \qquad \bar{z}_0 \le \bar{z} \le 1, \tag{3.9}$$

где $\bar{z}_0$ - толщина пограничного слоя

Найдем внутреннее решение в области пограничного слоя, для чего преобразуем уравнение движения (3.1) с учетом граничного условия (3.2). По определению величина пограничного слоя мала, следовательно координата $\bar{z}_0 \ll 1$. Считаем, что граничные условия (3.2) выполняются во всем диапазоне внутренней области, тогда, подставляя (3.2) в уравнение движения (3.1), получим краевую задачу

$$\varepsilon\overline{W}''' = k, \tag{3.10}$$

$$\bar{z} = 0, \quad \overline{W} = 0, \quad \overline{W}' = 0. \tag{3.11}$$

Решением уравнения (3.10) является функция

$$\overline{W} = \frac{k\bar{z}^3}{6\varepsilon} + \frac{C_1\bar{z}^2}{2} + C_2\bar{z} + C_3.$$

Константы интегрирования C_2 и C_3 найдем, удовлетворяя граничным условиям (3.11). Тогда $C_2 = C_3 = 0$, и решение перепишется в виде

$$\overline{W} = \frac{k\bar{z}^3}{6\varepsilon} + \frac{C_1\bar{z}^2}{2}, \qquad 0 \le \bar{z} \le \bar{z}_0. \tag{3.12}$$

Оставшаяся константа C_1 и толщина пограничного слоя $\bar{z}_0$ определяются из условий прямого сращивания внешнего и внутреннего решений. Для сращивания потребуем в точке $\bar{z}_0$ равенства функций, а также их первых производных для внешнего и внутреннего решений

$$\left.\begin{aligned}\pm \bar{z}_0 &= \frac{\bar{z}_0^{\,3}}{6\varepsilon} + \frac{C_1 \bar{z}_0^2}{2},\\ \pm 1 &= \frac{\bar{z}_0^2}{2\varepsilon} + C_1 \bar{z}_0.\end{aligned}\right\}$$

Откуда $C_1 = \pm\frac{1}{\bar{z}_0} - \frac{\bar{z}_0}{2\varepsilon}$, а толщина пограничного слоя определится формулой

$$\pm\frac{3\varepsilon}{2} = -\bar{z}_0^2, \qquad \text{где } \varepsilon > 0. \tag{3.13}$$

Для того чтобы удовлетворить уравнению (3.13), необходимо отбросить в (3.13) знак «+». Тогда $\bar{z}_0 = \sqrt{\frac{3\varepsilon}{2}}$ соответствует течению жидкости в прямоугольной канавке со вдувом массы (конденсатор тепловой трубы). И константа интегрирования примет вид $C_1 = \frac{1{,}43}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Окончательно решение задачи для течения жидкости в прямоугольной канавке со вдувом массы запишется в виде внешнего и внутреннего решения

$$\overline{W}^0 = -\bar{z}, \qquad \bar{z}_0 \le \bar{z} \le 1, \tag{3.14}$$

$$\overline{W}' = \frac{\bar{z}^3}{6\varepsilon} - \frac{0{,}7\cdot\bar{z}^2}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad 0 \le \bar{z} \le \bar{z}_0. \tag{3.15}$$

Формулы (3.14), (3.15) дают зависимость для поперечной скорости в прямоугольной канавке. Профиль продольной скорости определим в соответствии с (3.5):

$$\overline{V}^0 = -1\left(\frac{L}{b} - \bar{y}\right), \qquad \bar{z}_0 \le \bar{z} \le 1, \tag{3.16}$$

$$\overline{V}' = \left(\frac{\bar{z}^2}{2\varepsilon} - \frac{1{,}4\bar{z}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(\frac{L}{b} - \bar{y}\right), \qquad 0 \le \bar{z} \le \bar{z}_0. \tag{3.17}$$

Построим эпюры для поперечной и продольной скоростей в соответствии с формулами (3.16) и (3.17).

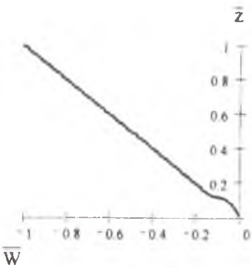

Рис.3.1. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

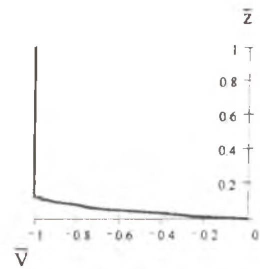

Рис. 3.2. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\bar{y} = 1$

Из графиков (рис.3.1,3.2) видно, что в окрестности точки $\bar{z} = 0$ располагается пограничный слой. Касательная в точке $\bar{z} = 1$ на графике функции $\bar{V}(\bar{z})$ (рис.3.2) составляет с осью $\bar{z}$ угол α=0, что соответствует максимальной продольной скорости на поверхности жидкости в прямоугольной канавке. Знак «-» у продольной скорости означает, что направление потока противоположно оси y.

3.2. Интеграл нулевого приближения в виде тригонометрической функции

Решение задачи рассмотрим для течения жидкости в прямоугольной канавке с отсосом массы (испаритель тепловой трубы). Пусть $\overline{W_0} = A\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}$, тогда, удовлетворяя граничным условиям (3.7), найдем $k = \frac{\pi^2}{4}$, $A = 1$. Пограничный слой по-прежнему располагается в окрестности точки $\bar{z} = 0$.

Из граничного условия (3.3) следует, что $\bar{\tau} = -\frac{\pi^2}{4} < 0$, следовательно решение соответствует взаимодействию встречных потоков жидкости и газа. Такое решение можно назвать феноменологическим. Внешнее решение задачи запишем в виде

$$\overline{W}^0 = \sin\frac{\pi}{2} z, \qquad \bar{z}_0 \le \bar{z} \le 1. \tag{3.18}$$

Внутреннее решение в области пограничного слоя совпадает с (3.12).

$$\overline{W} = \frac{k\,\overline{z}^3}{6\varepsilon} + \frac{C_1 \overline{z}^2}{2}, \qquad 0 \le \overline{z} \le \overline{z}_0 . \tag{3.19}$$

Выполним сращивание решений (3.18) и (3.19), для чего приравняем функции и их производные в точке $\overline{z} = \overline{z}_0$. Тогда

$$\sin\frac{\pi}{2}\cdot\overline{z}_0 = \frac{k\cdot\overline{z}_0^3}{6\varepsilon} + \frac{C_1\overline{z}_0^2}{2}, \tag{3.20}$$

$$\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\cdot\overline{z}_0 = \frac{k\cdot\overline{z}_0^2}{2\varepsilon} + C_1\overline{z}_0 . \tag{3.21}$$

Откуда найдем $C_1 = \dfrac{\pi}{2\overline{z}_0}\cos\dfrac{\pi}{2}\,\overline{z}_0 - \dfrac{k\,\overline{z}_0}{2\varepsilon}$, подставляя C_1 в (3.20), получим выражение для определения толщины пограничного слоя $\overline{z}_0$

$$\sin\frac{\pi}{2}\,\overline{z}_0 = \frac{\pi\,\overline{z}_0}{4}\cos\frac{\pi}{2}\,\overline{z}_0 - \frac{k\,\overline{z}_0^3}{12\varepsilon}. \tag{3.22}$$

Уравнение (3.22) может быть решено численными методами, либо величину $\overline{z}_0$ можно определить из приближенной оценки слагаемых .

