Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева

М.А.Г о л у б

ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ ФИЛЬТРАЦИИ

У т в е р ж д е н о
редакционно-издательским
советом института
в качестве учебного пособия

Куйбышев 1986

УДК 517.51+518.5

Голуб М.А. Цифровые методы фильтрации: Учебное пособие.- Куйбышев: КуАИ, 1986 - с. 42.

В пособии описаны методы и алгоритмы для аппроксимации функций одной и многих переменных. По ходу изложения рассматриваются примеры из области обработки сигналов, автоматизации проектирования, теории оптимального управления. Особое внимание уделено методам оценки погрешностей аппроксимации функций и классов функций.

Пособие предназначено для студентов специальности "Прикладная математика".

Ил. 4. Библиогр. - 34 назв.

Рецензенты: В.М.Булатов, кафедра теории передачи сигналов Куйбышевского электротехнического института связи

Св.план 1986, поз. 135

Михаил Аронович Голуб

ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ ФИЛЬТРАЦИИ

Редактор Е.Д. Антипова, техн.ред. Н.М.Каленюк

Корректор Н.С.Куприянова

ЕО 000273. Подписано к печати 21.08. 1986 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная. Усл.п.л. 2,3.
Уч.-изд.л. 2,0. Т.500 экз. Заказ № 5861 Цена 10 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С.П.Королева, г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская,151.

Обл. типография им. В.П.Мяги, г.Куйбышев, ул. Венцека, 60.

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительные машины находят все большее применение для исследования и управления непрерывными процессами в физике, в передаче и цифровой обработке сигналов, в сложных технических системах /2,18,14,34/. При этом непрерывные процессы представляются конечным массивом чисел, хранящихся в памяти ЭВМ и подлежащих цифровой обработке. Процесс перехода от непрерывного процесса к дискретному, называемый д и с к р е т и з а ц и е й, приводит к потере части информации и появлению ряда погрешностей. Математической моделью дискретизации является конечномерная аппроксимация функций. Так, в расчетных задачах часто аппроксимируют непрерывные функции многочленами. В задачах оптимального управления, автоматизации проектирования, цифровой обработки сигналов приходится строить аппроксимации, удовлетворяющие реализационным ограничениям. Сжатие (т.е. сокращенное описание) данных также основывается на том или ином методе аппроксимации.

Вид аппроксимаций функций часто вытекает из специфики решаемой задачи. Используется, например, аппроксимация отрезком ряда, линейной комбинацией заданных функций. Особый интерес представляют оценки погрешностей аппроксимации, позволяющие переходить к построению наилучшей по точности аппроксимации. Следует отметить, что оценка погрешности часто представляет более сложную задачу, чем само построение аппроксимации, и требует привлечения ряда методов функционального анализа, теории функции действительного переменного. Еще более сложно построить оценки погрешностей аппроксимации классов функций, а также предельных характеристик точности поперечников, достигаемых при некотором наилучшем способе аппроксимации.

В данном пособии рассмотрены наиболее употребительные методы построения аппроксимации функций и оценок погрешностей. На простых примерах даны основные понятия теории поперечников.

Для усвоения материала требуются начальные сведения из курса "Функциональный анализ", входящие в учебный план специальности "Прикладная математика".

I. КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

I.I. Дискретные представления функций

Понятие функции $f(x)$ от непрерывного аргумента $x \in G \subset R^n$ удобно в аналитических выкладках. Однако при численных расчетах на ЭВМ приходится представлять функцию конечным набором чисел $\{a_k\}_1^L$, т.е. осуществлять дискретизацию по аргументам. В простейшем случае можно брать в качестве чисел $\{a_k\}_1^L$, значения (или отсчеты) $f(x)$ в некоторых точках $\xi_k \in G$

$$a_k = f(\xi_k), \quad k = \overline{1, L}. \tag{I.I}$$

Используются также о б о б щ е н н ы е о т с ч е т ы $f(x)$, например в виде скалярных произведений:

$$a_k = (f, g_k), \tag{I.2}$$

где $\{g_k\}_1^L$ – система линейно-независимых функций.

В частности при

$$g_k(x) = \delta(x - \xi_k) \tag{I.3}$$

обобщенные отсчеты совпадают с обычными ($\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака).

При

$$g_k(x) = \frac{1}{\delta}\chi(x - \xi_k), \; k = \overline{1, L}, \; \chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant \frac{\delta}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\delta}{2} \end{cases} (n=1) \tag{I.4}$$

получаем у с р е д н е н н ы е обобщенные отсчеты:

$$a_k = \frac{1}{\delta} \int\limits_{\xi_k - \frac{\delta}{2}}^{\xi_k + \frac{\delta}{2}} f(x)\,dx, \quad k = \overline{1, L}, \tag{I.5}$$

стремящиеся к обычным отсчетам при $\delta \to 0$ (в силу теоремы о среднем).

Дискретизация должна учитываться при построении вычислительных алгоритмов путем замены функции $f(x)$ некоторой функцией $\tilde{f}_L(x) \cong f(x)$, зависящей каким-либо образом от чисел $\{a_k\}_1^L$. Таким образом, наряду с дискретизацией следует задать и способ интерполяции, т.е. способ обратного перехода от чисел $\{a_k\}_1^L$ к функции непрерывного аргумента $\tilde{f}_L(x) \cong f(x)$. Особенно часто используется линейная интерполяция, описываемая соотношением

$$f(x) \cong \tilde{f}(x) = \sum_{K=1}^{L} a_K \varphi_K(x),\ x \in G, \tag{I.6}$$

где $\{\varphi_K\}_1^L$ – система линейно независимых функций, называемых базисными функциями.

Равенство (I.6) задает аппроксимацию, называемую конечномерной аппроксимацией (или приближением). Аппроксимирующая функция $\tilde{f}_L(x)$ принадлежит линейному подпространству

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_L), \tag{I.7}$$

натянутому на функции $\{\varphi_K\}_1^L$.
Иногда говорят об аппроксимации функции $f \in W$ подпространством $\mathcal{L}_L$. Если функции $\{\varphi_K\}_1^L$ ортогональны, то аппроксимацию (I.6) называют ортогональной. В качестве $\{\varphi_K\}_1^L$ можно использовать например отрезок бесконечного ряда, по одной из систем ортогональных функций, а также степенные функции x^{K-1}, $K=\overline{1,L}$ или прямоугольные импульсы (I.4).

Определение I.I. Невязкой аппроксимации (I.6) называется функция

$$\Delta_L(x) = f(x) - \tilde{f}_L(x). \tag{I.8}$$

Определение I.2. Погрешностью аппроксимации (I.6) называется число

$$\varepsilon_L = \| f - \tilde{f}_L \|. \tag{I.9}$$

Для корректной постановки задачи кроме конечномерного пространства $\mathcal{L}_L$ аппроксимирующих функций $\tilde{f}_L$ нужно задать, какие функции мы хотим аппроксимировать, т.е. определить некоторое множество, состоящее из функций $F = \{f(x)\}$, обладающих каким-либо свойством, так как ясно, что совершенно различные проблемы возникнут при аппроксимации гладких функций многочленами и при аппроксимации каких-нибудь импульсных или быстроменяющихся функций теми же многочленами. Обычно F определяют как подмножество некоторого функционального пространства. Например, из функций пространства $L_2(G)$ можно выделить функции F с ограниченной заданным числом M нормой и т.п. И наконец, третье, что мы должны четко задать для правильной постановки задачи аппроксимации – это как считать погрешность (I.3), т.е. нужно выбрать норму $\|\cdot\|$. Обычно норма выбирается из постановки

2-5861

конкретной задачи. Так, если надо вычислить таблицу значений функции, то норма естественно равномерная. Если существенна энергия ошибки, то норма среднеквадратичная. Другими словами, задается одно из нормированных функциональных пространств ($C(G)$, $L_2(G)$, $L_p(G)$ и т.п. /20, 26/), причем $\|\cdot\|$ понимается как норма в соответствующем пространстве. Чтобы не рассматривать отдельно нормы в разных пространствах, мы будем говорить о некотором функциональном пространстве $W=\{f(x)\}$ с нормой $\|\cdot\|=\|\cdot\|_W$. При этом $F\subset W$, $\varphi_K\in W$, $K=\overline{1,L}$ и говорят об аппроксимации в пространстве W. В частности в $C(G)$ имеем равномерную аппроксимацию, в $L_2(G)$ - среднеквадратичную аппроксимацию, в $L_{2,\rho}(G)$- среднеквадратичную с весом ρ.

Целью изучения конечномерной аппроксимации (I.6) является построение алгоритма вычисления коэффициентов $\{a_K\}_1^L$ по функции $f(x), x\in G$ и оценка погрешности (I.9). Каждый алгоритм нахождения коэффициентов $\{a_K\}_1^L$ по функции f задается оператором $A: F\to W$, таким, что

$$\hat{f}_L = Af, \tag{I.10}$$

причем

$$A(F)\subset \mathcal{L}_L. \tag{I.11}$$

<u>Определение I.3.</u> Аппроксимация

$$f\cong \tilde{f}_L = Af \tag{I.12}$$

называется л и н е й н о й, если оператор $A: F\to W$, входящий в соотношения (I.10), (I.11) является линейным. Другими словами, аппроксимация (I.12) линейна, если линейной комбинации аппроксимируемых функций $\alpha_1 f^{(1)}+\alpha_2 f^{(2)}$ соответствует такая же линейная комбинация аппроксимирующих функций:

$$\alpha_1 f^{(1)}+\alpha_2 f^{(2)}\cong \alpha_1 \tilde{f}_L^{(1)}+\alpha_2 \tilde{f}_L^{(2)}.$$

<u>Определение I.4.</u> П о г р е ш н о с т ь ю л и н е й н о й а п п р о к с и м а ц и и ф у н к ц и и $f(x)\in F\subset W$ с помощью линейного оператора $A: F\to W$ называется величина

$$\varepsilon(f,A,W)=\|f-Af\|. \tag{I.13}$$

<u>Пример I.I</u>. Если $\{\varphi_K\}_1^\infty$ - ортонормированный базис, т.е. выполняются соотношения

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}; \quad i, k = 1, 2, \ldots,$$

то аппроксимация

$$f(x) \cong \hat{f}_L(x) = \sum_{k=1}^{L} (f, \varphi_k)\varphi_k(x), \; x \in G \tag{I.I4}$$

отрезком ортогонального ряда является линейной при любом $L \geqslant 1$.

