

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

*В. Д. КУЗЕНКОВ*

# ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

*Учебное пособие*

КУЙБЫШЕВ 1990

УДК 621.372.542

*Цифровые методы спектрального анализа: Учеб. пособие/*  
В. Д. Кузенков; Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев,  
1990. 67 с.

Излагаются основы теории и алгоритмы оценки спектральной плотности мощности случайных процессов. Наиболее подробно рассматриваются метод периодограмм и метод оценивания на основе авторегрессионной модели.

Предназначено для студентов радиотехнических специальностей и слушателей факультета повышения квалификации.

Ил. 15. Библиогр.: 11 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Куйбышевского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С. П. Королёва

Рецензенты: В. А. Смагин, Ю. И. Чекин

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Спектральный анализ, как область знаний, имеет длительную историю своего развития. основополагающие идеи спектрального анализа были сформулированы еще в конце предшествующего и в начале текущего столетий. Однако современные методы спектрального анализа, основывающиеся на дискретном представлении анализируемых процессов, получили развитие начиная с 50—60-х годов. Крупным шагом вперед явилось открытие быстрого преобразования Фурье (1967 г.).

Проблемы спектрального анализа привлекают внимание многих ученых и инженеров и в настоящее время. Применение ЭВМ и микропроцессоров в качестве базы, позволяющей реализовать сложные алгоритмы обработки сигналов, создает дополнительный импульс в развитии теории и практики спектрального анализа.

Спектральный анализ находит применение во многих областях науки и техники, его значение для практики трудно переоценить. Этим обстоятельством обуславливается необходимость изучения основ спектрального анализа студентами, специализирующимися в области радиоэлектроники. Вместе с тем, сведения о современных методах спектрального анализа изложены преимущественно в статьях, опубликованных в периодической печати [2, 3, 9], а также монографиях [1, 5, 6, 7, 8] и не получили пока достаточного освещения в учебниках. Эти причины побудили автора к написанию настоящего учебного пособия.

Книга предназначена для студентов радиотехнических специальностей, а также для слушателей ФПКИ.

# 1. ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПОДХОДЫ К ЕЕ РЕШЕНИЮ

## 1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Спектральный анализ как средство анализа сигналов в частотной области находит применение в радиолокации, гидролокации, в системах передачи информации, в области обработки изображений, биомедицине, геофизике, радиоастрономии и других областях.

Цели спектрального анализа могут быть самыми разнообразными. Однако в большинстве практических случаев, независимо от конечной цели, применительно к случайным процессам задачей спектрального анализа является оценка спектральной плотности мощности  $\Phi(f)$  и, в частности, определение вида спектральной плотности мощности (СПМ), ширины спектра случайного процесса, положения и значений экстремумов функции  $\Phi(f)$ , обнаружение присутствия в сигнале детерминированных составляющих, например, периодических компонент с определенными параметрами.

В настоящем пособии изучаются цифровые методы спектрального оценивания дискретных случайных процессов.

Спектральный анализ может вестись в реальном времени, когда обработка отсчетов дискретного сигнала ведется в темпе их поступления на вход анализатора спектра и ретроспективно. В последнем случае реализации анализируемого процесса запоминаются на некотором промежуточном носителе (запоминающем устройстве ЭВМ, магнитной ленте и т. п.). Важными факторами, определяющими точность спектрального анализа, являются длина реализации (интервал наблюдения) и априорная информация об анализируемом процессе. На основании этой информации в некоторых случаях представляется возможным выбрать оптимальный в данном случае метод анализа.

В настоящее время разработано много различных методов спектрального анализа. Все известные методы можно разделить

на две основные группы: непараметрические и параметрические. *Непараметрические методы* характеризуются отсутствием каких-либо заранее заданных моделей в постановке задачи спектрального оценивания. В эту группу объединены несколько различных методов, среди которых метод узкополосной фильтрации и методы, использующие в той или иной форме Фурье-анализ дискретного случайного ряда. Метод узкополосной фильтрации реализуется с помощью гребенчатых цифровых фильтров. Весьма распространенными являются методы, основанные на дискретном преобразовании Фурье. Вычислительная эффективность этих методов обеспечивается использованием в них процедуры быстрого преобразования Фурье (БПФ).

К *параметрическим* относятся методы, в которых априори задается некоторая модель спектральной плотности и ставится задача оценки параметров модели на основании результатов наблюдения соответствующего процесса на ограниченном интервале времени.

Отметим, что в обеих из перечисленных групп имеются как прямые методы, позволяющие получить оценку СПМ по реализации случайного процесса непосредственно, так и косвенные, предполагающие вычисление СПМ на основе известной оценки автокорреляционной функции (АКФ).

Различие в подходах к оценке СПМ является следствием ряда обстоятельств. В частности, оптимальные оценки, формальное обоснование которых следует из статистической теории оценок, требуют больше информации, чем содержится ее в сигнале — поэтому такие оптимальные оценки отсутствуют. Известные же методы — эвристические. Они предложены авторами, которые исходили из «здравого смысла», и являются наилучшими или просто дающими удовлетворительные результаты только при соблюдении условий, для которых эти методы разработаны. Поэтому поиск универсального метода оценки СПМ, наилучшего во всех случаях, неправомочен. Более того, на практике однозначный выбор того или иного метода может оказаться затруднительным. Здесь большое значение приобретают опыт и эрудиция исследователя.

## 1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ СПМ

Формализованной моделью дискретного случайного процесса может служить индексированная последовательность случайных величин (чисел)  $x(n)$ . Для случайных сигналов индекс последовательности обычно ассоциируется со временем.

Случайный дискретный процесс можно рассматривать как последовательность отсчетов, полученную путем временной дис-

критизации аналогового процесса  $x_a(t)$  с некоторым шагом  $T$ :  $x(nT) = x_a(t)|_{t=nT}$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ . Для удобства записи формул часто принимают  $t' = t/T$  и пользуются нормализованным временем  $x(n)$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ . Мы будем пользоваться обеими формами записи аргумента функций времени без особого упоминания об этом, полагая, что эти случаи ясны из контекста.

Определение понятия спектра мощности дается в теории сигналов и линейных систем. Приведем кратко его суть. Обратимся сначала к детерминированному сигналу  $x(n)$ , обладающему конечной энергией  $E_c$ :

$$E_c = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty. \quad (1.1)$$

Комплексный (амплитудный) спектр такого сигнала  $X(jf)$  можно получить с помощью Фурье-преобразования

$$X(jf) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}. \quad (1.2)$$

Энергия сигнала во временной области равна энергии его преобразования Фурье в частотной области. Это утверждение следует из равенства Парсеваля

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(jf)|^2 df, \quad (1.3)$$

которое может рассматриваться в качестве одной из формулировок закона сохранения энергии. Из соотношения (1.3) следует, что квадрат модуля комплексного спектра  $|X(jf)|^2$  является мерой распределения энергии сигнала по частоте. Для сигналов, обладающих бесконечной энергией (к ним относятся многие не ограниченные во времени сигналы) эта мера распределения энергии не применима, так как для таких сигналов преобразование вида (1.2) не существует. В этом случае удобной характеристикой спектра является частотное распределение мощности (средней по времени плотности энергии  $\Phi(f)$ ):

$$\Phi(f) = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N_c + 1} \left| \sum_{n=-N_c}^{N_c} x(n)e^{-j2\pi fn} \right|^2 \right\}, \quad (1.4)$$

где  $N_c$  — длительность дискретного сигнала, выраженная через количество отсчетов.

Выше мы предполагали, что  $x(n)$  — детерминированный сигнал. В определении спектра мощности случайных сигналов по (1.4) возникают дополнительные трудности, которые связа-

ны с тем, что интегральная сумма в правой части выражений (1.4) не сходится в любом статистическом смысле. Иными словами, для случайных сигналов дисперсия оценки СПМ по (1.4) не будет стремиться к нулю при неограниченном увеличении интервала усреднения по времени  $(-N_c, N_c)$ . При определении по множеству реализации СПМ (1.4) будет изменяться от реализации к реализации случайным образом, поэтому для получения устойчивой характеристики СПМ необходимо ввести дополнительно операцию статистического усреднения

$$\Phi(j) = \lim_{N_c \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N_c + 1} \left| \sum_{i=-N_c}^{N_c} x(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2 \right\}, \quad (1.5)$$

где  $E(\cdot)$  — операция математического ожидания — усреднение по ансамблю реализаций.

Формула (1.5) выражает сущность понятия СПМ случайного процесса: это мера распределения по частоте усредненной по ансамблю реализаций мощности процесса или, что то же самое, усредненной по времени и по множеству плотности энергии. Таким образом, СПМ является усредненной характеристикой случайного процесса в частотной области. Во временной области подробной характеристикой является АКФ. Обе характеристики взаимосвязаны. В самом деле, изменим в (1.5) порядок выполнения операций статистического усреднения и суммирования. Тогда

$$\Phi(j) = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{1}{2N_c + 1} \sum_{n_1=-N_c}^{N_c} \sum_{n_2=-N_c}^{N_c} E \{x(n_1) x(n_2)\} e^{-j2\pi f(n_2-n_1)} \quad (1.6)$$

Нетрудно заметить, что в (1.6) среднее произведение

$$E \{x(n_1) x(n_2)\} = R(n_1, n_2) \quad (1.7)$$

представляет собой АКФ процесса  $x(n)$ . Здесь и ниже мы полагаем, если не оговариваем особо, что случайные процессы центрированы, т. е. имеют нулевое среднее. Предположим, кроме того, что процесс  $x(n)$  стационарный (в широком смысле) и эргодический. Примем  $n_1 = n$ ,  $n_2 = n + m$  и учтем, что функция автокорреляции эргодического процесса зависит только от временного сдвига  $m = n_2 - n_1$ :

$$R(n, n + m) = R(m). \quad (1.8)$$

С учетом (1.7) и (1.8) запишем формулу (1.6) в виде

$$\Phi(j) = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{1}{2N_c + 1} \sum_{m=-N_c}^{N_c} R(m) e^{-j2\pi f m} \sum_{n=-N_c}^{N_c} 1.$$

Имея в виду, что для эргодического процесса выполняется условие  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) < \infty$ , получим

$$\Phi(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) e^{-j2\pi f m} . \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) — это известное в теории случайных процессов преобразование Винера-Хинчина. Существует также обратное преобразование

$$R(m) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi(f) e^{j2\pi f m} df . \quad (1.10)$$

Преобразование Винера-Хинчина указывает на возможность получения оценки СПМ стационарных случайных процессов методами, в которых основой спектрального анализа становится не сам случайный процесс, а его АФК. Вместе с тем, следует указать на необходимость проявлять осторожность в использовании преобразования (1.9) для вычисления оценок СПМ по оценкам АКФ, полученным на основе реализаций процессов ограниченной длительности. Возникающие при этом особенности рассматриваются в п. 2.3.

### 1.3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОЦЕНОК

Часто в различных случаях используется подход, в котором реальный сигнал представляется некоторой моделью, более или менее правдоподобно описывающей соответствующий сигнал. При моделировании случайных сигналов часто возникает необходимость оценить моменты случайного процесса по единственной выборочной последовательности  $x(n)$ , которая является наблюдаемой реализацией сигнала. Далее будем считать, что наблюдаемая реализация имеет ограниченную длительность  $x(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ .

Рассматриваемая задача может быть решена только для эргодических случайных процессов, у которых вероятностные средние (средние по множеству) равны средним по времени. Для таких процессов принципиально можно вычислить оценки различных требуемых средних значений (моментов) по конечному отрезку выборочной последовательности  $x(n)$ . Эти оценки будут случайными величинами и, естественно, отличаются от истинных средних (матожиданий). Ясно, что такие оценки имеют практическую значимость только в случае, если удовлетворяют определенным требованиям точности. Практически используется несколько критериев, характеризующих качество оценок, к которым относятся смещение, дисперсия, эффективность и состоятельность. Рассмотрим сущность этих критериев.

Пусть  $\alpha$  — истинное значение параметра и  $\hat{\alpha}$  — его оценка. Под *смещением оценки*  $c_{\hat{\alpha}}$  понимают разность между истинным значением параметра и средним значением (матожиданием) оценки:  $c_{\hat{\alpha}} = \alpha - E(\hat{\alpha})$ . Несмещенной называется оценка, у которой соответственно смещение равно нулю, т. е. среднее значение оценки в точности равно величине оцениваемого параметра.

Под *дисперсией оценки* понимают средний квадрат разности оценки и ее матожидания:

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = E \{[\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})]^2\}. \quad (1.11)$$

Малая величина дисперсии означает, что случайные значения оценки  $\hat{\alpha}$  сконцентрированы в окрестности своего среднего значения, которое, однако, будет совпадать с истинным значением оцениваемого параметра только в случае, если оценка несмещенная. Сравнение качества оценок на основе смещения и дисперсии осложняется в тех случаях, когда оценка, обладающая малой дисперсией, имеет большое смещение и наоборот. Поэтому используется *критерий качества*, учитывающий совместно и дисперсию, и смещение. Такой критерий можно обосновать на среднеквадратической ошибке

$$E \{|\hat{\alpha} - \alpha|^2\} = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 + c_{\hat{\alpha}}^2. \quad (1.12)$$

Оценка называется *эффективной*, если среднеквадратическая ошибка (1.12) этой оценки меньше, чем среднеквадратическая ошибка любой другой оценки при условии, что объем выборки  $N$  остается неизменным. Оценка называется *состоятельной*, если при увеличении объема выборки  $N$  вероятность сколько угодно малых отклонений оценки  $\hat{\alpha}$  от истинной величины оцениваемого параметра  $\alpha$  стремится к нулю:  $\lim_{N \rightarrow \infty} P \{|\hat{\alpha} - \alpha|\} = 0$ . Среднеквадратическая ошибка состоятельной оценки асимптотически (при  $N \rightarrow \infty$ ) приближается к нулю.

#### 1.4. ОЦЕНКИ АКФ

Как уже отмечалось, АКФ может составить основу для получения оценок СПМ. На практике, однако, во многих случаях АКФ не известна и возникает задача ее оценки. Рассмотрим

возможные подходы к решению этой задачи и свойства получаемых при этом оценок АКФ.

Для аналогового эргодического случайного процесса статистическую (т. е. «точную») АКФ можно получить, заменив в (1.7) усреднение по множеству реализаций усреднением по времени:

$$R(\tau) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_p} \int_{-T_p}^{T_p} x(t+\tau)x^*(t)dt. \quad (1.13)$$

Здесь  $T_p$  — длительность реализации, \* — знак комплексно сопряженной величины. Выражение (1.13) можно использовать в качестве основы для получения АКФ дискретной последовательности  $x(n)$ ,  $n=0, \dots, N-1$ . Однако в этом случае вследствие конечной длины реализации  $N$  при усреднении по времени невозможно использовать предельный переход, и вместо точной АКФ можно получить только ее оценку. При конечном наборе данных объема  $N$  эта оценка имеет вид

$$\widehat{R}_{\text{нс}}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n+m)x^*(n). \quad (1.14)$$

Графическая интерпретация временных соотношений, имеющих место при вычислении (1.14), показана на рис. 1.1.

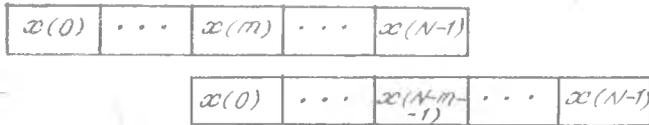


Рис. 1.1. Графическая интерпретация временных соотношений при оценке АКФ

Рассмотрим качественные характеристики оценки (1.14). Оценка  $\widehat{R}_{\text{нс}}(m)$  — несмещенная: матожидание этой оценки совпадает с ее истинным значением. В самом деле, для матожидания оценки можно написать

$$E\{\widehat{R}_{\text{нс}}(m)\} = \frac{1}{N-|m|} E\left\{ \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n+m)x^*(n) \right\}. \quad (1.15)$$

Заменив в правой части (1.15) порядок суммирования и усреднения, и учитывая (1.7), получим

$$E\{\widehat{R}_{\text{нс}}(m)\} = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{x(n+m)x^*(n)\} =$$

$$= \frac{1}{N-|m|} R(m) \sum_{n=0}^{N-|m|-1} 1 = R(m). \quad (1.16)$$

При больших значениях аргумента  $m$ , когда  $m$  того же порядка, что и  $N$ , то, как видно из рис. 1.1, последовательности  $x^*(n)$  и  $x(n+m)$  перекрываются на малом интервале. В таких случаях имеется только небольшое число точек для вычисления суммы в (1.14). С другой стороны, разность  $N-|m|$  становится малой. По этим причинам при приближении сдвига  $m$  к длине выборки  $N$  дисперсия оценки увеличивается, становится очень большой, и такая оценка оказывается бесполезной.

В качестве второго подхода рассмотрим оценку АКФ в виде

$$\widehat{R}_c(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n+m)x^*(n). \quad (1.17)$$

Эта оценка отличается от предшествующей только множителем перед суммой. Оценка (1.17) имеет меньшую дисперсию по сравнению с оценкой (1.5) при  $m \rightarrow N$ . Вместе с тем, оценка  $\widehat{R}_c(m)$  оказывается смещенной. В самом деле, выполнив выкладки, подобные (1.6), получим

$$E\{\widehat{R}_c(m)\} = \frac{1}{N} E\left\{ \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n+m)x^*(n) \right\} = \frac{N-|m|}{N} R(m). \quad (1.18)$$

Как видно из (1.18), при  $m \rightarrow N$  матожидание оценки  $E\{\widehat{R}_c(m)\} \rightarrow 0$ , в то время как истинное значение АКФ составляет  $R(m)$ . Следовательно, в случае  $m \rightarrow N$  смещение оценки  $\widehat{R}_c(m)$  равно ее матожиданию.

Так как при больших  $m$  смещение оценки сравнимо со значением самой функции, которое оценивается, то эта оценка также оказывается неприемлемой при  $m$  порядка  $N$ .

