МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Лаборатория математической физики

В.В. Бондаренко, В.М. Долгополов,
М.В. Долгополов, И.Н. Родионова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Самара
Издательство «Универс групп»
2011

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

ББК 22.141
УДК 517.55
Б81

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.П. Радченко

Бондаренко, В.В.

Б81 Дифференциальное исчисление: учеб. пособие / В.В. Бондаренко, В.М. Долгополов, М.В. Долгополов, И.Н. Родионова. - Самара : Изд-во «Универс групп», 2011. - 92 с.

ISBN 978-5-467-00225-5

Настоящее учебное пособие является второй частью конспекта лекций по курсу «Математический анализ», читаемых студентам направления «Физика». В нем достаточно полно изложен раздел «Дифференциальное исчисление».

Кроме основных методов дифференцирования в данном учебном пособии рассмотрено приложение производных к исследованию функций и приближенному решению уравнений. Приведены варианты индивидуальных заданий.

Настоящее учебное пособие может быть использовано также студентами и бакалаврами механико-математического, химического и биологического факультетов при изучении темы «Дифференциальное исчисление».

Пособие подготовлено в рамках проекта №3341 и 10854 Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки РФ.

ББК 22.141
УДК 517.55

ISBN 978-5-467-00225-5

Оглавление

§1. Задачи, приводящие к понятию производной

1°. Задача вычисления скорости движущейся точки.

Положение движущейся точки на прямой определяется ее расстоянием S, отсчитываемым от некоторой начальной точки. Движение считается заданным, если известна зависимость пути от времени $S = f(t)$, то есть уравнение движения, из которого положение точки определяется для любого момента времени.

Пусть в момент времени t_0 точка находится в положении M_0 (см. рисунок 1). Дадим t_0 приращение Δt. За промежуток времени Δt точка переместится из положения M_0 в положение M_1. $M_0M_1 = \Delta S$ – приращение пути за промежуток времени Δt. Средняя скорость за этот промежуток времени равна

$$V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Очевидно, чем меньше Δt, тем ближе средняя скорость к истинной скорости в момент времени t_0. Поэтому естественно принять за истинную скорость в момент времени t_0 предел, к которому стремится средняя скорость за промежуток времени Δt, если Δt стремится к нулю

$$V_{ист}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

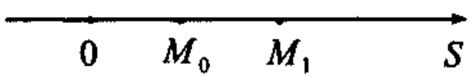

Рис. 1.

2°. Задача о проведении касательной к кривой.

Требуется провести касательную к кривой в точке M_0 (см. рисунок 2). Рассмотрим на кривой произвольную точку M и проведем секущую M_0M. Пусть точка M стремится вдоль кривой к точке M_0, при этом секущая будет стремиться к некоторому предельному положению M_0T.

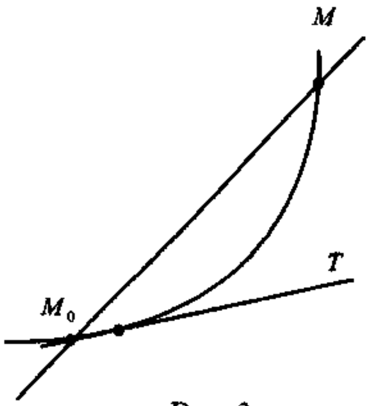

Рис. 2.

Определение 1.1. Касательной к кривой в точке M_0 называется предельное положение M_0T секущей M_0M при условии, что точка M стремится вдоль кривой к точке M_0.

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Дана точка $M_0(x_0, f(x_0))$. Пусть x_0 получит приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Рассмотрим на кривой точку M с координатами $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и проведем секущую M_0M. φ – угол наклона секущей к оси OX. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Пусть $\Delta x \to 0$, тогда $M \to M_0$, секущая M_0M устремится к касательной M_0T. Обозначим угол наклона касательной к оси OX α. Тогда $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Мы получили угловой коэффициент касательной (см. рисунок 3).

§2. Определение производной, ее физический и геометрический смысл

В рассмотренных выше задачах по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение аргумента и за-

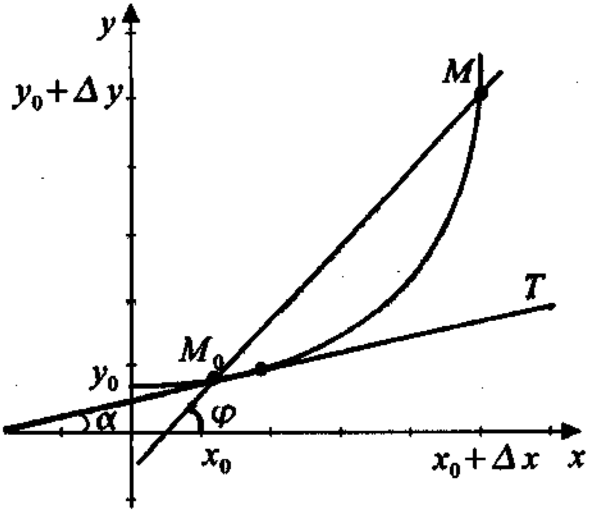

Рис. 3.

тем вычислялся предел их отношения. Таким путем мы и приходим к основному понятию дифференциального исчисления – к понятию производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X. Возьмем значение $x_0 \in X$ и дадим ему произвольное приращение Δx ($\gtrless 0$), так чтобы $(x_0 + \Delta x) \in X$. Вычислим соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение 2.1. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что $\Delta x \to 0$, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается:

$$\frac{df(x_0)}{dx}, \;\; y'(x_0), \;\; f'(x_0), \;\; \frac{dy(x_0)}{dx}.$$

Из определения производной следует, что производная в точке есть число. Если в каждой точке множества X существует производная, то она является функцией точки множества X.

Определение 2.2. Функция, имеющая в точке x_0 конечную производную, называется дифференцируемой в этой точке.

Если в каждой точке множества X существует конечная производная, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на множестве X.

Та часть математического анализа, которая занимается вычислением и исследованием производных, называется дифференциальным исчислением.

Из определения производной и задачи 1° следует, что если $S = f(t)$ – уравнение движения, то производная от пути по времени есть истинная скорость в момент времени t,

$$V_{\text{ист}} = \frac{dS}{dt}.$$

Если слово «скорость» понимать в более общем смысле, то можно сказать, что $f'(x)$ есть скорость изменения функции $y = f(x)$ по сравнению с некоторой переменной x.

Из определения производной и задачи 2° следует, что если $y = f(x)$ уравнение кривой, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой x_0. Отсюда

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

– уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, а

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

– уравнение нормали к этой же кривой в данной точке.

Теорема 2.1. **Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.** *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$. Умножим обе части последнего равенства на Δx:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{1}$$

Мы получили, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то для ее приращения в этой точке справедлива формула (1). Пусть $\Delta x \to 0$, из формулы (1) следует, что при этом $\Delta y \to 0$. Бесконечно малому приращению аргумента в точке x_0 отвечает бесконечно малое приращение функции. По определению $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Замечание. Условие непрерывности $y = f(x)$ в точке x_0 является необходимым условием дифференцируемости, но недостаточным. Функция может быть непрерывна в точке x_0, не не иметь в этой точке производной. Примером является функция $y = |x|$, которая непрерывна всюду, но в точке $x = 0$ не имеет производной. Действительно, в точке $x = 0$ $\Delta y = |\Delta x|$,

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

а

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

То есть не существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $x = 0$.

Задание для самостоятельной работы № 1

1. Точка M удаляется от неподвижной точки A так, что расстояние AM растет пропорционально квадрату времени. По истечении 2 *мин* от начала движения расстояние AM равнялось 12 *м*. Найти среднюю скорость движения: а) за первые 5 *мин*; б) за время от $t = 4$ *мин* до $t = 7$ *мин*; в) за время от $t = t_1$ до $t = t_2$.

2. В тонком неоднородном стержне AB длиной 30 *см* масса (в граммах) распределена по закону $m = 3l^2 + 5l$, где l – длина части стержня, отсчитываемая от точки A. Найти: а) среднюю линейную плотность стержня; б) линейную плотность в точке, отстоящей от точки A на 3 *см*; в) в самой точке A; г) в конце стержня.

3. Под какими углами пересекаются парабола $y = x^2$ и прямая $3x - y - 2 = 0$?

4. В какой точке касательная к кубической параболе $y = x^3$: а) параллельна оси OX; б) образует с осью OX угол 30^0.

§3. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций

Производная постоянной равна нулю.

Возьмем $y = C$. Рассмотрим $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ и дадим ему произвольное приращение Δx,

$$\Delta y = C - C = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

в любой точке $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$C' = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемые на множестве X. Имеют место формулы:

$$(u + v)' = u' + v'. \tag{3}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u; \quad (cu)' = cu'. \tag{4}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}; \qquad \left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{-cv'}{v^2}, \ (v \neq 0). \tag{5}$$

Докажем формулу (5), а формулы (3) и (4) предлагаем читателю доказать самостоятельно.

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

и дадим x приращение Δx, тогда функции получают соответственно приращения $\Delta u, \Delta v, \Delta y$, причем

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{(v + \Delta v)v},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}.$$

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда $\Delta v \to 0$, в силу непрерывности функции $v = v(x)$, которая следует из ее дифференцируемости. Переходя к пределу в последнем равенстве, получаем требуемую формулу.

Если $u = C$, то с учетом того, что $u' = 0$ получаем частный случай формулы (5).

При нахождении производных некоторых элементарных функций проводятся стандартные рассуждения: возьмем произвольное x_0 из области определения данной функции, ему даем произвольное приращение Δx так, чтобы новая точка не вышла за пределы области определения. Вычисляем соответствующее Δy. Составляем $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и находим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Мы нашли производную в точке x_0. В силу произвольного выбора точки x_0, найденная формула будет справедлива для всех x из области определения данной функции.

1. $y = \sin x, \quad \forall x_0 \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x_0,$$

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{6}$$

2. Аналогично $(\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x_0 \in (-\infty; +\infty)$. (Доказать самостоятельно).