Пример I.2. Пусть $\{\varphi_k\}_1^\infty$ - базис (не обязательно ортогональный), $\{g_k\}_1^\infty$ - биортогональный к $\{\varphi_k\}_1^\infty$ базис, т.е. выполняются соотношения $(\varphi_i, g_k) = \delta_{ik}$; $i, k = 1, 2, \ldots$

Тогда аппроксимация

$$f(x) \cong \tilde{f}_L(x) = \sum_{k=1}^{L} (f, g_k)\varphi_k, \; x \in G \tag{I.I5}$$

отрезком биортогонального ряда является линейной при любом $L \geqslant 1$.

Естественно стремление выбрать способ нахождения коэффициентов $\{a_k\}_1^L$ в аппроксимации вида (I.6), или, что то же самое, способ подбора оператора A в аппроксимации (I.I2) так, чтобы погрешность аппроксимации (I.9) была минимальна. Рассмотрим такие "наилучшие" аппроксимации.

I.2. Наилучшая конечномерная аппроксимация функций

Определение I.5. Аппроксимация (I.6) функции f называется н а и л у ч ш е й, если ее погрешность минимальна среди всех других приближений того же вида, т.е. коэффициенты наилучшего приближения определяются из равенства

$$E(f, \mathcal{L}_L, W) = \Big\| f - \sum_{k=1}^{L} a_k \varphi_k \Big\| = \inf_{\{a'_k\}_1^L \in C^L} \Big\| f - \sum_{k=1}^{L} a'_k \varphi_k \Big\| . \tag{I.I6}$$

В геометрической интерпретации наилучшая аппроксимация соответствует поиску ф у н к ц и и н а и л у ч ш е г о п р и б л и ж е н и я

$$\hat{f}_L(x) = \sum_{k=1}^{L} a_k \varphi_k(x) \tag{I.I7}$$

из линейного подпространства $\mathcal{L}_L$, наименее удаленной от $f \in W$, т.е.

$$E(f, \mathcal{L}_L, W) = \inf_{\tilde{f} \in \mathcal{L}_L} \| f - \tilde{f} \|. \tag{I.I8}$$

Соотношение (I.I6) определяет задачу оптимизации функции ε_L (I.9) от L вещественных переменных, без ограничений. Если норма в W дифференцируема, то коэффициенты $\{a_k\}_1^L$ наилучшей аппроксимации определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} \| f - \sum_{k=1}^{L} a_k \varphi_k \| = 0, \; j = \overline{1,L} \,. \tag{I.I9}$$

Пример I.3. Аппроксимировать линейно растущий процесс $f(x)=x$ стационарным $f_1(x)=C$ по норме в $L_4(0,1)$.

Решение: здесь $\varphi_1(x)=1$, $a_1=C$, $L=1$. Ищется приближение $x \cong C = const$, для которого $\int\limits_0^1 |x-C|^4 dx \to min$. Согласно уравнению (I.I9) $\int\limits_0^1 (x-C)^3 dx = 0$.

Интегрируя, получаем для C кубическое уравнение: $C^3 - 1{,}5C^2 + C - 0{,}25 = 0$. Его решение $C = 0{,}5$.

Рассмотрим вопрос о существовании и единственности наилучшей аппроксимации.

Теорема I.I. (О существовании наилучшего приближения). В банаховом функциональном пространстве W для любой функции f существует наилучшее конечномерное приближение.

Доказательство: требуется доказать, что нижняя грань

$$E(f, \mathcal{L}_L, W) = \inf_{\tilde{f} \in \mathcal{L}_L} \| f - \tilde{f} \|$$

достигается на некоторой функции $\tilde{f} \in \mathcal{L}_L$. По определению такой нижней грани существуют функции, приближающие f с погрешностью, сколь угодно близкой к предельному значению, т.е. для любого $m > 0$ существует $\tilde{f}_L^{(m)}$ такая, что

$$\| f - \tilde{f}_L^{(m)} \| \leqslant E(f, \mathcal{L}_L, W) + \frac{1}{m} \,.$$

Последовательность $\tilde{f}_L^{(m)}$ ограничена:

$$\| \tilde{f}_L^{(m)} \| \leqslant \| \tilde{f}_L^{(m)} - f \| + \| f \| \leqslant E(f, \mathcal{L}_L, W) + \frac{1}{m} +$$

$$+ \| f \| \leqslant \| f \| + E(f, \mathcal{L}_L, W) + 1,$$

но в конечномерном пространстве $\mathcal{L}_L$ ограниченное множество компактно, т.е. ограниченной последовательности $\tilde{f}_L^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\tilde{f}_L^{(m_k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Обозначим $\hat{f}_L = \lim\limits_{k \to \infty} \tilde{f}_L^{(m_k)}$. Поскольку конечномерное пространство $(\mathcal{L})$ является замкнутым, то $\hat{f}_L \in \mathcal{L}_L$. Теперь положим $m = m_K$ и перейдем к пределу

$$\lim_{K\to\infty} \|f - \tilde{f}_L^{(m_K)}\| \leqslant E(f, \mathcal{L}_L, W) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m_K} .$$

В силу непрерывности нормы можно внести предел под знак нормы и получить $\|f - \hat{f}_L\| \leqslant E(f, \mathcal{L}_L, W)$.

Но никакая функция не может дать погрешность, меньшую, чем наименьшее значение $E(f, \mathcal{L}, W)$, т.е. всегда

$$\|f - \hat{f}_L\| \geqslant E(f, \mathcal{L}_L, W), \text{ т.е. } \|f - \hat{f}_L\| = E(f, \mathcal{L}_L, W)$$

и $\hat{f}_L$ – функция наилучшего приближения.

Теорема доказана.

<u>Определение I.6.</u> Нормированное пространство называется с т р о г о н о р м и р о в а н н ы м, если в неравенстве треугольника $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$

знак равенства достигается только при

$$f = \alpha g, \tag{I.20}$$

где $\alpha > 0$ – вещественное число.

<u>Лемма I.I</u>. Если пространство строго нормировано, то внутри любой сферы лежит середина отрезка, соединяющего две различные точки этой сферы, т.е. если

$$\|f\| = \|g\| = R, \ f \neq g,$$

то

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\| < R .$$

Доказательство: пусть W строго нормировано, $f \neq g$ – точки сферы, т.е. $\|f\| = \|g\| = R$. Тогда

$$\left\| \frac{1}{2}(f+g) \right\| = \frac{1}{2}\|f+g\| \leqslant \frac{1}{2}(\|f\| + \|g\|) = R,$$

причем знак равенства достигается только при $f = \alpha g$.

Но $\|f\| = \|g\|$, т.е. α = I, откуда получаем $f = g$, что противоречит предположению. Значит знак равенства не может достигаться, т.е. $\|\frac{1}{2}(f+g)\| < R$. Лемма доказана.

<u>Теорема I.2.</u> (О единственности наилучшего приближения). Если пространство строго нормировано, то функция наилучшего приближения единственна.

Доказательство: пусть $\varphi_1 \neq \varphi_2$ – две функции, обеспечивающие наилучшее приближение $f \in W$. Тогда

$$\|f-\varphi_1\| = \|f-\varphi_2\| = E(f, \mathcal{L}_L, W).$$

В силу строгой нормированности пространства внутри сферы радиуса $R = E(f, \mathcal{L}_L, W)$ содержится и середина отрезка, соединяющего функции $f-\varphi_1$ и $f-\mathcal{L}_2$, т.е.

$$\left\|\frac{1}{2}\left[(f-\varphi_1)+(f-\varphi_2)\right]\right\| < R,$$

откуда

$$\left\|f-\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)\right\| < R = E(f, \mathcal{L}_L, W),$$

т.е. функция $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) \in \mathcal{L}_L$ дает приближение к f с погрешностью, меньшей минимальной, таким образом возникает противоречие. Значит предположение $\varphi_1 \neq \varphi_2$ неверно, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$ - единственность доказана.

З а м е ч а н и е. При доказательстве существования и единственности существенно использовалось, что аппроксимация производится именно линейным подпространством. При доказательстве существования даже потребовалась конечномерность.

<u>Пример I.3.</u> Пространства $L_2(G)$ и даже $L_p(G)$ строго нормированы, так как в неравенствах треугольника и Минковского знак равенства достигается, если соответствующие функции пропорциональны. Значит в $L_p(G)$, $p \geq 2$ функция наилучшего приближения единственна.

<u>Пример I.4</u>. Произвольное гильбертово пространство строго нормировано по своей естественной норме. Это следует из того, что в силу свойства $(x,x) = 0$ только при $x = 0$, знак равенства в неравенстве Коши-Буняковского $|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$, а значит и в неравенстве треугольника будет только при $f = \lambda g$, $\lambda = const$. Значит в произвольном гильбертовом пространстве наилучшее приближение единственно.

Если наилучшее приближение сложно найти точно, то в силу определения нижней грани мы всегда можем найти функцию $\tilde{f}_L$, обеспечивающую точность, сколь угодно близкую к наилучшей. В этом случае говорят, что имеет место не наилучшая, а к в а з и о п т и м а л ь н а я аппроксимация $\tilde{f}_L$ в том смысле, что:

$\tilde{f}_L$ аппроксимирует f с погрешностью $\varepsilon^2(L) = \|f-\tilde{f}_L\|$, вполне приемлемой для данной задачи и близкой к минимально достижимой погрешности $E(f, \mathcal{L}_L, W)$;

$\tilde{f}_L$ имеет удобный для вычисления вид.

По поводу второго можно сказать, что особенно часто используются линейные аппроксимации. Заметим, кстати, что само по себе наилучшее приближение, рассматриваемое как соответствие f и $\tilde{f}_L$, является нелинейным, так как наилучшее приближение $\hat{f}_L(x)$ суммы функций $f(x)=f^{(1)}(x)+f^{2}(x)$ не совпадает с суммой наилучших приближений $\hat{f}^{(1)}(x)+\hat{f}^{(2)}(x)$. Для дальнейшего нам удобно будет ввести оператор P_L наилучшего приближения по L линейно независимым функциям. Если $f(x)\in F\subset W$ – приближаемая функция, то ее наилучшее приближение вида $\hat{f}_L(x)=\sum_{d=1}^{L} a_K \varphi_K$ обозначим $\hat{f}_L(x)=P_L f(x)$.

Оператор P_L является, вообще говоря, нелинейным, однако в частном случае гильбертова пространства W и ортогональных функций $\{\varphi_K\}_1^L$ он оказывается линейным (см.п.I.4).

В ряде задач, например, для сравнения с погрешностью какого-либо квазиоптимального приближения, не требуется знать функцию наилучшего приближения, а достаточно знать лишь значения погрешности наилучшего приближения $E(f,\mathcal{L}_L, W)$. В подобных случаях полезны так называемые с о о т н о ш е н и я д в о й с т в е н н о с т и.