Практический выход в этой ситуации состоит в использовании выборок случайного процесса достаточно большого объема с тем, чтобы обеспечивалось выполнение условия  $m \ll N$ . В самом деле, если зафиксировать задержку  $m$  и увеличивать длину выборки  $N$ , то, как можно видеть, с увеличением  $N$  дисперсия несмещенной оценки уменьшается. Для смещенной оценки как смещение, так и дисперсия уменьшаются с увеличением  $N$ . Некоторые исследователи утверждают, что в ряде случаев среднеквадратическая ошибка (учитывающая и дисперсию, и смещение) у смещенной оценки меньше, чем у несмещенной. Однако асимптотически (при  $N \rightarrow \infty$ ) обе оценки не смещены и

состоятельны, поэтому в общем случае можно добиться улучшения оценки АКФ дискретной последовательности за счет увеличения длины выборки.

Увеличение объема выборки влечет соответствующее увеличение числа арифметических операций (сложения и умножения), необходимых для вычисления  $\tilde{R}(m)$  в каждой точке  $m=0,1,\dots,m_{\text{макс}}$ . При больших значениях  $N$  эффективность вычисления АКФ может быть повышена за счет применения «быстрых» алгоритмов, основанных на использовании БПФ.

### 1.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНОК АКФ С ПОМОЩЬЮ БПФ

В теории дискретного преобразования Фурье (ДПФ) известна теорема о свертке [1, 4, 6], которая указывает на метод вычисления свертки дискретных последовательностей в частотной области. Теорема гласит, что если заданы две дискретные последовательности  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ ,  $n=0, \dots, N-1$  и определены их ДПФ

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \\ X_2(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

то третья последовательность  $y(n)$ ,  $n=0, \dots, N-1$ , ДПФ которой равно произведению

$$Y(k) = X_1(k) X_2(k), \quad (1.20)$$

представляет собой свертку вида

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m). \quad (1.21)$$

Как видно, алгоритм вычисления свертки в частотной области состоит из следующих шагов: определение ДПФ (1.19), получение произведения (1.20) и вычисление обратного ДПФ

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j(2\pi/N)nk}, \quad n=0, \dots, N-1. \quad (1.22)$$

В этом алгоритме операции (1.19) и (1.22) выполняются с помощью БПФ, благодаря чему обеспечивается вычислительная эффективность алгоритма. Важная особенность метода состоит в том, что получаемая таким образом свертка (1.21) является круговой (периодической), в то время как в большинстве практических случаев интерес представляет линейная свертка.

Для обеспечения адекватности линейной и круговой сверток необходима на первом шаге алгоритма предварительная модификация свертываемых последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , которая состоит в пополнении последних нулевыми отсчетами до длины  $L \geq 2N - 1$ .

Покажем, что приведенный метод можно использовать также для вычисления оценок АКФ. Рассмотрим оценку

$$\hat{R}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n) x(n+m), \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad (1.23)$$

где  $M < N$ . Так как функция автокорреляции  $R(m) = R(-m)$  четная (для действительных процессов), то вычисление  $\hat{R}(m)$  можно выполнять только для положительных значений  $m$ .

Ключом к пониманию применимости свертки в частотной области на основе БПФ при расчете АКФ  $R(m)$  является то, что АКФ (1.23) является дискретной сверткой последовательности  $x(n)$  с инверсной последовательностью  $x(-n)$ . Таким образом, если вычислить ДПФ от  $x(n)$ , затем умножить его на комплексно сопряженный дискретный спектр  $X^*(k)$ , то обратное ДПФ от произведения  $X(k)X^*(k) = |X(k)|^2$  соответствует круговой свертке последовательности  $x(n)$  с инверсной последовательностью  $x(-n)$ , т. е. круговой корреляции.

Для обеспечения тождественности линейной и круговой (на одном периоде) функций корреляции, как и в свертке, исходная последовательность  $x(n)$  пополняется нулевыми отсчетами. Однако при этом имеется особенность, которая состоит в следующем. Выше отмечалось, что для обеспечения эффективности оценок  $\hat{R}(m)$ , значения аргумента АКФ должны находиться в интервале  $m=0, \dots, M-1$ , удовлетворяющем условию  $M \ll N$ . Нетрудно заметить, что при этом условии нет необходимости добиваться тождественности линейной и круговой функций корреляции на всем периоде последней. Достаточно, чтобы только  $M$  точек круговой АКФ были верными, т. е. имели значения, совпадающие с соответствующими отсчетами линейной АКФ. Такое условие выполняется, если модифицированная (дополненная нулевыми отсчетами) последовательность  $x(n)$  имеет длину  $L \geq N + M - 1$  отсчетов, из которых  $M - 1$  нулевые.

Для лучшего понимания вопроса заметим, что в случае, когда последовательности нулями не пополняются, только один отсчет круговой функции корреляции совпадает с одним отсчетом линейной АКФ (при  $m=0$ ). Пополнение последовательности  $x(n)$  одним нулевым отсчетом приводит к тому, что в круговой АКФ три отсчета  $R(-1)$ ,  $R(0)$ ,  $R(1)$  становятся верными, при двух нулях — 5 отсчетов  $R(-2)$ ,  $R(-1)$ ,  $R(0)$ ,  $R(1)$ ,  $R(2)$  верные и т. д. Очевидно, что для получения  $M$  верных отсчетов

$R(m)$  при положительных значениях аргумента  $m \geq 0$  достаточно пополнить последовательность  $x(n)$   $M-1$  нулями.

Алгоритм вычисления АКФ с помощью БПФ состоит из 4-х шагов.

1. Формирование  $L$ -точечной последовательности путем добавления к исходной  $N$ -точечной последовательности  $M-1$  нулей или более, если это необходимо для реализации алгоритма БПФ. При использовании БПФ по основанию 2 должно выполняться условие  $L=2^l$ , где  $l$  — целое число.

2. Вычисление  $L$ -точечного ДПФ:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j(2\pi/L)nk}, \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (1.24)$$

3. Вычисление  $L$ -точечного обратного ДПФ:

$$v(m) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |X(k)|^2 e^{j(2\pi/L)mk}, \quad m = 0, \dots, L-1. \quad (1.25)$$

4. Определение АКФ:

$$R(m) = \frac{1}{N} \tau(m), \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (1.26)$$

На последнем шаге алгоритма используются только  $M$  из  $L$  отсчетов последовательности  $v(m)$ .

При вычислении АКФ прямым способом (1.23) количество арифметических операций (умножений) пропорционально  $MN$ . Нетрудно показать, что в процедуре вычисления АКФ с помощью БПФ количество операций пропорционально  $L \log L = (N+M) \log(N+M)$ . Описанный алгоритм вычисления АКФ в частотной области обеспечивает по сравнению с прямым способом экономию в количестве арифметических операций при  $L > 40$  [7].

При условии  $M \ll N$  может использоваться секционирование АКФ, принципы которого подобны известным методам секционирования свертки. Особенности этих методов описаны в литературе [6, 7].

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит сущность понятия спектральной плотности мощности?

2. Каковы особенности получения устойчивой оценки СПМ?

3. Как определяется связь СПМ и АКФ случайного процесса?

4. В чем сущность понятий смещение, дисперсия, эффективность и состоятельность оценок?

5. Какие существуют два метода вычисления оценки АКФ и в чем их особенности?
6. Какова основа вычисления оценки АКФ с помощью БПФ?
7. Воспроизведите алгоритм вычисления оценки АКФ с помощью БПФ. В чем особенности этого алгоритма?

## 2. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

### 2.1. МЕТОД УЗКОПОЛОСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Как отмечалось, в классе непараметрических методов нет принципиальной необходимости в выборе априори некоторой модели спектральной плотности. Это, конечно, не означает, что априорная информация о свойствах анализируемого процесса полностью игнорируется. Учет ее позволяет правильно сформулировать требования к спектральному анализатору и обоснованно выбрать метод анализа.

Основой метода узкополосной фильтрации является выделение с помощью частотно-избирательных фильтров составляющих спектра анализируемого процесса, принадлежащих некоторому достаточно малому интервалу частот. Поясним сущность метода на примере структурной схемы одного канала цифрового анализатора спектра (рис. 2.1).



Рис. 2.1. Структурная схема одного канала цифрового анализатора спектра; 1 — узкополосный цифровой фильтр, 2 — квадратичный преобразователь, 3 — сумматор, 4 — блок усреднения по ансамблю реализаций

Рассмотрим для простоты идеальный случай, когда узкополосный фильтр обладает идеальной П-образной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) с центральной частотой  $f_0$  и полосой пропускания  $\Delta f$ . Для АЧХ такого фильтра можно записать

$$|H(e^{j2\pi f})| = \begin{cases} 1 & \text{при } f_0 - \Delta f/2 \leq f \leq f_0 + \Delta f/2 \\ 0 & \text{при других частотах.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Импульсная характеристика фильтра  $h(f_0, n)$  связана, как известно, с частотной характеристикой обратным Фурье-преобразованием

$$h(f_0, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.2)$$

С помощью преобразования (2.2) для импульсной характеристики фильтра (2.1) нетрудно получить

$$h(f_0, n) = \frac{\sin \Delta f n}{\pi n} \cos 2\pi f_0 n, \quad (2.3)$$

здесь параметр  $f_0$  означает частоту настройки фильтра. Импульсная характеристика (2.3), вообще говоря, физически не реализуема, однако при изучении принципов мы это вполне можем допустить.

Пусть на вход цифрового фильтра поступает некоторая  $i$ -я реализация анализируемого процесса  $x_i(n)$ . В фильтре выполняется операция свертки

$$y_i(f_0, n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_i(m) h(f_0, n-m) \quad (2.4)$$

$i$ -й реализации процесса  $x_i(n)$  с импульсной характеристикой  $h(f_0, n)$ . Ясно, что отсчеты выходного сигнала  $y_i(f_0, n)$  — это временная последовательность. Однако мощность этой последовательности характеризует мощность спектральных компонент процесса  $x(n)$ , попадающих в полосу прозрачности АЧХ (2.1).

В результате операций квадрирования и усреднения по времени (на интервале  $N$  отсчетов) получим величину

$$z_i(f_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_i^2(n), \quad (2.5)$$

пропорциональную мощности упомянутых частотных составляющих  $i$ -й реализации процесса  $x(n)$ .

Выполнив операцию усреднения по ансамблю реализаций и учитывая значение полосы пропускания фильтра, получим оценку спектральной плотности мощности в виде

$$\hat{\Phi}(f) \Big|_{f=f_0} = \frac{1}{L\Delta f} \sum_{i=1}^L z_i(f_0). \quad (2.6)$$

Как видно из выражения (2.6), значение аргумента в спектральной плотности отождествляется с номинальным значением центральной частоты АЧХ фильтра. Анализаторы спектра, выполненные на основе узкополосных фильтров, могут быть одноканальными и многоканальными. В первом случае полосовой фильтр должен быть перестраиваемым в пределах рабочего диапазона частот анализатора. Во втором случае фильтрующая

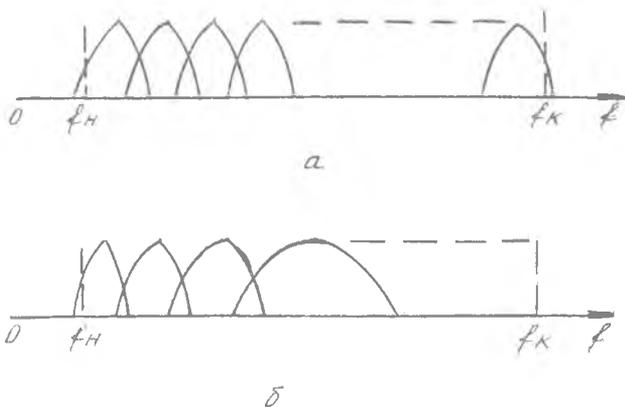


Рис. 2.2. Характеристики гребенчатых фильтров

система анализатора образует гребенку настроенных встык фильтров (рис. 2.2,а). Ясно, что в многополосном анализаторе производительность анализа увеличивается за счет ухудшения массогабаритных и экономических показателей. Заметим, что в многоканальном анализаторе часто выбирают постоянной относительную широкополосность фильтров  $\Delta f_k / f_k = \text{const}$ , при этом количество фильтров в гребенке уменьшается (рис. 2.2,б).

Основные параметры анализатора спектра, такие как разрешение по частоте, точность определяются в значительной мере характеристиками избирательности и динамическими характеристиками фильтров.

Как отмечалось, фильтры с идеальной П-образной АЧХ вида (2.1) и импульсной характеристикой (2.3) физически не реализуемы, поэтому используются известные аппроксимации характеристик фильтров по Баттерворду, Чебышеву или Кауэру. На практике анализаторы спектра рассматриваемого вида используются также для анализа нестационарных случайных процессов.

Следует отметить, что определение изменяющегося во времени энергетического спектра нестационарного случайного процесса приводит к противоречивым требованиям к полосе пропускания фильтра. С одной стороны, требуется, чтобы ширина полосы была узкой в соответствии с заданным частотным разрешением (в пределе  $\Delta f \rightarrow 0$ ). С другой стороны, полоса должна быть достаточно широкой для сохранения характера изменения полезной составляющей процесса. В таких условиях помимо частотных имеют также значение временные характеристики

фильтров. Для сокращения длительности переходных процессов и уменьшения связанных с ними ошибок требуются фильтры с короткими (быстрозатухающими) импульсными характеристиками. Из формул (2.1), (2.3) видно, что требования обеспечения П-образного вида АЧХ и быстрозатухающей импульсной характеристики противоречивы. Укорочение длительности импульсной характеристики практически возможно за счет ухудшения разрешения по частоте. Заметим, что наименьшим произведением  $\Delta f_{\text{ф}} \tau_{\text{иХ}}$ , где  $\tau_{\text{иХ}}$  — длина импульсной характеристики (по некоторому уровню), обладают фильтры Бесселя. Однако у них невысокий коэффициент прямоугольности АЧХ.

Цифровые фильтры анализатора спектра обычно реализуют по каскадной форме. В качестве каскадов берут звенья — рекурсивные фильтры второго порядка. Расчет фильтров ведут по аналоговому прототипу. При преобразовании аналогового фильтра-прототипа в цифровой приемлемые результаты можно получить на основе метода билинейного преобразования. Изложение особенностей, связанных с проектированием цифровых анализаторов, реализующих метод узкополосной фильтрации, выходит за рамки настоящего пособия. Сведения по этому вопросу можно найти, например, в работе [5].

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается принцип метода узкополосной фильтрации для оценки СПМ?
2. Каковы особенности метода, если процесс нестационарный?

## 2.2 СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Интегральное преобразование Фурье, как известно, имеет фундаментальное значение в теории гармонического анализа аналоговых сигналов. Применительно к дискретным сигналам подобную роль выполняет ДПФ. В цифровом спектральном анализе существуют методы, непосредственно реализующие Фурье-анализ. К таким методам относится метод периодограмм и его модификации. Вычислительная эффективность таких методов обеспечивается благодаря использованию в них алгоритма БПФ.

### 2.2.1. Частотно-избирательные свойства ДПФ

Во многих случаях спектральный анализ сигналов осуществляется с помощью частотно-избирательных фильтров. Для понимания сути методов спектрального оценивания на основе ДПФ полезно проследить общность дискретного Фурье-анализа и частотно-избирательной фильтрации сигналов.

Как известно, алгоритм ДПФ по роду своего действия подобен многополосному частотно-избирательному цифровому фильтру (ЦФ) [4, 6, 7]. В самом деле, обратившись к  $N$ -точечному ДПФ

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k=0, \dots, N-1, \quad (2.7)$$

замечаем, что переменная  $k=0, \dots, N-1$  имеет смысл целочисленной безразмерной частоты  $k=f_k/F$ , где  $f_k=kF$  — дискретная частота,  $F=1/(NT)$  — шаг дискретизации по частоте,  $T$  — шаг дискретизации по времени.

Как можно видеть,  $N$ -точечному ДПФ (2.7) можно поставить в соответствие эквивалентный ему  $N$ -канальный нерекурсивный (КИХ) ЦФ, импульсная характеристика  $k$ -го канала ( $k=0, \dots, N-1$ ) которого описывается выражением

$$h_k(n) = e^{j(2\pi/N)nk}, \quad n=0, \dots, N-1. \quad (2.8)$$

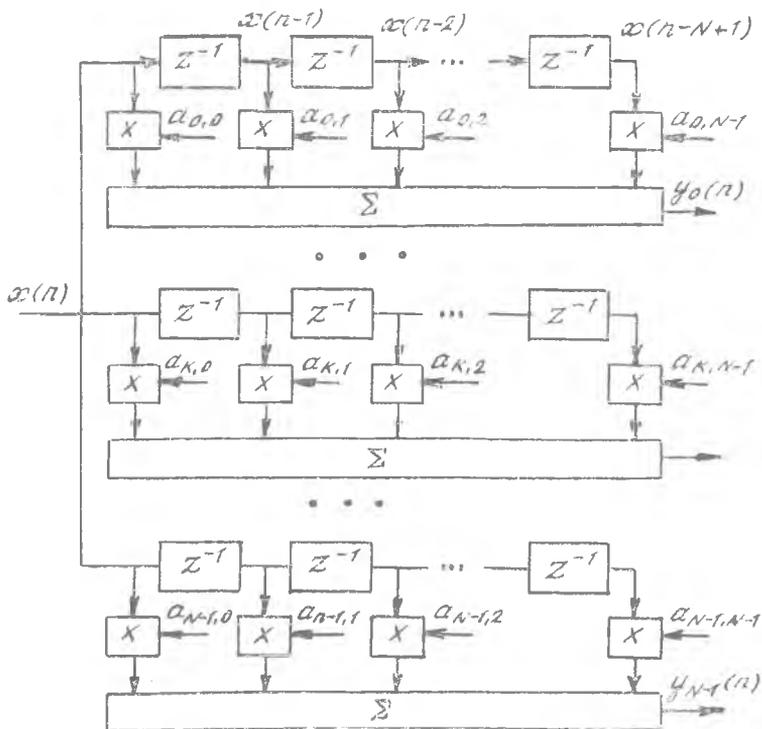


Рис. 2.3. Структурная схема многоканального ЦФ эквивалентного ДПФ

Структурная схема такого ЦФ представлена на рис. 2.3. На схеме учтено, что коэффициенты нерекурсивного ЦФ численно равны отсчетам его импульсной характеристики:  $a_k(n) = h_k(n)$ . Выход  $k$ -го канала этого ЦФ определяется сверткой вида

$$y_k(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) h_k(m-n). \quad (2.9)$$

Подставим выражение (2.8) в (2.9) и рассмотрим выходной сигнал фильтра в момент времени  $m=N$ :

$$\begin{aligned} y_k(N) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j(2\pi/N)(N-n)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j2\pi k} e^{-j(2\pi/N)nk}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Учитывая, что  $e^{j2\pi k} = 1$ , получаем

$$y_k(N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (2.11)$$

Сравнение выражений (2.7), (2.11) показывает, что величины множества отсчетов ДПФ  $X(k)$ ,  $k=0, \dots, N-1$  совпадают с величинами совокупности выходных отсчетов в каналах многополосного нерекурсивного ЦФ  $y_k(N)$ ,  $k=0, \dots, N-1$  при соответствующих значениях аргумента (времени)  $n \geq N$ . В этом состоит эквивалентность ДПФ и ЦФ. Разумеется, коэффициенты ЦФ должны быть выбраны при этом упомянутым образом.