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{7}$$

3. $y = a^x, \quad \forall x_0 \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^{x_0}\ln a.$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x. \tag{8}$$

4. $y = \ln x, \quad \forall x_0 \in (0; +\infty)$.

$$\Delta y = \ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0 = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{x_0\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{9}$$

Для $\log_a x$ применим формулу перехода к основанию e:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \ln x \cdot \log_a e.$$

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}. \tag{10}$$

5. Для вычисления производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ применяется правило 4°:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right). \tag{11}$$

Аналогично

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi n). \tag{12}$$

Теорема 3.1. **Производная обратной функции.** *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 отличную от нуля производную $f'(x_0) \neq 0$ и пусть существует обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывная в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда в точке y_0 существует производная обратной функции, которая равна обратной величине производной прямой функции*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Пусть выполняются все условия теоремы. Дадим значению y_0 приращение Δy, тогда функция $\varphi(y)$ получит приращение $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$. Рассмотрим

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

и устремим Δy к нулю, тогда, в силу непрерывности функции $x = \varphi(y)$ в точке y_0, $\Delta x \to 0$. В силу дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Имеем:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

из чего следует, что

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана.

Производные обратных тригонометрических функций $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$.

$y=\arcsin x$ рассмотрим в $(-1;+1)$. Она является обратной функцией для $x=\sin y$. В силу теоремы 3.1 имеем:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1;+1). \tag{13}$$

Аналогично получаем

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1;+1). \tag{14}$$

Функция $y=\operatorname{arctg} x$ в $(-\infty;+\infty)$ является обратной для $x=\operatorname{tg} y$. В силу теоремы 3.1 получаем

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-\infty;+\infty). \tag{15}$$

Аналогично получаем, что

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-\infty;+\infty). \tag{16}$$

Производная сложной функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X, а функция $x=\varphi(t)$ на множестве T, причем значения последней принадлежат множеству X. Тогда на множестве T определена сложная функция $y = f[\varphi(t)]$, где x – промежуточная переменная, t – независимая.

Теорема 3.2. **Производная сложной функции.** *Если функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на множестве T, а функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X, то сложная функция $y = f[\varphi(t)]$ дифференцируема на множестве T и ее производная равна:*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f'(x) \cdot \varphi'(t).$$

Доказательство.

Пусть выполняются условия теоремы. Возьмем $\forall t \in T$ и дадим ему приращение Δt, функция $x = \varphi(t)$ получит приращение

$$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t),$$

а это вызывает приращение функции $y = f(x)$ в соответствующей точке x

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

В силу дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x ее приращение может быть представлено по формуле (1):

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Разделим обе части последнего равенства на Δt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

и устремим Δt к нулю, при этом $\Delta x \to 0$, в силу непрерывности функции $x = \varphi(t)$, которая следует из ее дифференцируемости. А значит и $\alpha(\Delta x) \to 0$. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t)$ в силу дифференцируемости $\varphi(t)$. Получим, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x) \cdot \varphi'(t),$$

а это значит

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\varphi'(t)$$

по определению производной. Теорема доказана.

Примеры.

1) $y = e^{\cos x}$. Найти $\dfrac{dy}{dt}$.

Введем промежуточное переменное $y = e^u$, $u = \cos x$. В силу теоремы 3.2,

$$\frac{dy}{dx} = (e^u)'(\cos x)' = e^u \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \cdot \sin x.$$

2) $y = \sin^2 x$. Найти $\dfrac{dy}{dx}$.

Пусть $y = u^2$, где $u = \sin x$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = (u^2)'(\sin x)' = 2u \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

3) $y = \ln^2 \cos x$. Найти $\dfrac{dy}{dx}$.

$y = u^2$, где $u = \ln t$, а $t = \cos x$.

$$\frac{dy}{dx} = (u^2)'(\ln t)'(\cos x)' = 2u \cdot \frac{1}{t}(-\sin x) =$$

$$= 2\ln\cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -2\,\mathrm{tg}\, x \ln\cos x.$$

В данном примере мы ввели две промежуточные переменные u и t, затем применили теорему 3.2.

Производная степенной функции $y = x^\alpha$

Прологарифмируем данное равенство, затем продифференцируем обе части полученного тождества по x, считая y функции от x.

$$\ln y = \alpha \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Получили, что $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, где α – вещественное число, а x, в общем случае, положительное.

Теперь, после того как мы нашли производные всех простейших элементарных функций, составим таблицу производных этих функций. Рассмотрим два случая, когда x – независимая переменная и когда $u = u(x)$ – функция от x и работает теорема 3.2.

Таблица 1. Таблица производных

№ п.п.	x – независимая переменная	$u = u(x)$
1.	$C' = 0$	
2.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$
3.	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$(a^u)' = a^u \ln a u'$ $(e^u)' = e^u \cdot u'$
4.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
5.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
6.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
7.	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{cos^2 u}$
8.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
9.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

10.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11.	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
12.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Производная показательно-степенной функции $y = [u(x)]^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$.

Прологарифмируем обе части тождества

$$\ln y = v(x) \ln u(x),$$

затем продифференцируем, считая $y = y(x)$ и применяя формулу производной произведения:

$$\frac{y'}{y} = v \cdot \frac{u'(x)}{u} + v' \ln u,$$

откуда

$$y' = y[v \cdot \frac{u'}{u} + v' \ln u] = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Можно сформулировать правило: *чтобы продифференцировать показательно-степенную функцию надо сначала продифференцировать ее как степенную (считая v постоянным), затем как показательную (считая u постоянным), и результаты сложить.*

Задание для самостоятельной работы № 2

I. Продифференцировать указанные функции:

1. $y = \dfrac{2x^4}{b^2 - x^2}$; 2. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$; 3. $y = \sqrt[3]{\dfrac{2x}{1+x^2}}$;

4. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$; 5. $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$;
6. $y=\arcsin^2[\ln(a^3+x^3)]$.

II. Продифференцировать данные функции, используя правило логарифмического дифференцирования: 1. $y=x^{x^2}$;
2. $y=\dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x^2+1}}{(x-5)^3}$; 3. $y=x^{\frac{1}{x}}$; 4. $y=(x^2+1)^{\sin x}$.

§4. Производные высших порядков. Производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, дифференцируемую на множестве X. Так как производная $f'(x)$ является функцией точки множества X, то от нее, в свою очередь, можно искать производную.

Определение 4.1. Производная от производной функции $y=f(x)$ называется производной второго порядка, или второй производной данной функции:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

или

$$f''(x)=(f'(x))'.$$

Примеры.
1) $y=x^6+\sin^2 x+\ln^3 x$.
Дифференцируя получаем:

$$y'=6x^5+2\sin x\cos x+\frac{\ln^2 x}{x}=6x^5+\sin 2x+\frac{\ln^2 x}{x}.$$

Продифференцируем еще раз

$$y''=30x^4+2\cos 2x+\frac{\frac{2\ln x}{x}\cdot x-\ln^2 x}{x^2}=$$

$$= 30x^4 + 2\cos 2x + \frac{2\ln x}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2.$$

2) $y = x^x$.

Воспользуемся правилом дифференцирования показательно-степенной функции:

$$y' = xx^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x),$$

$$y'' = x^x(1 + \ln x)^2 + x^x \frac{1}{x} = x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}.$$

Механический смысл второй производной

Среднее ускорение за промежуток времени Δt равно

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Естественно, за истинное ускорение в момент времени t_0 принять

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{\text{ИСТ}},$$

то есть

$$a_{\text{ИСТ}} = \frac{dv}{dt},$$

но так как

$$v = \frac{ds}{dt},$$

то

$$a_{\text{ИСТ}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\right] = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Таким образом, *ускорение в данный момент времени t_0 равно производной второго порядка от пути по времени.*

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и более высоких порядков. Так,

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right] = f'''(x) = f^{III}(x) = y^{(3)}(x);$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^3 f}{dx^3}\right] = f^{IV}(x) = y^{(4)}(x);$$

и вообще,

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right] = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Кроме определения, мы указываем различные обозначения высших производных. Это римские цифры, указывающие порядок производной, либо арабские цифры, взятые в скобки.

Формулы производных n–го порядка

Из определения высших производных следует, что для отыскания производной n–го порядка функции $y = f(x)$, нужно предварительно вычислить производные всех предыдущих порядков. Однако в ряде случаев удается подметить закономерность образования производных высших порядков и найти общее выражение для n–ой производной, которое зависит только от n и, пользуясь этим выражением, мы можем вычислить производные любых порядков, не вычисляя предшествующих.

Примеры.

1) $y = x^\alpha$,

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},$$

$$\ldots,$$

$$y^n = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}.$$

Итак, мы получили

$$(x^\alpha)^n = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...[\alpha-(n-1)]x^{\alpha-n}.$$

2) $y = a^x$,

$$y' = a^x \ln a,$$

$$y'' = a^x \ln^2 a,$$

$$y''' = a^x \ln^3 a,$$

$$\ldots,$$

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

Таким образом,

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

3) $y = \sin x$,

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{IV} = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \ldots.$$

Можно сделать вывод, что

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Итак,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично можно доказать, что

4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Предлагаем это сделать читателю.

5) $y = \ln(ax + b)$,

$$y' = \frac{a}{ax + b},$$

$$y'' = \frac{-a^2}{(ax+b)^2},$$

$$y''' = \frac{2a^3}{(ax+b)^3},$$

$$y^{IV} = \frac{-2 \cdot 3a^4}{(ax+b)^4},$$

$$y^{V} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4a^5}{(ax+b)^5}.$$

Можно сделать вывод, что

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n},$$

то есть

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}.$$

Формула Лейбница позволяет вычислить производную любого порядка от произведения двух функций. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют на множестве X производные до n–го порядка включительно. Будем вычислять производные высших порядков от их произведения

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v + 3u'v'' + uv'''.$$

Правые части этих формул напоминают разложение степени бинома $(u+v)$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, только вместо степеней u и v стоят производные соответствующих порядков. Таким образом, для любого n мы получаем формулу

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\dots+uv^{(n)}.$$

Или кратко:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

Строгое доказательство формулы Лейбница проводится методом математической индукции.

Пример. Вычислить $(e^x x^3)^{(100)}$.

По формуле Лейбница получаем

$$(e^x x^3)^{(100)}=e^x x^3+100e^x 3x^2+\frac{100\cdot 99}{2}e^x\cdot 3\cdot 2x+\frac{100\cdot 99\cdot 98}{3!}\cdot 6\cdot e^x.$$

Функции, заданные параметрически

Пусть заданы две функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, определенные на множестве T, причем функция $x=\varphi(t)$ имеет себе обратную $t=\overline{\varphi}(x)$. X и Y – множества значений функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно.

Тогда каждому значению $x\in X$, в силу закона $t=\overline{\varphi}(x)$, ставится в соответствие единственное значение $t\in T$, а этому значению t, в силу закона $y=\psi(t)$ будет соответствовать некоторое значение $y\in Y$. Таким образом, мы получили сложную функцию y от x, где t играет роль промежуточной переменной. Можно записать, что $y=\psi[\overline{\varphi}(x)]=f(x)$.