Теорема I.3. (Двойственности в задаче наилучшего приближения). Погрешность $E(f,\mathcal{L}_L,W)$ наилучшего приближения произвольной функции $f(x)$ банахова пространства W линейными комбинациями линейно независимых функций $\{\varphi_K\}_1^L\subset W$

$$f(x)\cong \hat{f}_L(x)=\sum_{K=1}^{L} a_K\varphi_K\in\mathcal{L}_L \tag{I.21}$$

может быть вычислена по формуле

$$E(f,\mathcal{L}_L,W)=\sup_{\substack{\|\Phi\|<1 \\ \Phi(\varphi_K)=0,\ K=\overline{1,L}}}\Phi(f) , \tag{I.22}$$

где верхняя грань берется по всем линейным функционалам Φ с нормой $\|\Phi\|\leqslant 1$, обращающимся в нуль на функциях $\{\varphi_K\}_1^L$. Верхняя грань достигается для некоторого линейного функционала Φ_0 с единичной нормой $\|\Phi_0\|=1$.

Доказательство: если $f\in\mathcal{L}_L=\mathcal{L}(\varphi_1,\ldots,\varphi_L)$, то она сама себя аппроксимирует и утверждение теоремы превращается в тождество 0=0. Будем считать, что $f\bar{\in}\mathcal{L}_L$. Пусть $\hat{f}_L\in\mathcal{L}_L$ функция наилучшего приближения (она существует по доказанной теореме I.I существования), т.е.

$$\|f-\hat{f}_L\|=d\equiv E(f,\mathcal{L}_L,W)>0.$$

Для любого функционала Φ, из $\Phi(\varphi_K)=0$, $K=\overline{1,L}$ следует, что $\forall f\in\mathcal{L}$:

$$\Phi(\hat{f}_L)=\Phi(\sum_{K=1}^{L}a'_K\varphi_K)=\sum_{K=1}^{L}a'_K\Phi(\varphi_K)=0,$$

в частности $\Phi(\hat{f}_L)=0$. Пусть $\|\Phi\|\leqslant 1$, тогда

$$\Phi(f)=\Phi(f)-\Phi(\hat{f}_L)=\Phi(f-\hat{f}_L)\leqslant|\Phi(f-\hat{f}_L)|\leqslant$$
$$\leqslant\|\Phi\|\|f-\hat{f}_L\|\leqslant\|f-\hat{f}_L\|=d,$$

значит

$$\begin{aligned} &\sup\Phi(f)\leqslant d\\ &\Phi(\varphi_K)=0\\ &\|\Phi\|<1, \end{aligned} \tag{I.23}$$

С другой стороны, по известному следствию из теоремы Хана-Банаха /20/ существует линейный функционал Φ_0, $\|\Phi_0\|=1$, позволяющий записать уравнение линейного подпространства $\mathcal{L}_L$ в виде $\Phi_0(\tilde{f})=0$, $\tilde{f}\in\mathcal{L}_L$, причем расстояние от функции f до подпространства $\mathcal{L}_L$ дается значением этого же функционала на f: $\Phi_0(f)=d$. Таким образом, построен функционал, на котором верхняя грань в выражении (I.23) достигается, т.е. имеет место знак равенства. Теорема доказана.

Пример I.5. Рассмотрим вещественное нормированное пространство $L_p(G)$, $1\leqslant p<\infty$. Известно, что в силу неравенства Гельдера

$$\left|\int_G f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left[\int_G|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_G|g(x)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

любой линейный функционал $\Phi(f)$ в $L_p(G)$ представляется в виде

$$\Phi(f)=\int_G f(x)g(x)dx,\quad \text{где } g(x)\in L_q(G),$$

причем $\|\Phi\|=\|g\|_{L_q(G)}$

Следовательно для приближений (I.2I) по норме в $L_p^{(G)}$ имеет место соотношение двойственности:

$$E(f,\mathcal{L}_L,W)\equiv\inf_{f\in L_p(G)}\left\|f-\sum_{K=1}^{L}a_K\varphi_K\right\|=\sup_{\substack{\|g\|_{L_q(G)}\leqslant 1\\ \int\varphi_K(x)g(x)dx=0}}\int_G f(x)g(x)dx$$

где верхняя грань достигается на некоторых функциях $g(x)\in L_q(G)$ с единичной нормой.

I.3. Сходимость наилучших конечномерных аппроксимаций

Пусть в банаховом пространстве W задана бесконечная система функций $\{\varphi_K\}_1^\infty$ и аппроксимируемая функция f. Тогда для любого $L=1,2,\ldots$ можно строить приближения f функциями из L-мерной линейной оболочки $\mathcal{L}_L=\mathcal{L}(\varphi_1,\cdots,\varphi_L)$. Такой подход ценен, если

мы заранее не знаем, сколько членов в аппроксимации (I.17) нужно взять для достижения заданной точности, а нужно изучать зависимость погрешности от L. Заметим, что варьируя L, мы меняем автоматически как погрешность, так и саму функцию наилучшего приближения, т.е. коэффициенты $\{a_K\}_1^L$ наилучшего приближения зависят от L.
Обозначим

$$
\begin{aligned}
&E_L(f, W) = E(f, \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_L), W) = \\
&= \inf \|f - \tilde{f}\| = \|f - \hat{f}_L\|, \\
&\tilde{f} \in \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_L),
\end{aligned}
\qquad (I.25)
$$

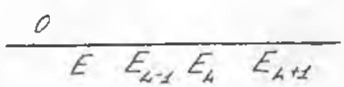
где $\hat{f}_L(x)$ – функция наилучшего приближения.
Поскольку любая функция $\tilde{f}$ из $\mathcal{L}_{L-1}$ автоматически принадлежит $\mathcal{L}_L$, то

$$
\|f - \tilde{f}\| \geq E_L(f, W), \ \tilde{f} \in \mathcal{L}_{L-1}. \qquad (I.26)
$$

Беря нижнюю грань по $\mathcal{L}_{L-1}$ от обеих частей выражения (I.26), получаем

$$
E_{L-1}(f, W) \geq E_L(f, W), \qquad (I.27)
$$

т.е. последовательность погрешностей наилучшего конечномерного приближения не возрастает (рис.I.I).



Р и с. I.I. Сходимость наилучших приближений

С другой стороны, $E_L(f, W) \geq 0$. Итак, последовательность $E_L(f, W)$ не возрастает и ограничена снизу, а значит она имеет предел, причем

$$
E = \lim_{L \to \infty} E_L(f, W) \geq 0. \qquad (I.28)
$$

Заметим, что нулевому пределу (I.28) соответствует сходимость наилучших приближений к аппроксимируемой функции f с ростом размерности приближения.

<u>Теорема I.4.</u> Последовательность $\hat{f}_L$ наилучших аппроксимаций функции $f \in W$ линейными комбинациями первых L функций из некоторой бесконечной системы $\{\varphi_K\}_1^L$ сходится к аппроксимируемой функции f при $L \to \infty$ тогда и только тогда, когда система $\{\varphi_K\}_1^\infty$ полна в W.

Доказательство: пусть $\hat{f}_L \to f$ при $L \to \infty$. Тогда для любого ε найдется L такое, что $\|\hat{f}_L - f\| < \varepsilon$; но $\hat{f}_L$ есть конечная линейная комбинация функций из системы $\{\varphi_K\}_1^\infty$, т.е. $\{\varphi_K\}_1^\infty$ – полная система. Наоборот, пусть последовательность $\tilde{f}_L$ не сходится к f. Значит предел (I.28) строго больше нуля. В силу монотонности (I.27) имеем

$$E_L(f,W) \geq E, \quad L=1,2,\ldots \tag{I.29}$$

В силу произвольности L в неравенстве (I.29) и по определению наилучшей аппроксимации имеем для любой линейной комбинации $\tilde{f}$ функций из системы $\{\varphi_n\}_L^\infty$:

$$\|f-\tilde{f}\| \geq E_L(f,W) \geq E > 0,$$

т.е. система $\{\varphi_K\}$ не полна.
Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Для неортогональных функций $\{\varphi_K\}_1^\infty$ свойства полноты недостаточно для сходимости ряда $\sum\limits_{K=1}^{\infty} f_K \varphi_K(x)$ к функции $f \in W$. Однако и в этом случае оказывается все же возможным сколь угодно точно аппроксимировать f разложением по $\{\varphi_K\}_1^L$. Но для этого надо использовать не частичные суммы $\sum\limits_{K=1}^{L} f_K \varphi_K(x)$, а функции наилучшей аппроксимации

$$\sum_{K=1}^{L} a_K^{(L)} \varphi_K(x),$$

где $\{a_K^{(L)}\}_1^L$ – коэффициенты наилучшей аппроксимации для заданного L. Заметим, что в рядах L коэффициенты всегда черпаются из одной и той же бесконечной системы коэффициентов, а при наилучшем приближении этот набор индивидуален при каждом L. Увеличивая L на "I" в рядах, мы лишь прибавим к набору коэффициентов $f_1,\ldots, f_L$ еще один f_{L+1}, а в случае наилучшего приближения все $L+1$ коэффициентов $a_1^{(L+1)},\ldots, a_L^{(L+1)}, a_{L+1}^{(L+1)}$ придется считать заново. Это усложнение является "платой" за сходимость в более широких предположениях.

Из доказанной теоремы I.4 в силу полноты системы $1, x, x^2, \ldots$ в $C[a,b]$ и полноты системы тригонометрических полиномов в $C[a,b]$ заключаем, что последовательности алгебраических и тригонометрических многочленов наилучшего равномерного приближения сходятся к аппроксимируемой функции.

1.4. Наилучшая аппроксимация в гильбертовом пространстве

В гильбертовом пространстве у нас появляются дополнительные возможности для нахождения наилучшего приближения за счет того, что норма не произвольна, а порождена скалярным произведением:

$$\|f-\hat{f}\| = \sqrt{(f-\hat{f},\, f-\hat{f})}\,.$$

Существование и единственность функции наилучшего приближения сразу вытекает из общих теорем I.I и I.2.