Важнейшим параметром любого анализатора спектра является его частотное разрешение. К оценке избирательных свойств ДПФ возможен различный подход. Один из них основан на анализе частотных характеристик эквивалентного ЦФ.

Определив Фурье-преобразование

$$H_k(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n) e^{-j\omega n}, \quad k=0, \dots, N-1 \quad (2.12)$$

импульсной характеристики фильтра (2.8) и вычислив затем модуль  $|H_k(e^{j\omega})|$ , нетрудно получить выражение для АЧХ ЦФ в виде

$$\left| H_k(e^{j\omega}) \right| = \left| \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2 - nk/N)} \right|. \quad (2.13)$$

Графики АЧХ, построенные в соответствии с (2.13), приведены для одного канала ( $N=8$ ,  $k=4$ ) на рис. 2.4,а, для всей совокупности каналов — на рис. 2.4,б (в последнем случае по-

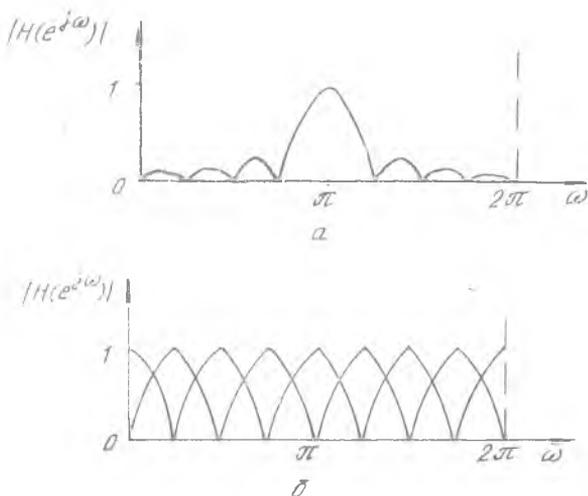


Рис. 2.4. АЧХ эквивалентного ЦФ

казаны только главные лепестки АЧХ). Как видно из этих графиков, а также из выражения (2.13), эквивалентный фильтр является полосовым гребенчатым. Число каналов равно размеру ДПФ  $N$ , центральные частоты полос прозрачности  $\omega_k = 2\pi k/N$ , а ширина этих полос по первым нулям  $\Delta\omega = \pi/N$ . Разрешающую способность такого гребенчатого фильтра логично определить шириной полосы по уровню пересечения АЧХ соседних каналов. Нетрудно заметить, что этим фильтрам присуща лепестковость АЧХ, следствием которой является весьма нежелательный эффект «растекания» или «утечки». Через боковые лепестки АЧХ энергия сигнала, спектр которого находится вне полосы главного лепестка некоторого канала, может проникать в этот канал и вызывать фиксацию несуществующей составляющей в спектре анализируемого сигнала. Явление утечки можно рассматривать как межканальную помеху, ухудшающую частотное разрешение.

Можно показать, что такого рода искажения спектра обусловлены ограничением длительности реализаций сигнала, используемых в спектральном анализе на основе ДПФ. В самом деле, пусть дискретный процесс, спектральную плотность которого необходимо оценить, имеет неограниченную длительность и задан на интервале от  $-\infty$  до некоторого текущего значения времени  $n$  (рис. 2.5, а). В алгоритме БПФ используется, однако, выборка конечной длины  $N$ , включающая в себя отсчеты, принадлежащие текущему и предшествующим значениям аргумента:  $x(n)$ ,  $x(n-1)$ , ...,  $x(n-N+1)$ . Выделение выборки

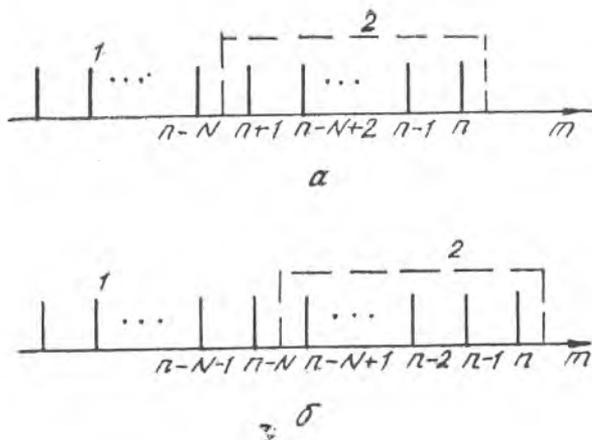


Рис. 2.5. Взвешивание последовательности данных временным окном: а — в предшествующем такте времени; б — в последующем такте; 1 — отсчеты процесса, 2 — огибающая прямоугольного окна

конечной длины можно рассматривать как умножение исходной последовательности на некоторую вспомогательную детерминированную последовательность, имеющую длину  $N$  отсчетов;  $w(n)$ ,  $n=0, \dots, N-1$ . Эту последовательность обычно называют *временным окном* или *весовой* (оконой) *функцией*, а саму операцию умножения — *взвешиванием временным окном*. В результате взвешивания в анализируемую последовательность  $x(n)$  вносятся искажения вполне определенного характера: отсчеты этой последовательности, не попадающие во временное окно, полагаются тождественно равными нулю независимо от их действительных значений. Такое искажение анализируемой последовательности  $x(n)$  приводит к соответствующим искажениям спектра.

Влияние взвешивания можно определить, если воспользоваться известной в теории преобразования Фурье теоремой о спектре произведения двух временных функций. Согласно этой теореме комплексный спектр произведения двух функций равен свертке их спектров:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\Omega}) W(e^{j(\omega-\Omega)}) d\Omega, \quad (2.14)$$

где  $X(e^{j\omega})$  — комплексный спектр взвешенной последовательности;

$X_n(e^{j\omega})$  — «истинный» спектр сигнала;

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\omega n} \quad (2.15)$$

спектр временного окна.

Простому усечению анализируемой последовательности соответствует взвешивание прямоугольным окном

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \dots, N-1, \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases} \quad (2.16)$$

Используя формулы (2.15), (2.16), для комплексного спектра прямоугольного окна можно получить

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j\omega}} = \\ &= \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Амплитудный спектр прямоугольного окна  $|W(e^{j\omega})| = \sin(\omega N/2)/\sin(\omega/2)$  имеет высокий уровень боковых лепестков (рис. 2.6, а). Лепестковость АЧХ прямоугольного окна и является причиной искажения спектра из-за ограничения длины реализаций сигнала.

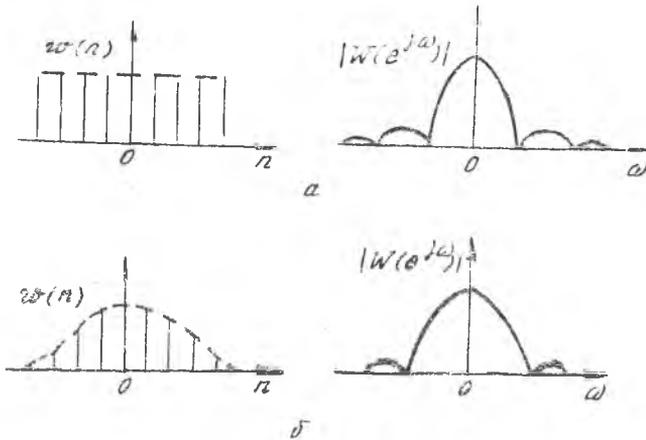


Рис. 2.6. Оконные функции и их амплитудные спектры

Существует возможность уменьшения влияния рассмотренного явления, которая заключается в использовании временных окон специальной формы. Эти окна, в отличие от прямоугольного, являются гладкими функциями, с амплитудой, плавно

нарастающей в начале и спадающей в конце окна. Спектры таких окон имеют существенно меньшие боковые лепестки.

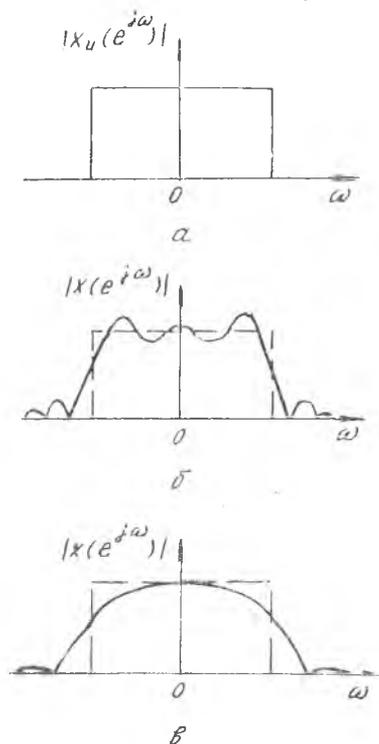


Рис. 2.7. Амплитудные спектры сигналов

основного лепестка АЧХ при взвешивании частотное разрешение, строго говоря, ухудшается. Однако вследствие подавления боковых лепестков и связанного с ним явления растекания, которое, как понятно, затрудняет разрешение сигналов в соседних каналах, практически разрешающая способность БПФ улучшается. Так как длительность взвешенных реализаций анализируемых сигналов равна длительности временного окна, то частотное разрешение ДПФ определяется длиной и формой временного окна  $w(n)$ .

К виду временного окна предъявляются противоречивые требования: малый уровень лепестков в спектре, малое расширение истинного спектра при взвешивании, простота реализации. В настоящее время предложено весьма большое количество

Примерный вид временного окна специальной формы и его амплитудного спектра показан на рис. 2.6,б. Различия взвешивания сигнала прямоугольным и специальным окнами показаны на рис. 2.7: амплитудный спектр исходного сигнала, который условно полагается П-образным (рис. 2.7,а), спектр сигнала взвешенного прямоугольным окном (рис. 2.7,б), спектр, образующийся в результате взвешивания специальным окном (рис. 2.7,в).

Взвешивание сигнала специальным окном приводит к сглаживанию истинного спектра; в этом спектре устраняются резкие переходы, а также происходит некоторое расширение основного лепестка спектра несколько большее по сравнению со случаем прямоугольного окна. Однако боковые лепестки при таком взвешивании имеют весьма малый уровень (в соответствии с величиной лепестков в спектре окна). Применение специальных окон уменьшает влияние явления растекания. За счет расширения

во различных окон. Наиболее полный обзор оконных функций приведен в работе [10], справочные данные по некоторым функциям — в работе [1].

Рассмотрим особенности использования алгоритма БПФ при спектральном анализе развивающихся во времени дискретных процессов. Ясно, что в каждом такте дискретного времени временное окно смещается на одну позицию в сторону возрастания времени (см. рис. 2.5,б). При этом состав выборки изменяется на один отсчет: место первого  $x(n)$  занимает вновь поступивший отсчет, а последний  $x(n-N+1)$  отбрасывается как выпадающий за пределы временного окна. Окно, как видно, «скользит» по отсчетам входной последовательности  $x(n)$ . В многоканальном нерекурсивном ЦФ (см. рис. 2.3), эквивалентном ДПФ, обновление выборки на каждом шаге можно рассматривать как одновременный и синхронный сдвиг данных по всем линиям задержки, составленным из элементов  $z^{-1}$ .

Операция БПФ может выполняться в каждом временном такте над каждым получаемым таким образом набором данных. Такой режим часто называют «скользящим» БПФ [7].

В скользящем режиме БПФ - процессор в ответ на поступление на вход одного нового отсчета сигнала (остальные  $N-1$  отсчетов «старые») выдает  $N$  отсчетов ДПФ - преобразования. Нетрудно видеть, что это суть выходные отсчеты в каналах многоканального фильтра. Ясно, что в скользящем режиме выходные отсчеты, принадлежащие некоторому каналу ДПФ, будут сильно коррелированными, так как при определении следующих друг за другом отсчетов используется существенно повторяющаяся информация.

В задачах оценки спектральной плотности мощности сильная корреляция нежелательна, поскольку при этом снижается эффективность усреднения выходных данных.

Некоррелированные в каналах на выходе отсчеты получают в «скачущем» БПФ [7]. В этом режиме происходит полное обновление состава выборки при переходе от одной операции вычисления БПФ (рис. 2.8,а) к последующей (рис. 2.8,б). Возмо-

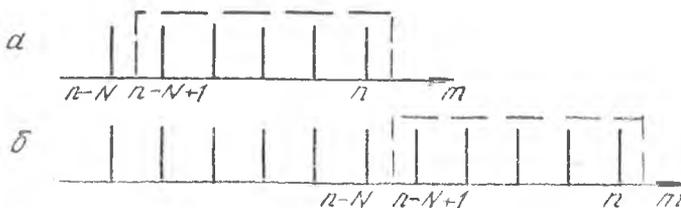


Рис. 2.8. Интерпретация «скачущего» БПФ

жен режим скачущего БПФ, когда объем выборки обновляется не полностью, а только частично. Естественно, что в этом случае сохраняется корреляция между выходными отсчетами одинаково индекса (т. е. принадлежащими некоторому каналу), получаемыми в последовательности операций скачущего БПФ. Однако при соответствующем выборе величины скачков эта корреляция может быть достаточно малой.

### 2.2.2. Метод периодограмм

В качестве анализируемого сигнала возьмем достаточно длинную дискретную случайную последовательность  $x(n)$  длиной  $L$  отсчетов ( $n=0, 1, \dots, L-1$ ), в отношении которой предположим выполнение условий стационарности и эргодичности. В методе используется режим скачущего БПФ, для чего последовательность  $x(n)$  разделяется на ряд подпоследовательностей длиной по  $N$  отсчетов каждая. На необходимости и способах этого разделения остановимся ниже.

Над каждой образованной таким образом подпоследовательностью  $x_r(n)$ ,  $n=0, \dots, N-1$ , ( $r=1, 2, \dots$ ) выполняется операция ДПФ. Однако предварительно для сглаживания спектрограмм и подавления в них нежелательных пульсаций частные последовательности обычно взвешиваются с помощью временного окна  $w(n)$ . Длина временного окна должна быть согласована с длительностью подпоследовательностей  $x_r(n)$  и составлять  $N$  отсчетов:  $w(n)$ ,  $n=0, \dots, N-1$ . ДПФ некоторой  $r$ -й взвешенной последовательности  $x_r(n) w(n)$  имеет вид

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) w(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (2.18)$$

Рассмотрим понятие периодограммы. Под *периодограммой* понимают величины

$$I_r(k) = (1/u) |X_r(k)|^2, \quad (2.19)$$

$$\text{где} \quad u = \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \quad (2.20)$$

— энергия окна. По своему физическому смыслу периодограмма представляет собой оценку СПМ, вычисленную на основе последовательности  $x_r(n)$ ,  $n=0, \dots, \omega-1$ , на дискретных частотах  $f_k = k/N$ . В самом деле, величины  $|X_r(k)|^2$  характеризуют распределение энергии спектра последовательности  $x_r(n)$  на дискретных нормированных частотах  $f_k$ ,  $k=0, \dots, N-1$ . Нетрудно заметить, что величина  $u$ , вычисленная согласно (2.20), пропорциональна длительности последовательности  $N$ . Поэтому де-

ление  $|X_r(k)|^2$  на нормирующий множитель  $u$  и приводит к распределению плотности энергии, т. е. к оценке спектра мощности (2.19). Ясно, что периодограмма, как оценка СПМ, является случайной величиной, подверженной соответственно случайным отклонениям относительно своего среднего при вычислении последовательности оценок  $I_r(k)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ . О качестве этой оценки можно судить по ее смещению и дисперсии.

Обратимся к вопросу о дисперсии периодограммы. Определение дисперсии периодограммы — задача достаточно сложная и громоздкая. Поэтому воспользуемся известными результатами, опустив их доказательство. В работе [6] получено выражение для дисперсии периодограммы вида

$$I(\omega) = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega})|^2, \quad (2.21)$$

где

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) e^{-j\omega n}$$

— преобразование Фурье-подпоследовательности  $x_r(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ .

Дисперсия периодограммы  $I(\omega)$  имеет вид

$$\text{var}[I(\omega)] = \Phi^2(\omega) \left\{ 1 + \left[ \frac{\sin(\omega N)}{N \sin \omega} \right]^2 \right\}, \quad (2.22)$$

где  $\Phi(\omega)$  — истинная СПМ анализируемого процесса.