Полагая $\overline{z}_0 = \varepsilon$, видим, что равенство (3.22) выполняется с точностью до ε. Тогда, с точностью до первого порядка малости, выражение для константы интегрирования примет вид

$$C_1 = \frac{\pi}{2\varepsilon} - \frac{\pi^3}{8}. \tag{3.23}$$

Внутреннее решение запишем при $k = \dfrac{\pi^2}{4}$

$$\overline{W}^{i} = \frac{\pi^2}{24\varepsilon}\,\overline{z}^3 - \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4\varepsilon}\right)\overline{z}^2, \qquad 0 \le \overline{z} \le \overline{z}_0 ,$$

и окончательно выражение для поперечной скорости будет включать внешнее и внутреннее решения

$$\overline{W}^0 = \sin\frac{\pi}{\varepsilon}\,\overline{z}, \qquad \overline{z}_0 \le \overline{z} \le 1, \tag{3.24}$$

$$\overline{W}^1 = \frac{\pi^2}{24\varepsilon}\bar{z}^3 - \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4\varepsilon}\right)\bar{z}^2, \qquad 0 \le \bar{z} \le \bar{z}_0, \tag{3.25}$$

где $\bar{z}_0 = \varepsilon$.

Профиль продольной скорости запишем в виде:

$$\overline{V}^0 = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\,\bar{z}\,\bar{y}, \qquad \bar{z}_0 \le \bar{z} \le 1, \tag{3.26}$$

$$\overline{V}^1 = \left[-\frac{\pi^2}{8\varepsilon}\bar{z}^2 + \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2\varepsilon}\right)\bar{z}\right]\bar{y}, \qquad 0 \le \bar{z} \le \bar{z}_0, \tag{3.27}$$

Построим эпюры для поперечной и продольной скоростей в соответствии с формулами (3.26) и (3.27).

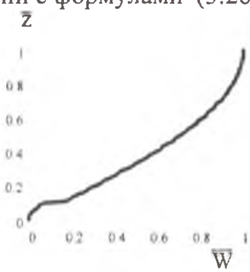

Рис.3.3. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

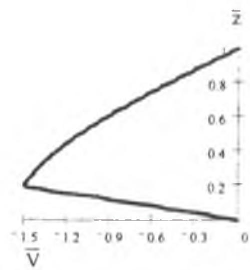

Рис. 3.4. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\bar{y} = 1$

Из графиков (рис.3.3,3.4) видно, что в окрестности точки $\bar{z} = 0$ располагается пограничный слой. График для продольной скорости показывает, что верхние слои жидкости в канавке испытывают торможение от встречного потока газа.

3.3. Интеграл нулевого приближения в виде гиперболической функции

Положим $\overline{W}_0 = A\,\mathrm{sh}\,z$, тогда, удовлетворяя граничным условиям в точке $\bar{z} = 1$, найдем $A = \frac{2e}{e^2 - 1}$ при $k = \frac{4e^2}{(e^2-1)^2}$ и $\bar{\tau} = 1$. Таким образом, имеем феноменологическое решение задачи для течения жидкости в прямоугольной канавке с отсосом массы (испаритель тепловой трубы)

$$\overline{W}_0 = \frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sh} \bar{z}, \qquad \bar{\tau} = 1 > 0. \tag{3.28}$$

Данная задача соответствует движению жидкости в канавке и потока газа в одном направлении.

Следовательно, внешнее решение задачи для нулевого приближения можно записать в виде

$$\overline{W}^0 = \frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sh} \bar{z}, \qquad \bar{z}_0 \le \bar{z} \le 1. \tag{3.29}$$

Внутреннее решение задачи в области пограничного слоя совпадает с (3.12)

$$\overline{W} = \frac{k \bar{z}^3}{6\varepsilon} + \frac{C_1 \bar{z}^2}{2}, \qquad 0 \le \bar{z} \le \bar{z}_0. \tag{3.30}$$

Выполним сращивание решений (3.29) и (3.30), для чего приравняем функции внутреннего и внешнего решений, а также их первые производные в точке $\bar{z} = \bar{z}_0$. Тогда

$$\frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sh} \bar{z}_0 = \frac{k \bar{z}_0^3}{6\varepsilon} + \frac{C_1 \bar{z}_0^2}{2}, \tag{3.31}$$

$$\frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{ch} \bar{z}_0 = \frac{k \bar{z}_0^2}{2\varepsilon} + C_1 \bar{z}_0. \tag{3.32}$$

Откуда найдем $C_1 = \frac{2e}{e^2-1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \bar{z}_0}{\bar{z}_0} - \frac{k \bar{z}_0}{2\varepsilon}$. Подставляя C_1 в (3.31), получим выражение для определения величины пограничного слоя

$$\frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sh} \bar{z}_0 = \frac{e \bar{z}_0}{e^2 - 1} \operatorname{ch} \bar{z}_0 - \frac{k \bar{z}_0^3}{12\varepsilon}. \tag{3.33}$$

Легко видеть, что равенство (3.33) приближенно выполняется для $\bar{z}_0 = \varepsilon$. Тогда константу интегрирования запишем в виде

$$C_1 = \frac{2e}{e^2 - 1} \frac{\operatorname{ch} \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{2e^2}{(e^2 - 1)}, \tag{3.34}$$

и внутреннее решение перепишем

$$\overline{W}' = \frac{k\,\overline{z}^3}{6\varepsilon} + \frac{e}{e^2-1}\,\frac{\mathrm{ch}\varepsilon}{\varepsilon}\,\overline{z}^2 - \frac{e^2}{\left(e^2-1\right)^2}\,\overline{z}^2 .$$

Общее решение задачи для течения жидкости в прямоугольной канавке с отсосом массы (испаритель тепловой трубы) при движении жидкости и газа в одном направлении:
поперечная скорость

$$\left.\begin{aligned} &\overline{W}^0 = \frac{2e}{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,\overline{z}, && \overline{z}_0 \le \overline{z} \le 1 \\ &\overline{W}' = \frac{k\,\overline{z}^3}{6\varepsilon} + \frac{e}{e^2-1}\,\frac{\mathrm{ch}\varepsilon}{\varepsilon}\,\overline{z}^2 - \frac{e^2}{\left(e^2-1\right)^2}\,\overline{z}^2, && 0 \le \overline{z} \le \overline{z}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.35)$$

продольную скорость запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\overline{V}^0 = \left(\frac{2e}{1-e^2}\,\mathrm{ch}\overline{z}\right)\overline{y}, && \overline{z}_0 \le \overline{z} \le 1 \\ &\overline{V}' = \left[-\frac{k\,\overline{z}^2}{2e} - \frac{2e}{e^2-1}\,\frac{\mathrm{ch}\varepsilon}{\varepsilon}\,\overline{z} + \frac{2e^2}{\left(e^2-1\right)^2}\,\overline{z}\right]\overline{y}, && 0 \le \overline{z} \le \overline{z}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.36)$$

Построим эпюры для поперечной и продольной скоростей в соответствии с формулами (3.35) и (3.36).