Теорема I.5. (О перпендикуляре). Пусть W - гильбертово пространство, $\mathcal{L}$ - его линейное подпространство, f - функция из W, не лежащая в $\mathcal{L}$. Тогда функция $\hat{f}$ наилучшей аппроксимации

$$\|f-\hat{f}\| = \inf_{\tilde{f}\in\mathcal{L}} \|f-\tilde{f}\| \equiv E(f,\mathcal{L},W) \qquad (I.30)$$

удовлетворяет системе уравнений

$$(f-\hat{f},\, \tilde{f}) = 0\,,\quad \tilde{f}\in\mathcal{L}, \qquad (I.31)$$

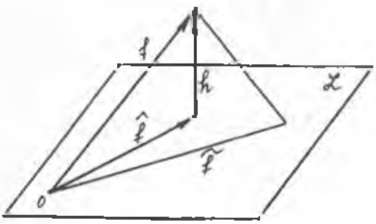
а погрешность наилучшей аппроксимации может быть вычислена по формуле

$$E(f,\mathcal{L},W) = \|f\|^2 - (\hat{f}, f) = \|f\|^2 - \|\hat{f}\|^2. \qquad (I.32)$$

Доказательство: пусть дано подпространство $\mathcal{L}$ и функция $f\in W$, $f\bar{\in}\mathcal{L}$. Как известно /20/, f можно разложить на ортогональные составляющие (рис.I.2):

$$f = \hat{f} + h, \qquad (I.33)$$

где $\hat{f}$ - некоторая функция из $\mathcal{L}$, называемая проекцией f на $\mathcal{L}$, $h\in\mathcal{L}^{\perp}$, $\mathcal{L}^{\perp}$ - ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ (например, (I.33) можно получить, разложив f по ортонормированному базису, первые базисные функции которого лежат в $\mathcal{L}$, а затем разбив ряд



Р и с. I.2. Иллюстрация к теореме о перпендикуляре на две части). Имеем для любой $\tilde f\in\mathcal{L}$:

$$(h,\tilde f)=0. \tag{I.34}$$

Покажем, что $\hat f$ и есть функция наилучшего приближения. Действительно, для любой $\tilde f\in\mathcal{L}$

$$\|f-\tilde f\|^2=\|(\hat f+h)-\tilde f\|^2=\|(\hat f-\tilde f)+h\|^2=$$

$$=(\hat f-\tilde f+h,\hat f-\tilde f+h).$$

Поскольку $\hat f-\tilde f\in\mathcal{L}$, то $h\perp(\hat f-\tilde f)$, т.е. $(\hat f-\tilde f,h)=0$.

Значит

$$\|f-\tilde f\|^2=(\hat f-\tilde f,\hat f-\tilde f)+(h,h)+(\hat f-\tilde f,h)+(h,\hat f-\tilde f)=$$

$$=\|\hat f-\tilde f\|^2+\|h\|^2.$$

Таким образом $\|\hat f-\tilde f\|^2\leqslant\|h\|^2$, причем знак равенства имеет место при $\tilde f=\hat f$, т.е. достигается на ортогональной проекции f на $\mathcal{L}$, т.о. доказано, что $\hat f$ – функция наилучшего приближения. Далее из равенств (I.33), (I.34) получаем $\|f\|^2=\|\hat f\|^2+\|h\|^2$,

т.е. $\|f-\hat f\|^2=\|h\|^2=\|f\|^2-\|\hat f\|^2$.

Но $(f-\hat f,\hat f)=(h,\hat f)=0$, следовательно $\|\hat f\|^2=(f,\hat f)$, откуда $\|f-\hat f\|^2=\|f\|^2-(f,\hat f)$.

Теорема доказана.

Таким образом, невязка наилучшей аппроксимации ортогональна аппроксимирующему подпространству.

Теорема I.5 позволяет найти наилучшую аппроксимацию даже в случае бесконечномерного пространства $\mathcal{L}$ аппроксимирующих функций. В частности для конечномерного случая верна.

Теорема I.6. (О конечномерной наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве).

Пусть $\{\varphi_K\}_1^L$ – система линейно-независимых функций в гильбертовом пространстве W, функция $f\in W$, тогда коэффициенты

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_L\end{pmatrix} \tag{I.35}$$

наилучшей конечномерной аппроксимации

$$f(x) \cong \sum_{K=1}^{L} a_K \varphi_K(x), \; x \in G \qquad (I.36)$$

определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\Gamma_L A = B, \qquad (I.37)$$

$$\Gamma_L = [\Gamma_{Ki};\ K, i = \overline{1,L}],\ \Gamma_{Ki} = (\varphi_i, \varphi_K), \qquad (I.38)$$

где Γ_L – матрица Грамма системы $\{\varphi_K\}_1^L$,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_L \end{pmatrix},\ b_K = (b, \varphi_K). \qquad (I.39)$$

При этом погрешность наилучшей аппроксимации может быть подсчитана по формуле

$$\| f - \sum_{K=1}^{L} a_K \varphi_K \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{K=1}^{L} a_K b_K^* . \qquad (I.40)$$

Доказательство: применим теорему о перпендикуляре в случае

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_L),\ \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{L} a_i \varphi_i(x), \qquad (I.41)$$

полагая в соотношении (I.31) последовательно

$$\tilde{f}(x) = \varphi_K(x) \in \mathcal{L},\ K = \overline{1,L}, \qquad (I.42)$$

получаем

$$\sum_{i=1}^{L} a_i (\varphi_i, \varphi_K) = (f, \varphi_K) \quad K = \overline{1,L}.$$

Вводя числа Γ_{Ki} и b_K, получаем

$$\sum_{i=1}^{L} \Gamma_{Ki} a_i = b_K,\ K = \overline{1,L}. \qquad (I.43)$$

Переходя к матричной форме записи, получаем систему уравнений (I.37), определитель которой отличен от 0 как определитель Грамма линейно-независимой системы функции $\{\varphi_K\}_1^L$. Так что система имеет единственное решение, определяющее коэффициенты наилучшего приближения, при этом согласно общей формуле (I.32) погрешность наилучшего приближения будет

$$E(f, \mathcal{L}, W) = \|f\|^2 - (\hat{f}, f) = \|f\|^2 - (\sum_{K=1}^{L} a_K \varphi_K, f) =$$
$$= \|f\|^2 - \sum_{K=1}^{L} a_K (f, \varphi_K)^*. \qquad (I.44)$$

С учетом обозначения (I.39) из (I.44) сразу получаем формулу (I.40). Теорема доказана.

Следствие I. Вводя матрицу

$$G_L = \Gamma_L^{-1} = \left[g_{ik}^{(L)} \right], \tag{I.45}$$

можно записать коэффициенты наилучшего приближения в виде

$$a_K = \sum_{i=1}^{L} g_{Ki}^{(L)} b_i \,, \quad K = \overline{1,L}. \tag{I.46}$$

Отсюда, в частности, заключаем, что наилучшая аппроксимация в гильбертовом пространстве является линейной.

Следствие 2. Если система функций $\{ \psi_K \}_1^\infty$ является ортонормированной, то коэффициенты наилучшего приближения определяются по формуле

$$a_K = b_K = (f, \psi_K) \,, \quad K = \overline{1,L}, \tag{I.47}$$

а погрешность вычисляется по формуле

$$E(f, \mathcal{L}, W) = \| f \|^2 - \sum_{K=1}^{L} | a_K |^2. \tag{I.48}$$

Доказательство этого следствия проводится с учетом того, что матрица Грамма ортонормированной системы является единичной матрицей.

Замечание. Если бесконечная система функций $\{ \psi_K \}_1^\infty$ ортонормированна, то вычисляемые при каждом L коэффициенты (I.47) совпадают с первыми L коэффициентами ортогонального ряда (I.14). Таким образом, для ортогональных базисных функций можно строить наилучшие приближения в виде отрезка ряда. При этом для перехода от L -мерного к $L+1$ -мерному приближению достаточно лишь дописать еще один коэффициент. Для неортогональных функций $\{ \varphi_K \}_1^\infty$ такое построение не имеет место; при переходе от L к $L+1$ надо пересчитывать все до одного коэффициенты наилучшего приближения. Однако имеет место асимптотический результат: при больших L можно считать наилучшие приближения отрезком некоторого ряда, а именно- биортогонального разложения (I.15). Доказательству соответствующей теоремы мы предпочтем лемму.

Лемма I.2. (О наилучшей аппроксимации функции из биортогональной системы). Пусть $\{ \varphi_K \}_1^\infty$ - базис в W, $\{ g_K \}_1^\infty$ - биортогональный к $\{ \varphi_K \}_1^\infty$ базис,

$$\Gamma_L = \left[\Gamma_{Ki} \,,\ \Gamma_{Ki} = (\varphi_K , \varphi_i) ;\ i, K = \overline{1,L} \right] \tag{I.49}$$

– подматрица матрицы Грамма системы,

$$\Gamma_L^{-1} = G_L = \left[g_{ki}^{(L)} ;\ k, i = \overline{1,L} \right] \tag{I.50}$$

– обратная матрица к Γ_L ;
тогда:

а) аппроксимация

$$g_j(x) \cong g_j^{(L)}(x) \equiv \sum_{i=1}^{L} g_{ij}^{(L)} \varphi_i(x),\ j = \overline{1,L} \tag{I.51}$$

является наилучшей аппроксимацией в W функции g_k линейными комбинациями функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$;

б) аппроксимация $g_j^{(L)}(x)$ сходится к $g_j(x)$ при $L \to \infty$, т.е.

$$\lim_{L \to \infty} \| g_j - g_j^{(L)} \| = 0. \tag{I.52}$$

<u>Доказательство</u>: по определению обратной матрицы выполняются соотношения $\Gamma_L G_L = E$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{L} \Gamma_{ki} g_{ij}^{(L)} = \delta_{kj} ;\ k, j = \overline{1,L} \tag{I.53}$$

(существование G_L следует из того, что $\det \Gamma_L \neq 0$ в силу линейной независимости $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$). С другой стороны, зафиксировав $j = \overline{1,L}$ и рассматривая аппроксимацию g_j , запишем уравнение для коэффициентов наилучшей аппроксимации

$$g_j(x) \cong \sum_{i=1}^{L} a_i \varphi_i(x) \tag{I.54}$$

в виде (I.43). Сравнивая уравнения (I.54) и (I.53), с учетом определения биортогональности и единственности наилучшего приближения заключаем, что $a_i = g_{ij}^{(L)}$, $i = \overline{1,L}$ (j – фиксировано).

Первое утверждение доказано. Для доказательства второго утверждения достаточно сослаться на теорему I.4, в которой $f = g_j$, и учесть, что $E_L(g_j, W) = \| g_j - g_j^{(L)} \|$.
Лемма доказана.