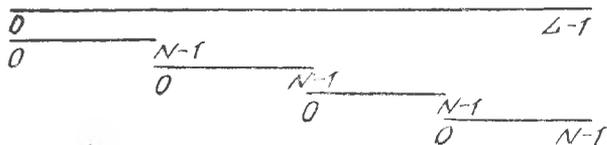
Как видно из выражения (2.22), дисперсия периодограммы равна приблизительно

$$\text{var}[I(\omega)] = \begin{cases} 2\Phi^2(0) & \text{при } \omega=0, \\ 2\Phi^2(\pi) & \text{при } \omega=\pi, \\ \Phi^2(\omega) & \text{— на остальных частотах.} \end{cases} \quad (2.23)$$

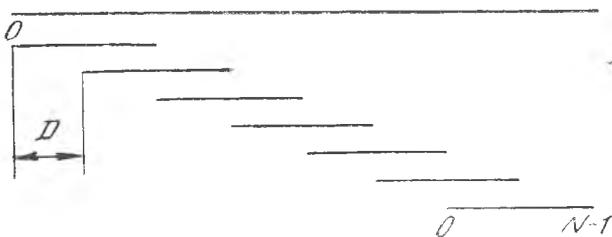
Таким образом, следует ожидать, что значения периодограммы будут сильно флюктуировать относительно истинного значения спектра. Периодограмма не является состоятельной оценкой, так как при увеличении длины последовательности  $N$  дисперсия не устремляется к нулю, а становится пропорциональной квадрату спектра. Для уменьшения дисперсии проводится усреднение периодограмм, для чего анализируемая последовательность  $x(n)$ , длину которой полагаем равной  $L$  отсчетов ( $n=0, \dots, L-1$ ), разбивается на подпоследовательности длиной по  $N$  отсчетов. Такое разбиение может быть проведено разными способами. В частности, подпоследовательности могут быть неперекрывающимися или частично перекрывающимися. Рассмотрим сначала первый случай.

Как известно, усреднение случайных независимых величин при некотором фиксированном объеме усредняемого множества

обеспечивает минимальную дисперсию суммы по сравнению с усреднением того же числа коррелированных величин (прочие характеристики усредняемых величин полагаются одинаковыми). В таком смысле усреднение независимых периодограмм является наиболее эффективным. Этому условию в наилучшей степени удовлетворяет случай неперекрывающихся отрезков. В этом случае число отрезков разбиения составит  $M = L/N$  (см. рис. 2.9,а). На каждом отрезке вычисляется периодограмм-



а



б

Рис. 2.9. Два способа разбиения последовательности данных на подпоследовательности: а — без перекрытия; б — с 50-процентным перекрытием

ма согласно формулам (2.18) и (2.19). Таким образом получаем  $M$  периодограмм, которые усредняются. Оценка спектральной плотности мощности  $\hat{\Phi}(k)$  находится по формуле

$$\hat{\Phi}(k) = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M I_r(k) =$$

$$= \frac{1}{Mu} \sum_{r=1}^M \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) \omega(n) e^{-j(2\pi/N)nk} \right|^2, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (2.24)$$

Можно показать, что оценка (2.24) является асимптотически несмещенной [6]. Если отрезки  $X_r(n)$  не прекрываются, то дисперсия оценки

$$\text{var} [\hat{\Phi}(k)] = \frac{1}{M} \Phi^2(k). \quad (2.25)$$

Исходя из выражения (2.25) можно заключить, что для получения качественных оценок СПМ целесообразно по возможности увеличивать количество отрезков разбиения  $M$ . Однако при фиксированной длине выборки  $L$  с увеличением числа отрезков разбиения соответственно уменьшается длина  $N$  подпоследовательностей  $x_r(n)$ . При этом возникает противоречие между повышением достоверности оценок и обеспечением требуемых значений другой важнейшей характеристики спектрального анализа — разрешения по частоте. Разрешение по частоте анализатора спектра на основе ДПФ составляет

$$\delta f = p/N = pM/L, \quad (2.26)$$

$p > 1$  — коэффициент, зависящий от вида временного окна  $w(n)$ , обычно  $p=1, 1.1, 1.2$ ,  $N$  — размерность ДПФ.

Из (2.26) видно, что увеличение числа отрезков разбиения  $M$  при фиксированной длине анализируемого временного ряда  $L$  приводит к понижению разрешения по частоте. В рассматриваемом способе разбиения входной последовательности на непрерывающиеся подпоследовательности повышение достоверности оценок СПМ достигается за счет снижения разрешающей способности спектрального анализа.

Существует возможность ослабления отмеченного противоречия. Так, если использовать разбиение исходной последовательности на частично перекрывающиеся отрезки данных, как показано на рис. 2.9,б, то можно получить большее количество периодограмм при сохранении первоначальной длины подпоследовательностей, на основе которых эти периодограммы вычисляются. Тем самым можно ожидать упрощения задачи совместного обеспечения требований разрешения по частоте и достоверности оценок.

Рассмотрим эффективность метода вычисления оценок СПМ по частично перекрывающимся отрезкам данных. В этом случае получаемые периодограммы уже не будут взаимно независимыми. При усреднении этих периодограмм необходимо учитывать их взаимную корреляцию. Для гауссова процесса и при некоторых дополнительных ограничениях (СПМ — гладкая функция) дисперсия оценки, полученной этим методом, составляет [6].

$$\text{var}[\widehat{\Phi}(k)] = \frac{\Phi^2(k)}{M} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{M-i}{M} \rho(i) \right], \quad (2.27)$$

где

$$\rho(i) = \frac{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} \omega(n) \omega(n+iD) \right]^2}{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \right]^2},$$

здесь  $D$  — смещение отрезков данных (см. рис. 2.9,б).

Для иллюстрации метода определим дисперсию оценок СПМ в двух случаях:

1.  $D=N$  — отрезки не перекрываются. В этом случае  $M_1 = L/N$  и  $\text{var}_1[\widehat{\Phi}(k)] = \widehat{\Phi}^2(k) / M_1$ ;  $\rho(i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq M_1 - 1$ .

2.  $D=N/2$ , причем считаем, что используется треугольное окно (окно Барллета, см. п. 2.3). В этом случае  $M_2 = L/(N/2) = 2L/N = 2M_1$ ,  $\rho(1) = 1/16$ ,  $\rho(i) = 0$  при  $i \geq 2$ .

В соответствии с (2.27) запишем

$$\text{var}_2[\widehat{\Phi}(k)] = \frac{\Phi^2(k)}{M_2} \left( \frac{17}{13} \right) = \frac{17}{32} \frac{\Phi^2(k)}{M_1}. \quad (2.28)$$

Для соотношения дисперсий получим  $\text{var}_2 = (17/32) \text{var}_1$ .

В приведенном примере при фиксированном разрешении по частоте за счет модификации разбиения исследуемого временного ряда и сопутствующего этому удвоению числа усредняемых периодограмм дисперсия оценки уменьшилась также почти в два раза. В случае фиксированной длины анализируемого дискретного процесса (последовательности) представилась возможность повысить эффективность метода периодограмм за счет разбиения этого процесса на частично перекрывающиеся подпоследовательности.

Обратим внимание на тот факт, что в приведенном примере удвоение числа периодограмм не привело к пропорциональному снижению дисперсии оценок СПМ. В этом проявилось влияние коррелированности периодограмм. Ясно, что с увеличением степени перекрытия это влияние будет увеличиваться.

В случае большого перекрытия дисперсия оценки СПМ слабо изменяется при дальнейшем увеличении количества элементов разбиения, в то время как вычислительные затраты при этом растут. Это означает, что возможности способа, основанного на увеличении числа элементов разбиения за счет увеличения их перекрытия, ограничены.

### 2.2.3. Алгоритм метода периодограмм

Метод периодограмм находит широкое практическое приме-

нение. Рассмотрим алгоритм этого метода в систематизированном виде при следующих предпосылках.

1. Задана дискретная выборка анализируемого процесса  $x(n)$  с ограниченной длиной  $L$ . Величина  $L$  характеризует общее количество отсчетов процесса  $x(n)$ , доступное обработке. Предположим также, что выборка  $x(n)$  предварительно накоплена (например, в ЗУ вычислительного устройства) и может при обработке использоваться многократно.

2. Требуется получить оценку СПМ на основе метода периодограмм и обеспечить при этом разрешение по частоте не хуже  $\delta f$ , а также дать суждение о качестве (точности) оценки.

Рассмотрим последовательность операций, выполняемых при реализации алгоритма метода периодограмм, а также учтем возникающие при этом особенности. В алгоритме метода периодограмм можно выделить два этапа: *первый*, когда не требуется непосредственное обращение к выборке анализируемого процесса, и *второй* — обработка этой выборки. Первый этап включает следующие шаги.

1. Выбор вида временного окна. При этом могут учитываться свойства окна, сложность реализации и связанные с этим вычислительные затраты, а также априорные сведения о структуре анализируемого процесса. Наиболее часто используют окно Бартлета, окно Кайзера и прямоугольное окно.

2. Определение длины  $N$  отрезка данных, достаточной для получения заданного разрешения по частоте:

$$N = p/\delta f. \quad (2.29)$$

3. Выбор способа разбиения исходной выборки анализируемого процесса на отрезки длиной по  $N$  отсчетов и определение числа отрезков разбиения  $M$ . Если предполагается использовать перекрывающиеся подпоследовательности, то выбирают коэффициент перекрытия  $d$ . Учитывая, что очень большое перекрытие приводит к необоснованному увеличению вычислительных затрат, наиболее часто выбирают  $d = 0,5$  или  $d = 0,75$  [1]. Расчет числа  $M$  проводится по формуле

$$M = \text{int} [(L - dN) / (N - dN)]. \quad (2.30)$$

4. Расчет коэффициента  $q$ , показывающего, во сколько раз уменьшается дисперсия оценки СПМ за счет усреднения по множеству периодограмм. Величина этого коэффициента характеризует качество получаемых оценок. Коэффициент  $q$  можно рассчитать на основе выражения (2.27) как

$$q = \Phi^2(k) / \text{var} \{\hat{\Phi}(k)\} = \\ = M / [1 + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{M-i}{M} \rho(i)]. \quad (2.31)$$

В случае, если коэффициенты перекрытия выбраны  $d = 0,5$  или  $d = 0,75$  (2.31) можно привести к виду

$$q = 1 / \left\{ \frac{1}{M} [1 + 2 c^2(0,5)] - \frac{2}{M^2} c^2(0,5) \right\} \quad (2.32) \\ (\text{для } d = 0,5)$$

и

$$q = 1 / \left\{ \frac{1}{M} [1 + 2 c^2(0,75) + 2 c^2(0,5)] - \right. \\ \left. - \frac{2}{M^2} [c^2(0,75) + 2 c^2(0,5)] \right\} \quad (2.33) \\ (\text{для } d = 0,75).$$

Коэффициенты  $c(d)$  в формулах (2.32), (2.33), равно как и функция  $\rho(i)$  в (2.31), зависят от вида используемого временного окна. В частности, для треугольного окна Бартлета  $c(0,5) = 0,25$ ,  $c(0,75) = 0,719$ . Для окон других видов значения коэффициентов табулированы и приведены в работе [1].

На втором этапе алгоритма можно выделить следующие шаги.

1. Формирование взвешенной подпоследовательности отсчетов: считывание из ЗУ отрезка данных  $x_r(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  и умножение его на временное окно  $\omega(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ .

2. Определение ДПФ  $X_r(k)$  взвешенной подпоследовательности  $x_r(n)\omega(n)$  в соответствии с (2.18). Вычисление ДПФ производится по алгоритму БПФ. Если длина взвешенной подпоследовательности не удовлетворяет условию применимости алгоритма БПФ ( $N = 2^l$ ,  $l$  — целое число, при БПФ по основанию 2), то предварительно формируется новая подпоследовательность путем дополнения исходной нулевыми отсчетами до длины  $N' = 2^l$ .

3. Вычисление периодограммы  $I_r(k)$  по (2.19).

4. Расчет усредненной оценки СПМ  $\hat{\Phi}(k)$  в соответствии с (2.24).

Ясно, что шаги 1, 2, 3 этапа 2 выполняются  $M$  раз, в то время как шаг 4 — только один раз.

Оценка СПМ  $\hat{\Phi}(k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  характеризует спектр мощности в  $N$  дискретных точках, где  $N$  — размерность БПФ. В некоторых случаях желательна детальная спектрограмма, определенная на более плотной частотной сетке. Для получения

такой спектрограммы следует увеличить длину подпоследовательностей  $x_r(n)$  в 2,4 ... раз, пополнив исходные отрезки данных нулевыми отсчетами, и провести повторный расчет оценок СПМ (этап 2). На втором шаге этого этапа для расчета периодограмм необходимо пользоваться формулой

$$X_r'(k) = \sum_{n=0}^{N \cdot 2^l - 1} x_r(n) \omega(n) e^{-j(2\pi/N \cdot 2^l)nk}, \quad (2.34)$$

$$k = 0, \dots, N \cdot 2^l - 1,$$

где

$$x_r'(n) = \begin{cases} x_r(n) & \text{при } 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0 & \text{при } N \leq n \leq N \cdot 2^l - 1. \end{cases}$$

Добавление нулевых отсчетов не приводит к изменению основных составляющих спектра, поскольку, как видно из формул (2.18) и (2.34), на частотах  $m = k \cdot 2^l$   $X_r'(m) = X_r(k)$ . Однако при этом между основными составляющими спектра появляется по  $l$  промежуточных отсчетов, не равных в общем случае нулю. Важно иметь в виду, что такая процедура не приводит, как иногда ошибочно считают, к улучшению разрешения по частоте. Разрешение по-прежнему составляет величину, обратно пропорциональную длине временного окна  $N$ .

Вопросы для самопроверки

1. Объясните и обоснуйте сущность частотно-избирательных свойств ДПФ.
2. Какова сущность и причина возникновения эффекта утечки и в чем состоит способ подавления этого эффекта?
3. В чем сущность метода периодограмм?
4. Объясните, почему периодограмма, как таковая, не может служить оценкой СПМ?
5. Какие факторы и каким образом учитывают при разбиении реализации анализируемого процесса на подпоследовательности в методе периодограмм?
6. Воспроизведите алгоритм метода периодограмм.

### *2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ ПО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ*

Анализируемый случайный процесс может быть задан не своей реализацией, а автокорреляционной последовательностью. (Оценку АКФ можно получить способами, изложенными в пп. 1.4, 1.5). Рассмотрим метод расчета СПМ по АКФ-последовательности, основу которого составляет преобразование Винера-Хинчина.

Преобразование Винера-Хинчина, определяющее СПМ  $\Phi(f)$  через дискретную корреляционную последовательность  $R(m)$ , имеет, как показано в п. 1.1, вид

$$\Phi(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) e^{-j2\pi f m} \quad (2.35)$$

В выражении (2.35) предполагается, что корреляционная последовательность  $R(m)$  определена точно и задана для всех значений аргумента  $m$  на интервале  $(-\infty, \infty)$ . Фактически приходится иметь дело не с истинными значениями АКФ  $R(m)$ , а с ее оценкой  $\hat{R}(m)$ . Кроме того, как мы имели возможность убедиться, оценки дискретной АКФ  $\hat{R}(m)$  могут быть практически определены только на конечном интервале  $m=0, \dots, M-1$  (для области положительного времени). Так как АКФ — функция четная, то, имея в виду отрицательные значения аргумента, можно считать, что АКФ задана на интервале  $m=-M+1, \dots, 0, \dots, M-1$ . Поэтому логично в выражении (2.35) ограничить интервал суммирования. Ясно, что результаты определения СПМ по оценкам АКФ  $\hat{R}(m)$  должны, в свою очередь, рассматриваться как оценки  $\hat{\Phi}(f)$ . Тогда запишем

$$\hat{\Phi}(f) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} \hat{R}(m) e^{-j2\pi f m} \quad (2.36)$$

Следует иметь в виду то, что выражения (2.35) и (2.36) в общем случае нельзя полагать адекватными. В самом деле, ограничение пределов суммирования в (2.36) обусловлено не тем, что АКФ — финитная функция (тождественно равная нулю вне некоторого интервала), а следствием нашего незнания ее значений вне интервала  $m=-M+1, \dots, 0, \dots, M-1$ . Наоборот, почти наверняка истинная корреляционная последовательность существует также за пределами обозначенного интервала.

Вследствие этого оценка СПМ искажается относительно истинного спектра. Искажения проявляются, в частности, в возникновении пульсации СПМ, для подавления которых корреляционный ряд взвешивается с помощью временного окна  $w(m)$ ,  $m=-M+1, \dots, M-1$ . В результате оценка СПМ сглаживается. Для сглаженной оценки можно записать

$$\hat{\Phi}(f) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} \hat{R}(m) w(m) e^{-j2\pi f m} \quad (2.37)$$

Выражение (2.37) является основой определения оценки СПМ по известной корреляционной последовательности  $\hat{R}(m)$ . Ясно, что с помощью ЭВМ оценка СПМ может быть вычислена

только на дискретных частотах и только на конечном интервале. В таком случае для вычисления (2.37) можно воспользоваться алгоритмом БПФ. Полагая частоту дискретной  $f_k = kF$ , где  $F$  — шаг дискретизации по частоте, для целочисленной безразмерной частоты  $k = f_k/F$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , запишем

$$\widehat{\Phi}(k) = \sum_{m=0}^{L-1} \bar{R}(m) \omega(m) e^{-j(2\pi/L)mk}, \quad k=0, \dots, L-1. \quad (2.38)$$

где  $L \geq 2M-1$  — размерность БПФ.

Корреляционный ряд  $\bar{R}(m)$  в (2.38) формируется из корреляционной последовательности  $\hat{R}(m)$  путем пополнения последней нулевыми отсчетами по правилу

$$\bar{R}(m) = \begin{cases} \hat{R}(m) & \text{при } m = 0, \dots, M-1, \\ 0 & \text{при } m = M, \dots, L-M, \\ \hat{R}(m-L) & \text{при } m = L-M+1, \dots, L-1. \end{cases} \quad (2.39)$$

Сущность этого формирования поясняет рис. 2.10.

Как видно из выражения (2.39) и рис. 2.10, взвешенная АКФ отлична от нуля только на интервале, на котором существует временное окно. Как следует из (2.38), процедура вычисления оценок СПМ состоит в умножении последовательности отсчетов  $\bar{R}(m)$  на последовательность отсчетов временного окна и последующем выполнении ДПФ. Для вычисления ДПФ обычно (при достаточно большом  $L$ ) используется алгоритм БПФ.