Итак, две функции

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (17)$$

определяют функцию

$$y=f(x). \qquad (18)$$

Задание функции (18) посредством уравнений (17) называется параметрическим заданием функции. Переменная t называется параметром.

Пример.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

На сегменте $[0, \pi]$ функция $x = a\cos t$ монотонна, следовательно, существует обратная ей функция $t = \arccos(x/a)$. Следовательно, эти два уравнения определяют y как функцию от x, которую можно найти подстановкой:

$$y = a\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right) = a\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{x}{a}\right)} =$$

$$= a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Функцию $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ можно получить исключением параметра t. Для этого нужно возвести в квадрат оба уравнения и сложить

$$\begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t, \\ y^2 = a^2\sin^2 t. \end{cases} + \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

($y \geq 0$, так как $\sin t \geq 0$, если $t \in [0, \pi]$).

Дифференцирование параметрически заданных функций

Теорема 4.1. *Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически посредством системы (17), и пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t \in T$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Тогда функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, соответствующей рассматриваемому значению t, и производная этой функции вычисляется по формуле*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Доказательство. По теореме о производной сложной функции имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

но, по теореме о производной обратной функции,

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

В результате получаем (с учетом того, что $\frac{dy}{dt}=\psi'(t)$) требуемую формулу.

Теорема доказана.

Примеры.

1) $x=t^3, y=6t+5$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(6t+5)'}{(t^3)'}=\frac{2}{t^2}.$$

2) $x=a\cos t, y=a\sin t$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=-\operatorname{ctg} t.$$

При нахождении производной второго порядка следует помнить, что $\dfrac{dy}{dx}$ сложная функция от x, где t – промежуточная переменная,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\cdot\frac{dt}{dx}.$$

Дифференцируя первый множитель по t как частное и снова пользуясь теоремой о производной обратной функции, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''\cdot\varphi'-\varphi''\psi'}{(\varphi')^2}\cdot\frac{1}{\varphi'}=\frac{\psi''\cdot\varphi'-\varphi''\cdot\psi'}{(\varphi')^3}.$$

Пример.

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=a\sin t.\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[-\operatorname{ctg}t\right]=-\frac{d}{dt}(\operatorname{ctg}t)\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{(-a\sin t)}=-\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

Задание для самостоятельной работы № 3

I. Найти вторые производные от функций: 1. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; 2. $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$; 3. $y=x^x$ 4. $y=f(\ln x)$.

II. Найти общее выражение для производных порядка n от функции: 1. $y=\sin^2 x$; 2. $y=\ln(ax+b)$; 3. $y=\frac{x}{x^2-1}$; 4. $y==\frac{1}{x^2-5x+6}$; 5. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

III. Для функций, заданных параметрически, найти производные указанного порядка: 1. $\begin{cases} x=a(\varphi-\sin\varphi); \\ y=a(1-\cos\varphi); \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

2. $\begin{cases} x=a\sin t; \\ y=b(1-t^2); \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=?$ 3. $\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ $\frac{d^3y}{dx^3}=?$

IV. Найти производные указанного порядка для функций:
1. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $y^{(100)}=?$ 2. $y=\frac{e^x}{x}$, $y^{(10)}=?$
3. $y=x^2\sin 2x$, $y^{(50)}=?$ 4. $y=\sin^2 x\cdot\ln x$, $y^{(6)}=?$

§5. Односторонние производные. Бесконечные производные

При определении производной функции $f(x)$ в точке x_0 как предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ предполагалось, что $\Delta x\to 0$ как слева, так и справа. Пусть $\Delta x \to 0$, оставаясь больше нуля, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

называется правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$.

Аналогично вводится понятие левой производной функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(x_0).$$

Определение 5.1. Правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что $\Delta x \to 0$ оставаясь больше (меньше) нуля. Правая и левая производные называются односторонними производными.

Для существования производной функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы существовали обе односторонние производные этой функции в данной точке и они были равны между собой. Если нет равенства односторонних производных, то производной в обычном смысле не существует. Мы это видели на примере функции $y = |x|$, где $f'_-(0) = -1$, а $f'_+(0) = 1$.

Чтобы проиллюстрировать геометрически односторонние производные, введем понятие правой и левой касательной к кривой $y = f(x)$.

Определение 5.2. Правой (левой) касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей, проходящей через точку M_0 и точку M_1, лежащую справа (слева) от точки M_0, при условии, что точка M_1 стремится к точке M_0 вдоль кривой.

Если левая и правая касательные к кривой в точке M_0 совпадают, то существует касательная к кривой в точке M_0. В противном случае касательной, в обычном понимании, не существует. Этот случай рассмотрен на рисунке 4.

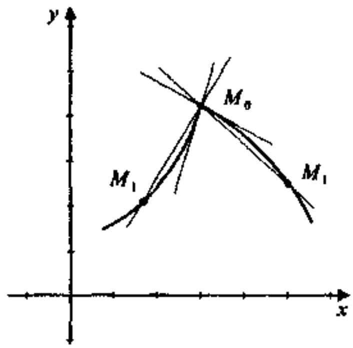

Рис. 4.

Правая (левая) производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту правой (левой) касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Бесконечные производные

Рассмотрим функцию $y = x^{1/3}$ и вычислим по определению ее производную в точке $x = 0$. Получим

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty.$$

В этом случае говорят, что данная функция в точке ноль имеет бесконечную производную.

Определение 5.3. Если в точке x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty,$$

то говорят, что функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет бесконечную производную $f'(x_0) = \infty$.

Геометрически это означает, что график функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет касательную, параллельную оси OY. При изучении поведения графика функции $y = f(x)$ вблизи такой точки полезно рассмотреть односторонние производные. При этом геометрически возможны следующие случаи (см. рисунок 5):

1) $f'_+(x_0) = +\infty$, $f'_-(x_0) = -\infty$;

2) $f'_+(x_0) = +\infty$, $f'_-(x_0) = +\infty$;

3) $f'_+(x_0) = -\infty$, $f'_-(x_0) = +\infty$;

4) $f'_+(x_0) = -\infty$, $f'_-(x_0) = -\infty$.

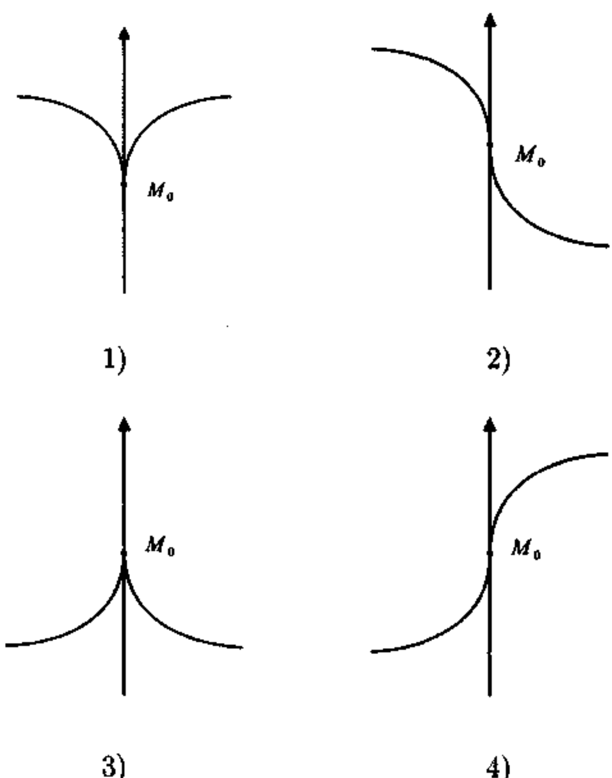

Рис. 5.

§6. Дифференциал

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую в точке x_0. Это значит, что для ее приращения в этой точке справедлива формула (1):

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Пусть $f'(x_0) \neq 0$, тогда второе слагаемое данной формулы будет при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой величиной более высокого порядка по сравнению с первым. Это значит, что первое слагаемое формулы (1) есть главная часть приращения функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 6.1. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке.

Обозначается:

$$f'(x_0)\Delta x = dy(x_0) = df(x_0).$$

Таким образом, при $\Delta x \to 0$ dy и Δy эквивалентные бесконечно малые. Отсюда следует, что при малых Δx $dy \approx \Delta y$.

Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую в точке x_0.

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Построим график данной функции и на нем рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0)$ (см. рисунок 6).

Дадим x_0 приращение Δx, тогда y_0 получит приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

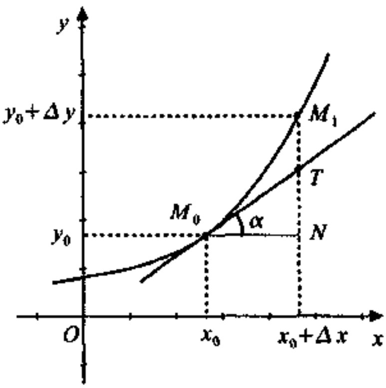

Рис. 6.

Рассмотрим на кривой точку $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Проведем касательную к графику функции в точке M_0. Из треугольника M_0TN имеем:

$$NT = M_0N \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = df(x_0).$$

Таким образом, дифференциал геометрически обозначается отрезком NT, который является приращением ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, соответствующей приращению аргумента Δx.

Следует отметить, что соответствующее приращение ординаты кривой обозначается отрезком NM_1. Геометрически $\Delta y - dy$ есть отрезок TM_1.

В дальнейшем будем считать, по определению, что дифференциал независимой переменной равен ее приращению $dx = \Delta x$ и поэтому, если x – аргумент функции $y = f(x)$, то $dy = f'(x)dx$.

Механический смысл дифференциала

Задан закон движения $S = f(t)$. Скорость в момент времени t_0 равна

$$v = \frac{dS}{dt} = f'(t_0),$$

откуда

$$dS = f'(t_0)dt = v \cdot \Delta t.$$

Дифференциал пути равен длине пути, который прошло бы тело за промежуток времени Δt, если бы в течение этого промежутка оно двигалось с постоянной скоростью, равной скорости в момент времени t_0.

Проиллюстрируем сказанное выше на конкретном примере. Вычислить приближенно на сколько изменится объем куба со стороной x_0, если его сторона изменится на Δx.