<u>Теорема I.7</u>. (О связи наилучшей аппроксимации с биортогональным разложением). Пусть $f \in W$, $\{\varphi_k\}_1^{\infty} \subset W$ – базис, $\{a_k^{(L)}\}_1^L$ – коэффициенты наилучшей в W аппроксимации

$$f(x) \cong \sum_{k=1}^{L} a_k^{(L)} \varphi_k(x), \tag{I.55}$$

$\{f_K\}_1^L$ – первые коэффициенты биортогонального разложения;

$$f(x)=\sum_{K=1}^{\infty} f_K \varphi_K(x)\ ,\ f_K=(f,g_K).$$

Тогда:

а) коэффициенты $\{a_K^{(L)}\}_1^L$ можно представить в виде

$$a_K^{(L)}=(f,g_K^{(L)}), \qquad (I.56)$$

где $g_K^{(L)}(x)$ – наилучшая аппроксимация $g_K(x)$, определяемая соотношениями (I.5I), (I.50);

б) $\lim\limits_{L\to\infty} a_K^{(L)}=f_K\ ,\ K=\overline{1,L}\,.$ (I.57)

<u>Доказательство</u>: пусть $G_L=\Gamma_L^{-1}$, тогда по формуле (I.46)

$$a_K^{(L)}=\sum_{i=1}^{L} g_{Ki}^{(L)} \hat{b}_i=\sum_{i=1}^{L} g_{Ki}^{(L)}(f,\varphi_i)=$$

$$=(f,\sum_{i=1}^{L} g_{Ki}^{(L)*}\varphi_i).$$

Заметим, что в силу самосопряженности матрицы Грамма ($\Gamma_L=\Gamma_L^*$) обратная матрица $G_L=\Gamma_L^{-1}$ является самосопряженной (т.к. $G_L\Gamma_L=E\to\Gamma_L^* G_L^*=E$ $\to \Gamma_L G_L^*=E,$ т.е. $G_L^*=\Gamma_L^{-1}=G_L$).

Значит $\quad g_{Ki}^{(L)*}=g_{iK}^{(L)}.$

Вводя

$$g_K=\sum_{i=1}^{L} g_{iK}^{(L)}\varphi_i(x),$$

получаем $\quad a_K^{(L)}=(f,g_K^{(L)}).$

По лемме I.2 $g_K^{(L)}$ – наилучшая аппроксимация к g_K и $\lim\limits_{L\to\infty}\|g_K^{(L)}-g_K\|=0.$

Тогда $|a_K^{(L)}-f_K|=|(f,g_K^{(L)})-(f,g_K)|=|(f,g_K^{(L)}-g_K)|\le\|f\|\|g_K^{(L)}-$ $-g_K\|,$

следовательно $a_K^{(L)}\to f_K$ при $L\to\infty$.

Теорема доказана.

<u>Следствие</u>: при больших L можно оценивать погрешность аппроксимации (I.55) по формуле

$$\varepsilon_L^2=\|f\|^2-\sum_{K=1}^{L} f_K f^K, \qquad (I.58)$$

где

$$f^K=(f,\varphi_K). \qquad (I.59)$$

1.5. Метод наименьших квадратов

Под методом наименьших квадратов в широком смысле понимают аппроксимацию в гильбертовых пространствах функций с интегрируемым квадратом, т.е. в $L_{2,\rho}(G)$, $H^{\ell}(G)$ /26/ и т.п. Соответствующие уравнения вытекают из общих результатов § 1.4.

1.5.1. Среднеквадратичная аппроксимация с весом

Требуется подобрать коэффициенты $\{a_K\}_1^L$ так, чтобы среднеквадратичная с весом погрешность была минимальна:

$$\varepsilon_L^2 = \int_G \Big| f(x) - \sum_{K=1}^{L} a_K \varphi_K(x) \Big|^2 \rho(x)\,dx \to min, \tag{1.60}$$

здесь

$$\Gamma_{Ki} = \int_G \varphi_i(x)\varphi_K^*(x)\rho(x)\,dx, \tag{1.61}$$

$$b_K = \int_G f(x)\varphi_K^*(x)\rho(x)\,dx, \tag{1.62}$$

а коэффициенты a_K определяются из уравнений

$$\sum_{i=1}^{L} \Gamma_{Ki}\, a_i = b_K , \tag{1.63}$$

причем

$$\varepsilon_L^2 = \int_G |f(x)|^2 \rho(x)\,dx - \sum_{K=1}^{L} a_K b_K^* . \tag{1.64}$$

Если же функции $\{\varphi_K\}_1^L$ ортонормированны с весом ρ , т.е.

$$\int_G \varphi_K(x)\varphi_K^*(x)\rho(x)\,dx = \delta_{iK} , \tag{1.65}$$

то $a_K = b_K$.

1.5.2. Восстановление функции по результатам измерений методом наименьших квадратов

В результате измерений значений некоторой функции $f(x), x\in G$ в точках $\xi_j \in G, j=\overline{1,N}$ получен набор чисел $\{f_j\}_1^N$. Требуется "продолжить" значения в дискретных точках на всю область G на основе аппроксимации вида

$$f(x) \cong \hat{f}(x) = \sum_{K=1}^{L} a_K \varphi_K(x), \quad x\in G, \tag{1.66}$$

где $\{\varphi_K\}_1^L$ – заданные базисные функции.

Коэффициенты $\{a_K\}_1^L$ естественно подобрать так, чтобы в точках ξ_j значения $f(x)$ и ее аппроксимации (I.66) были как можно ближе, т.е. чтобы

$$\varepsilon^2=\sum_{j=1}^{N}\left|\sum_{K=1}^{L} a_K \varphi_K(\xi_j)-\hat{f}_j\right|^2 \to min . \qquad (I.67)$$

Введем $L_{2,\rho}(G)$, где

$$\rho(x)=\sum_{j=1}^{N}\delta(x-\xi_j), \qquad (I.68)$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака от n переменных.

Тогда легко видеть, что

$$\|f(x)-\hat{f}(x)\|_{L_{2,\rho}(G)}=\int_G |f(x)-\hat{f}(x)|^2\rho(x)dx=\int_G |f(x)-$$

$$-\hat{f}(x)|^2\sum_{j=1}^{N}\delta(x-\xi_j)dx=\sum_{j=1}^{N}|f(\xi_j)-\hat{f}_j|^2=\varepsilon^2,$$

т.е. ε^2 и есть норма в $L_{2,\rho}(G)$ при таком весе ρ . Значит

$$b_K=\int_G f(x)\varphi_K(x)\rho(x)dx=\sum_{j=1}^{N}\hat{f}_j\varphi_K(\xi_j), \qquad (I.69)$$

$$\Gamma_{Ki}=\int\varphi_i(x)\varphi_K^*(x)\rho(x)dx=\sum_{j=1}^{N}\varphi_i(\xi_j)\varphi_K^*(\xi_j), \qquad (I.70)$$

коэффициенты a_K находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{L}\Gamma_{Ki}a_i=b_K,\quad K=\overline{1,L},$$

а погрешность ε^2 подсчитывается по формуле

$$\varepsilon^2=\sum_{j=1}^{N}|f_j|^2-\sum_{K=1}^{L}a_K b_K^* . \qquad (I.71)$$

I.5.3. Одновременная аппроксимация функции и ее производной

Для аппроксимации функции одной переменной

$$f(x)\cong\hat{f}(x)=\sum_{K=1}^{L}a_K\varphi_K(x),\quad x\in(a,b)$$

требуется подобрать $\{a_K\}_1^L$ так, чтобы

$$\varepsilon_L^2 = \int_a^b |f(x) - \hat{f}(x)|^2 dx + \int_a^b |f'(x) - \hat{f}'(x)|^2 dx \to min. \quad (I.72)$$

Нетрудно видеть, что по определению пространства $H^1[a,b]$

$$\varepsilon_L^2 = \| f - \hat{f} \|^2_{H^1[a,b]} . \quad (I.73)$$

Задача наилучшего приближения в гильбертовом пространстве $H^1[a,b]$ решается стандартным методом. Вычисляется

$$\Gamma_{ki} = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k^*(x) dx + \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_k'^*(x) dx , \quad (I.74)$$

$$b_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \int_a^b f'(x) \varphi_k'(x) dx . \quad (I.75)$$

Коэффициенты $\{a_k\}_1^L$ находятся из уравнений (I.63). Погрешность может быть вычислена по формуле

$$\varepsilon_L^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b |f'(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^{L} a_k b_k^* . \quad (I.76)$$

I.6. Линейная регрессия случайных величин

Имеется случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ и набор случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_L$. Нужно представить приближенно

$$\xi \cong \hat{\xi} \equiv \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_L \xi_L \quad (I.77)$$

так, чтобы дисперсия ошибки была минимальна, т.е.

$$D = M \left| \xi - \sum_{k=1}^{L} \alpha_k \xi_k \right|^2 \to min \quad (I.78)$$

(все величины предполагаются центрированными:

$M\xi = M\xi_1 = M\xi_L = 0$).

В математической статистике случайная величина $\hat{\xi}$ называется множественной линейной регрессией величины ξ на величины $\xi_1, \dots, \xi_L$. Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_L$ называются коэффициентами множественной регрессии. Величина D (I.78) называется остаточн о й д и с п е р с и е й величины ξ относительно величин $\xi_1, \dots \xi_L$. Соответственно невязку $\xi - \hat{\xi}$ называют о с т а т к о м в е л и ч и н ы ξ относительно величин $\xi_1, \dots \xi_L$.

Для решения задачи (I.78) достаточно заметить, что

$$D = \left\| \xi - \hat{\xi} \right\|_{L_2(\Omega, \mathcal{G}, P)},$$

где $L_2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ – гильбертово пространство случайных величин с нормой в виде дисперсии (I.78) /20/ . Вводя корреляционные моменты

$$\mu_{Ki} = M \xi_i \xi_K^*, \quad K, i = \overline{1, L}, \tag{I.79}$$

$$\mu_{K0} = M \xi \xi_K^*, \tag{I.80}$$

найдем коэффициенты регрессии α_K из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_{Ki} \alpha_i = \mu_{K0}, \; K = 1, L, \tag{I.81}$$

при этом остаточная дисперсия D определяется по формуле

$$D = M |\xi|^2 - \sum_{K=1}^{L} \alpha_K \mu_{K0}^*. \tag{I.82}$$

I.7. Восстановление сигнала на фоне шума

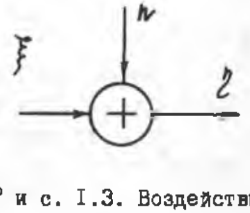
Некоторый сигнал, описываемый случайным процессом $\xi(x)$, подвергается воздействию аддитивного случайного шума $n(x)$ (рис.I.3) так, что вместо $\xi(x)$ наблюдается зашумленный сигнал

$$\eta(x) = \xi(x) + n(x). \tag{I.83}$$

Требуется построить по результату наблюдения $\eta(x), x \in G$ линейную оценку

$$\hat{\xi}(x) = \int_G K(x, x') \eta(x') dx' \tag{I.84}$$

исходного сигнала $\xi(x)$ так, чтобы имела место аппроксимация



Р и с. I.3. Воздействие шума на сигнал

$$\zeta(x) \cong \hat{\xi}(x). \tag{I.85}$$

Исходными данными являются, во-первых, нулевые средние значения $\xi(x)$ и $n(x)$ и, во-вторых, корреляционные функции

$$B_\xi(x,u) = M\xi(x)\xi^*(u), \tag{I.86}$$

$$B_n(x,u) = Mn(x)n^*(u), \tag{I.87}$$

$$B_{\xi n}(x,u) = M\xi(x)n^*(u). \tag{I.88}$$

Н.Винером предложено искать аппроксимацию (I.85) по критерию точности

$$\varepsilon^2(x) = M|\xi(x) - \hat{\xi}(x)|^2, \tag{I.89}$$

являющемуся нормой $\|\xi(x)-\hat{\xi}(x)\|^2$ в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega,\sigma,P)$. Вводя замкнутое линейное подпространство $\mathcal{L} \subset L_2(\Omega,\sigma,P)$, содержащее всевозможные линейные комбинации вида

$$\tilde{\xi} = \alpha_1 \zeta(x_1) + \alpha_2 \zeta(x_2) + \ldots + \alpha_N \zeta(x_N), \quad N = 1,2\ldots, \tag{I.90}$$