В литературе отмечается, что рассматриваемый метод дает «хорошие» оценки СПМ, если используются соответственно «хорошие» оценки АКФ [6]. Условия получения эффективных оценок  $\bar{R}(m)$  обсуждались выше (см. п. 1.4).

При практическом использовании метода следует учитывать две особенности. Разрешение метода по частоте определяется формой и длиной временного окна  $\omega(m)$  и составляет величину, обратно пропорциональную этой длине. Очевидно, что улучшение разрешения путем выбора более длинных окон имеет ограничение, так как длина временного окна не должна быть больше длины оценок корреляционной последовательности:  $\omega(m)$ ,  $|m| \leq M-1$ . В противном случае теряется смысл взвешивания. С проблемой обеспечения частотного разрешения связан вопрос выбора размерности  $L$  БПФ. При  $L > 2M-1$  в последовательности произведений  $\bar{R}(m)\omega(m)$  на интервале  $m = 0, \dots, L-1$  образуется  $L-2M+1$  нулевых отсчетов (см. рис. 2.10,г). Последовательность оценки СПМ также будет иметь  $L$  отсчетов которые, однако, в общем случае, будут ненулевыми. Таким образом, пополнение корреляционной последовательности нулями при-

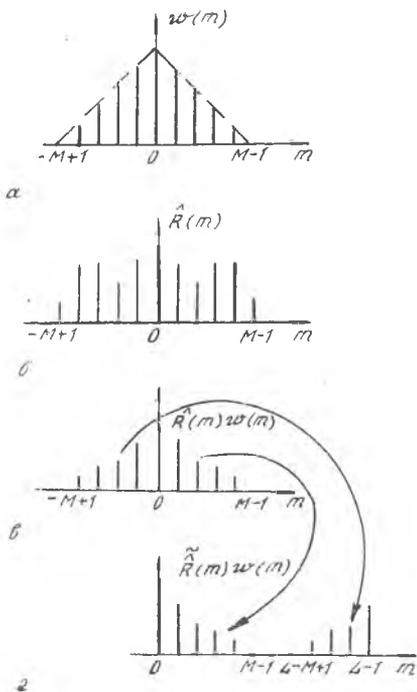


Рис. 2.10. Формирование корреляционного ряда: *a* — временное окно Бартлетта; *б* — последовательность отсчетов оценки  $\hat{R}(m)$ ; *в* — взвешенная временным окном последовательность; *г* — взвешенная АКФ, сформированная по правилу (2.39)

результате этой операции может оказаться, что на некоторых частотах сглаженная оценка спектра мощности может принимать отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу спектра мощности. Во избежание этого нежелательного явления рекомендуется применять окна, преобразования которых положительны на всех частотах. К таким окнам относится, в частности, треугольное окно Бартлетта (рис. 2.10,а), которое часто используется в задачах оценки СПМ.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается принцип вычисления СПМ по АКФ?
2. Чем обусловлена необходимость взвешивания корреляционного ряда при вычислении оценки СПМ по АКФ?

водит к образованию в дискретном спектре ненулевых отсчетов. При этом, однако, как и в методе периодограмм, частотное разрешение не повышается, а получается лишь более детальное представление спектра мощности за счет уменьшения шага дискретизации по частоте  $F = 1/(L \cdot T)$ . Хотя размерность БПФ  $L$  можно выбрать сколь угодно большой (за счет увеличения вычислительных затрат), разрешение по частоте все же определяется формой и длиной окна  $w(m)$ .

Другая особенность использования метода связана с выбором формы временного окна. Как известно из теории преобразования Фурье, умножению двух функций во временной области — в нашем случае корреляционной последовательности и временного окна — в частотной области соответствует свертка их Фурье-преобразований. При неудачном выборе вида окна в ре-

3. Приведите особенности использования алгоритма БПФ при вычислении СПМ по АКФ.

4. Каким образом можно улучшить детальность спектрограммы в методах периодограмм и вычисления СПМ по АКФ? Особенности этого способа.

### 3. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МЕТОДАМИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ

#### 3.1. ПОДХОД К ОЦЕНКЕ СПМ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ

##### 3.1.1. Общие сведения

В данном разделе мы ознакомимся с методами оценки СПМ стационарных случайных процессов, предполагающими моделирование этих процессов. Обратимся к принципиальной сущности таких методов в общем виде. Рассмотрим задачу моделирования стационарного случайного процесса с заданной СПМ  $\Phi_x(f)$ . Эту задачу можно решить, например, с помощью линейного цифрового фильтра (который далее будем именовать *моделью*) выбрав соответствующим образом его передаточную функцию  $H(z)$  (рис. 3.1). Пусть на вход фильтра воздействует процесс  $v(n)$ , а на выходе образуется процесс  $x(n)$ . Для спектров мощности этих

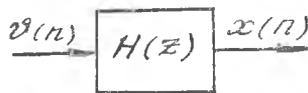


Рис. 3.1. Формирующий фильтр

процессов можно записать  $\Phi_x(z) = X(z) X(z^{-1})$  и  $\Phi_v(z) = V(z) V(z^{-1})$ . Спектры связаны между собой соотношением  $\Phi_x(z) = H(z) H(z^{-1}) \Phi_v(z)$ . На единичной окружности  $Z$ -плоскости, т. е. при  $z = e^{j2\pi f}$  получим  $\Phi_x(f) = |H(e^{j2\pi f})|^2 \Phi_v(f)$ .

Логично предположить, что на вход модели воздействует некоторый стандартный процесс, например, белый шум с известной дисперсией  $\sigma^2$ . Как известно, СПМ дискретного белого шума определяется выражением [4].  $\Phi_v(f) = \sigma^2 T$ . Таким образом, для СПМ моделируемого процесса получим

$$\Phi_x(f) = \sigma^2 T |H(e^{j2\pi f})|^2. \quad (3.1)$$

Как и следовало ожидать, в принятых условиях (входной процесс — белый шум с известной дисперсией) СПМ моделируемого процесса  $\Phi_x(f)$  полностью определяется квадратом модуля частотной характеристики формирующего фильтра. Заметим, что такой фильтр также называют *синтезирующим*.

Теперь изменим задачу и предположим, что параметры формирующего фильтра не определены, однако заданы параметры моделируемого процесса, например, первые  $N$  отсчетов АКФ. В таком случае задача моделирования сводится к выбору таких параметров формирующего фильтра, при которых первые  $N$  отсчетов АКФ процесса - модели и первые  $N$  отсчетов АКФ моделируемого процесса взаимно соответствуют с некоторой допустимой ошибкой. При выполнении этого условия можно ожидать, что частотная характеристика фильтра - модели будет также с некоторой возможно малой ошибкой воспроизводить СПМ моделируемого процесса. Как видим, такой подход открывает путь к получению оценки СПМ анализируемого процесса.

Другой подход состоит в использовании в модели вместо формирующего обеливающего фильтра. Обеливающий фильтр выполняет функцию, обратную формирующему фильтру: преобразует входной процесс с произвольной СПМ в белый шум с равномерным спектром на выходе. Ясно, что при идеальном обеливании входного процесса частотная характеристика фильтра должна быть функцией, обратной спектру этого процесса. Данное явление и составляет основу для спектрального оценивания. Заметим, что обеливающий фильтр, в противоположность рассмотренному выше формирующему фильтру, называют также *обратным* или *анализирующим* фильтром.

### *3.1.2. Особенности методов оценки СПМ на основе моделирования*

Методы оценки СПМ на основе моделирования получили развитие благодаря своим достоинствам. При выполнении некоторых условий эти методы позволяют получить более точные оценки СПМ по сравнению с рассмотренными выше методами периодограмм и корреляционным.

Принципиальной особенностью методов периодограмм и корреляционного является использование временных окон, с помощью которых формируется присущая этим методам своего рода модель анализируемого процесса. Согласно этой модели предполагается, что отсчеты данных для метода периодограмм или отсчеты АКФ для корреляционного метода отличны от нуля только в пределах временного окна и тождественно равны нулю за его пределами. Реально это допущение, как правило, не соответствует действительности и, следовательно, используемая модель заведомо искажена относительно реального процесса. Следствием являются искажения, вносимые в оценки СПМ, которые проявляются, в частности, в возникновении лепестковости характеристик СПМ и, в конечном счете, в ухудшении частотного разрешения. Наличие априорной информации может позволить вы-

брать более точную модель анализируемого процесса и обеспечить тем самым большую точность оценки СПМ. Рассмотрим возможные к тому предпосылки.

Предположим, что моделируется случайный процесс, для которого известны первые  $N$  отсчетов корреляционной последовательности. Пусть также априори известно, что этот процесс принадлежит к некоторому виду процессов, обладающих некоторыми общими характерными признаками. К задаче моделирования такого процесса возможен следующий подход.

Сначала на основе априорной информации о виде процессов выбирается модель — цифровой фильтр, обеспечивающий возможность моделирования процессов с признаками, присущими данному виду. Далее, посредством соответствующего выбора параметров фильтра обеспечивается взаимное соответствие  $N$  первых известных отсчетов корреляционной последовательности анализируемого процесса и отсчетов АКФ модели процесса. Это соответствие устанавливается в смысле некоторого критерия, например, минимума среднего квадрата ошибки, максимального правдоподобия и т. п. Учитывая принадлежность обоих процессов — истинного и модели — к одному классу, можно ожидать, что  $(N+1)$ -й и последующие отсчеты АКФ анализируемого процесса и модели будут также иметь достаточно близкие значения. Это означает возможность аппроксимации с помощью модели неизвестных отсчетов АКФ анализируемого процесса.

Таким образом, оказывается доступной информация, заключенная в этих отсчетах АКФ, не учитываемая в корреляционном методе спектрального оценивания. В этом состоит принципиальная сущность повышения точности оценки СПМ.

В литературе [3, 8, 9] отмечается, что методы оценки СПМ на основе моделирования обеспечивают, при надлежащем выборе вида модели, повышенное частотное разрешение или получение оценок по более коротким реализациям анализируемого процесса.

### *3.1.3. Этапы решения задачи оценки СПМ*

По виду используемых данных различают прямые и косвенные методы оценки СПМ. В прямых методах оценка проводится на основе реализаций случайного процесса непосредственно. В косвенных методах используется корреляционная последовательность, которая либо задается, либо оценивается по имеющимся реализациям методами, изложенными в разд. 1.

В процедуре спектрального оценивания методами моделирования можно выделить три этапа. *Первый этап* состоит в выборе вида модели на основе априорной информации. *Второй этап* заключается в оценивании параметров принятой модели с ис-

пользованием либо реализаций анализируемого процесса, либо отсчетов корреляционной последовательности этого процесса. На *третьем этапе* вычисляется спектральная оценка по расчетным выражениям для СПМ после подстановки в них оценок параметров моделей.

### 3.1.4. Модели исследуемых процессов

Выбор вида модели является фундаментальным вопросом в теории и практике спектрального оценивания на основе моделирования. К модели предъявляются противоречивые требования. С одной стороны, модель должна быть адекватной реальным процессам, с другой стороны — иметь достаточно простое аналитическое описание, приемлемое для приложений. Практически при выборе моделей приходится делать разного рода допущения, ограничивающие область применения соответствующих методов.

Многие реальные процессы хорошо аппроксимируются моделями на основе линейных дискретных систем. Эти системы описываются, как известно, рациональными передаточными функциями. В линейной системе с рациональной передаточной функцией входная  $v(n)$  и выходная  $x(n)$  дискретные последовательности связаны между собой линейным разностным уравнением

$$x(n) = \sum_{i=0}^q b_i v(n-i) - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i), \quad (3.2)$$

где  $a_i, b_i$  — константы, коэффициенты модели.

В теории цифровых фильтров уравнение вида (3.2) приписывается рекурсивному ЦФ. В задачах спектрального оценивания модель (3.2) известна как модель авторегрессии скользящего среднего (АРСС). Интерес к такого рода моделям обусловлен, в частности, уже упомянутой связью с ЦФ.

Передаточная функция АРСС-модели, определяющая взаимосвязь  $Z$ -отображений входного и выходного процессов, является дробно-рациональной функцией и имеет вид

$$H(z) = B(z)/A(z), \quad (3.3)$$

где  $A(z) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}$  и  $B(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i}$ .

В случае, если входной процесс — белый шум с дисперсией  $\sigma^2$ , спектр мощности на выходе АРСС-модели определяется выражением

$$\Phi_x(z) = \sigma^2 T \frac{B(z) B(z^{-1})}{A(z) A(z^{-1})}. \quad (3.4)$$

Здесь учтено, что СПМ дискретного белого шума имеет величину  $\sigma^2 T$ .

АРСС-модель является наиболее общей. Используются также более простые модели авторегрессии (АР) и скользящего среднего (СС). АР-модель можно получить, положив в (3.2)  $b_0=1$  и  $b_i \equiv 0$  при  $i \neq 0$ , тогда

$$x(n) = v(n) - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i). \quad (3.5)$$

Как видно, в модели (3.5) выходной отсчет  $x(n)$  в момент времени  $n$  определяется значением отсчета  $v(n)$  входного процесса в текущем моменте времени и взвешенной суммой  $p$ -отсчетов выходного процесса, имевших место на предшествующих тактовых интервалах. В другой трактовке говорят, что процесс  $x(n)$  линейно регрессирует сам на себя, а  $v(n)$  представляет собой ошибку регрессии. Именно в этом смысле процесс (3.5) называют *процессом авторегрессии порядка  $p$* . Учитывая (3.5), для передаточной функции АР-модели можно записать

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}. \quad (3.6)$$

Как видно, передаточная функция (3.6) имеет  $p$  полюсов; нули в ней отсутствуют. Поэтому АР-модель часто также называют *чистополосной моделью*.

Если в уравнении (3.2) все коэффициенты  $a_i \equiv 0$ , то процесс  $x(n)$  будет процессом скользящего среднего порядка  $q$ :

$$x(n) = \sum_{i=0}^q b_i v(n-i). \quad (3.7)$$

В этом случае отсчет процесса  $x(n)$  определяется взвешенной суммой отсчетов входного процесса в текущем времени и в  $q$  предшествующих тактах. Такое суммирование имеет смысл усреднения. Передаточная функция, соответствующая уравнению (3.7), имеет вид

$$H(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i}. \quad (3.8)$$

Как видно, передаточная функция СС-модели имеет только нули; полюсы в ней отсутствуют. Поэтому эта модель называется *чистонулевой моделью\**.

Можно показать (см. п. 3.2), что для функции автокорреляции АРСС- и АР-процессов выполняется соотношение

\* Строго говоря, модель (3.6) имеет нули, а модель (3.8) — полюсы, расположенные в начале координат  $z$ -плоскости. Но мы это не учитываем.

$$R_x(m) = \sum_{i=1}^n a_i R_x(m-i) \quad (3.9)$$

(для всех  $m > p$ ).

Отсюда следует, что при использовании линейной модели с рациональной передаточной функцией вида (3.2) или (3.5) заданные  $p$  первых отсчетов корреляционной последовательности позволяет однозначно продолжить АКФ до бесконечности с помощью рекуррентного соотношения (3.9). Благодаря такой аппроксимации АКФ, АРСС- и АР-модели потенциально могут существенно улучшить разрешающую способность спектрального анализа. В противоположность этому, СС-процесс — это процесс с ограниченной памятью, поэтому в случае СС-модели не создаются предпосылки для получения лучшей разрешающей способности по частоте, по сравнению с методами, основанными на использовании БПФ [8].

Вместе с тем, существует теорема декомпозиции [3], утверждающая, что любой стационарный АРСС- или СС-процесс можно представить единственной АР-моделью, возможно бесконечного порядка. Подобным образом, любой АРСС- и АР-процесс можно также представить как СС-процесс некоторого, также возможно бесконечного порядка. Это означает, что при неудачном выборе модели все же можно получить приемлемую аппроксимацию за счет увеличения порядка модели.

Важной характеристикой вида модели является наличие эффективных алгоритмов оценивания ее параметров. В этом смысле определенные достоинства имеет АР-модель, поскольку оценивание параметров такой модели приводит к линейным алгебраическим уравнениям, для решения которых существуют рациональные методы. Благодаря вычислительным преимуществам АР-модели большинство известных методов спектрального оценивания базируется именно на этой модели.

### *3.1.5. Методы линейного предсказания в задаче оценки параметров АР-модели*

В задаче оценки параметров АР-модели используются методы теории линейного предсказания. Теория линейного предсказания вскрывает сущность авторегрессивного оценивания СПМ, позволяет понять физическую сторону рассматриваемых вопросов.

Пусть задана дискретная последовательность  $x(n)$ , АР-процесс  $p$ -го порядка. Устройство линейного предсказания на один шаг  $p$ -го порядка осуществляет предсказание величины отсчета последовательности  $x(n)$  по ее значениям в  $p$  предшествующих тактах. Учитывая коррелированность последовательности, логично положить, что оценка

$$\hat{x}(n) = - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i). \quad (3.10)$$

Выбор знака в правой части (3.10) не имеет принципиального значения, т. к. всегда можно для коэффициентов принять  $b_i = -a_i$ . Здесь знак минус взят для удобства записи аналитических выражений. Передаточная функция предсказателя на один шаг (3.10) имеет вид

$$F(z) = - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}.$$

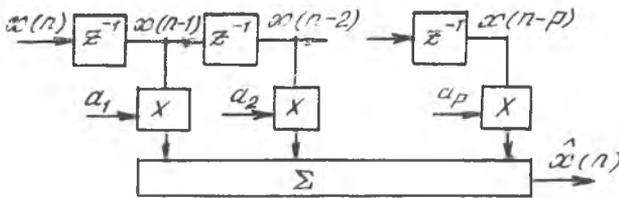


Рис. 3.2. Структурная схема фильтра предсказания на один шаг

Структурная схема предсказателя на один шаг приведена на рис. 3.2) Ясно, что предсказание сопровождается ошибкой

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = \sum_{i=0}^p a_i x(n-i), \quad (3.11)$$

где  $a_0 = 1$ .