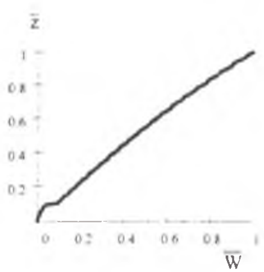

Рис.3.5. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

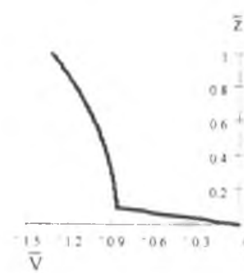

Рис. 3.6. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\overline{y} = 1$

Из графиков (рис.3.5,3.6) видно, что в окрестности точки $\overline{z} = 0$ располагается пограничный слой. График для продольной скорости показывает, что верхние слои жидкости в канавке разгоняются от спутного потока газа. Знак «-» у продольной скорости означает, что направление потока противоположно оси y.

ГЛАВА 4. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ОТСОСОМ МАССЫ ПРИ БОЛЬШИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Краевая задача о ламинарном течении газа в цилиндрическом канале с равномерным отсосом массы (конденсатор тепловой трубы) имеет следующий безразмерный вид [9]:

$$\frac{1}{\bar{r}^3}\left[\frac{1}{Re}\left(\overline{W}'''\bar{r}^2-\overline{W}''\bar{r}+\overline{W}'\right)+\overline{W}'^2\bar{r}-\overline{W}\,\overline{W}''\bar{r}+\overline{W}\,\overline{W}'\right]=-\frac{1}{\bar{y}}\frac{d\bar{P}}{d\bar{y}}=k, \tag{4.1}$$

$$\bar{r}=0, \overline{W}=0, \quad \overline{W}''-\frac{\overline{W}'}{\bar{r}}=0, \tag{4.2}$$

$$\bar{r}=1, \overline{W}=1, \quad \overline{W}'=0. \tag{4.3}$$

При введении новой переменной $\bar{z}=\ln\bar{r}$, уравнение движения для поперечной скорости и граничные условия перепишутся

$$\varepsilon\left(\overline{W}'''-4\overline{W}''+4\overline{W}'\right)+\overline{W}'^2-\overline{W}\,\overline{W}''+2\overline{W}\,\overline{W}'=ke^{4\bar{z}}, \tag{4.4}$$

$$\bar{z}=-\infty, \quad \overline{W}=0, \quad \lim_{\bar{z}\to-\infty}\left(\overline{W}''-2\overline{W}'\right)=0, \tag{4.5}$$

$$\bar{z}=0, \quad \overline{W}=1, \quad \overline{W}'=0. \tag{4.6}$$

Для решения задачи (4.4)-(4.6) воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений Ван-Дайка и будем искать внешнее и внутреннее решения. Внешнее решение запишем в виде ряда $\overline{W}=\overline{W}_0+\varepsilon\overline{W}_1+\cdots$ по степеням малого параметра. Ограничимся нулевым приближением, тогда

$$\overline{W}_0'^2-\overline{W}_0\overline{W}_0''+2\overline{W}_0\overline{W}_0'=ke^{4\bar{z}}, \tag{4.7}$$

$$\bar{z}=-\infty, \quad \overline{W}_0=0, \quad \lim_{\bar{z}\to-\infty}\left(\overline{W}_0''-2\overline{W}_0'\right)=0, \tag{4.8}$$

$$\bar{z}=0, \quad \overline{W}_0=1, \quad \overline{W}_0'=0\,. \tag{4.9}$$

Интегралом дифференциального уравнения (4.7) является функция $\overline{W}_0=Ae^{2\bar{z}}$ при $k=4A^2$. Можно проверить, что граничные условия (4.8) выполняются. Из граничного условия $\bar{z}=0$, $\overline{W}_0=1$ следует определение констант $A=1$, $k=4$.

Оставшееся граничное условие $\bar{z}=0$, $\overline{W}_0'=0$ удовлетворить не удается, следовательно, можно сделать вывод о наличии пограничного слоя в окрестности точки $\bar{z}=0$. Физически это означает, что пограничный слой располагается у стенки канала при $\bar{r}=1$. Таким образом, внешнее решение имеет вид

$$\overline{W}^0=e^{2\bar{z}}. \tag{4.10}$$

Для нахождения внутреннего решения введем в окрестности точки $\bar{z}=0$ растягивающую координату $\xi=\dfrac{\bar{z}}{\varepsilon}$. Выполним преобразование уравнения движения (4.7) с учетом следующих соотношений:

$$\overline{W}'=\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\overline{W}}{d\xi},\quad \overline{W}''=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2\overline{W}}{d\xi^2},\quad \overline{W}'''=\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{d^3\overline{W}}{d\xi^3}.$$

В дальнейшем для краткости вновь обозначим производные по ξ штрихом, имея в виду, что $\overline{W}=\overline{W}(\xi)$.

Уравнение движения перепишем в виде

$$\overline{W}'''-4\varepsilon\overline{W}''+4\varepsilon^2\overline{W}'+\overline{W}'^2-\overline{W}\,\overline{W}''+2\varepsilon\overline{W}\,\overline{W}'=k\varepsilon^2e^{4z},$$

и, переходя в уравнении к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\left.\begin{aligned}&\overline{W}'''+\overline{W}'^2-\overline{W}\,\overline{W}''=0,\quad 0\ge\xi\ge\xi_0 &&(4.11)\\ &\xi=0,\quad \overline{W}=1,\quad \overline{W}'=0, &&(4.12)\end{aligned}\right\},$$

где ξ_0 - толщина пограничного слоя.

Для приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения (4.11) воспользуемся малостью толщины пограничного слоя ξ_0 и будем считать, что граничные условия (4.12) приближенно выполняются во всем диапазоне изменения аргумента $0\ge\xi\ge\xi_0$. Подставив (4.12) в (4.11), получим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned}&\overline{W}'''-\overline{W}'=0, &&(4.13)\\ &\xi=0,\quad \overline{W}=1,\quad \overline{W}'=0. &&(4.14)\end{aligned}\right\}$$

Интегралом дифференциального уравнения (4.13) является функция

$$\overline{W} = C_1 e^{\xi} + C_2 \xi + C_3 , \tag{4.15}$$

и, удовлетворяя граничным условиям (4.14), получим внутреннее решение задачи

$$\overline{W}^{i} = C_1 e^{\xi} - C_1 \xi - C_1 + 1, \tag{4.16}$$

где константа C_1 определяется из условия сращивания внешнего и внутреннего разложений.