и их пределы по норме в $L_2(\Omega,\sigma,P)$, имеем задачу о наилучшей аппроксимации вида (I.30). По теореме I.5 наилучшая аппроксимация достигается, когда невязка $\xi(x) - \hat{\xi}(x)$ ортогональна в $L_2(\Omega,\sigma,P)$ к $\mathcal{L}$, т.е. при любых $\zeta(u), u \in G$:

$$M\left\{\left[\xi(x) - \int_G K(x,x')\zeta(x')dx'\right]\zeta^*(u)\right\} = 0$$

или

$$\int_{G'} K(x,x')B_\zeta(x',x)dx' = B_{\xi\zeta}(x,u), \tag{I.91}$$

где

$$B_\zeta(x,u) = B_\xi(x,u) + B_n(x,u) + B_{\xi\zeta}(x,u) + B^*_{\xi\zeta}(u,x). \tag{I.92}$$

$$B_{\xi\zeta}(x,u) = B_\xi(x,u) + B_{\xi\zeta}(x,u). \tag{I.93}$$

Уравнение (I.9I) называется уравнением Винера-Хопфа, а соответствующую (I.9I) линейную оценку $\hat{\xi}(x)$ (I.84) процесса по результатам наблюдения $\eta(x)$ называют **винеровским фильтром**. Этот фильтр широко используется в теории передачи и обработки сигналов.

Погрешность оптимальной оценки равна:

$$\varepsilon^2(x) = M|\xi(x)|^2 - M\left[\int_G K(x,x')\eta(x')dx' \cdot \xi(x)\right] =$$

$$= B_\xi(x,x) - \int_G K(x,x')B^*_{\xi\eta}(x',x')dx'. \tag{I.94}$$

I.8. Оценка погрешности кусочно-постоянной аппроксимации функций

В прикладных задачах бывает удобно приближенно считать функцию постоянной в пределах окрестности точки. Взяв систему точек отсчета в области определения, можно заменить функцию константой в пределах окрестности каждой точки. Таким образом строится кусочно-постоянная аппроксимация. Представляет интерес оценить погрешность кусочно-постоянной аппроксимации при большом числе точек отсчета.

Пусть $f(x)$, $x \in G \subset R^n$ – комплекснозначная непрерывно дифференцируемая функция n вещественных переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, определенная в ограниченной замкнутой области G. Для построения кусочно-постоянной аппроксимации окружим область G минимальным параллелепипедом

$$\Pi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \supset G. \tag{I.95}$$

Очевидно, что числа a_j, b_j можно оценить по формулам

$$a_j = \inf_{x=(x_1,\dots,x_n)\in G} x_j, \qquad b_j = \sup_{x=(x_1,\dots,x_n)\in G} x_j \tag{I.96}$$

Выберем "числа отсчетов" $N_1, \dots, N_n$ по каждой оси и разобьем каждый из отрезков $[a_j, b_j]$ на N_j равных частей точками (рис.I.4):

$$x_{j,k_j} = a_j + k_j\delta_j, \quad \delta_j = \frac{b_j - a_j}{N_j}, \quad k_j = \overline{1, N_j}, \; j = \overline{1,n} \tag{I.97}$$

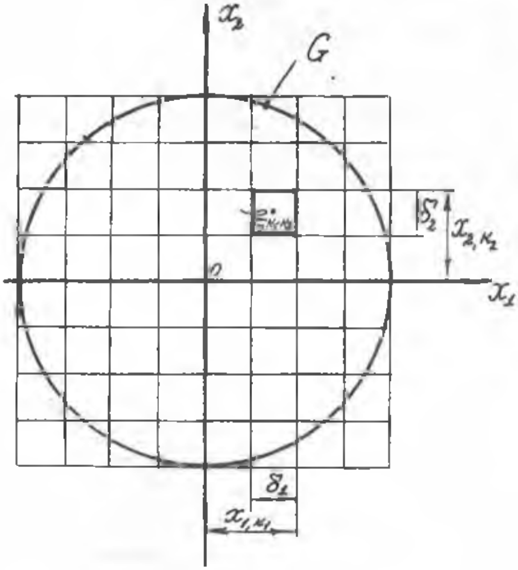
очевидно δ_j – размер ячейки разбиения по оси x_j (или **шаг дискретизации**).

Далее построим ячейки разбиения параллелепипеда Π :

$$G_K = [x_{1,K_1-1}, x_{1,K_1}] \times \ldots \times [x_{n,K_n-1}, x_{n,K_n}), \qquad (I.98)$$

где $K = (K_1, \ldots, K_n)$ – мультииндекс.

В параллелепипеде Π получилось всего $N_1 \ldots N_n$ ячеек. В область G попадает лишь часть из них, соответствующая некоторому множеству мультииндексов $\{K\}$ (см.рис.I.4): $I = \{K = (K_1, \cdots, K_n), G_K \subset G\}$,



Р и с. I.4. Разбиение области определения при кусочно-постоянной аппроксимации

число их $N \leqslant N_1 \ldots N_n$. В каждой ячейке G_K выберем центр ξ_K :

$$\xi_K = (\xi_{1K}, \ldots, \xi_{nK}) \quad K \in I, \qquad (I.99)$$

$$\xi_{jK} = \frac{x_{j,K-1} + x_{j,K}}{2}; K \in I, j = \overline{1,n} . \qquad (I.100)$$

Возьмем значения (отсчеты) $f(\xi_K), K\in I$ функции $f(x), x\in G$ в точках ξ_K, $K\in I$ и построим кусочно-постоянную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ для $f(x)$:

$$\tilde{f}(x)=\sum_{K\in I} f(\xi_K)\chi_K(x),\ x\in G, \tag{I.IOI}$$

где

$$\chi_K(x)=\begin{cases}1, & x\in G_K\\ 0, & x\bar{\in} G_K\end{cases}. \tag{I.IO2}$$

Заметим, что в сумме (I.IOI) при каждом значении x отлично от нуля лишь одно слагаемое, соответствующее той ячейке G_K, в которую попадает x.

Заметим, что функции $\{x_K\}_{K\in I}$ ортогональны в области G. Таким образом, сумма (I.IOI) представляет ортогональную конечномерную аппроксимацию. Коэффициенты, обеспечивающие наилучшую среднеквадратичную аппроксимацию, определяются согласно выражению (I.47) по формуле

$$f_K=\frac{1}{|G_K|}\int_G f(x)\chi_K(x)dx=\frac{1}{|G_K|}\int_{G_K} f(x)dx, \tag{I.IO3}$$

где $|G_K|$ - площадь ячейки G_K.

По теореме о среднем для интеграла (I.IO3) $f_K=f(\xi_K)$, где $\xi_K\in G_K$; но, вообще говоря, ξ_K не лежит в центре G_K. Однако при большом числе отсчетов, т.е. при $|G_K|\ll|G|$, аппроксимация с числами ξ_K, определяемыми соотношениями (I.99), (I.IOO), будет близка к наилучшей. Очевидно, что взяв числа отсчетов $N_1,\dots,N_n$ достаточно большими, т.е. шаги дискретизации $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ достаточно малыми, мы приблизим $f(x)$ сколь угодно точно. Ниже оценивается погрешность кусочно-постоянной аппроксимации в зависимости от $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ по разным нормам. Мы рассмотрим норму среднеквадратичную с весом $(L_{2,\rho}(G))$ и равномерную с весом $(C_\rho(G))$:

$$\|f-\tilde{f}\|^2_{L_{2,\rho(G)}}=\int_G|f(x)-\tilde{f}(x)|^2\rho(x)dx, \tag{I.IO4}$$

$$\|f-\tilde{f}\|_{C_\rho(G)}=\max_{x\in G}\left\{|f(x)-\tilde{f}(x)|\rho(x)\right\}. \tag{I.IO5}$$

<u>Теорема I.8.</u> (Об оценке погрешностей кусочно-постоянной аппроксимации). Пусть $\tilde{f}(x), x\in G$ - кусочно-постоянная аппроксимация комплекснозначной непрерывно дифференцируемой функции $f(x),\ x\in G\subset R^n$ по отсчетам, взятым на прямоугольной сетке с шагами $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$. Тогда для любой, непрерывно дифференцируемой весовой функции $\rho(x)\geq 0$ имеют место оценки

$$\|f-\tilde{f}\|^2_{L_{2,\rho(G)}}=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|^2_{L_{2,\rho(G)}}\left[1+O(\sigma)\right], \qquad (I.106)$$

$$\|f-\tilde{f}\|_{C\rho(G)}\leqslant\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|\right\|_{C\rho(G)}\left[1+O(\sigma)\right]. \qquad (I.107)$$

Доказательство: в силу тождества

$$f(x)=\sum_{K\in I}f(x)\chi_K(x)$$

и определения $\tilde{f}$ (I.101) имеем

$$f(x)-\tilde{f}(x)=\sum_{K\in I}\left[f(x)-f(\xi_K)\right]\chi_K(x). \qquad (I.108)$$

Используя формулу Тейлора в каждой ячейке G_K, получаем

$$\rho(x)=\rho(\xi_K)\left[1+O(\sigma)\right],\ x\in G_K, \qquad (I.109)$$

$$f(x)=f(\xi_K)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_j}(x_j-\xi_{jK})+O(\sigma^2);\ x\in G_K. \qquad (I.110)$$

Очевидно, что $x_j-\xi_{jK}\sim O(\sigma)$. Сделаем замену переменных:

$$x_j-\xi_{jK}=\sigma_j t_j,\quad |t_j|\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (I.111)$$

Из выражений (I.108)-(I.111) получаем представление невязки

$$f(x)-\tilde{f}(x)=\sum_{K\in I}\chi_K(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_j}\sigma_j t_j\left[1+O(\sigma)\right],\ x\in G_K \qquad (I.112)$$