Объем куба вычисляется по формуле $V = x^3$. Найдем изменение объема, соответствующее изменению стороны на Δx:

$$\Delta V(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - {x_0}^3.$$

(Из нового значения объема вычитается старое). Возводя в куб и приводя подобные слагаемые, получаем

$$\Delta V(x_0) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Первое слагаемое, содержащее Δx в первой степени и есть главная часть приращения функции $V = x^3$ в точке x_0, то есть ее дифференциал, а сумма второго и третьего слагаемых есть бесконечно малая величина более высокого (второго) порядка относительно первого слагаемого при $\Delta x \to 0$, это и есть $\alpha(\Delta x) = 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$. Ясно, что при малых Δx $\alpha(\Delta x)$ будет таким малым, что им можно пренебречь и заменить приращение $\Delta V(x_0)$ дифференциалом

$$dV(x_0) = 3x_0^2 \cdot \Delta x.$$

Возьмем конкретные значения x_0 и Δx.

а) $x_0 = 5$, $\Delta x = 0,05$. Тогда

$$\Delta V(5) \approx dV(5) = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,05 = 3,75;$$

б) $\Delta x = 0,01$. Тогда

$$\Delta V(5) \approx dV(5) = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,01 = 0,75;$$

в) $\Delta x = 0,001$. Тогда

$$\Delta V(5) \approx dV(5) = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,001 = 0,075.$$

Очевидно, чем меньше изменение независимой переменной, тем меньше погрешность, которая получается в результате замены приращения функции ее дифференциалом.

Рассмотрим еще один способ применения дифференциала в приближенных вычислениях. Рассмотрим приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ в точке x_0 для функции $y = f(x)$ и распишем подробно левую и правую части этого равенства:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x,$$

откуда получаем

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{19}$$

Формула (19) позволяет вычислить значение функции в точке $x = x_0 + \Delta x$, если известно (или легко вычисляется) ее значение в точке x_0, достаточно близкой к точке x (при малых Δx).

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{33}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[5]{x}$. Нам нужно вычислить значение ее в точке $x = 33$, легко вычисляется значение данной функции в точке $x_0 = 32$, $\sqrt[5]{32} = 2$. При этом $\Delta x = 1$. Воспользуемся формулой (19).

$$y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}},$$

$$y'(32) = \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = \frac{1}{5 \cdot 16} = \frac{1}{80},$$

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32} + \frac{1}{80} \cdot 1 = 2,012.$$

Итак, $\sqrt[5]{33} \approx 2,012$.

Правила дифференцирования такие же, как для производной. Это следует из формулы дифференциала. Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции, то:

$$d(u+v) = du + dv;$$

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - udv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Дифференциал сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X, а функция $x = \varphi(t)$ на множестве T. Найдем дифференциал сложной функции $y = f[\varphi(t)] = F(t)$. По формуле дифференциала имеем:

$$dy = \frac{dF}{dt} \cdot dt.$$

По теореме о производной сложной функции получим

$$\frac{dF}{dt} = f'(x) \cdot \varphi'(t),$$

и тогда $dy = f'(x) \cdot \varphi'(t)dt$, но $\varphi'(x)dt = dx$. В результате $dy = f'(x)dx$.

Обратим внимание на то, что дифференциал сложной функции выражается через прмежуточную переменную x также, как и через независимую переменную t. В этом заключается свойство инвариантности формулы деффиринциала первого порядка.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X. Каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие определенное значение дифференциала. Таким образом, дифференциал является функцией точки множества, и от него можно, в свою очередь, искать дифференциал.

Определение 6.2. Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется дифференциалом второго порядка, или вторым дифференциалом этой функции. Обозначается:

$$d(dy) = d^2y.$$

Аналогично можно дать определение дифференциала третьего, четвертого и так далее n-го порядка:

$$d^3y = d(d^2y); \quad d^4y = d(d^3y); \quad \ldots; \quad d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Найдем выражения дифференциалов высших порядков через производные

$$d^2y = d[f'(x)dx] = (f'(x)dx)'dx.$$

Так как x – независимая переменная, то, по определению, $dx = \Delta x$ и на него при дифференцировании можно смотреть как на постоянную, то есть вынести за знак производной. Получим

$$d^2y = f''(x) \cdot dx \cdot dx = f''(x)dx^2,$$

аналогично

$$d^3y = (f''(x)dx^2)' \cdot dx = f'''(x)dx^3,$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$d^ny = f^{(n)}(dx)^n.$$

Мы видели, что дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности. Проверим, будет ли этим свойством обладать дифференциал второго порядка. Рассмотрим сложную функцию $y = f[\varphi(t)]$, где $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$. Как было показано ранее $dy = f'(x)dx$.

Найдем $d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx]$. В данном случае $dx \neq \Delta x$, так как $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$. Поэтому на dx нельзя смотреть как на постоянную, а надо дифференцировать как произведение.

$$d^2y = d[f'(x)]dx + f'(x)d(dx) = (f''(x)\cdot dx)dx + f'(x)d^2x =$$

$$= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

(Не путать: dx^2 – квадрат дифференциала, d^2x – дифференциал второго порядка).

Итак,

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x,$$

откуда следует, что дифференциал второго порядка не обладает свойством инвариантности. Читателю рекомендуется самостоятельно найти формулы для дифференциалов третьего, четвертого порядков сложной функции.

Задание для самостоятельной работы № 4

I. Найти дифференциалы функций: 1. $y = 5^{\ln \operatorname{tg} x}$; 2. $y = \dfrac{\cos x}{1-x^2}$; 3. $y = \left(1 + x - x^2\right)^3$; 4. $y = \arcsin\sqrt[3]{x}$.

II. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно: 1. $\sin 29^0 54'$; 2. $\operatorname{arctg} 1,05$; 3. $\lg 11$; 4. $y = \dfrac{2,9}{\sqrt{2,9^2+16}}$.

III. Найти дифференциалы второго порядка для функций:

1. $y = f(\sin^2 x)$; 2. $y = \dfrac{\cos^3 u}{\operatorname{ch}^2 u}$, $u = 2x^3$; 3. $y = \ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x = t^3$, выразить d^2y через: 1) xdx, 2) tdt.

§7. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 7.1. **Теорема Ферма.** *Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $< a, b >$ и во внутренней точке C этого промежутка принимает свое наибольшее или наименьшее значение. Тогда $f'(C) = 0$, если производная в точке C существует.*

Доказательство.

Пусть выполняются условия теоремы и, для определенности, положим, что в точке C функция $f(x)$ принимает наибольшее значение в промежутке $< a, b >$. Дадим $x = C$ положительное приращение, так чтобы $C + \Delta x \in < a, b >$. Вычислим соответствующее значение

$$\Delta y = f(C + \Delta x) - f(C) < 0$$

(так как значение функции в другой точке промежутка меньше, чем в точке $x = C$). Так как Δx и соответствующее Δy имеют разные знаки, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, откуда, в силу теоремы о предельном переходе в неравенстве, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_+(C) \leq 0. \tag{20}$$

Дадим теперь точке $x = C$ отрицательное приращение Δx, по прежнему, соответствующее Δy будет отрицательным и

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(C) \geq 0. \tag{21}$$

Из неравенств (20), (21) и факта существования производной в точке C следует, что $f'(C) = 0$. Теорема доказана.

Геометрически это означает, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = C$ параллельна оси OX.

Теорема 7.2. **Теорема Ролля.** *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и на концах сегмента $[a, b]$ принимает равные значения $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $C \in (a, b)$, в которой $f'(C) = 0$.*

Доказательство.

Пусть выполняются условия теоремы. Тогда, в силу первой теоремы Вейерштрасса, функция $y = f(x)$ ограничена на $[a, b]$, а в силу второй теоремы Вейерштрасса, принимает на $[a, b]$ свое наибольшее и наименьшее значения. Обозначим M и m соответственно наибольшее и наименьшее значения функции. Имеют место два возможных случая.

I. $M = m$. Тогда $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ и ее производная во всех точках сегмента равна нулю. За точку C можно взять любую точку.

II. $M > m$. В силу того, что $f(a) = f(b)$ хотя бы одно из значений (наибольшее или наименьшее) функция принимает во внутренней точке $C \in (a, b)$. В силу теоремы Ферма, $f'(C) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Если $f(a) = f(b) = 0$, то числа a и b называются нулями функции $y = f(x)$. Тогда существует точка $C \in (a, b)$, что $f'(C) = 0$, то есть $x = C$ – нуль производной.

Таким образом, между двумя нулями функции содержится, хотя бы один, нуль производной.

Теорема 7.3. **Теорема Лагранжа.** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b). Тогда существует точка $C \in (a, b)$, для которой выполняется равенство*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(C).$$

Доказательство.

Введем вспомогательную функцию:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна как разность непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и линейной функции. В интервале (a, b) она имеет конечную производную, равную

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Применим к функции $\varphi(x)$ теорему Ролля, в силу которой, существует точка $C \in (a, b)$, что $\varphi'(C) = 0$. Таким образом,

$$f'(C) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

откуда

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

что и требовалось доказать.

Геометрическое истолкование теоремы Лагранжа

Заметим, что отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{CB}{AC}$$

есть угловой коэффициент секущей AB, а $f'(C)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = C$. Утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.

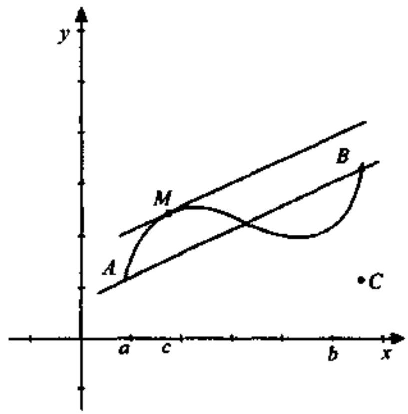

Рис. 7.

Доказанную формулу можно записать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(C)(b - a).$$

Она носит название формулы Лагранжа, или формулы конечных приращений.

Возьмем произвольное $x_0 \in [a, b]$ и придадим ему приращение $\Delta x \gtrless 0$, не выводящее его за пределы промежутка. Применим формулу Лагранжа к промежутку $[x_0, x_0 + \Delta x]$ при $\Delta x > 0$, или к промежутку $[x_0 + \Delta x, x_0]$, если $\Delta x < 0$. Число C, заключенное между x_0 и $x_0 + \Delta x$ можно представить так:

$$C = x_0 + \Theta \cdot \Delta x,$$

где $0 < \Theta < 1$. Тогда формула Лагранжа примет вид:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta \cdot \Delta x)\Delta x.$$

Это точное выражение для приращения функции при любом конечном приращении Δx аргумента. Ранее выведенная (§6) нами формула

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

дает лишь приближенное значение приращения функции. Относительная погрешность этого приближения стремится к нулю лишь при бесконечно малых Δx. Отсюда произошло название «формула конечных приращений».