Для асимптотического сращивания внешнего и внутреннего разложений по методу Ван-Дайка перейдем во внешнем разложении (4.10) к растягивающей координате $\xi = \dfrac{\overline{z}}{\varepsilon}$, тогда получим

$$\overline{W}^{0} = e^{2\varepsilon\xi} . \tag{4.17}$$

Разложим в окрестности ξ=0 правую часть уравнения (4.17) в ряд Тейлора по степеням малого параметра ε и при фиксированной координате ξ

$$e^{2\varepsilon\xi} = 1 + 2\varepsilon\xi + \cdots$$

После чего перепишем (4.17), ограничиваясь величинами нулевого и первого порядка малости

$$\left(\overline{W}^{0}\right)^{i} = 1 + 2\,\overline{z} . \tag{4.18}$$

Найдем внутреннее-внешнее разложение. Для чего в уравнении (4.18) перейдем к координате $\overline{z}$

$$\overline{W}^{i} = C_1 e^{\overline{z}/\varepsilon} - \frac{C_1 \overline{z}}{\varepsilon} - C_1 + 1 \tag{4.19}$$

и выполним в (4.19) предельный переход при фиксированной координате $\overline{z}$ и стремлении ε к нулю. В этом случае имеем $C_1 \overline{z} / \varepsilon >> C_1$ и $C_1 / \varepsilon >> C_1 e^{\overline{z}/\varepsilon}$, тогда внутреннее-внешнее разложение примет вид

$$\left(\overline{W}^{i}\right)^{0} = -\frac{C_1}{\varepsilon}\,\overline{z} + 1 . \tag{4.20}$$

Приравниваем правые части разложений (4.18) и (4.20), найдем C_1=-2ε; равенство свободных членов дает тождество 1=1. С учетом найденной константы внутреннее решение запишем в виде

$$\overline{W}^{i} = -2\varepsilon e^{\bar{z}/\varepsilon} + 2\bar{z} + 1\,. \tag{4.21}$$

Построим составное решение по методу Ван-Дайка

$$\overline{W} = \overline{W}^{0} + \overline{W}^{i} - \left(\overline{W}^{0}\right)^{i} = e^{2\bar{z}} - 2\varepsilon e^{\bar{z}/\varepsilon}. \tag{4.22}$$

Можно убедиться, что граничные условия (4.5) и (4.6) выполняются с точностью до малости первого порядка. Вне пограничного слоя второе слагаемое в правой части (4.22) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{\bar{z}/\varepsilon} = 0, \quad (\bar{z} < 0)$.

Возвращаясь к координате $\bar{r} = e^{\bar{z}}$, перепишем общее решение (4.22)

$$\overline{W} = \bar{r}^{2} - 2\varepsilon \bar{r}^{1/\varepsilon}. \tag{4.23}$$

Выполним оценку приближения, которое мы допустили в окрестности пограничного слоя, переходя от уравнения (4.11) к уравнению (4.13). Для этого необходимо вычислить функцию W и ее производную на границе слоя. Задавая ε=0.01, найдем, что W(0,99)=0,973 и W′(0,99)=0.

Таким образом, принимая что граничные условия (4.12) W(1)=1 и W′(1)=0 приближенно выполняются во всем диапазоне пограничного слоя, мы допустили ошибку не превышающую 3%.

Выражение для продольной скорости получим в соответствии с формулой $\overline{V} = \dfrac{\overline{W}'}{\bar{r}}\left(\dfrac{L}{R} - \bar{y}\right)$, тогда

$$\overline{V} = 2\left(1 - \bar{r}^{1/\varepsilon - 2}\right)\left(\frac{L}{R} - \bar{y}\right), \tag{4.24}$$

где R - радиус цилиндра, L - длина цилиндрического канала, $\dfrac{1}{\varepsilon} = \mathrm{Re}$

На рис.4.1, 4.2 показаны эпюры поперечной и продольной скоростей в поперечном сечении цилиндрического канала.

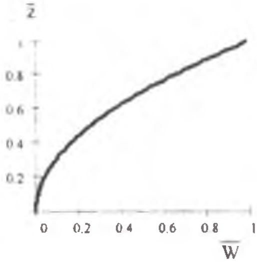

Рис. 4.1. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

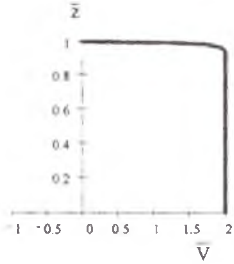

Рис. 4.2. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\bar{y} = 1$

У стенки цилиндрического канала при $\bar{r} = 1$ (рис.4.2) можно видеть быстрое изменение продольной скорости - пограничный слой. На оси канала в точке $\bar{z} = 0$ касательная к функции $\overline{V}(\bar{y}, \bar{z})$ составляет с осью $\bar{z}$ угол α=0, что соответствует условию максимальной продольной скорости на оси симметрии потока.

ГЛАВА 5. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Метод интегральных многообразий заключается в выделении медленного движения на интегральном многообразии. В нашем случае функцией медленного движения является поперечная скорость течения с переменным расходом массы по длине канала.

5.1.ТЕЧЕНИЕ ГАЗА СО ВДУВОМ МАССЫ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Математическая формулировка задачи о ламинарном течении газа в плоском канале со вдувом массы в безразмерном виде будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon\overline{W}''' + \overline{W}'^2 - \overline{W}\,\overline{W}'' = k, && (a)\\ &\overline{V} = -y\,\overline{W}', && (b)\\ &\bar{z} = 0, \overline{W} = 0, \overline{W}'' = 0, && (c)\\ &\bar{z} = 1, \overline{W} = -1, \overline{W}' = 0, && (d) \end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

где безразмерные величины соответствуют ранее принятым [10].

Для решения системы (5.1) воспользуемся методом интегральных многообразий с выделением медленного движения на интегральном многообразии [11]. Введем следующие обозначения:

$$\overline{W} = x_1, \quad x_2 = x_1', \quad x_3 = x_2', \text{ где } \overline{W} = \overline{W}(\bar{z}),\ x_1' = \frac{d\overline{W}}{d\bar{z}},\ x_2' = \frac{d^2\overline{W}}{d\bar{z}^2}. \qquad (5.2)$$

Тогда уравнения движения перепишем в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1' = x_2, & (a) \\ x_2' = x_3, & (b) \\ \varepsilon x_3' + x_2^2 - x_1 x_3 = k, & (c) \\ \bar{z} = 0, x_1 = 0, x_3 = 0, & (d) \\ \bar{z} = 1, x_1 = -1, x_2 = 0. & (e) \end{array}\right| \qquad (5.3)$$

Для преобразования уравнения (5.3с) воспользуемся методом возмущения, представив x_3 в виде бесконечного ряда по степеням малого параметра ε

$$x_3 = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \varepsilon^n. \qquad (5.4)$$

где $h_n = h_n(x_1, x_2, \bar{z})$.