Подставляя выражение (I.112) в (I.104), получим последовательно

$$\|f-\tilde{f}\|^2_{L_{2,\rho(G)}}=\int_G|f(x)-\tilde{f}(x)|^2\rho(x)dx=[1+$$

$$+O(\sigma)]\sum_{K\in I}\int_{G_K}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_j}\sigma_j t_j\right|^2\rho(x)dx=[1+$$

$$+O(\sigma)]\sigma_1\ldots\sigma_n\sum_{K\in I}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_p}\right)^*\sigma_j\sigma_p\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cdots\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}t_j t_p\rho\, dt.$$

Подсчитывая интегралы

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cdots\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t_j t_p \rho\, dt = [1+O(\sigma)]\rho(\xi_K)\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cdots\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t_j t_p =$$

$$= \begin{cases} [1+O(\sigma)]\rho(\xi_K)\frac{1}{12}, & j=p \\ 0, & j\neq p \end{cases},$$

получаем

$$\|f-\tilde f\|^2_{L_{2,\rho(G)}} = [1+O(\rho)]\frac{\sigma_1\ldots\sigma_n}{12}\sum_{K\in I}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\left|\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_j}\right|^2\rho(\xi_K). \quad (\text{I.II3})$$

Заменяя в правой части выражения (I.II3) интегральную сумму интегралом, на основании соотношения

$$\int\limits_G\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|^2\rho(x)dx-\sum_{K\in I}\left|\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_j}\right|^2\rho(\xi_K)\sigma_1\ldots\sigma_n=O(\sigma) \quad (\text{I.II4})$$

получим (I.I06).

Для доказательства второй оценки (I.I07) рассмотрим цепочку соотношений, основывающуюся на представлении (I.II2) и формуле (I.I05):

$$\|f-\tilde f\|_{C_\rho(G)} = \max_{x\in G}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left|\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_j}\right|\rho(\xi_K)\right\}[1+O(\sigma)]\leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in G}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|\rho(x)\right\}[1+O(\sigma)]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|\right\|_{C_\rho(G)}. \quad (\text{I.II5})$$

Поскольку максимум модуля линейной функции $\sum_{j=1}^{n} a_j t_j$, $|t_j|\leqslant\frac{1}{2}$ достигается при $t_j=\frac{1}{2}\operatorname{sign} a_j$, то из выражения (I.II5) получаем

$$\|f-\tilde f\|_{C_\rho(G)} = \max_{K\in I}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left|\frac{\partial f(\xi_K)}{\partial x_j}\right|\rho(\xi_K)\right\}[1+O(\sigma)]\leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in G}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|\rho(x)\right\}[1+O(\sigma)]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|\right\|_{C_\rho(G)}. \quad (\text{I.II6})$$

Теорема доказана.

2. АППРОКСИМАЦИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

2.I. Погрешность конечномерной аппроксимации класса функций

Будем рассматривать не только приближение фиксированной (одной, хотя и произвольной) функции $f(x)$, а приближение всего класса функций $F \subset W$ при фиксированном аппарате (способе) приближения, задаваемом базисными функциями $\{\varphi_k\}_1^L$ или конечномерным подпространством $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$. Что это означает? Для одной функции $f \in F$ погрешность ее наилучшего приближения больше, для другой – меньше. Погрешность приближения класса функций – это погрешность приближения той функции $f \in F$, которая хуже всего приближается, т.е. для которой погрешность наибольшая среди всех функций этого класса. Если интерпретировать коэффициенты конечномерной аппроксимации (I.6), как проектные параметры, то аппроксимация одной функции соответствует процессу проектирования какого-либо устройства. Устройство в принципе может быть спроектировано оптимально (наилучшая аппроксимация). Однако обычно самое оптимальное устройство сложно в реализации, поэтому рассматривается квазиоптимальная аппроксимация (с несколько большей погрешностью, но меньшей реализационной сложностью). Однако до начала проектирования часто требуется оценить показатели точности для целой серии однотипных устройств. Здесь как раз и нужно ввести характеристику точности аппроксимации класса функций.

Определение 2.I. Погрешностью наилучшего приближения класса функций $F \subset W$ классом функций $\mathcal{L} \subset W$ называется величина

$$\mathcal{E}(F, \mathcal{L}, W) = \sup_{f \in F} E(f, \mathcal{L}, W), \tag{2.I}$$

где $E(f, \mathcal{L}, W)$ – погрешность наилучшей аппроксимации одной функции f функциями из $\mathcal{L}$ (см.определение I.I8).

З а м е ч а н и е. $\mathcal{L}$ обычно как и выше – конечномерное линейное пространство.

Квазиоптимальной аппроксимации каждой функции соответствует другая характеристика точности.

Определение 2.2. Пусть $A: F \to W$ – линейный оператор. Погрешностью линейного приближения класса функций $F \subset W$ называется величина

$$\mathcal{E}(F,A,W)=\sup_{f\in F}\|f-Af\|. \tag{2.2}$$

Из неравенства

$$E(f,\mathcal{L},W)\leqslant\|f-Af\|$$

очевидно, что погрешность наилучшего приближения не превышает погрешности наилучшего линейного приближения этого же класса F :

$$\mathcal{E}(F,\mathcal{L},W)\leqslant\mathcal{E}(F,A,W). \tag{2.3}$$

Из свойств верхней грани очевидны следующие свойства погрешностей класса функций:

с в о й с т в о м о н о т о н н о с т и:
если $F_1\subset F_2$, то

$$\mathcal{E}(F_1,\mathcal{L},W)\leqslant\mathcal{E}(F_2,\mathcal{L},W), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{E}(F_1,A,W)\leqslant\mathcal{E}(F_2,A,W); \tag{2.5}$$

о ц е н к а с в е р х у:
если для любой $f\in F$ имеет место оценка

$$E(f,\mathcal{L},W)\leqslant C\quad(\text{или } \mathcal{E}(f,A,W)\leqslant C \tag{2.6}$$

и существует $f_0\in F$, для которой достигается знак равенства в оценке (2.6), то

$$\mathcal{E}(f,\mathcal{L},W)=C\quad(\text{или } \mathcal{E}(f,A,W)=C). \tag{2.7}$$

В качестве класса F выступает обычно подмножество одного из стандартных функциональных пространств. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2.I. Класс $C_\rho^{(\ell)}(G,M)$ в пространстве $W=C_\rho^{(\ell)}(G)$. При

$$M=(M_1,\ldots,M_n),\ \ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n) \tag{2.8}$$

в класс $C_\rho^{(\ell)}(G,M)$ входят функции из $C_\rho^{(\ell)}(G)$, для которых

$$\left\|\frac{\partial f^{\ell_j}}{\partial x_j^{\ell_j}}\right\|_{C_\rho(G)}\leqslant M_j;\ j=\overline{1,n}. \tag{2.9}$$

Если весовая функция $\rho(x) \equiv 1$, то обозначают соответственно $C^{(\ell)}(G, M)$, $C^{(\ell)}(G)$.

Пример 2.2. Класс $W^{\ell}(G, M)$ в пространстве $W = C(G)$. Он состоит из функций, имеющих частные производные по x_j порядка до $\ell_j - 1$ включительно, причем производные $\ell_j - 1$ порядка удовлетворяют условию Липшица

$$\left| \frac{\partial f^{\ell_j - 1}(x)}{\partial x_j^{\ell_j - 1}} - \frac{\partial f^{\ell_j - 1}(\tilde{x})}{\partial x_j^{\ell_j - 1}} \right| \leqslant M_j \left| x_j - \tilde{x}_j \right| \underset{j = \overline{1, n}}{.} \tag{2.10}$$

Пример 2.3. Класс $W_p^{\ell}(G, M)$ в функциональном пространстве $W = L_p(G)$ состоит из функций, у которых по переменной x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ существует обобщенная производная в смысле Соболева порядка $\ell_j (\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$, $M = (M_1, \ldots, M_n))$, причем

$$\left\| \frac{\partial^{\ell_j} f}{\partial x_j^{\ell_j}} \right\|_{L_p} \leqslant M_j \, , \; j = \overline{1, n} \, . \tag{2.11}$$

Пример 2.4. "Эллипсоид" K в $W = L_2(G)$ или в любом другом гильбертовом пространстве W определяется соотношением

$$F_M = \{ f : f = Ag, \; \|g\| \leqslant M \}, \tag{2.12}$$

где $A : W \to W$ компактный линейный оператор. Таким образом, эллипсоид F_M представляет собой образ шара радиуса M при линейном отображении.

2.2. Предельные характеристики точности для класса функций

Во всем изложенном выше предполагалось, что базисные функции $\{\varphi_k\}_1^{L}$ (или соответствующее пространство $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ аппроксимирующих функций) заданы, т.е. используется определенный аппарат аппроксимации. Однако учитывая специфические свойства класса аппроксимируемых функций, можно подобрать наилучший аппарат аппроксимации, соответствующий некоторым оптимальным базисным функциям $\{\varphi_k\}_1^{L}$. При этом достигается предельное (минимальное) значение погрешности

L -мерной аппроксимации данного класса функций F. В задачах проектирования это звучит так: прежде чем начинать проектирование, ищут оптимальный способ построения, компоновки и т.п. объекта проектирования, а уже затем выбирают проектные параметры. Дадим точные определения.

<u>Определение 2.3.</u> L -мерным поперечником функционального класса F в нормированном пространстве W называется величина

$$d_L(F,W) = \inf_{\substack{\mathcal{L}_L \subset W \\ \dim \mathcal{L}_L = L}} \mathcal{E}(F, \mathcal{L}_L, W) \tag{2.13}$$

где нижняя грань берется по конечномерным подпространствам W размерности L, $\mathcal{E}(F, \mathcal{L}_L, W)$ - погрешность наилучшего приближения класса F.

Таким образом, d_L характеризует погрешность L -мерной аппроксимации класса W (по норме B W) при наилучшем выборе $\mathcal{L}_L = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots \varphi_L)$. Подпространство $\mathcal{L}_L$ для которого $\inf$ достигается, т.е.

$$\mathcal{E}(F, \mathcal{L}_L, W) = d_L(F,W) \tag{2.14}$$

называют экстремальным подпространством, а соответствующие $\mathcal{L}_L$ базисные функции - оптимальными. Линейному (с оператором A) приближению класса функций соответствует другое определение поперечника.