Теорема 7.4. **Теорема Коши.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, дифференцируемы в интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ в (a, b). Тогда найдется такая точка $C \in (a, b)$, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}.$$

Эта формула носит название формулы Коши.

Доказательство.

Установим вначале, что $g(b) - g(a) \neq 0$. Если предположить противное, то $g(a) = g(b)$ и, по теореме Ролля, существовала бы точка $C \in (a, b)$, в которой $g'(C) = 0$. А это противоречит условию теоремы. Для доказательства теоремы рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, так как непрерывны $f(x)$ и $g(x)$; производная $F'(x)$ существует в (a, b) и равна

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Подстановкой убеждаемся, что $F(a) = F(b) = 0$. Вследствие этого в (a, b) существует точка C, что $F'(C) = 0$, или

$$f'(C) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(C) = 0,$$

откуда получается формула Коши. Теорема доказана.

Замечание. Формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши при $g(x) = x$.

§8. Формула Тейлора

Формула Тейлора для многочлена

Рассмотрим многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ и поставим задачу представить его по степеням $x - x_0$, то есть

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + ... + A_n(x - x_0)^n. \tag{22}$$

Требуется найти коэффициенты A_k разложения (22). Продифференцируем n раз тождество (22), получим

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3 \cdot A_3(x - x_0)^2 + ... + nA_n(x - x_0)^{n-1}, \tag{23}$$

$$P''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - x_0) + ... + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}, \tag{24}$$

$$P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot A_3 + ... + n(n-1)(n-2)A_n(x - x_0)^{n-3}, \tag{25}$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$P^{(n)}(x) = n!A_n. \tag{26}$$

В равенствах (23) – (26) положим $x = x_0$, получим

$$A_0 = P(x_0),$$

$$A_1 = P'(x_0),$$

$$A_2 = \frac{P''(x_0)}{2!},$$

$$A_3 = \frac{P'''(x_0)}{3!},$$

$$- - - - - - - - - - - - - -,$$

$$A_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов A_k в формулу (22)

$$P(x) = \frac{P(x_0)}{0!} + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{P'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}. \qquad (27)$$

Формула (27) называется формулой Тейлора многочлена $P(x)$. Коэффициенты многочлена по степеням $x - x_0$ выражаются через значения многочлена и его производных до n-го порядка включительно в точке x_0, то есть

$$A_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}. \qquad (28)$$

Формула Тейлора произвольной функции

Пусть $y = f(x)$ произвольная функция, имеющая в точке x_0 производные всех порядков до n-го включительно. Составим для нее многочлен типа (27), в котором коэффициенты выражаются через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0, то есть

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}. \qquad (29)$$

Многочлен (29) называется многочленом Тейлора функции $f(x)$. Легко видеть, что

$$f(x_0) = T_n(x_0),$$

$$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0), \quad k = \overline{1, n}.$$

Поэтому, в некоторой окрестности точки x_0, можно приближенно положить $f(x) \approx T_n(x)$. Погрешность такого приближения равна

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x),$$

откуда

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

или

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x). \tag{30}$$

$R_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора функции $f(x)$.

Остаточный член формулы Тейлора

Рассмотрим различные формы записи остаточного члена $R_n(x)$. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

x – фиксированное число. Очевидно, что $\varphi(x) = 0$, а $\varphi(x_0) = R_n(x)$. Вычислим производную функции $\varphi(t)$.

$$\varphi'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!} \cdot 2(x - t) -$$

$$-\frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{f^{(n)}(t)(x - t)^{(n-1)}}{(n-1)!},$$

откуда следует, что

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x - t)^n}{n!},$$

так как остальные слагаемые правой части взаимно уничтожаются.

Рассмотрим произвольную функцию $\psi(t)$, непрерывную на сегменте $[x, x_0]$ и дифференцируемую в интервале (x, x_0), причем $\psi'(t) \neq 0$. Применим к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на сегменте $[x, x_0]$ формулу Коши

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(C)}{\psi'(C)}, \quad C \in (x, x_0).$$

С учетом свойств функции $\varphi(t)$, получим

$$\frac{R_n(x)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{f^{(n+1)}(C)\cdot(x-C)^n}{n!\,\psi'(C)},$$

откуда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)(x-C)^n}{n!}\cdot\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(C)} \tag{31}$$

Формула (31) называется формулой остаточного члена в общем виде. Беря различные функции $\psi(x)$, можно получить конкретные формы остаточного члена формулы Тейлора (30).

Следует отметить, что рассуждения данного пункта проводятся при более жестких условиях, налагаемых на функцию $f(x)$. А именно, в промежутке $[x, x_0]$ существуют и непрерывны все производные функции $f(x)$ до n–го порядка включительно, а в интервале (x, x_0) существует и конечна производная $f^{(n+1)}(x)$.

Остаточный член в форме Лагранжа можно получить из формулы (31), полагая $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$, тогда $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$. Подставляя в формулу (31), получим

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ x < C < x_0. \tag{32}$$

Это и есть остаточный член в форме Лагранжа.

Остаточный член в форме Коши получается из формулы (31), если взять $\psi(t) = (x-t)$ и представить $C = x + \Theta(x_0 - x)$, $0 < \Theta < 1$. Тогда будем иметь

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta(x_0-x))(x-x_0)^{n+1}\cdot\Theta^n}{n!}. \tag{33}$$

Без доказательства примем следующее утверждение:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

откуда следует, что при $x \to x_0$ $R_n(x)$ есть бесконечно малая величина более высокого порядка по сравнению с $(x-x_0)^n$, то есть

$$R_n(x) = o[(x-x_0)^n]. \tag{34}$$

Формула (34) есть запись остаточного члена формулы Тейлора в **форме Пеано**.

Формула Маклорена

Формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора при $x_0 = 0$. Для функции $y = f(x)$ она имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + R_n(x). \tag{35}$$

Произведем оценку остаточного члена формулы Маклорена. Предположим, что в некоторой окрестности точки $x = 0$ функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно и существует конечная $f^{(n+1)}(x)$. Причем, $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ в рассматриваемой окрестности. Воспользуемся формулой остаточного члена в форме Лагранжа при $x_0 = 0$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

и произведем оценку

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

и при достаточно больших n $R_n(x)$ сколь угодно мало. Это значит, что при достаточно больших n $f(x) \approx T(x)$, то есть функцию можно заменить ее многочленом Маклорена. Погрешность такой замены будет сколь угодно малой при достаточно больших n.

Формулы Маклорена некоторых элементарных функций будем получать по следующей схеме: ищем общий вид производной n-го порядка данной функции, вычисляем значения всех производных до n-го порядка включительно в точке $x = 0$ и, воспользовавшись представлением (35), получаем формулу Маклорена конкретной функции. Остаточный член будем брать в форме Пеано.

а) $y = e^x$, $y^{(n)} = e^x$; $y^{(n)}(0) = 1$. По формуле (35) получаем разложение:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n); \tag{36}$$

б) $y = \sin x$, $y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$, $y^{(n)}(0) = \sin(n \cdot \frac{\pi}{2})$. В результате имеем представление

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}); \tag{37}$$

в) $y = \cos x$, $y^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$, $y^{(n)}(0) = \cos(n \cdot \frac{\pi}{2})$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}); \tag{38}$$

г) $y = (1 + x)^m$, $y^{(n)} = m(m-1)...(m-(n-1))(1+x)^{m-n}$, $y^{(n)}(0) = m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))$ и разложение имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n); \tag{39}$$

д) $y = \ln(1+x)$, $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $y^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$.

Отсюда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n); \tag{40}$$

е) Для функции $y = \operatorname{tg} x$ закон образования коэффициентов в формуле Тейлора сложен. Тем не менее, можно написать ее несколько членов. Так как

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y'' = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x},$$

$$y''' = 2\frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x}, \quad y^{IV} = 8\sin x \cdot \frac{2 + \sin^2 x}{\cos^5 x},$$

то

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2, \quad y^{IV}(0) = 0,$$

так что

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4). \tag{41}$$

Пользуясь известными разложениями, можно, уже не вычисляя производных, писать разложения и для более сложных функций, например, запишем разложение по степеням x функции $e^{\sin x}$ до третьей степени x. Имеем

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3),$$

положим $u = \sin x$:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^3 x).$$

Но так как, в силу формулы (37) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, то, подставляя это разложение в предыдущее, будем иметь

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

§9. Исследование функции с помощью производной

Условие постоянства функции

Теорема 9.1. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемая в интервале (a, b), была постоянной на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ в интервале (a, b).*

Доказательство. Необходимость.

Дано: $f(x) \equiv C$ на $[a, b]$, но $C' = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность.

Дано: $f'(x) = 0$ в (a, b) при выполнении всех условий теоремы. Возьмем любое $x \in (a, b]$ и рассмотрим сегмент $[a, x]$. На этом сегменте функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, в силу которой найдется точка $C \in (a, x)$ такая, что $f(x) - f(a) = f'(C)(x - a)$. Но $f'(C) = 0$ по условию, и тогда $f(a) = f(x)$ для любого $x \in (a, b]$. Это означает, что $f(x) \equiv C$ на $[a, b]$. Теорема доказана.

Следствие. Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, непрерывные на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемые в интервале (a, b), имеют в этом интервале равные производные, то они отличаются на постоянную, то есть $f(x) = g(x) + C$.

Действительно, если $f'(x) - g'(x) = 0$, то $f(x) - g(x) = C$ в силу теоремы 9.1.

Пример. Доказать, что для $x \in (-\infty, +\infty)$ справедливо тождество

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Вычислим отдельно производную левой и правой части, будем иметь

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2};$$

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Для определения C возьмем любое значение x, например, $x = 0$ и подставим в равенство. Обе функции при этом обратятся в ноль, получим $C = 0$. Тождество доказано.

Условие монотонности функции

Выясним, как по производной функции можно судить о возрастании (убывании) самой функции. Остановимся сначала на случае монотонной функции в широком смысле. Напомним определение возрастающей (убывающей) функции в широком смысле: будем говорить, что функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, если для любых двух значений x_1 и x_2 из данного множества неравенство $x_1 < x_2$ влечет неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Теорема 9.2. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемая в интервале (a, b), была возрастающей на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) для всех точек интервала (a, b).*

Доказательство.

Необходимость.