Подставляя (5.4) в уравнение (5.3с) и пренебрегая слагаемыми второго и выше порядка малости, найдем для нулевого приближения

$$x_1 h_0 - x_2^2 + k = 0 \qquad (5.5)$$

и для первого приближения

$$\frac{\partial h_0}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial h_0}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial h_0}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = x_1 h_1,$$

или, с учетом выражения (5.4), последнее уравнение перепишем

$$\frac{\partial h_0}{\partial z}+\frac{\partial h_0}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial h_0}{\partial x_2}h_0=x_1h_1. \qquad (5.6)$$

Объединим выражения (5.5) и (5.6). Тогда, используя (5.3), можно записать

$$h_0=\frac{x_2^2-k}{x_1}, \quad h_1=\frac{x_2^3-kx_2}{x_1^3},$$

и приближенное выражение для x_3 примет вид

$$x_3=\frac{x_2^2-k}{x_1}+\varepsilon\frac{x_2^3-kx_2}{x_1^3}. \qquad (5.7)$$

Перепишем систему уравнений (5.3)

$$\left.\begin{array}{l} x_1'=x_2, \\ x_2'=x_3, \\ x_3=\dfrac{x_2^2-k}{x_1}+\varepsilon\dfrac{x_2^3-kx_2}{x_1^3}, \end{array}\right\}$$

или с оговоренной выше точностью получим

$$x_1''=\frac{x_1'^2-k}{x_1}+\varepsilon\frac{x_1'^3-kx_1'}{x_1^3}. \qquad (5.8)$$

Решение уравнения (5.8) будем вновь искать в виде ряда по степеням малого параметра

$$x_1=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\varepsilon^n, \qquad \text{где} \quad P_n=P_n(z). \qquad (5.9)$$

Подставляя ряд (5.9) в уравнение (5.8) и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях ε, получаем соответственно нулевое приближение

$$\left.\begin{array}{ll} P_0P_0'' - P_0'^2 + k = 0 & (a) \\ \bar{z} = 0, P_0 = 0, P_0'' = 0, & (b) \\ \bar{z} = 1, P_0 = -1, P_0' = 0 & (c) \end{array}\right\} \tag{5.10}$$

и первое приближение

$$\left.\begin{array}{ll} P_0^3P_1'' - 2P_0^2P_0'P_1' - P_0(k - P_0'^2)P_1 = (P_0'^2 - k)P_0', & (a) \\ \bar{z} = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_1'' = 0, & (b) \\ \bar{z} = 1, \quad P_1 = 0, \quad P_1' = 0. & (c) \end{array}\right\} \tag{5.11}$$

Решением краевой задачи (5.10) является функция

$$P_0 = -\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}, \qquad \text{при} \quad k = \frac{\pi^2}{4}.$$

Тогда уравнение (5.11a) примет вид

$$-P_1''\sin\frac{\pi}{2}\bar{z} + P_1'\pi\cos\frac{\pi}{2}\bar{z} + P_1\frac{\pi}{2}\bar{z} = \frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}. \tag{5.12}$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения, для чего сделаем замену $P_1 = \Phi(\bar{z})\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}$, где $\Phi(\bar{z})$ - неизвестная функция. Получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$2\Phi''(\bar{z})\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z} - 2\pi\Phi'(\bar{z}) = 0, \tag{5.13}$$

откуда найдем

$$\Phi(\bar{z}) = C_2(\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\bar{z} - \frac{\pi}{2}\bar{z}) + C_3,$$

и общее решение однородного уравнения запишем в виде

$$P_1 = C_2(\sin\frac{\pi}{2}\bar{z} - \frac{\pi}{2}\bar{z}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}) + C_3\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}. \tag{5.14}$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (5.11а) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Считая C_2 и C_3 функциями от $\bar{z}$, получим для их определения систему

$$\begin{aligned} &C_2'(\bar{z})(\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}-\frac{\pi}{2}\bar{z}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z})+C_3'(\bar{z})\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}=0, \\ &-\sin^2\frac{\pi}{2}\bar{z}\left[C_2'(\bar{z})\frac{\pi}{2}\bar{z}-C_3'(\bar{z})\right]=\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Из последней системы следует, что

$$C_2=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}}{\sin^2\frac{\pi}{2}\bar{z}}-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\bar{z}\right|\right),$$

$$C_3=\frac{\pi^2\bar{z}}{8}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}}{\sin^2\frac{\pi}{2}\bar{z}}-\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}}+\frac{\pi^3}{16}\int_0^{\bar{z}}\frac{\zeta d\zeta}{\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}},$$

и частное решение задачи для первого приближения примет вид

$$P_1=\frac{\pi}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\bar{z}\right|(\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}-\frac{\pi}{2}\bar{z}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z})+\frac{\pi^3}{16}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}\int_0^{\bar{z}}\frac{\zeta d\zeta}{\sin\frac{\pi}{2}\zeta}. \tag{5.16}$$

В уравнении (5.13) слагаемое $\bar{z}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\bar{z}\right|$ при $\bar{z}=0$ дает неопределенность типа $0\cdot\infty$. Можно показать, что $\lim\limits_{\bar{z}\to 0}\bar{z}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\bar{z}\right|=0$, и, следовательно, граничное условие $P_1(0)=0$ выполняется. Граничное условие $P_1'(1)=0$ удовлетворяется приближенно с ошибкой, не превосходящей 7 %.

Таким образом, поле скоростей плоского газового потока со вдувом массы будет представлено в следующем виде:

поперечная скорость

$$\overline{W}(\bar{z}) = -\sin\frac{\pi}{2}\bar{z} +$$

$$+\varepsilon\left[\frac{\pi}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\bar{z}\right|(\sin\frac{\pi}{2}\bar{z} - \frac{\pi}{2}\bar{z}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}) + \frac{\pi^3}{16}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z}\int_0^{\bar{z}}\frac{\zeta d\zeta}{\sin\frac{\pi}{2}\zeta}\right], \tag{5.17}$$

продольная скорость

$$\overline{V}(\bar{z},\bar{y}) = \bar{y}\left[\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z} -\right.$$

$$\left.-\varepsilon\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^3}{16}\bar{z}\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\bar{z}\right| - \frac{\pi^4}{32}\sin\frac{\pi}{2}\bar{z}\int_0^{\bar{z}}\frac{\zeta d\zeta}{\sin\frac{\pi}{2}\zeta}\right)\right]. \tag{5.18}$$

Данное решение можно назвать феноменологическим, так как специальных мероприятий по уточнению решения в области пограничного слоя не предпринималось. На рис.(5.1) и (5.2) показаны эпюры поперечной и продольной скоростей

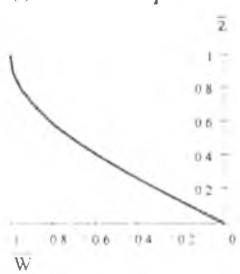

Рис.5.1. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

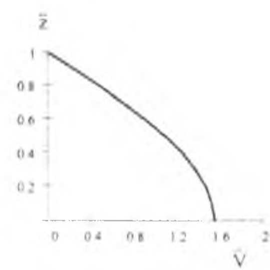

Рис. 5.2. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\bar{y} = 1$

Из рис.5.1 видим, что функция $\overline{W}(\bar{z})$ является медленной переменной. На оси симметрии в точке $\bar{z} = 0$ касательная к функции $\overline{V}(\bar{y},\bar{z})$ составляет с осью $\bar{z}$ угол α=0, что соответствует условию максимальной продольной скорости.