<u>Определение 2.4.</u> Проекционным L -мерным поперечником класса $F \subset W$ называется величина

$$\pi_L(F,W) = \inf_{\substack{A(F) \subset \mathcal{L}_L \subset W \\ \dim \mathcal{L}_L = L}} \mathcal{E}(F, A, W), \tag{2.15}$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам с областью значений $A(F)$, лежащей в L -мерных подпространствах W. Неравенству (2.3) соответствует очевидное неравенство для поперечников

$$d_L(F,W) \leqslant \pi_L(F,W). \tag{2.16}$$

Для каждого из поперечников имеют место свойства монотонности, вытекающие из определения. Выпишем их для поперечника (2.23): если $F_1 \subset F_2 \subset W$, то

$$d_L(F_1, W) \leqslant d_L(F_2, W); \tag{2.17}$$

$$d_{L+1}(F, W) \leqslant d_L(F, W); \; L = 1, 2, \dots; \tag{2.18}$$

$$d_L(F_N, W) = 0 \quad \text{при } N \leqslant L, \tag{2.19}$$

где F_N - множество, лежащее в N -мерном подпространстве W.

Для класса F в виде эллипсоида в гильбертовом пространстве поперечник удается вычислить точно.

Теорема 2.2. (О поперечнике эллипсоида в гильбертовом пространстве). Пусть W - сапарабельное гильбертово пространство, $A: W \to W$ - компактный самосопряженный оператор,

$$F_M = \{f : f = Ag, \; g \in W, \; \|g\| \leqslant M\} \tag{2.20}$$

- эллипсоид. Тогда для любого L = 1,2...

$$d_L(F_M, W) = M|\lambda_{L+1}|, \tag{2.21}$$

где λ_{L+1} -$(L+1)$-е - собственное число оператора A. Оптимальными базисными функциями для класса F_M являются первые L собственных функций $\{\psi_K\}_1^L$ оператора A.

Замечание. Считаем, что собственные числа $\{\lambda_K\}_1^\infty$ упорядочены по убыванию, причем каждое повторяется столько раз, какова его кратность. Соответственно собственным числам упорядочиваются и собственные функции $\{\psi_K\}_1^\infty$.

Доказательство: сначала докажем, что

$$\mathcal{E}(F_M, \mathcal{L}(\psi_1, \dots \psi_L), W) \leqslant M|\lambda_{L+1}|, \tag{2.22}$$

где

$$A\psi_K = \lambda_K \psi_K, \; K = 1, 2, \dots \tag{2.23}$$

В силу самосопряженности оператора A можно выбрать собственные функции $\{\psi_K\}_1^\infty$ ортонормированными, а собственные числа λ_K являются вещественными. Пусть $f \in F_M$. Для функции g, входящей в выражение (2.20), запишем ортогональное разложение:

$$g=\sum_{k=1}^{\infty} g_k \psi_k\,,\; g_k=(g,\psi_k) \qquad (2.24)$$

и соответствующее ему равенство Парсеваля

$$\|g\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|^2.$$

По теореме Гильберта-Шмидта /32/ имеем разложение

$$f=Ag=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k g_k \psi_k\,. \qquad (2.25)$$

Пользуясь формулой для погрешности аппроксимации отрезком ортогонального ряда /20/ получаем

$$E(f,\mathcal{L}(\psi_1,\ldots,\psi_L),W)=\Big(\sum_{k=L+1}^{\infty}\lambda_k^2|g_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda_{L+1}|\Big(\sum_{k=L+1}^{\infty}|g_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant|\lambda_{L+1}|\,\|g\|\leqslant M|\lambda_{L+1}|. \qquad (2.26)$$

В силу произвольности f из неравенства (2.26), беря $\sup$, сразу получаем оценку (2.22), далее по определению поперечника (2.I3)

$$d_L(F_M,W)\leqslant E(F_M,\mathcal{L}(\psi_1,\ldots,\psi_L),W)\leqslant$$
$$\leqslant M|\lambda_{L+1}|. \qquad (2.27)$$

Теперь докажем противоположное неравенство:

$$d_L(F_M,W)\geqslant M|\lambda_{L+1}| \qquad (2.28)$$

Пусть $\mathcal{L}_L$ - произвольное L -мерное подпространство W, $\{e_k\}_1^L$ - его ортонормированный базис. Поскольку в системе линейных уравнений относительно $\alpha_j,\ j=\overline{1,L}$

$$\sum_{j=1}^{L+1}\lambda_j\alpha_j(e_k,\psi_j)=0,\ k=\overline{1,L} \qquad (2.29)$$

неизвестных на единицу больше чем уравнений, то, полагая, например, $\alpha_{L+1}=1$ и находя остальные числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_L$ из уравнения (2.29), получим ненулевое решение $(\alpha_1',\ldots,\alpha_L',\alpha_{L+1}')$. Производя нормировку

$$\alpha_j = M\frac{\alpha_j'}{\left(\sum_{j=1}^{l+1}\alpha_j'^{2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

получим решение уравнения (2.29), для которого

$$\sum_{j=1}^{l+1}\alpha_j^2 = M^2. \tag{2.30}$$

Положим $g = \sum_{j=1}^{l+1}\alpha_j\varphi_j$. Из формулы (2.30) очевидно

$$\|g\| = \left(\sum_{j=1}^{l+1}\alpha_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = M. \tag{2.31}$$

Следовательно, функция

$$f = Ag = \sum_{k=1}^{l+1}\lambda_j\alpha_j e_k \in F_M, \tag{2.32}$$

причем, согласно уравнениям (2.29) и (2.32), получаем

$$(f, e_k) = 0, \quad k = \overline{1,l}. \tag{2.33}$$

Теперь для ортогональной аппроксимации

$$f \cong \sum_{k=1}^{l}(f, e_k)e_k$$

можно найти погрешность

$$E(f, \mathcal{L}(e_1, \dots, e_l), W) = \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{l}|(f, e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|f\| = \left(\sum_{j=1}^{l+1}\lambda_j^2\alpha_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant |\lambda_{l+1}|\left(\sum_{k=1}^{l+1}\alpha_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = M|\lambda_{l+1}|. \tag{2.34}$$

Беря $\sup$ от обеих частей (2.34), получаем

$$\mathcal{E}(F, \mathcal{L}(e_1, \dots, e_l), W) \geqslant M|\lambda_{l+1}|. \tag{2.35}$$

В силу произвольности пространства $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_l)$ беря $\inf$ от обеих частей (2.35), получаем неравенство (2.28). Из неравенства (2.28) и (2.27) следует уравнение (2.21). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии были рассмотрены теоретические основы и методы аппроксимации функций. Показано, как можно применять среднеквадратичную аппроксимацию для дискретного представления непрерывных процессов и оценки соответствующих погрешностей.

Теория аппроксимации функций и классов функций, теория дискретизации интенсивно развиваются. Из интересных разделов теории аппроксимации, не отраженных в данном пособии, следует особо отметить равномерную аппроксимацию /9-II/ , представление рядами /I5/ , сплайн-функции / 5,I3,29 / , интенсивно применяемые при обработке экспериментальных данных и численном решении уравнений математической физики.

В пособии рассматривалось дискретное представление набором вещественных чисел, т.е. дискретизация по аргументам. В ряде задач нужно учитывать и ограниченную длину двоичной разрядной сетки ЭВМ, т.е. представлять непрерывную функцию в виде набора двоичных переменных, отражающих квантование чисел по уравням /7,8,30/ . Соответствующая аппроксимация получила название д в о и ч н о й /23/. Для оценки погрешностей двоичного представления классов функций создана теория ε -энтропии /I9,8,2/ . Большое прикладное значение имеет также теория дискретного представления случайных функций /7,27/ . По теории и методам аппроксимации функций имеется ряд монографий и учебников /3,4,9-I2,I5-I8,2I,24,25,3I,33/ .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука, 1966. - 543 с.
2. Акаев А.А., Майоров С.А. Когерентные оптические вычислительные машины.-Л.:Машиностроение, 1977. - 440 с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы.Т.I.-М.:Наука, 1975. - 632 с.
4. Березин И.С., Жиндков Н.П. Методы вычислений. Т.I.-М.:Гос.изд. физ.мат.лит., 1962. - 464 с.
5. Василенко В.А.Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы.-Новосибирск.:Наука, 1983. - 216 с.
6. Веселов В.В., Гонтов Д.П., Пустыльников Л.М. Вариационный подход к задачам интерполяции физических полей.-М.:Наука, 1983.-120 с.
7. Величкин А.И. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений.-М.:Сов.радио, 1970. - 296 с.
8. Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулирования.-М.:Гос. изд.физ.-мат.лит., 1959. - 228 с.
9. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций.-Л.:ЛГУ, 1977.- 184 с.
10. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.-М.:Наука, 1977.- 512 с.
11. Ефимов А.В. Математический анализ: (спец.разделы). Ч.2.-М.:Высшая школа, 1980.
12. Жижков Н.П. Линейные аппроксимации функционалов.-М.:МГУ, 1977.- - 262 с.
13. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.А. Методы теории сплайн-функций.-М.:Наука, 1978.- 352 с.
14. Зелкин Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн.-М.:Сов.радио, 1980. - 296 с.
15. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов.-М.:Гос.изд. физ.-мат.лит., 1958. - 567 с.
16. Коллатц Л., Альбрехт Ю. Задачи по прикладной математике.-М.: Мир, 1978.- 168 с.
17. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений.-М.:Наука, 1978.-272 с.
18. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения.-М.: Наука, 1976. - 320 с.
19. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах.-Успехи матем. наук, 1959, т.14, вып. 2, с.3-86.
20. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М.:Наука, 1981.- 544 с.

21. Лоран П. Аппроксимация и оптимизация.-М.:Мир, 1975.- 496 с.
22. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Сплайн аппроксимация функций.-М.: Высшая школа, 1983. - 80 с.
23. Меньшиков Г.Г. Двоичная аппроксимация: Основы теории, применение к вопросам передачи сообщений.-Л.:ЛЭИС, 1968. - 160 с.
24. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений.-Киев:Наукова думка, 1980. - 352 с.
25. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения.-Киев:Наукова думка, 1969.
26. Рисс Ф.Б., Секефальди-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.-М.:Мир, 1979. - 588 с.
27. Сойфер В.А. Теория информации.-Куйбышев:КуАИ, 1977.- 80 с.
28. Сойфер В.А. Цифровая голография и ее применение.-Куйбышев:КуАИ, 1978. - 86 с.
29. Стечкин С.Б. Сплайны в вычислительной математике.-М.:Наука, 1976. - 248 с.
30. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики /Под ред.К.И.Бабенко.-М.:Наука, 1979. - 296 с.
31. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений.-М.:МГУ, 1976. - 304 с.
32. Треногин В.А. Функциональный анализ.-М.:Наука, 1980. - 496 с.
33. Хемминг Р.В. Численные методы.-М.:Наука, 1968. - 400 с.
34. Хургин А.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике.-М.:Наука, 1971. - 408 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