Введем понятие *фильтра предсказания ошибки* (ФПО), на входе которого действует процесс  $x(n)$ , а на выходе образуется последовательность отсчетов ошибки предсказания  $e(n)$ . Передаточная функция этого фильтра имеет вид

$$A(z) = 1 - F(z) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i}, \quad a_0 = 1. \quad (3.12)$$

Сравнив функции (3.12) и (3.6), нетрудно заметить, что передаточная функция (3.12) является обратной относительно передаточной функции АР-модели (3.6), поэтому ФПО называют также *обратным фильтром*.

Для оптимизации значений коэффициентов обратного фильтра ( $a_1, a_2, \dots, a_p$ ) удобно воспользоваться критерием минимума среднего квадрата ошибки (МСКО) предсказания (мощности ошибки):

$$Q_p = E[e^2(n)] = E[|x(n) - \hat{x}(n)|^2] \rightarrow \min,$$

где  $\bar{E}(\cdot)$  — операция матожидания, т. е. усреднения по ансамблю реализаций.

Условия, при которых минимизируется ошибка  $Q_p(a_i)$ , можно найти, положив

$$\frac{\partial Q_p}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} E[|x(n) + \sum_{i=1}^p a_i x(n-i)|^2] = 0.$$

Учитывая, что операции дифференцирования и матожидания здесь переставимы, выполним дифференцирование, получим

$$E\{[x(n) + \sum_{j=1}^p a_j x(n-j)]x(n-i)\} = 0 \quad \text{при } i=1, \dots, p. \quad (3.13)$$

Воспользуемся формулами (3.10), (3.11) и перепишем выражение (3.13) в виде  $E\{[x(n) - \hat{x}(n)]x(k)\} = E[e(n)x(k)] = 0$  (3.14)

$$\text{при } k=n-1, \dots, n-p.$$

Как видно из выражения (3.14), условием получения минимальной среднеквадратической ошибки является отсутствие корреляции между ошибкой  $e(n)$  и предшествующими отсчетами данных  $x(n-1), \dots, x(n-p)$ , по значениям которых аппроксимируется текущая оценка  $\hat{x}(n)$ . Это важное положение известно в теории метода МСКО как *принцип ортогональности*.

Учтем, что для стационарных случайных процессов  $E\{x(n-j)x(n-i)\} = R_x(i-j)$ , где  $R_x(k)$  — АКФ процесса  $x(n)$ . Тогда, выполнив в (3.13) операцию матожидания, получим систему линейных уравнений

$$R_x(i) = - \sum_{j=1}^p a_j R_x(i-j) \quad \text{при } i=1, \dots, p, \quad (3.15)$$

решением которой являются искомые коэффициенты  $(a_1, \dots, a_p)$  фильтра линейного предсказания.

Определим минимальную мощность ошибки предсказания, соответствующую выполнению условия МСКО. Запишем выражение ошибки  $Q_p$  в виде

$$\begin{aligned} Q_p &= E[e^2(n)] = \\ &= R_x(0) + \sum_{i=1}^p a_i R_x(i) + \sum_{i=1}^p a_i [R_x(i) + \sum_{j=1}^p a_j R_x(i-j)]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Условием достижения МСКО предсказания является (3.15). Учтем это условие и приравняем нулю выражение в квадратных скобках в правой части (3.16). В результате получим

$$\sigma_p^2 = R_x(0) + \sum_{i=1}^p a_i R_x(i). \quad (3.17)$$

Здесь для минимальной ошибки введено обозначение  $Q_{p\text{мин}} = \sigma_p^2$ . Нетрудно заметить, что систему уравнений (3.15) можно расширить, включив в нее уравнение (3.17), и таким образом получить

$$R_x(j) + \sum_{i=1}^p a_i R_x(j-i) = \begin{cases} \sigma_p^2 & \text{при } j=0, \\ 0 & \text{при } j=1, \dots, p. \end{cases} \quad (3.18)$$

Выражение (3.18) можно записать в более компактной форме, положив  $a_0=1$ :

$$\sum_{i=0}^p a_i R_x(j-i) = \begin{cases} \sigma_p^2 & \text{при } j=0, \\ 0 & \text{при } j=1, \dots, p. \end{cases} \quad (3.19)$$

Система (3.19) носит название *нормальных уравнений Юла-Уокера*.

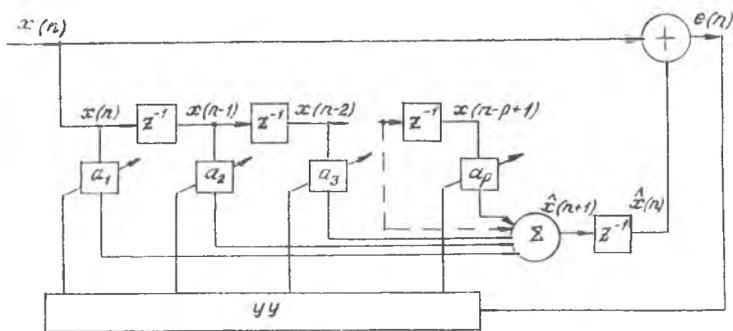


Рис. 3.3. Структурная схема фильтра предсказания ошибки обеливающего фильтра

Структурная схема ФПО приведена на рис. 3.3. ФПО представлен как адаптивный фильтр, величины коэффициентов умножителей которого изменяются в соответствии с текущим значением ошибки предсказания  $e(n)$ . Заметим, что последовательности ошибки  $e(n)$  и процесса в отводах линии задержки фильтра  $x(n-1), \dots, x(n-p)$  согласно принципу ортогональности взаимно не коррелированы. Кроме того, можно показать, что в случае, когда входной процесс является АР-процессом  $p$ -го порядка, последовательность ошибки  $e(n)$  на выходе ФПО  $p$ -го порядка представляет собой дискретный белый шум. Тогда ФПО оказывается обеливающим фильтром, обратным АР-модели (см. рис. 3.1). При этом  $p$ -параметров ФПО ( $a_1, \dots, a_p$ ) и дисперсия белого шума  $\sigma_p^2$  полностью определяют СПМ анализируемого процесса  $x(n)$ .

В случае, если указанное выше согласование анализируемого

процесса с АР-моделью отсутствует и анализируемая последовательность является процессом произвольного вида, ФПО все же может быть обеливающим фильтром при условии, что порядок фильтра достаточно большой, возможно, при  $p \rightarrow \infty$ . Поэтому, если вид входного процесса неизвестен, задача моделирования решается методом проб и ошибок. Для полной идентификации модели необходимо решить систему уравнений (3.19). Соответствующий алгоритм будет рассмотрен в 3.2.2.

В заключение отметим, что спектральное оценивание на основе линейного предсказания и критерия МСКО приводит к сравнительно простой задаче решения системы линейных уравнений (3.19). При использовании иного критерия, например максимума правдоподобия, уравнения оказываются нелинейными и решение задачи, естественно, усложняется.

### Вопросы для самопроверки

1. В чем состоят принцип моделирования случайных процессов и особенности методов оценки СПМ на основе моделирования?

2. Какие модели процессов Вам известны и в чем их особенности?

3. В чем состоит принцип фильтра предсказания на один шаг и фильтра предсказания ошибки?

4. Каковы условия выбора коэффициентов ФПО?

5. В чем суть принципа ортогональности?

6. В чем смысл системы нормальных уравнений Юла-Уокера?

7. В чем состоит принцип работы ФПО при моделировании случайных процессов?

## 3.2. АВТОРЕГРЕССИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СПМ НА ОСНОВЕ АКФ

### 3.2.1. Идентификация АР-модели

Задача оценивания параметров АР-модели решалась в 3.1.5 с позиций теории линейного предсказания. При этом был получен ряд полезных представлений, которые будут использованы в дальнейшем. Вместе с тем, достаточно простое и компактное решение этой задачи можно получить путем непосредственного вычисления АКФ АР-процесса. Рассмотрим этот путь.

Определим функцию автокорреляции

$$R_x(j) = E\{x(n)x(n+j)\}$$

в предположении, что  $x(n)$  есть АР-процесс порядка  $p$ . Для АР-процесса согласно формуле (3.5) запишем

$$x(n) = v(n) - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i). \quad (3.20)$$

Таким образом получим

$$\begin{aligned} R_x(j) &= E\{x(n) [-\sum_{i=1}^p a_i x(n-i+j) + v(n+j)]\} = \\ &= -\sum_{i=1}^p a_i R_x(j-i) + E[x(n) v(n+j)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ниже мы покажем, что

$$E[x(n) v(n+j)] = \begin{cases} \sigma_p^2 & \text{при } j=0, \\ 0 & \text{при } j>0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в формулу (3.21), получим искомое решение

$$R_x(j) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i R_x(j-i) + \sigma_p^2 & \text{при } j=0, \\ -\sum_{i=1}^p a_i R_x(j-i) & \text{при } j=1, \dots, p. \end{cases} \quad (3.23)$$

Перепишем (3.23) в виде

$$R_x(j) + \sum_{i=1}^p a_i R_x(j-i) = \begin{cases} \sigma_p^2 & \text{при } j=0, \\ 0 & \text{при } j=1, \dots, p. \end{cases} \quad (3.24)$$

Система (3.24), как уже отмечалось, носит название нормальных уравнений Юла-Уокера. Решением уравнений Юла-Уокера будут  $(p+1)$  значений оценки параметров  $(a_1, \dots, a_p, \sigma_p^2)$  АР-модели.

В заключение приведем доказательство соотношения (3.22). Если  $h(n)$  — импульсная характеристика АР-модели, то процесс  $x(n)$  можно получить как свертку

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) v(n-m). \quad (3.25)$$

Имея в виду (3.25), запишем

$$\begin{aligned} E[x(n) v(n+j)] &= E[v(n+j) \sum_{m=0}^{\infty} h(m) v(n-m)] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m) E[v(n+j) v(n-m)]. \end{aligned}$$

Так как  $v(n)$  — белый шум, то

$$E[v(n+j) v(n-m)] = \begin{cases} \sigma_p^2 & \text{при } j=0, m=0, \\ 0 & \text{при других значениях } j \text{ и } m. \end{cases}$$

Таким образом

$$E[x(n)v(n+j)] = \begin{cases} h(0)\sigma_p^2 & \text{при } j=0, \\ 0 & \text{при } j>0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Определим  $h(0) = h(n)|_{n=0}$ . Для этого обратимся к выражению передаточной функции

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h(n)z^{-n}.$$

Так как  $\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} h(n)z^{-n} \rightarrow 0$ , то  $h(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z)$ .

Учитывая выражение (3.6), получаем  $h(0) = 1$ . Подставим этот результат в (3.26) и получим окончательно

$$E[x(n)v(n+j)] = \begin{cases} \sigma_p^2 & \text{при } j=0, \\ 0 & \text{при } j>0, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

### 3.2.2. Алгоритм Левинсона-Дербина

Для решения систем уравнений вида (3.19) существуют специальные методы, учитывающие особенности решаемой системы.

Запишем для наглядности систему (3.19) в матричной форме

$$\begin{vmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & R_x(-2) & \dots & R_x(-p) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(-1) & \dots & R_x(-p+1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(p) & R_x(p-1) & R_x(p-2) & \dots & R_x(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_p^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.27)$$

Нетрудно заметить, что автокорреляционная матрица  $\bar{R}$  размерности  $(p+1) \times (p+1)$  системы (3.27) обладает следующими особенностями: эта матрица квадратная симметрическая, эрмитова, так как с учетом четности АКФ  $R_x(j) = R_x(-j)$  для нее выполняется условие  $\bar{R}^T = \bar{R}$ . Надстрочный индекс  $T$ -символ транспонирования. Кроме того, элементы матрицы, расположенные вдоль каждой диагонали, одинаковы. Матрица такого вида носит название *матрицы Теплица*.

Решение системы нормальных уравнений (3.27) включает операцию вычисления обратной матрицы размерности  $p \times p$ . При использовании стандартных методов обращения матриц, известных из курса линейной алгебры, например метода исклю-

чения Гаусса, необходимо выполнить  $o(p^3)$  операций умножения и сложения. Вместе с тем для решения нормальных уравнений в форме Теплица известны алгоритмы, требующие только  $o(p^2)$  операций. В задачах спектрального оценивания нашел применение алгоритм Левинсона-Дербина, представляющий собой рекурсивную процедуру, в которой с целью получения решения для функции предсказания  $(i+1)$ -го порядка используется решение для функции предсказания  $i$ -го порядка. Согласно этому алгоритму систему линейных уравнений (3.27) решают для последовательно увеличивающихся порядков АР-модели 1, 2, ...,  $p_m$ , где  $p_m$  — максимальный порядок авторегрессии, который, вообще говоря, вначале может быть неизвестным. Алгоритм Левинсона-Дербина позволяет рекурсивно вычислять наборы параметров  $(a_{1,1}, \sigma_1^2)$ ,  $(a_{2,1}, a_{2,2}, \sigma_2^2)$ , ...,  $(a_{p_m,1}, a_{p_m,2}, \dots, a_{p_m,p_m}, \sigma_{p_m}^2)$ , соответствующих моделям первого, второго, ...,  $p_m$ -го порядка. Дополнительный подстрочный индекс здесь введен для обозначения коэффициентов АР-модели соответствующего порядка.

На первом шаге алгоритм инициализируется с помощью выражений

$$a_{1,1} = -R_x(1)/R_x(0), \quad (3.28)$$

$$\sigma_1^2 = (1 - |a_{1,1}|^2) R_x(0). \quad (3.29)$$

На последующих шагах рекуррентной процедуры Левинсона-Дербина параметры для  $k=2, 3, \dots, p$  вычисляются по формулам

$$a_{k,k} = -[R_x(k) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{k-1,i} R_x(k-i)] / \sigma_{k-1}^2, \quad (3.30)$$

$$a_{k,i} = a_{k-1,i} + a_{k,k} \cdot a_{k-1,k-i}, \quad (3.31)$$

$$\sigma_k^2 = (1 - |a_{k,k}|^2) \sigma_{k-1}^2. \quad (3.32)$$

Параметры АР-модели, полученные на  $k$ -м шаге, совпадают с параметрами, следующими из решения системы уравнений Юла-Уокера (3.20) при  $p=k$ . Разница состоит в том, что решение системы (3.27) дает параметры только некоторого одного порядка АР-модели, в то время как алгоритм Левинсона-Дербина помимо этого также доставляет АР-параметры для всех аппроксимаций более низкого порядка. Это весьма полезное свойство алгоритма Левинсона-Дербина позволяет определить требуемый порядок АР-модели в тех случаях, когда тот заранее не известен. Для этого в процедуре генерации по формулам (3.28)—(3.32) моделей возрастающего порядка необходимо контролировать значения дисперсии  $\sigma_k^2$ , которые можно рассматривать как ошибку линейного ФПО  $k$ -го порядка.

В упомянутой процедуре генерации ошибка предсказания образует невозрастающую последовательность. В случае, если анализируемый процесс — действительно АР-процесс  $p$ -го порядка, параметры формирующего фильтра будут точно определены на  $p$ -й итерации. При этом ошибка  $\sigma_p^2$  достигнет своего минимума. Дальнейшее продолжение итерационного процесса не приведет к изменению параметров модели и уменьшению ошибки предсказания. При этом будет согласно (3.20), (3.32)  $a_{k,k} = 0$ ,  $\sigma_k^2 = \sigma_p^2$  при  $k = p+1, p+2, \dots$ . Таким образом, прекращение изменения параметров свидетельствует о достижении нужного порядка модели и может служить признаком правильного выбора порядка модели.

Если используемая в выражениях (3.28) — (3.32) автокорреляционная последовательность не соответствует никакому АР-процессу, то соответственно не существует значения  $k$ , по достижении которого параметры модели перестают изменяться. Однако параметры  $\sigma_k^2$  в этом случае также образуют невозрастающую последовательность, поскольку коэффициенты  $a_{k,k}$  по абсолютной величине никогда не бывают больше единицы и, следовательно, согласно (3.32)  $\sigma_{k+1}^2 \leq \sigma_k^2$ . Для выбора порядка модели в таком случае используется критерий малости ошибки предсказания. Если ошибка становится достаточно малой, то и АР-модель можно считать приемлемой аппроксимацией заданного процесса. Какую ошибку можно считать «достаточно малой» — это зависит от существа решаемых задач, а также от накопленного эмпирического опыта.

Проиллюстрируем сущность алгоритма Левинсона-Дербина на примере.

**Пример.** Найдем оценки параметров АР-системы второго порядка

$$\begin{vmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ R_1 & R_0 & R_1 \\ R_2 & R_1 & R_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Для простоты записи принято обозначение  $R_k = R_x(k)$ . Используем для решения алгоритм Левинсона-Дербина.

**Шаг 1.**

$$a_{1,1} = -R_1/R_0;$$

$$\sigma_1^2 = (1 - a_{1,1}^2) \cdot R_0 = (R_0^2 - R_1^2)/R_0.$$

**Шаг 2.**

$$a_{2,2} = -(R_2 + a_{1,1} R_1) / \sigma_1^2 = (R_1^2 - R_0 R_2) / (R_0^2 - R_1^2);$$

$$a_{2,1} = a_{1,1} + a_{2,2} a_{1,1} = R_1 (R_2 - R_0) / (R_0^2 - R_1^2);$$

$$\sigma_2^2 = (1 - a_{2,2}^2) \sigma_1^2 = \frac{R_0^3 - 2 R_0 R_1^2 + 2 R_1^2 R_2 - R_0 R_1^2}{R_0^2 - R_1^2}.$$

Величины  $a_2 = a_{2,2}$ ,  $a_1 = a_{2,1}$  и  $\sigma_2^2$  являются решением заданной системы. Все три параметра ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\sigma_2^2$ ) выражаются через отсчеты АКФ  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , которые полагаются известными.