5.2. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КАНАВКЕ С ОТСОСОМ МАССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ВНЕШНИМ ПОТОКОМ ГАЗА

Течение жидкости в прямоугольной канавке с отсосом массы соответствует течению жидкости в канавке испарителя тепловой трубы при взаимодействии с потоком пара.

Рассмотрим течение для ядра потока жидкости в прямоугольной канавке с отсосом массы при взаимодействии с внешним потоком газа. Математическая формулировка задачи будет иметь следующий вид [12]

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon\overline{W}''' + \overline{W}'^2 - \overline{W}\,\overline{W}'' = k, & (a)\\ \bar{z} = 0, \quad \overline{W} = 0, \quad \overline{W}' = 0, & (b)\\ \bar{z} = 1, \quad \overline{W} = 1, \quad \bar{y}\,\overline{W}'' = \bar{\tau}, & (c) \end{array}\right\} \qquad (5.19)$$

где $\bar{\tau}$ задается из решения задачи о течении внешнего потока газа.

Будем рассматривать три случая: 1) движение жидкости и газа совпадает по направлению; 2) жидкость и газ двигаются в противоположном направлении; 3) контакт между жидкостью и газом отсутствует.

В первом случае газ способствует движению жидкости, и напряжение трения на поверхности жидкости есть величина положительная, во втором случае встречное движение газа препятствует движению жидкости, и напряжение трения - величина отрицательная, в третьем случае трение равно нулю.

Используя обозначения (5.2), исходную систему перепишем в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1' = x_2, & (a)\\ x_2' = x_3, & (b)\\ \varepsilon x_3' = -x_2^2 + x_1 x_3 + k, & (c)\\ \bar{z} = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, & (d)\\ \bar{z} = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_3 = \bar{\tau}, & (e) \end{array}\right\} \quad \text{где } |\bar{\tau}| = \frac{\pi^2}{4}. \qquad (5.20)$$

Можно показать, что дальнейшие преобразования системы уравнений (5.20) по аналогии с предыдущим разделом приводят к дифференциальным уравнениям для нулевого и первого приближений (5.10а) и (5.11а). И удовлетворить граничным условиям данной краевой задачи в общем виде не удается.

Поэтому для решения задачи воспользуемся методом [9], который предусматривает введение в задачу пограничной функции. Для чего вернемся к уравнению (5.8) и перепишем его

$$x_1'' = \frac{x_1'^2 - k}{x_1} + \varepsilon \frac{x_1'^3 - kx_1'}{x_1^3}.$$

Как мы убедились ранее, нулевое приближение этого уравнения может быть записано в виде трех функций:

$$x_1 = C_1 \operatorname{sh} \bar{z} \quad , \quad x_1 = C_1 \ \bar{z} \quad , \quad x_1 = C_1 \sin \frac{\pi}{2} \bar{z} \ . \qquad (5.21)$$

Эти функции следует рассматривать как внешнее решение задачи, которое следует подправить в окрестности граничной точки. Пограничный слой располагается в окрестности точки $\bar{z} = 0$ (у стенки канала). Для уточнения решения в области пограничного слоя введем пограничную функцию U_3 следующим образом:

$$x_3 = x_3 + U_3 \ . \qquad (5.22)$$

По определению пограничной функций она имеет существенное значение только в окрестности граничной точки.

Подставим (5.22) в (5.20c) и приравняем в левой и правой частях уравнения слагаемые, содержащие пограничную функцию $U_3(\bar{z})$, тогда

$$\varepsilon U_3' = x_1 U_3 . \qquad (5.23)$$

Будем искать U_3, последовательно рассматривая внешние решения (5.21).

1. Рассмотрим случай, когда внешнее решение задачи соответствует функции $x_1 = C_1 \operatorname{sh} \bar{z}$.

Тогда интеграл уравнения (5.23) запишем в виде

$$U_3 = Ae^{\frac{C_1 \operatorname{ch} z}{\varepsilon}} . \qquad (5.24)$$

Функции $U_1(\bar{z})$ и $U_2(\bar{z})$, уточняющие решение для x_1 и x_2, определим из следующих соотношений $U_1' = U_2$, $U_2' = U_3$:

$$
\left.\begin{aligned}
U_2 &= A\int_0^{z} e^{\frac{C_1 ch\xi}{\varepsilon}}\, d\xi + B, \\
U_1 &= A\int_0^{\bar z}\int_0^{\xi} e^{\frac{C_1 ch\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\bar z + B\bar z + D,
\end{aligned}\right\} \qquad (5.25)
$$

где A, B, D, C_1 - константы интегрирования.

И общее решение краевой задачи (5.20) примет вид

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= C_1 sh\bar z + A\int_0^{z}\int_0^{\xi} e^{\frac{C_1 ch\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\xi + B\bar z + D, \\
x_2 &= C_1 ch\bar z + A\int_0^{z} e^{\frac{C_1 ch\xi}{\varepsilon}}\, d\xi + B, \\
x_3 &= C_1 sh\bar z + A e^{\frac{C_1 ch\, z}{\varepsilon}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.26)
$$

Удовлетворяя граничным условиям, найдем

$$
\left.\begin{aligned}
&D = 0, \quad C_1 + B = 0, \quad C_1\frac{e^2-1}{2e} + A e^{\frac{C_1(e^2+1)}{2e\varepsilon}} = \bar\tau, \\
&C_1\frac{e^2-1}{2e} + A\int_0^{1}\int_0^{\xi} e^{\frac{C_1 ch\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\xi - C_1 = 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.27)
$$

Предполагая $C_1 \le -1$, можно указать приближенное аналитическое решение системы (5.27). В этом случае величиной $e^{\frac{C_1(e^2+1)}{2e\varepsilon}}$ можно пренебречь ввиду ее малости, тогда

$$
\begin{aligned}
&A = \frac{\dfrac{2e\bar\tau}{e^2-1} + 1 - \bar\tau}{\int_0^{1}\int_0^{\xi} e^{\frac{C_1 ch\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\xi}, \quad C_1 = \frac{2e\bar\tau}{e^2-1}, \\
&B = \frac{2e\bar\tau}{1-e^2}, \quad k = \frac{4e\bar\tau}{(e^2-1)^2}.
\end{aligned} \qquad (5.28)
$$