Дано: функция $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$. Возьмем произвольную точку $C \in (a, b)$ и дадим ей положительное приращение Δx, так чтобы $(C + \Delta x) \in (a, b)$. Соответствующее приращение функции примет вид $\Delta y = f(C + \Delta x) - f(C) \geq 0$, так как $C + \Delta x > C$

и функция возрастает. Тогда $\Delta y / \Delta x \geq 0$. Дадим точке C произвольное отрицательное приращение, так что $C + \Delta x < C$, и тогда $\Delta y = f(C + \Delta x) - f(C) \leq 0$ в силу возрастания функции. И $\Delta y / \Delta x \geq 0$. Таким образом, для любого приращения Δx в точке C получим, что $\Delta y / \Delta x \geq 0$. Перейдем к пределу в последнем неравенстве при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(C) \geq 0.$$

В силу произвольности выбора точки $C \in (a, b)$, делаем вывод о том, что $f(x) \geq 0$ во всех точках интервала (a, b). Необходимость доказана.

Достаточность.

Дано: $f'(x) \geq 0$ в (a, b). Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2 из (a, b), причем $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, в силу которой справедливо равенство $f(x_2) - f(x_1) = f'(C)(x_2 - x_1)$. Так как $f'(C) \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. То есть неравенство $x_1 < x_2$ влечет неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$. А это, по определению, означает, что $f(x)$ на $[a, b]$ возрастает.

Аналогично доказывается, что при $f'(x) \leq 0$ функция убывает на сегменте $[a, b]$.

Теорема доказана.

В данной теореме не исключалась возможность для функции $f(x)$ сохранять в некоторых промежутках постоянные значения, а для ее производной – обращаться в этих промежутках тождественно в нуль. Если мы исключим эту возможность, то придем к случаю монотонности в строгом смысле.

<u>Теорема 9.3.</u> *Для того, чтобы функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 9.2, была на сегменте $[a, b]$ монотонно возрастающей (убывающей) в строгом смысле, необходимо и достаточно, чтобы:*

1. $f'(x) \geq 0 \ \ (\leq 0)$ *для всех* $x \in (a, b)$;

2. $f'(x)$ *не обращалась тождественно в нуль ни в каком промежутке* $< \alpha, \beta > \subset [a, b]$.

Теорема без доказательства.

Экстремум функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на сегменте $[a, b]$ и не являющуюся монотонной на нем. Рассмотрим точки, в которых функция переходит от возрастания к убыванию и наоборот. На рисунке 8 они обозначены C_k.

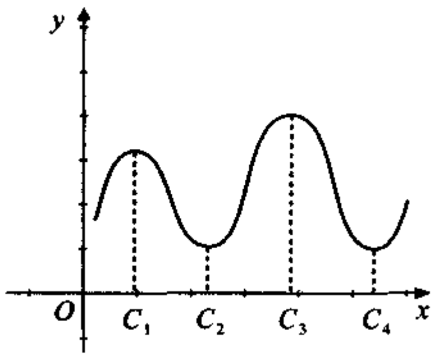

Рис. 8.

Определение 9.1. Говорят, что функция $y = f(x)$ в точке C имеет максимум (минимум), если существует такая окрестность точки C, $(C - \delta, C + \delta)$, что для всех точек $x \in (C - \delta, C + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(C)$ $(f(x) \geq f(C))$.

Другими словами, значение $f(C)$ оказывается наибольшим (наименьшим) из значений, принимаемых функцией в некоторой (хотя бы очень малой) окрестности этой точки. Предполагается, что функция $f(x)$ задана по обе стороны от точки C. В случае, если выполняется строгое неравенство $f(x) < f(C) \quad (f(x) > f(C))$, то говорят, что в точке C строгий максимум (минимум). Для обозначения максимума или минимума существует объединяющий их термин – экстремум.

Поставим задачу о нахождении всех значений аргумента, в которых функция $y = f(x)$ имеет экстремум. При решении ее основную роль будет играть производная.

Теорема 9.4. **Необходимое условие экстремума.** *Если функция $y = f(x)$ в точке C имеет экстремум и имеет в этой точке производную, то $f'(C) = 0$.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ в точке C имеет экстремум. Это значит, что существует окрестность $(C - \delta, C + \delta)$ такая, что в точке C этой окрестности функция $y = f(x)$ принимает свое наибольшее или наименьшее значение. В силу теоремы Ферма $f'(C) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Данное условие не является достаточным. Для функции $y = x^3$ производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$, однако функция $y = x^3$ в точке $x = 0$ не имеет экстремума, так как является возрастающей в своей области определения.

Кроме того, экстремум функция может иметь и в тех точках, где производная не существует. Функция $y = |x|$ имеет, по определению, в точке $x = 0$ минимум, однако, как это было доказано ранее, производной в точке $x = 0$ нет.

Теорема 9.5. **Первое достаточное условие экстремума.** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки C и дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, точки C. Если при переходе x через точку C производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $f(x)$ имеет в точке C экстремум, причем максимум, если производная меняет знак с плюса на минус, и минимум, если с минуса на плюс.*

Доказательство. Пусть в окрестности $(C-\delta, C+\delta)$ выполняются условия теоремы. Предположим, что $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе x через точку C, то есть в $(C-\delta, C)$ $f'(x) > 0$, а в $(C, C+\delta)$ $f'(x) < 0$. Возьмем произвольное $x \in (C-\delta, C)$ и рассмотрим сегмент $[x, C]$. На этом сегменте функция $f(x)$ удовлетворяет условиям возрастания функции (непрерывность на $[x, C]$, дифференцируемость в (x, C) и $f'(x) > 0$). Тогда из неравенства $x < C$ следует неравенство $f(x) < f(C)$. Возьмем теперь произвольное $x \in (C, C+\delta)$ и рассмотрим сегмент $[C, x]$, на котором функция $f(x)$ удовлетворяет условиям убывания и неравенство $C < x$ влечет неравенство $f(C) > f(x)$. Итак, какое бы $x \in (C-\delta, C+\delta)$ мы ни взяли $(x \neq C)$, $f(x) < f(C)$. Следовательно, функция $f(x)$, по определению, имеет в точке C максимум. Аналогично доказывается, что если $f'(x)$ при переходе x через точку C меняет знак с минуса на плюс, то в точке C минимум функции $f(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Если при переходе x через точку C производная не меняет знака, то функция $f(x)$ в точке C экстремума не имеет. Доказать самостоятельно.

Первое правило исследования функции на экстремум.

1°. Находят первую производную функции $f(x)$ и те точки, в которых производная равна нулю (стационарные точки), либо не существует (критические точки). Эти точки будем называть подозрительными на экстремум.

2°. Если C – точка, подозрительная на экстремум, то дают значение x немного меньше C, затем немного больше C. Если при этом знак производной меняется, то функция $f(x)$ имеет в точке C экстремум. Если знак производной не меняется, то экстремума в точке C нет.

На практике данные таких исследований лучше заносить в таблицу.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ – подозрительные на экстремум. Разобьем область определения функции точками $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ на три интервала, установим знак производной в каждом интервале (а заодно и монотонность), и данные внесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	возр. $\nearrow$	$\max = 3$	уб. $\searrow$	$\min = -1$	возр. $\nearrow$

Из таблицы видно, что в точке $x_1 = 0$ функция имеет максимум, равный 3, а в точке $x_2 = 2$ – минимум, равный -1. Укажем также промежутки возрастания $(-\infty, 0), (2, +\infty)$ и убывания $(0, 2)$.

Теорема 9.6. **Второе достаточное условие экстремума функции.** *Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки C имеет производную первого порядка и второго порядка. Тогда, если $f'(C) = 0$, а $f''(C) \neq 0$, то в точке C функция $f(x)$ имеет экстремум, причем максимум, если $f''(C) < 0$, и минимум, если $f''(C) > 0$.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Для определенности положим, что $f''(C) < 0$. По определению,

$$f''(C) = \lim_{x \to C} \frac{f'(x) - f'(C)}{x - C} > 0.$$

Так как $f'(C) = 0$, то в некоторой окрестности точки C $\frac{f'(x)}{x-C} > 0$ (в силу теоремы о сохранении знака). Из последнего неравенства следует, что если $x < C$, то $f'(x) < 0$, а если $x > C$, то $f'(x) > 0$. Это означает, что, при переходе x через точку C производная меняет знак с минуса на плюс. В силу первого достаточного условия экстремума, в точке C минимум. Аналогично доказывается, что в случае $f''(C) < 0$ в точке C будет максимум. Теорема доказана.

Замечание. Если в точке C вторая производная не существует, либо равна нулю, то относительно экстремума в точке C ничего сказать нельзя.

Второе правило исследования функции на экстремум.

1. Находим первую и вторую производные данной функции.

2. Ищем стационарные точки из уравнения $f'(x) = 0$.

3. Если $x = C$ – стационарная точка, то вычисляют $f''(C)$. Если $f''(C) < 0$, то в точке C максимум, если $f''(C) > 0$, то минимум. Если $f''(C) = 0$, либо не существует, то ничего сказать нельзя.

По второму правилу можно исследовать только те точки, в которых первая производная существует. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ и исследуем ее на экстремум по второму правилу.

1. $f'(x) = 3x(x-2), x_1 = 0, x_2 = 2$.
2. $f''(x) = 6x - 6$.
3. $f''(0) = -6$, $f''(2) = 6$.

Ответ: в точке $x = 0$ максимум, в точке $x = 2$ – минимум.

Теорема 9.7. **Третье достаточное условие экстремума.** *Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки C имеет производные до $(n+1)$–го порядка включительно, непрерывные в точке C и $f'(C) = f''(C) = \ldots = f^n(C) = 0$, но $f^{n+1}(C) \neq 0$. Тогда, если $(n+1)$ – четное число, то в точке C экстремум, причем максимум, если $f^{n+1}(C) < 0$, и минимум, если $f^{n+1}(C) > 0$. Если $(n+1)$ – нечетное число, то в точке C экстремума нет.*

Без доказательства.

Пример. Исследуем на экстремум функцию

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

$f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = 0$ – стационарная точка.

$f''(x) = e^x - 1 - x$, $f''(0) = 0$;
$f'''(x) = e^x - 1$, $f'''(0) = 0$;
$f^{IV}(x) = e^x$, $f^{IV}(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ в точке $x = 0$ минимум.

Исследование функции на наибольше и наименьшее значения

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда, по теореме Вейерштрасса, она достигает на этом сегменте своего наибольшего и наименьшего значений. Если $f(x)$ монотонна на $[a, b]$, то эти значения достигаются на его концах. Если $f(x)$ не является монотонной, то наибольшее и наименьшее значения могут достигаться во внутренних точках сегмента. Это будут точки экстремума функции $f(x)$.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

1. Находим все точки, подозрительные на экстремум функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

2. Вычисляем значения функций в этих точках.