### 3.2.3. Вычисление оценки СПМ

На третьем, заключительном этапе спектрального оценивания (см. 3.1.3) предполагается вычисление оценки СПМ по расчетному выражению, соответствующему виду выбранной модели. Для АР-модели с учетом формул (3.1) и (3.6) получаем

$$\Phi_x(j) = \frac{\sigma_p^2 \Gamma}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j 2\pi f k}|^2}. \quad (3.33)$$

Для вычисления оценки СПМ  $\Phi_x(j)$  необходимо подставить значения оценок параметров ( $a_1, \dots, a_p, \sigma_p^2$ ) АР-модели.

Вопросы для самопроверки

1. Покажите способ получения нормальных уравнений Юла-Уокера на основе вычисления АКФ.
2. В чем суть алгоритма Левинсона-Дербина?
3. Каковы достоинства алгоритма Левинсона-Дербина при его использовании в задаче спектрального оценивания?
4. Каким образом вычисляется оценка СПМ на основе параметров АР-модели?

## 3.3. МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

### 3.3.1. Принцип максимизации энтропии в спектральном анализе

Задача спектрального оценивания относится к классу задач принятия решений в условиях неполной информации. В самом деле, в соответствии с преобразованием Винера-Хинчина (1.9) для получения «точного» значения СПМ необходимо знать всю корреляционную последовательность на интервале  $-\infty < m < \infty$ . Практически могут быть известными оценки только конечного числа элементов корреляционного ряда на некотором интервале  $|m| \leq p$ . В связи с этим возникает задача доопределения АКФ, аппроксимации отсчетов АКФ  $R_x(m)$  для  $m = p+1, p+2, \dots$  по  $p$  первым значениям автокорреляционного ряда. Эта задача может решаться по-разному. С двумя подходами мы уже ознакомились. В частности, в корреляционном методе оценки СПМ (см. п.2.2) неизвестные отсчеты АКФ за пределами временного окна просто полагаются равными нулю. При АР-оценивании коэффициенты ( $a_1, \dots, a_p$ ) в системе (3.24) определяются по  $p$  первым известным отсчетам автокорреляционного ряда  $R_x(m)$ ,

$m=0, 1, \dots, p$ . После того как коэффициенты определены, значения последующих отсчетов автокорреляционного ряда, как видно из (3.24), оказываются связанными со значениями предшествующих отсчетов рекуррентным соотношением

$$R_x(m) = - \sum_{i=1}^p a_i R_x(m-i), \quad m > p. \quad (3.34)$$

Формула (3.34) позволяет рекурсивно получить значения  $R_x(m)$  для произвольно большого  $m$ . Можно, однако, ожидать, что подход, основанный на процедуре (3.34), не является единственным.

Теоретически существует неограниченно большое число способов аппроксимации бесконечного абсолютно сходящегося ряда по его первым  $p$  членам. В нашем случае таким рядом является корреляционная последовательность. Кроме того, для рассмотренных моделей не существует доказательства их оптимальности. Так, АР-модель выбрана (см. 3.1.4) не на строгой научной основе, а с учетом «здорового» смысла: эмпирического опыта, удобства аналитического описания.

Попытки иного подхода к рассматриваемой задаче предпринимались многими исследователями. Наибольший интерес представляет энтропийный подход, получивший довольно широкое признание.

Принцип максимальной энтропии (МЭ) гласит: если предпринимается попытка сделать какие-то выводы по неполной информации, то необходимо опираться на такое распределение вероятности, которое имеет максимальную энтропию, допускаемую априорной информацией [2]. Таким образом, под задачу выбора подводится теоретическая база. Применительно к спектральному оцениванию основная идея метода максимальной энтропии состоит в выборе такого спектра, который соответствует наиболее случайной (наименее предсказуемой) временной последовательности, корреляционная функция которой совпадает с заданной последовательностью оцененных величин. Другими словами, корреляционная функция по методу МЭ экстраполируется так, чтобы энтропия данных, характеризуемых этой функцией, была максимальна.

### 3.3.2. Способ вычисления оценки СПМ на основе принципа МЭ

Приведем вывод формулы для расчета СПМ по методу МЭ. По Шеннону энтропия пропорциональна интегралу от логарифма спектральной плотности:

$$H = \int_{-1/2}^{1/2} \ln [\Phi_x(f)] df. \quad (3.35)$$

В наших выкладках мы воспользуемся преобразованием Винера-Хинчина, которое запишем в виде

$$\Phi_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j2\pi f m} \quad (3.36)$$

и

$$R(m) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_x(f) e^{j2\pi f m} df. \quad (3.37)$$

Предположим, что СПМ  $\Phi_x(f)$  — положительно определенная функция, т. е.  $\Phi_x(f) > 0$ ,  $-1/2 \leq f \leq 1/2$ . Это предположение не противоречит физическому смыслу СПМ. В самом деле, СПМ по своей сути не может быть отрицательной, процесс  $x(n)$ , ограниченный по времени, строго говоря, имеет бесконечный спектр, и, следовательно, СПМ таких процессов не равна нулю.

По-прежнему будем полагать, что автокорреляционная последовательность  $R(m)$  задана лишь на интервале  $|m| \leq p$ . Потребуем, чтобы корреляционный ряд удовлетворял условию максимума энтропии и, кроме того, его значения на интервале  $|m| \leq p$  соответствовали заданным. Для этого вычислим производные

$$\frac{\partial H}{\partial R_x(m)} = \frac{d}{dR_x(m)} \int_{-1/2}^{1/2} \ln \Phi_x(f) df \quad \text{при } |m| > p. \quad (3.38)$$

Из преобразования (3.36) видно, что частная производная

$$\frac{\partial \Phi_x(f)}{\partial R_x(m)} = e^{-j2\pi f m}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \ln \Phi_x(f)}{\partial R_x(m)} = \frac{e^{-j2\pi f m}}{\Phi_x(f)} = |\Phi_x(f)|^{-1} e^{-j2\pi f m}. \quad (3.39)$$

Подставим выражение (3.39) в (3.38) и для получения условия максимума энтропии приравняем производные (3.38) нулю:

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi_x(f)|^{-1} e^{-j2\pi f m} df = 0 \quad \text{при } |m| > p. \quad (3.40)$$

Так как  $\Phi_x(f)$  — функция четная, то заменив в (3.40) переменную интегрирования  $f' = -f$ , получим

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi_x(f)|^{-1} e^{j2\pi f m} df = 0 \quad \text{при } |m| > p. \quad (3.41)$$

Этим уравнением предопределяется вид спектральной плотности для процесса с максимальной энтропией. В самом деле, как предполагалось, спектральная плотность  $\Phi_x(f)$  положительно определена, тогда и обратная спектральная плотность

$$|\Phi_x(f)|^{-1} = 1/\Phi_x(f)$$

также определена положительно. Предположим, что эта СПМ представляет собой интегрируемую ограниченную функцию. Это означает, что функцию  $|\Phi_x(f)|^{-1}$  можно рассматривать как обычную спектральную плотность, не имеющую особенностей. Применим на этом основании преобразование Винера-Хинчина к обратной спектральной плотности

$$\Psi(m) = \int_{-1/2}^{1/2} |\Phi_x(f)|^{-1} e^{j2\pi fm} df. \quad (3.42)$$

Нетрудно заметить, что ряд  $\Psi(m)$ , имеющий смысл корреляционной последовательности, существует вообще для всех целочисленных  $m$ . Кроме того, поскольку мы не вводим нормировку, величина  $\Psi(0)$  при нулевой задержке не обязательно равна единице. Вместе с тем в рассматриваемом нами случае для процесса с максимальной энтропией, как видно из выражения (3.41),  $\Psi(m) \equiv 0$  при  $|m| > p$ . Поэтому преобразование, обратное (3.42), имеет вид

$$|\Phi_x(f)|^{-1} = \sum_{m=-p}^p \Psi(m) e^{-j2\pi fm}. \quad (3.43)$$

Из (3.43) следует, что процесс с максимальной энтропией—это процесс, обратная спектральная плотность которого представляет собой конечный тригонометрический ряд. Для спектральной плотности этого процесса запишем

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{\sum_{m=-p}^p \Psi(m) e^{-j2\pi fm}}. \quad (3.44)$$

Положив в (3.44)  $z = e^{j2\pi f}$ , представим СПМ как функцию комплексного переменного  $z$ :

$$\Phi_x(z) = \frac{1}{\sum_{m=-p}^p \Psi(m) z^{-m}}. \quad (3.45)$$

Сумма в знаменателе правой части (3.45) допускает факторизацию в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-p}^p \Psi(m) z^{-m} = \\ & = \frac{1}{\sigma_p^2 T} (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}) (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p) = \\ & = \frac{1}{\sigma_p^2 T} A(z) A(z^{-1}), \end{aligned} \quad (3.46)$$

где  $\sigma_p^2$  — положительная константа.

Подставим (3.46) в (3.45), тогда

$$\Phi_x(z) = \frac{\sigma_p^2 T}{A(z) A(z^{-1})}. \quad (3.47)$$

Передаточная функция

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (3.48)$$

не имеет полюсов на единичной окружности в  $z$ -плоскости и вне этой окружности. Поэтому передаточная функция (3.48) соответствует устойчивому минимально-фазовому цифровому фильтру. Сравнение функций (3.47), (3.48) с (3.6) показывает, что процесс с максимальной энтропией представляет собой АР-процесс  $p$ -го порядка. На единичной окружности  $z$ -плоскости выражение (3.47) преобразуется к виду

$$\Phi_x(f) = \frac{\sigma_p^2 T}{|1 + \sum_{m=1}^p a_m e^{-j2\pi f m}|^2}. \quad (3.49)$$

Формула (3.49) представляет собой расчетное выражение для СПМ по методу максимальной энтропии и идентична формуле (3.33).

Для практического вычисления параметров  $(a_1, \dots, a_p)$  устройства предсказания  $p$ -го порядка и мощности  $\sigma_p^2$  ошибки предсказания в настоящее время известны два способа. Один из них предполагает прямое вычисление коэффициентов с помощью решетчатых фильтров предсказания ошибки. С этим способом, который некоторые авторы связывают с методом МЭ [9], мы ознакомимся ниже в п. 3.4. Второй способ, когда известны  $(R_x(0), \dots, R_x(p))$ , включает при вычислении параметров решение системы нормальных уравнений (3.24). В этом случае метод спектральной оценки по максимуму энтропии оказывается полностью эквивалентным методу АР-оценки, изложенному в пп. 3.1 и 3.2. Эта эквивалентность означает, что АР-процесс  $p$ -порядка является одновременно процессом максимальной энтропии также  $p$ -го порядка.

## Вопросы для самопроверки

1. Логическая сущность метода максимальной энтропии.
2. Способ вычисления оценки СПМ на основе принципа МЭ.

### 3.4. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ РЕШЕТЧАТЫХ СТРУКТУР

#### 3.4.1. Общие сведения

В рассмотренных косвенных методах неявно предполагалось наличие в процедуре спектрального анализа дополнительного этапа предварительной оценки значений отсчетов  $(R_x(0), \dots, R_x(p))$  автокорреляционной последовательности по имеющимся реализациям данных. Вместе с тем существует прямой метод, в котором процедуры оценки отсчетов корреляционной последовательности и идентификации параметров модели совмещены. Этот метод основан на использовании адаптивных цифровых фильтров с решетчатой структурой. Решетчатый фильтр по своей сути является фильтром предсказания ошибки или обеливающим, обратным фильтром (см. п. 3.1). В решетчатой структуре вычисляются так называемые частные коэффициенты корреляции, поэтому подход, основанный на решетчатых структурах, именуют иногда методом частной корреляции *PARCOR*. С его помощью вычисляются в конечном итоге АР-оценки СПМ. В нем эффективно реализуются достоинства алгоритма Левинсона-Дербина, в частности возможность определения совместно с АР-моделью  $p$ -го порядка всех моделей низшего порядка (см. 3.2.2). Решетчатые структуры стали играть важную роль в спектральном анализе еще и потому, что обеспечивают быструю сходимость и относительно слабую чувствительность к ошибкам округления. В настоящее время разработана достаточно глубокая теория спектрального оценивания на основе решетчатых структур и предложены различные варианты таких структур. Мы, однако, ограничимся случаем наиболее простого решетчатого оценивающего фильтра.

#### 3.4.2. Решетчатый фильтр предсказания ошибки

Теория решетчатых фильтров основывается на теории линейного предсказания (см. 3.1.5).

Для задач спектрального оценивания уравнения оценки параметров модели по критерию минимальной среднеквадратической ошибки можно преобразовать в уравнения, допускающие многоступенчатую, каскадную оценку параметров. При этом оказывается, что оценку параметра, соответствующего некоторой ступени, можно провести независимо для каждой ступени.

Это качество реализуется в решетчатых фильтрах предсказания ошибки.

При выводе уравнений, описывающих решетчатый фильтр, используются понятия фильтра ошибки прямого предсказания и фильтра ошибки обратного предсказания. Задача прямого предсказания решалась нами в 3.1.5. Как следует из формулы (3.10), для предсказателя  $p$ -го порядка отсчет данных  $x(n)$  в момент времени  $n$  аппроксимируется линейной комбинацией  $p$  предшествующих отсчетов  $x(n-1), \dots, x(n-p)$ . Чтобы обеспечить минимальное значение среднеквадратической ошибки, согласно принципу ортогональности, ошибка прямого предсказания (см. (3.12)) и предыдущие отсчеты данных должны быть взаимно некоррелированными. Учитывая эти положения, запишем выражение для ошибки предсказателя

$$e_p(n) = x(n) + a_{p,1}x(n-1) + \dots + a_{p,p}x(n-p), \quad (3.50)$$

и условие ортогональности

$$E[e_p(n)x(n-i)] = 0, \quad 1 \leq i \leq p. \quad (3.51)$$

Здесь и далее первый подстрочный индекс означает порядок фильтра предсказания.

Выражение (3.51) является условием для оптимального в смысле критерия МСКО выбора весовых коэффициентов  $(a_{p,1}, \dots, a_{p,p})$ . Заметим, что в литературе ошибку  $e_p(n)$  иногда называют *остатком предсказания* или *нововведением*.

Фильтр предсказания ошибки может работать и в обратном направлении. Определим ошибку обратного предсказания  $b_p(n)$  как разность между  $x(n-p)$  и величиной  $\hat{x}(n-p)$ , предсказываемой по отсчетам процесса  $x(n-p+1), x(n-p+2), \dots, x(n)$ . Тогда

$$b_p(n) = x(n-p) + c_{p,p}x(n-p+1) + \dots + c_{p,1}x(n). \quad (3.52)$$

Ясно, что коэффициенты  $c_{p,i}$  фильтра обратного предсказания нужно выбирать, предположив выполнение условия ортогональности

$$E[b_p(n)x(n-i+1)] = 0, \quad 1 \leq i \leq p. \quad (3.53)$$

Как видно из выражений (3.50) и (3.52), предсказание обратной ошибки производится по тем же отсчетам, что и предсказание прямой ошибки, только взятым в обратном порядке. Кроме того, обе ошибки удовлетворяют одним и тем же условиям ортогональности (3.51), (3.53). Поэтому коэффициенты фильтра обратного предсказания соответствуют коэффициентам фильтра прямого предсказания, взятым в обратном порядке:

$$c_{p,i} = a_{p,p-i+1}. \quad (3.54)$$

Во избежание недоразумений заметим, что в случае комплексных фильтров, величины в правой части (3.54) берутся

комплексно-сопряженными. Это обстоятельство для нас не имеет значения, поскольку мы рассматриваем вещественные фильтры.

Учитывая (3.54), перепишем уравнение (3.52) в виде

$$b_p(n) = x(n-p) + a_{p,p} x(n-p+1) + \dots + a_{p,p} x(n). \quad (3.55)$$

При увеличении порядка предсказаний до  $(p+1)$  ошибка предсказания  $e_{p+1}(n)$  дает компоненту  $x(n)$ , которую нельзя предсказать из выборки  $x(n-1), \dots, x(n-p)$  — для этого необходимо пополнить выборку отсчетом  $x(n-p-1)$ . В самом деле, увеличивая на единицу индекс  $p$  в (3.50), можно записать

$$e_{p+1}(n) = x(n) + a_{p+1,p} x(n-1) + \dots + a_{p+1,p} x(n-p) + a_{p+1,p+1} x(n-p-1). \quad (3.56)$$

Однако если воспользоваться прямым и обратным предсказаниями совместно, то можно ограничиться выборкой прежнего размера. Обратимся к уравнению

$$b_p(n-1) = x(n-p-1) + a_{p,p} x(n-p) + \dots + a_{p,p} x(n-1). \quad (3.57)$$

Подставим значение  $x(n-p-1)$  из уравнения (3.57) в (3.56) и после приведения подобных членов получим

$$e_{p+1}(n) = x(n) + (a_{p+1,p} - a_{p,p} a_{p+1,p+1}) x(n-1) + \dots + (a_{p+1,p} - a_{p,p} a_{p+1,p+1}) x(n-p) + a_{p+1,p+1} b_p(n-1). \quad (3.58)$$

Воспользовавшись рекуррентной формулой Левинсона (3.31), выражение (3.58) нетрудно привести к виду

$$e_{p+1}(n) = x(n) + a_{p,p} x(n-1) + \dots + a_{p,p} x(n-p) + a_{p+1,p+1} b_p(n-1).$$

Таким образом, учитывая (3.50), имеем

$$e_{p+1}(n) = e_p(n) + a_{p+1,p+1} b_p(n-1).$$

Выполнив аналогичные выкладки, можно получить выражение для ошибки обратного предсказания  $(p+1)$  порядка

$$b_{p+1}(n) = b_p(n-1) + a_{p+1,p+1} e_p(n).$$

Прямые и обратные операции фильтра предсказания ошибки  $M$ -го порядка можно объединить в решетчатом фильтре, состоящем из  $M$  ступеней, соединенных последовательно (рис. 3.4). Обозначив  $\rho_{m+1} = a_{m+1,m+1}$ , для  $(m+1)$ -й ступени такого фильтра запишем

$$\begin{aligned} e_{m+1}(n) &= e_m(n) + \rho_{m+1} b_m(n-1), \\ b_{m+1}(n) &= b_m(n-1) + \rho_{m+1} e_m(n), \end{aligned} \quad (3.59)$$

где  $n = m+2, m+3, \dots, N$ ;  $m = 0, 1, \dots, M-1$ .