Легко видеть, что условие $C_1 \le -1$ выполняется для $\bar\tau < 0$ (встречное движение жидкости и газа), и решение задачи примет вид

$$x_1 = \frac{2e\bar{\tau}}{e^2-1}\operatorname{sh}\bar{z} + \left(\frac{2e\bar{\tau}}{e^2-1} + 1 - \bar{\tau}\right)\frac{\int\limits_0^{\bar{z}}\int\limits_0^{\xi} e^{\frac{C_1 \operatorname{ch}\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\xi}{\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{\xi} e^{\frac{C_1 \operatorname{ch}\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\xi} + \frac{2e\bar{\tau}\bar{z}}{1-e^2},$$

$$x_2 = \frac{2e\bar{\tau}}{e^2-1}\operatorname{ch}\bar{z} + \left(\frac{2e\bar{\tau}}{e^2-1} + 1 - \bar{\tau}\right)\frac{\int\limits_0^{\bar{z}} e^{\frac{C_1 \operatorname{ch}\xi}{\varepsilon}}\, d\xi}{\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{\xi} e^{\frac{C_1 \operatorname{ch}\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\xi} + \frac{2e\bar{\tau}}{1-e^2},$$

$$x_3 = \frac{2e\bar{\tau}}{e^2-1}\operatorname{sh}\bar{z}.$$

Численное решение системы уравнений (5.24) для $\bar{\tau} = -\frac{\pi^2}{4}$ и $\varepsilon = 0{,}01$ дает следующие значения коэффициентов: $C_1 = -2{,}1$; $B = 2{,}1$; $k = 4{,}41$, $A = \frac{1+3e-e^2}{e\int\limits_0^1\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{2{,}1\operatorname{ch}\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\xi}$. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, запишем выражения для продольной и поперечной скоростей при течении жидкости в прямоугольной канавке при отсосе массы (испаритель тепловой трубы).

$$\left.\begin{aligned} &\bar{W}(\bar{z}) = -2{,}1\operatorname{sh}\bar{z} + A\int\limits_0^{\bar{z}}\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{2{,}1\operatorname{ch}\xi}{\varepsilon}}\, d\xi d\xi + 2{,}1\bar{z}, \\ &\bar{V}(\bar{z},\bar{y}) = \bar{y}\left(2{,}1\operatorname{ch}\bar{z} - A\int\limits_0^{\bar{z}} e^{-\frac{2{,}1\operatorname{ch}\xi}{\varepsilon}}\, d\xi - 2{,}1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (5.29)$$

В соответствии с полученными решениями (5.29) построим графики поперечной и продольной скоростей, которые представлены на рис.5.3,5.4.

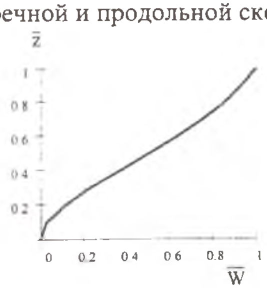

Рис.5.3. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

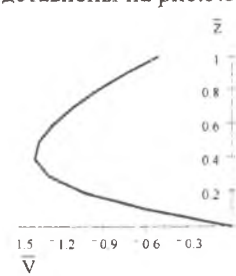

Рис. 5.4. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\bar{y} = 1$

Из графиков видно, что в окрестности точки $\bar{z} = 0$ располагается пограничный слой. График для продольной скорости (рис.5.4) показывает, что внешний поток газа препятствует течению, верхние слои жидкости в канавке испытывают торможение от встречного потока газа. Знак «-» у продольной скорости означает, что направление потока жидкости в канавке противоположно оси y.

2. Рассмотрим случай, когда внешнее решение задачи соответствует функции $x_1 = C_1 \bar{z}$.

Тогда интеграл уравнения (5.23) запишем в виде $U_3 = Ae^{\frac{C_1 z}{\varepsilon}}$, и выражения для пограничных функций примут следующий вид:

$$U_3 = Ae^{\frac{C_1 \bar{z}^2}{2\varepsilon}},$$

$$U_2 = A\int_0^{\bar{z}} e^{\frac{C_1 \xi^2}{2\varepsilon}} d\xi + B,$$

$$U_1 = A\int_0^{\bar{z}}\int_0^{\xi} e^{\frac{C_1 \xi^2}{2\varepsilon}} d\xi d\xi + B\bar{z} + D,$$

и общее решение краевой задачи запишем как

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (C_1 + B)\bar{z} + D + A\int_0^{\bar{z}}\int_0^{\xi} e^{\frac{C_1 \xi^2}{2\varepsilon}} d\xi d\xi, \\ x_2 &= (C_1 + B) + A\int_0^{z} e^{\frac{C_1 \xi^2}{2\varepsilon}} d\xi, \\ x_3 &= Ae^{\frac{C_1 \bar{z}^2}{2\varepsilon}}. \end{aligned}\right| \tag{5.30}$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим выражения для констант интегрирования

$$D = 0, \quad C_1 + B = 0, \quad Ae^{\frac{C_1}{2\varepsilon}} = \bar{\tau}, \quad A\int_0^1\int_0^{\xi} e^{\frac{C_1 \xi^2}{2\varepsilon}} d\xi d\xi = 1. \tag{5.31}$$

Решение системы (5.27) для $\bar{\tau} \neq 0$ отсутствует. Поэтому будем искать решение для канавки, изолированной от внешнего потока, при $\tau = 0$. Тогда (5.31) перепишем в виде

$$D=0, \quad C_1+B=0, \quad Ae^{\frac{C_1}{2\varepsilon}}=0, \quad A\int_0^1\int_0^\xi e^{\frac{C_1\xi^2}{2\varepsilon}}d\xi d\xi=1.$$

Выполнение граничного условия $x_3(1)=0$ достигается с точностью до экспоненциально малых величин для всех $C_1 \le -1$. Численное решение при $\varepsilon=0{,}01$ дает значения констант интегрирования

$$C_1=-1{,}7; \quad B=1{,}7; \quad A=4{,}08 \quad \text{при} \quad k=2{,}89. \tag{5.32}$$

Запишем выражения для поля скоростей для течения жидкости с отсосом массы в прямоугольной изолированной канавке

$$\left.\begin{aligned} \overline{W}(\bar z) &= 4{,}08\int_0^{\bar z}\int_0^{\xi} e^{-0{,}85\frac{\xi^2}{\varepsilon}}d\xi d\xi, \\ \overline{V}(\bar z,\bar y) &= -4{,}08\bar y\int_0^{\bar z} e^{-0{,}85\frac{\xi^2}{\varepsilon}}d\xi. \end{aligned}\right| \tag{5.33}$$

В соответствии с формулами (5.33) построим эпюры продольной и поперечной скоростей (рис.5.5,5.6).