3. Вычисляем значения функции на концах сегмента $f(a)$, $f(b)$.

4. Все полученные значения сравниваем между собой, выбирая наибольшее и наименьшее.

Пример. В шар, радиуса R, вписать цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность. Рассмотрим рисунок 9 в разрезе. Пусть r – радиус основания цилиндра, H – его высота, S – боковая поверхность. Из геометрии известно, что $S = 2\pi r \cdot H$. Найдем выражение H через r. Из ΔMON имеем $OM = \frac{H}{2}$, $ON = R$, $MN = r$. По теореме Пифагора, $\frac{H}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$, тогда $S = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$, где $0 \leq r \leq R$.

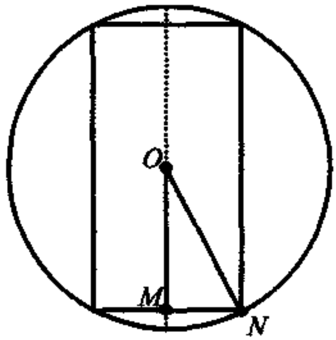

Рис. 9.

Задача свелась к отысканию наибольшего значения функции $S(r)$ на сегмение $[0, R]$. Вычислим производную

$$S'(r) = 4\pi\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2r^2 \cdot 4\pi}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi\left(\frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right).$$

Следовательно, $R^2 - 2r^2 = 0$, $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Получим единственную стационарную точку внутри сегмента $[0, R]$. Далее вычисляем значения

$$S\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = 4\pi\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2\pi R^2,$$

$$S(0) = 0, S(R) = 0.$$

Ответ: боковая поверхность вписанного в шар цилиндра будет наибольшей ($2\pi R^2$), если его радиус основания $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

5^o. Направление вогнутости кривой, точки перегиба.

Определение 9.2. Говорят, что кривая $y = f(x)$ на интервале (a, b) выпукла (вогнута), если она во всех точках этого интервала имеет не вертикальную касательную и расположена ниже (выше) касательной (см. рисунок 10).

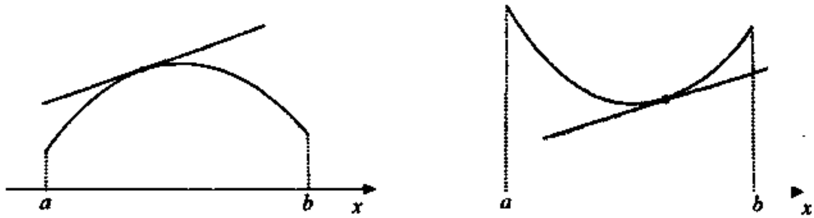

Рис. 10.

Теорема 9.8. *Если функция $f(x)$ в интервале (a,b) имеет вторую производную и для всех x из (a,b) $f''(x) \neq 0$, то кривая $y = f(x)$ на интервале (a,b) выпукла, если $f''(x) < 0$, и вогнута, если $f''(x) > 0$.*

Доказательство. Пусть в $(a,b) f''(x) < 0$. Возьмем точку $x_0 \in (a,b)$ и рассмотрим на кривой точку $M(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке M, ее уравнение $y - fx_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Теперь возьмем произвольную точку $x_1 \in (a,b)$ и найдем соответствующие ординаты точки кривой и точки касательной и сравним их (см. рисунок 11). Обозначим Y_1 ординату точки касательной:

$$Y_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \tag{42}$$

$f(x_1)$ – ордината точки кривой.

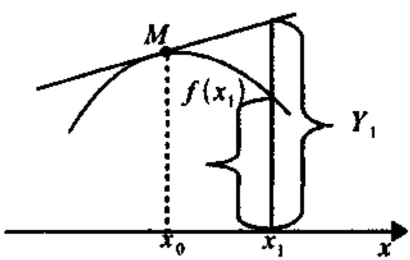

Рис. 11.

Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 формулой Тейлора, взяв два первых члена разложения и остаточный член в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \quad x_0 < c < x_1.$$

Откуда

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x_1 - x_0)^2. \qquad (43)$$

Теперь найдем разность ординат $Y_1 - f(x_1)$, вычитая из равенства (42) равенство (43). После приведения подобных, получаем

$$Y_1 - f(x_1) = -\frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Правая часть положительна, так как, по условию, $f''(c) < 0$. Следовательно, $Y_1 - f(x_1) > 0$ и для любого $x_1 \in (a, b)$ соответствующая ордината точки кривой меньше, чем ордината точки касательной. То есть касательная лежит выше кривой в (a, b). Кривая, по определению, выпукла. Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на (a, b), то кривая $y = f(x)$ вогнута в этом промежутке. Теорема доказана.

Определение 9.3. Точка M называется точкой перегиба кривой, если:

1) кривая в точке M имеет касательную;

2) справа и слева от точки M кривая имеет различное направление вогнутости.

Теорема 9.9. **Необходимое условие точки перегиба.** *Если график функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет перегиб и существует $f''(x_0)$, непрерывная в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $f''(x_0) \neq 0$. Тогда либо $f''(x_0) > 0$, либо $f''(x_0) < 0$.

Предположим, что $f''(x_0) > 0$, тогда, в силу непрерывности $f''(x_0)$, найдется такая окрестность точки x_0 – $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак (по свойству функции, непрерывной в точке). То есть, $f''(x) > 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Но, в силу теоремы 9.8, кривая $y = f(x)$ должна быть вогнута в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то есть слева и справа от точки x_0 кривая имеет одинаковое направление вогнутости. А это противоречит тому, что точка $M(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба. Аналогично можно показать, что не может $f''(x_0) < 0$. Теорема доказана.

Замечание. Данное условие не является достаточным для существования точки перегиба, то есть из того, что $f''(x) = 0$ не следует, что точка $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба. Примером может служить кривая $y = x^4$. В точке $x = 0$ вторая производная $y'' = 12x^2$ обращается в нуль, но в точке $(0, 0)$ перегиба нет, так как кривая всюду вогнута. Однако перегиб может существовать и в тех точках, в которых $f''(x)$ не существует. Примером являются точки кривых с вертикальной касательной (см. рисунок 12).

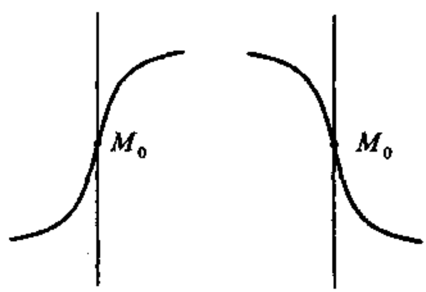

Рис. 12.

Достаточное условие перегиба следует из определения точки перегиба и теоремы 9.8. А именно, если при переходе x через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то кривая $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет перегиб.

При исследовании графика функции на перегиб нужно вычислить вторую производную $f''(x)$, найти точки, в которых $f''(x)$ равна нулю, либо не существует и установить, будет ли $f''(x)$ менять свой знак при переходе x через точки, подозрительные на перегиб.

Пример.

$y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Исследовать на точки перегиба график данной функции.

$$y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad y'' = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

Вторая производная равна нулю в точках

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Удобно составить таблицу:

x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$
y	$\frown$	$\frac{1}{4}$	$\smile$	$\frac{1}{4}$	$\frown$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$

Из таблицы видно, что на промежутках $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ кривая выпукла, а в интервале $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ вогнута. Точки $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{4}\right)$ – точки перегиба графика функции.

Для полного исследования функций, с последующим построением графика, нам понадобится еще и понятие асимптоты кривой.

Определение 9.4. Прямая Γ называется асимптотой кривой γ, если расстояние d от точки кривой M до прямой Γ стремится к нулю при удалении точки M вдоль кривой γ в бесконечность (см. рисунок 13).

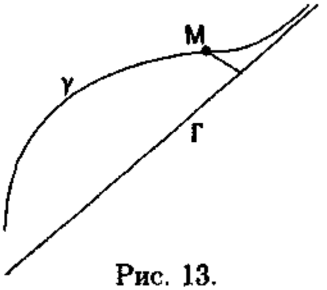

Рис. 13.

Асимптоты будем подразделять на вертикальные, уравнение вертикальной асимптоты $x = a$, и наклонные $y = kx + b$. Горизонтальные ($y = b$) рассматриваются как частный случай наклонных при $k = 0$. Будем говорить, что точка $M(x, y)$, принадлежащая кривой γ стремится в бесконечность, если в бесконечность стремится хотя бы одна из ее координат.

Условие существования вертикальных асимптот.

Пусть кривая γ задана уравнением $y = f(x)$. Если при $x \to \to a$ хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ равен бесконечности, то прямая $x = a$ – вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$. Действительно, пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Этот факт означает, что точка кривой $M(x, f(x)) \to \infty$ и $|x - a| \to 0$. Но $|x - a| = d$ есть расстояние от точки кривой до вертикальной прямой $x = a$. Рассмотрим на рисунке 14 некоторые примеры.

Во всех четырех случаях прямая $x = a$ – вертикальная асимптота кривых.

Если существуют и конечны пределы

$$\lim_{x \to \infty}(f(x) - kx) = b, \quad k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{44}$$

то прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота кривой $y = f(x)$.

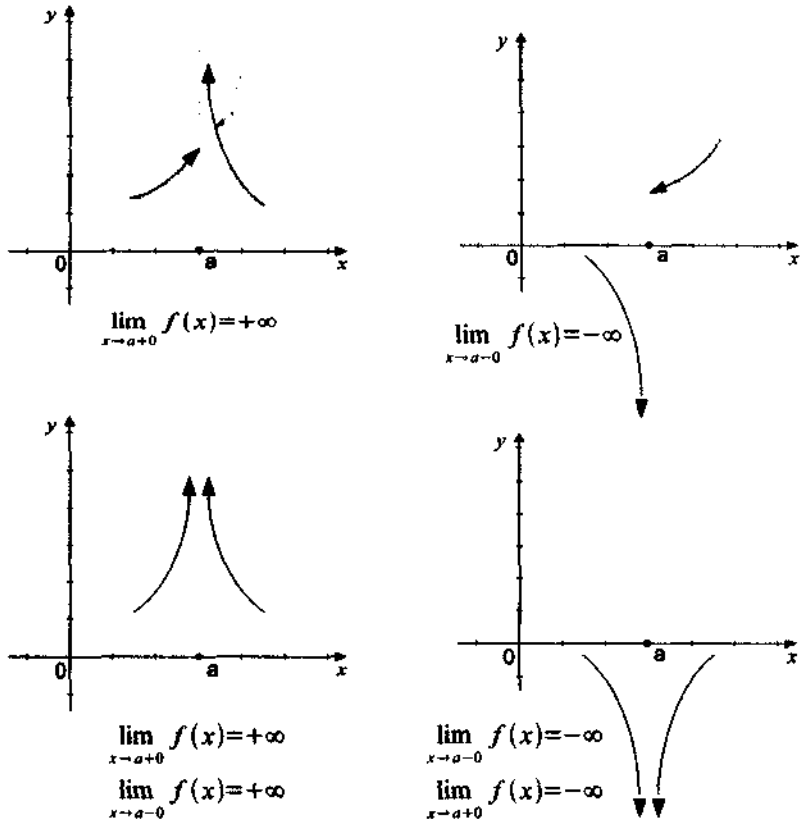

Рис. 14.