В системе (3.59)  $\rho_{m+1}$  носит название *коэффициента отражения*, в данном случае  $(m+1)$ -й ступени. Коэффициент отражения является одним из двух параметров, которые оценивают-

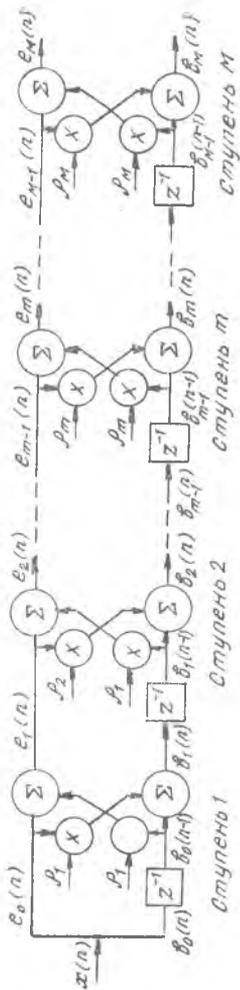


Рис. 3.4. Структурная схема решетчатого фильтра предсказания ошибки

ся в решетчатом фильтре. Вторым таким параметром является средняя мощность сигнала на выходе ступени. Эта мощность вычисляется рекуррентно и в соответствии с (3.32) для  $(m+1)$ -й ступени составляет

$$\sigma_{m+1}^2 = (1 - |\rho_{m+1}|^2) \sigma_m^2, \quad (3.60)$$

где  $\sigma_m^2$  — средняя мощность на выходе  $m$ -й ступени. Заметим, что средняя мощность  $\sigma_m^2$  имеет смысл дисперсии ошибки предсказания  $m$ -ступенчатого решетчатого фильтра.

В решетчатом фильтре при стационарных входных воздействиях для сигналов  $b_i(n)$  выполняется условие ортогональности

$$E[b_i(n) b_k(n)] = 0 \quad \text{при } i \neq k,$$

которое означает независимость этих сигналов. Благодаря этому важному свойству, как уже упоминалось, имеется возможность покаскадной оптимизации параметров фильтра. Рассмотрим процедуру этой оптимизации.

Пусть на вход решетчатого фильтра поступает некоторая реализация анализируемого процесса длины  $N$  отсчетов:  $x(1), x(2), \dots, x(N)$ . Эта последовательность инициирует прохождение сигналов  $e_i(n)$  и  $b_i(n)$  через все ступени фильтра. Для  $(m+1)$ -й ступени коэффициент отражения определяется из условия минимизации среднеарифметического среднего ошибок прямого и обратного предсказания

$$\begin{aligned} \sigma_{m+1}^2 &= 1/2 (\sigma_{e_{m+1}}^2 + \sigma_{b_{m+1}}^2) = \\ &= \frac{1}{2(N-m-1)} \sum_{n=m+2}^N [ |e_{m+1}(n)|^2 + |b_{m+1}(n)|^2 ]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Применяя обычную процедуру определения экстремума

$$\frac{\partial \sigma_{m+1}^2}{\partial \rho_{m+1}} = 0$$

и учитывая (3.59), получим выражение для оценки коэффициента отражения в виде

$$\hat{\rho}_{m+1} = \frac{-2 \sum_{n=m+2}^N e_m(n) b_m(n-1)}{\sum_{n=m+2}^N [|e_m(n)|^2 + |b_m(n-1)|^2]}, \quad (3.62)$$

Формулу (3.62) в литературе именуют иногда *формулой Берга* или *гармонического среднего*. Формула (3.62) имеет вид выражения, характерного для коэффициента корреляции, поэтому коэффициенты отражения именуют так же, как частные коэффициенты корреляции — *PARCOR\**.

Параметрами решетчатого фильтра является (см. рис. 3.4) набор коэффициентов  $(\rho_1, \dots, \rho_M)$ . Эти параметры изменяются в соответствии со значением статистических средних параметров анализируемого процесса — поэтому фильтр является адаптивным.

Оценка СПМ вычисляется по расчетной формуле (3.49). Необходимые весовые коэффициенты вычисляются с помощью рекуррентной формулы Левинсона

$$a_{m+1,k} = a_{m,k} + \rho_{m+1} a_{m,m+1-k}, \quad (3.63)$$

где  $k=0, 1, \dots, m+1$ ;  $m=0, 1, \dots, M-1$ .

Кроме того,

$$a_{m+1,k} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0, \\ \rho_{m+1} & \text{при } k=m+1, \\ 0 & \text{при } k>m+1. \end{cases}$$

Заметим, что набору коэффициентов  $(a_{M,1}, a_{M,2}, \dots, a_{M,M})$  соответствует ФПО  $M$ -го порядка (см. рис. 3.3).

### 3.4.3. Алгоритм спектрального оценивания на основе фильтра решетчатой структуры

Алгоритм представляет собой многошаговую итерационную процедуру [9]. Исходными данными для расчета является реализация анализируемого процесса — последовательность длиной  $N$  отсчетов:  $x(n)$ ,  $n=1, \dots, N$ . Эта последовательность поступает на вход решетчатого фильтра (рис. 3.4).

**Шаг 1.** Определение исходных условий для итерационной процедуры:

а) дисперсия входного процесса

\* Мы приводим сведения по терминологии с целью облегчения использования различных источников, в связи с тем, что в рассматриваемой теории общепринятая терминология пока еще не установилась.

$$\sigma_0^2 = 1/N \sum_{n=1}^N |x(n)|^2; \quad (3.64)$$

б) входные сигналы для первой ступени

$$e_0(n) = b_0(n) = x(n), \quad n=1, \dots, N. \quad (3.65)$$

Шаг 2. Оценка параметров первой ступени:

а) положим в (3.62)  $m=0$  и, учитывая (3.65), получаем коэффициент отражения

$$\hat{\rho}_1 = \frac{-2 \sum_{n=2}^N x(n)x(n-1)}{\sum_{n=2}^N [|x(n)|^2 + |x(n-1)|^2]}; \quad (3.66)$$

б) с учетом (3.60) дисперсия ошибки предсказания будет

$$\sigma_1^2 = (1 - |\hat{\rho}_1|^2) \sigma_0^2; \quad (3.67)$$

в) на основании (3.59) получим ошибки прямого  $e_1(n)$  и обратного  $b_1(n)$  предсказания

$$e_1(n) = x(n) + \rho_1 x(n-1), \quad n = \dots, 2, 3, \dots, N, \quad (3.68)$$

$$b_1(n) = x(n-1) + \rho_1 x(n);$$

г) согласно (3.63) имеем коэффициент ФПО

$$a_{1,1} = \hat{\rho}_1. \quad (3.69)$$

Шаг 3. Оценка параметров второй ступени решетчатого фильтра.

Увеличим  $m$  на единицу и, используя оценки параметров предшествующей ступени, определим:

а) оценку коэффициента отражения  $\hat{\rho}_2$  по формуле (3.62);

б) дисперсию ошибки предсказания  $\hat{\sigma}_2^2$  по (3.60);

в) ошибки прямого  $e_2(n)$  и обратного  $b_2(n)$  предсказания по (3.59);

г) весовые коэффициенты ФПО по формулам (3.63), в частности, для второй ступени эти коэффициенты имеют вид

$$a_{2,1} = a_{1,1} + \hat{\rho}_2 a_{1,1} = \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2 \hat{\rho}_1,$$

$$a_{2,2} = \hat{\rho}_2.$$

Шаг 4 и последующие. Оценка параметров соответственно 3-й и последующих ступеней.

Эти операции выполняются в объеме, соответствующем содер-

жанию шага 3. Итерационную процедуру оценки параметров закончим, когда приходим к заданному порядку  $M$ .

Шаг заключительный. Вычисление оценки СПМ.

Имея полный набор коэффициентов  $(a_{M,1}, a_{M,2}, \dots, a_{M,M})$ , а также оценку дисперсии ошибки предсказания  $\sigma_M^2$ , по формуле (3.49) вычислим АР оценку спектра.

Заметим, что если порядок решетчатого фильтра априори не известен, итерационную процедуру оценки параметров можно закончить по достижении монотонно убывающей дисперсией ошибки предсказания некоторого нижнего порога. Для этого каждый шаг итераций необходимо дополнить операцией сравнения значения дисперсии с порогом. Если пороговое значение дисперсии априори также известно, можно рекомендовать выбрать пороговую дисперсию на основании анализа закономерности зависимости дисперсии от порядка фильтра. Предпосылки для такого анализа обсуждались в 3.2.2 (см. также 3.5).

Вопросы для самопроверки

1. В чем смысл фильтров прямого и обратного предсказания ошибки?

2. Каким образом операции прямого и обратного предсказания объединяются в решетчатом фильтре?

3. Начертите структурную схему решетчатого фильтра и дайте к ней пояснения.

4. Из каких условий и каким образом определяются коэффициенты отражения?

5. Какова связь между коэффициентами ФПО и коэффициентами отражения?

6. Воспроизведите алгоритм спектрального оценивания на основе решетчатого фильтра.

### 3.5. ОСОБЕННОСТИ АР-ОЦЕНОК СПМ. ВЫБОР ПОРЯДКА МОДЕЛИ

В некоторых случаях в АР-оценках СПМ отмечаются аномалии. Известно несколько причин возникновения аномалий. Рассмотрим наиболее существенные из них.

Возникновение ложных максимумов. Как уже отмечалось, оценки АР-параметров АР-процесса  $p$ -го порядка удовлетворяют условию

$$\hat{a}_{p,i} = \begin{cases} a_{p,i}, & i = 1, 2, \dots, p, \\ 0, & i = p+1, p+2, \dots \end{cases}$$

Иными словами, при последовательной генерации АР-моделей возрастающего порядка происходит «автоматическое» огра-

нение порядка модели по достижении им значения порядка процесса. Однако такое положение имеет место только в идеальном случае, когда коэффициенты отражения вычисляются без ошибок. Реально при наличии ошибки оценивания оказывается, что  $a_{p,i} \neq 0$  при  $i > p$ . В передаточной функции модели появляются «лишние» полюсы. Если оцениваемые значения этих полюсов расположены вблизи единичной окружности в  $z$ -плоскости, то появляются ложные спектральные максимумы. По этой причине при наличии априорной информации рекомендуется ограничивать порядок модели.

**Расщепление спектральных линий.** В работе [3] отмечается, что при анализе процессов, состоящих из смеси синусоидального процесса с шумом, вместо одного максимума, соответствующего спектральной линии синусоиды, спектральная оценка может иметь два близко расположенных максимума. Тем самым ложно указывается на наличие в спектре процесса второй синусоиды. Это явление называется *расщеплением спектральных линий*. Расщепление спектральных линий наиболее вероятно при большом отношении сигнал-помеха. Кроме того, вероятность расщепления зависит от начальной фазы синусоиды, а также некоторых других факторов [3]. Явление расщепления ослабляется с увеличением длины реализации анализируемого процесса.

Помимо аномалий возможно ухудшение качества АР-оценок, обусловленное неудачным выбором вида модели. В частности, отмечается [8], что к процессам со строго линейчатый спектром, т. е. состоящим из одних детерминированных гармонических компонент, в отсутствие флюктуационного шума принцип максимума энтропии не применим. Вместе с тем возможно возникновение трудностей в случае, если в анализируемом процессе присутствует некоррелированный аддитивный шум (белый шум), так как модель авторегрессии не соответствует корреляционный функции белого шума. Наличие такого шума (шума наблюдения) приводит к ухудшению частотного разрешения, при этом разрешение понижается по мере уменьшения отношения сигнал/помеха.

Ослабить степень ухудшения спектральной АР-оценки в присутствии шума наблюдения предложено несколькими способами [3]:

- использование АРСС-моделей;
- предварительная фильтрация данных для снижения уровня шума;
- использование АР-модели высокого порядка;
- введение компенсации шума либо в оценках АКФ, либо в оценках коэффициентов отражения.

Обратимся к вопросу о выборе порядка АР-модели. При

выборе заниженного порядка модели спектральные оценки получаются излишне сглаженными; наоборот, при завышенном порядке — в спектре образуются ложные детали. Интуитивно ясно, что существует некоторая наилучшая величина порядка. На практике берется несколько моделей различного порядка, и по ним выбирается требуемый порядок. Сложность состоит в определении критерия для такого выбора. Для этой цели рассчитывается или выбирается на основе накопленного опыта какой-либо критерий, характеризующий ошибку оценки СПМ. Одним из таких критериев является величина так называемой *оконечной ошибки предсказания* (ООП) [3]. Оконечная ошибка предсказания для АР-процесса определяется как

$$\text{ООП}_p = \sigma_p^2 (N + p + 1) / (N - p - 1), \quad (3.70)$$

где  $N$  — число отсчетов данных,  $p$  — порядок АР-модели. Нетрудно видеть, что ООП <sub>$p$</sub>  в функции порядка  $p$  имеет экстремум—минимум. В самом деле, дисперсия ошибки предсказания  $\sigma_p^2$  монотонно убывает с увеличением  $p$ . С другой стороны, в (3.70) дробный член увеличивается при приближении  $p \rightarrow N$ . Выбираемый порядок равен величине  $p$  в (3.70), при которой значение оконечной ошибки достигает минимума.

Кроме критерия ООП <sub>$p$</sub>  предложено несколько других критериев, описание которых можно найти в литературе [3]. Следует отметить, что в случае «коротких» реализаций данных критерий (3.70) не обеспечивает удовлетворительных результатов [3]. При анализе «коротких» сегментов данных рекомендуется выбирать порядок модели равным от  $N/3$  до  $N/2$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии изложены основы наиболее известных методов цифрового спектрального анализа. Вместе с этим, в спектральном анализе, как в одном из направлений цифровой обработки сигналов, большое значение имеют вопросы, связанные с приложениями методов анализа и с их реализацией в технических устройствах. Эти вопросы составляют самостоятельную проблему, выходящую за рамки настоящего пособия. По сему ограничимся краткими замечаниями по этому поводу.

В настоящее время наибольшее применение получили методы, основанные на ДПФ. Метод максимальной энтропии (АР-оценивания) пока имеет меньшее распространение. Однако известны сообщения об успешном использовании этого метода при обработке речевых сигналов, мешающих отражений в радиолокации [9], в адаптивных системах. В частности, на основе метода максимальной энтропии может быть получено повышен-

ное разрешение при обработке сигналов в антенных решетках [8].

Теория и практика цифрового спектрального анализа продолжают совершенствоваться. Изложенные в пособии методы (кроме метода узкополосной фильтрации) предполагают получение оценки СПМ по реализации анализируемого процесса фиксированной длины и мало приспособлены для анализа развивающихся процессов. Вместе с тем, во многих случаях представляет интерес динамический спектральный анализ, проводимый в реальном времени. Новые подходы в этом плане развиваются в работе [11].

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
2. Джейнс Э. Т. О логическом обосновании методов максимальной энтропии // ТИИЭР. Т. 70. 1982. № 9.
3. Кей С. М., Марпл С. Л. Современные методы спектрального анализа // ТИИЭР. Т. 69. 1981. № 11.
4. Кузенков В. Д. Методы и устройства цифровой обработки сигналов: Учебное пособие / Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1988. 96 с.
5. Мизин И. А., Матвеев А. А. Цифровые фильтры (анализ, синтез, реализация с использованием ЭВМ). М.: Связь, 1979. 240 с.
6. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. М.: Связь, 1979. 416 с.
7. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 848 с.
8. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов: Пер. с англ. / Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата. М.: Радио и связь, 1989. 472 с.
9. Хайкин С., Карри Б. У., Кеслер С. Б. Спектральный анализ радиолокационных мешающих отражений методом максимальной энтропии // ТИИЭР. Т. 70. 1982. № 9.
10. Харрис Ф. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // ТИИЭР. Т. 68. 1978. № 1.
11. Цифровые анализаторы спектра / В. Н. Плотников, А. В. Белинский, В. А. Суханов, Ю. Н. Жигулевцев. М.: Радио и связь, 1990. 184 с.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие . . . . .	3
1. Задача спектрального оценивания и подходы к ее решению . . . . .	4
1.1. Общие сведения . . . . .	4
1.2. Определение понятия СПМ . . . . .	5
1.3. Основные понятия теории оценок . . . . .	8
1.4. Оценки АКФ . . . . .	9
1.5. Вычисление оценок АКФ с помощью БПФ . . . . .	12
2. Непараметрические методы спектрального анализа . . . . .	15
2.1. Метод узкополосной фильтрации . . . . .	15
2.2. Спектральное оценивание на основе Фурье-преобразования . . . . .	18
2.3. Вычисление спектральной плотности мощности по корреляционной последовательности . . . . .	33
3. Спектральное оценивание методами моделирования процессов и идентификации параметров моделей . . . . .	37
3.1. Подход к оценке СПМ на основе моделирования . . . . .	37
3.2. Авторегрессивное оценивание СПМ на основе АКФ . . . . .	46
3.3. Метод максимальной энтропии . . . . .	51
3.4. Спектральное оценивание на основе решетчатых структур . . . . .	56
3.5. Особенности АР-оценок СПМ. Выбор порядка модели . . . . .	62
З а к л ю ч е н и е . . . . .	64
Б и б л и о г р а ф и ч е с к и й   с п и с о к . . . . .	65

Кузенков Виктор Дмитриевич

## ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Редактор Е. Д. Антонова  
Техн. редактор Н. М. Каленюк  
Корректор Н. С. Куприянова

Свод. тем. пл. № 956.

Сдано в набор 28.08.90 г. Подписано в печать 24.01.91 г.  
Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная.  
Гарнитура литературная. Печать высокая.  
Усл. п. л. 3,95. Усл. кр.-отг. 4,0. Уч.-изд. л. 3,85.  
Тираж 400 экз. Заказ 598. Цена 30 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт имени академика С. П. Королева.  
443086 Куйбышев, Московское шоссе, 34.

---

Тип. ЭОЗ Куйбышевского авиационного института  
443001 Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.