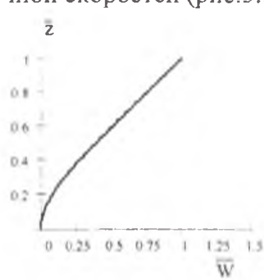

Рис.5.5. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

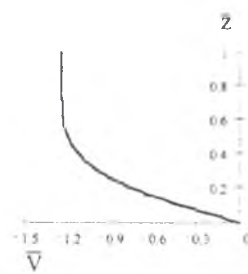

Рис. 5.6. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\bar y=1$

Из графиков видно, что в окрестности точки $\bar z=0$ располагается пограничный слой. Касательная в точке $\bar z=1$ на графике функции $\overline{V}(\bar z)$ (рис.5.6) составляет с осью $\bar z$ угол α=0, что соответствует максимальной продольной скорости на поверхности жидкости в прямоугольной канавке при отсутствии контакта между жидкостью и газом. Знак «-» у продольной скорости означает, что направление потока жидкости в канавке противоположно оси y.

3. Рассмотрим случай, когда внешнее решение задачи соответствует функции $x_1 = C_1 \sin\frac{\pi}{2}\bar{z}$.

Тогда интеграл уравнения (5.23) запишем в виде $U_3 = Ae^{\frac{C_1 \sin\frac{\pi}{2}z}{\varepsilon}}$, и выражения для пограничных функций примут вид

$$\left.\begin{aligned} U_3 &= Ae^{-\frac{2C_1}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}z}, \\ U_2 &= A\int_0^{z} e^{-\frac{2C_1}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}\xi}d\xi + B, \\ U_1 &= A\int_0^{z}\int_0^{\xi} e^{-\frac{2C_1}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}\xi}d\xi d\xi + B\bar{z} + D. \end{aligned}\right\} \qquad (5.34)$$

Запишем общее решение задачи с учетом пограничных функций

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_1 \sin\frac{\pi}{2}\bar{z} + A\int_0^{\bar{z}}\int_0^{\xi} e^{-\frac{2C_1}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}\xi}d\xi d\xi + B\bar{z} + D, \\ x_2 &= \frac{C_1\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z} + A\int_0^{z} e^{-\frac{2C_1}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}\xi}d\xi + B, \\ x_3 &= -\frac{C_1\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}\bar{z} + Ae^{-\frac{2C_1}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}z}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.35)$$

Удовлетворяя граничным условиям задачи, получим соотношения для констант интегрирования

$$\begin{aligned} &D = 0, \quad B = -\frac{\pi}{2}C_1, \quad A = \bar{\tau} + \frac{\pi^2}{4}C_1, \\ &C_1\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + A\int_0^1\int_0^{\xi} e^{-\frac{2C_1}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}\xi}d\xi d\xi = 1 \end{aligned} \quad \text{при } k = \frac{C_1^2\pi^2}{4}.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ и $\bar{\tau} = \frac{\pi^2}{4}$ получены значения коэффициентов для течения жидкости в прямоугольной канавке при взаимодействии со спутным потоком газа

$$B = \frac{\pi}{2}; \quad C_1 = -1; \quad k = \frac{\pi^2}{4}; \quad A\int_0^1\int_0^{\xi} e^{\frac{2}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}\xi}d\xi d\xi = 2 - \frac{\pi}{2}. \qquad (5.36)$$

Запишем выражения для поля скоростей для течения жидкости с отсосом массы

$$\left.\begin{aligned}
\bar{W}(\bar{z}) &= -\sin\frac{\pi}{2}\bar{z} + A\int_0^{\bar{z}}\int_0^{\zeta} e^{\frac{2}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}\xi}\,d\xi d\xi + \frac{\pi}{2}\bar{z},\\
\bar{V}(\bar{z},\bar{y}) &= \bar{y}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\bar{z} - A\int_0^{\bar{z}} e^{\frac{2}{\pi\varepsilon}\cos\frac{\pi}{2}\xi}\,d\xi - \frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (5.37)$$

где A вычисляется по (5.36).

Построим эпюры для поперечной и продольной скоростей в соответствии с формулами (5.37). Графики поперечной и продольной скоростей представлены на рис.5.7, 5.8.

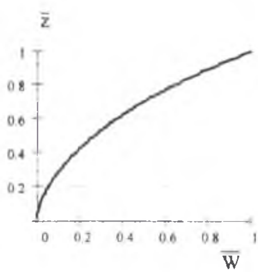

Рис. 5.7. Безразмерное распределение поперечной скорости по высоте канала

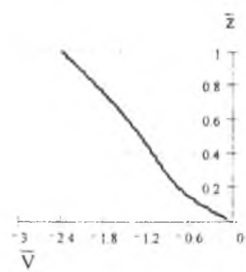

Рис. 5.8. Безразмерное распределение продольной скорости по высоте канала при $\bar{y} = 1$

Из графиков видно, что в окрестности точки $\bar{z} = 0$ располагается пограничный слой. График для продольной скорости (рис.5.8) показывает, что внешний поток газа способствует течению жидкости, верхние слои жидкости в канавке разгоняются от спутного потока газа. Знак «-» у продольной скорости означает, что направление потока жидкости в канавке противоположно оси y.

В заключение отметим, что рассмотренные в данном учебном пособии асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений позволяют получать приближенные аналитические решения для широкого круга гидродинамических задач с пограничным слоем.

Библиографический список

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.- М.: Наука, 1973.- 847с.
2. Найф А.Х. Введение в методы возмущения.- М.: Мир, 1989.-535с.
3. Ивановский М.Н., Сорокин В.П., Ягодкин И.В. Физические основы тепловых труб.- М.: Атомиздат, 1978.- 256с.
4. Дан П.Д., Рей Д.А. Тепловые трубы. - М.: Энергия, 1979.- 272с.
5. Клюев Н.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия жидких и газообразных сред.-Самара: СамГУ, 2000.-48с.
6. Клюев Н.И. Течение жидкости в открытой прямоугольной канавке испарителя тепловой трубы с учетом влияния встречного потока пара. ИВУЗ «Авиационная техника». - 1995. №3.- С. 100-102.
7. Клюев Н.И. Движение пара в прямоугольном канале испарительного теплообменника. ИВУЗ «Авиационная техника».- 1988. №2.- С. 96-98.
8. Клюев Н.И. Течение жидкости в открытом прямоугольном канале с отсосом массы и взаимодействии с внешним газовым потоком. Труды VIII межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». - Самара: СамГТУ, 1998.- С. 48-51.
9. Клюев Н.И. Движение газа со вдувом массы в цилиндрическом канале при больших числах Рейнольдса вдуваемого потока. ИВУЗ «Авиационная техника». - 1995. №1.- С. 43-46.
10. Клюев Н.И, Федечев А.Ф. Течение пара в зоне испарения плоской тепловой трубы при больших поперечных числах Рейнольдса. ИФЖ.- 1989. Т.57. №2. - С. 333-334.
11. Гольдштейн В.М., Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно- возмущенных систем. Новосибирск: АН СССР. Сибирское отделение. Институт математики. 1988.- 153с.