<u>Условие существования наклонных асимптот.</u>

Действительно, из аналитической геометрии известно, что расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+Bx+C=0$ вычисляется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Вычислим расстояние от точки кривой $M(x, f(x))$ до прямой $y = kx + b$, где k и b вычисляются по формулам (44)

$$d = \left|\frac{f(x) - kx - b}{\sqrt{1+k^2}}\right|.$$

Пусть $x \to \infty$, тогда $M \to \infty$ и, в силу первой из формул (44), $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$, то есть $d \to 0$.

Покажем, что в этом случае $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b.$$

Вынесем x за скобки $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{f(x)}{x} - k) = b$. Последний предел может быть конечным только в том случае, если предел выражения в скобках будет равен нулю, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$.

Замечание. При отыскании уравнения наклонной асимптоты сначала ищут k, затем, по найденному значению k, находят b. Если хотя бы один из пределов (44) не существует, либо бесконечен, то наклонных асимптот нет. При $k = 0$ получаем горизонтальную асимптоту. Пределы (44) следует вычислять отдельно на $+\infty$ и на $-\infty$, так как они не всегда равны и можно потерять одну из асимптот.

Пример. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-1} = \infty$, то $x = 1$ – вертикальная асимптота.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x2}{x^2 - x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

(Здесь пределы равны при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$) $k = 1$. Находим

$$b = \lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x-1} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1, b = 1.$$

Итак, $y = x + 1$ – наклонная асимптота.

7°. План полного исследования функций.

1. Находим область определения функции, устанавливаем точки разрыва, указываем вертикальные асимптоты.

2. Четность, переодичность.

3. В точках разрыва ищем односторонние пределы, устанавливаем характер разрыва.

4. Исследуем поведение функции на концах области определения (вычисляем пределы).

5. Находим наклонные асимптоты, если они есть.

6. Вычисляем первую производную, устанавливаем промежутки монотонности и точки экстремума функции.

7. Ищем вторую производную, указываем точки перегиба графика функции, направление вогнутости кривой.

8. Если необходимо, находим точки пересечения графика функции с координатными осями и другие нужные вспомогательные точки.

9. Данные исследования заносятся в таблицу.

10. Строим график функции.

Пример. Построить график функции $y = x + \dfrac{1}{x}$.

1. О.О.Ф. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. $x = 0$ – точка разрыва функции, $x = 0$ – вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x \to 0}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \infty$.

2. Функция нечетная, непериодическая.

3. Находим односторонние пределы в точках разрыва:

$$\lim_{x \to 0+0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0-0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Точка $x = 0$ – точка разрыва второго рода с бесконечным скачком.

4. На концах области определения:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

5. Ищем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = 0,$$

$y = x$ – наклонная асимптота.

6.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2},$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – точки, подозрительные на экстремум.

7. $y'' = \frac{2}{x^3}$, точек перегиба нет.

8. Составляем сводную таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y	$\nearrow\frown$	$\max -2$	$\searrow\frown$		$\searrow\smile$	$\min 2$	$\nearrow\smile$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$

(Дугами указано направление вогнутости, стрелочками – монотонность.)

9. Строим график (см. рисунок 15).

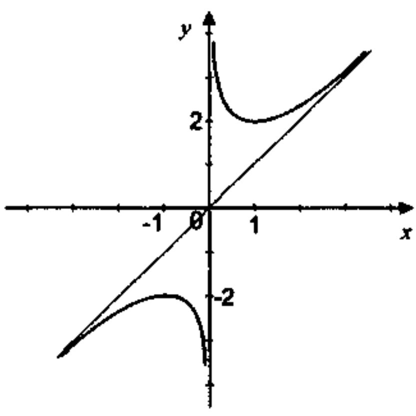

Рис. 15.

8°. Рассмотрим теперь применение производной к вычислению пределов функции.

Теорема 9.10. **Первая теорема Лопиталя.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Пусть во всех точках данной окрестности, за исключением, быть может, точки a, существуют конечные производные этих функций. Причем $g'(x) \neq 0$ в рассматриваемой окрестности. Тогда*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если последний предел существует.

Доказательство. Пусть в некоторой δ–окрестности точки a выполняются условия теоремы. Возьмем произвольное $x \in (a-\delta, a+\delta)$ (для определенности положим $x > a$) и рассмотрим сегмент $[a, x]$. На этом сегменте функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Запишем формулу Коши

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad a < c < x.$$

В силу непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, имеем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, по условию, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, следовательно, $f(a) = 0$ и $g(a) = 0$. Формула Коши примет вид:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < x).$$

Пусть $x \to a$, тогда $c \to a$, а

$$\lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = k$$

(по условию), следовательно, существует и предел левой части, равный пределу правой, то есть

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если не существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то тогда не следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ тоже не существует. Данная теорема носит название правила Лопиталя и позволяет раскрывать неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, заменяя предел отношения функций пределом отношения их производных. Данная теорема работает и если $x \to \infty$.

Примеры.

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-3}{3x^2-2x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x}{6x-2} = \dfrac{9}{4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sin x-1} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-5}{\cos x-2} = -1$.

Сформулируем без доказательства еще одну теорему Лопиталя, которая позволяет раскрывать неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 9.11. **Вторая теорема Лопиталя** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Пусть в рассматриваемой окрестности, за исключением, быть может, точки a, существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Причем $g'(x) \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, если последний предел существует.*

В качестве примеров применения теоремы 9.11 рассмотрим сравнение степенной, показательной и логарифмической функции на бесконечности.

Рассмотрим функции $y = a^x (a > 1)$, $y = x^\alpha (\alpha > 0)$ и $y = \ln x$. Если $x \to +\infty$, то все три функции стремятся к бесконечности. Выясним, какая из них растет быстрее при $x \to +\infty$.

1. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$. Рассмотрим случай

а) $\alpha = n$ – натуральное число.

При вычислении данного предела нам нужно раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применим n раз правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln^n a}{n!} = \infty.$$

Мы пришли к заключению, что a^x на бесконечности растет быстрее, чем x^n. Покажем, что это будет справедливым, если α – любое положительное действительное число.

б) рассмотрим x^α и обозначим за n ближайшее к α натуральное число большее α (x будем считать большим единицы). Так как $x^\alpha < < x^n$, то

$$\frac{a^x}{x^\alpha} > \frac{a^x}{x^n}.$$

Но, по доказанному выше,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty,$$

откуда следует, что и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Вывод: на бесконечности логарифмическая функция растет медленнее степенной с любым положительным показателем α. Итак, если $x \to +\infty$, то быстрее всех растет показательная функция с основанием $a > 1$, за ней следует степенная с положительным показателем $\alpha \in \mathbb{R}$, медленнее всех растет логарифмическая.

Как мы видели, с помощью правила Лопиталя можно раскрывать только неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Другие типы неопределенностей можно с помощью преобразований сводить к первым двум.

Например, пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$, мы имеем неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Сведем ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ в общем виде. Для этого преобразуем выражение под знаком предела следующим образом:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a}\left\{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right\} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}.$$

Получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$, и можно применять правило Лопиталя.

При вычислении предела показательно-степенной функции $[u(x)]^{v(x)}$ возникают неопределенности трех видов: 1^{∞}, 0^0, ∞^0. Все они сводятся к одной, вида $0\cdot\infty$, с помощью тождества $u^v = e^{v\cdot\ln u}$. Неопределенность $0\cdot\infty$ легко сводится к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, после чего применяется правило Лопиталя.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$. Имеем неопределенность вида ∞^0. Сведем ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ и применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1.$$

Задание для самостоятельной работы № 5

I. Написать разложения по целым неотрицательным степеням x до членов указанного порядка включительно следующие функции:

1. e^{2x-x^2} до члена с x^5 2. $\ln\cos x$ до члена с x^6 3. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13} 4. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ до члена с x^6.

II. 1. Найти три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням разности $(x - 1)$.

2. Функцию $f(x) = x^x - 1$ разложить по целым неотрицательным степеням бинома $(x-1)$ до члена с $(x-1)^3$.

3. Функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ $(x > 0)$ разложить по степеням дроби $\dfrac{1}{x}$ до члена с $\dfrac{1}{x^3}$.

4. Функцию $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ разложить по степеням разности $x - 2$ до члена с $(x-2)^3$ и построить график данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

III. Применяя правило Лопиталя вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x - \dfrac{1}{x}\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x-a}$, $a > 0$; 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

9°. Приближенное решение уравнений. Займемся теперь задачей о нахождении корней данной функции $F(x)$, то есть корней уравнения $F(x) = 0$. Процесс приближенного решения уравнений состоит из двух этапов: отделение корней и уточнение корней.

Отделение корней – это отыскание, по возможности, малых промежутков, в каждом из которых находится один и только один корень данного уравнения.

Один из методов отделения – графический. Уравнение $F(x) = 0$ записывают в виде $\varphi(x) = f(x)$, строят графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$, абсциссы их точек пересечения и есть искомые корни.

Мы будем предполагать выполнение следующего условия: в рассматриваемом промежутке $[a, b]$ функция $F(x)$ непрерывна вместе со своими производными $F'(x)$ и $F''(x)$.

Тогда можно сформулировать достаточные условия того, что в сегменте $[a, b]$ находится единственный корень уравнения $F(x) = 0$:

1. $F(a)F(b) < 0$, тогда, в силу теоремы Больцано–Коши, существует точка $C \in [a,b]$ в которой $F(C) = 0$, то есть C – корень уравнения.

2. $F'(x)$ сохраняет свой знак в интервале (a,b). Это означает, что функция $y = F(x)$ монотонна на сегменте $[a,b]$ и точка C, в которой она обращается в ноль, единственная.

Пример. Отделить корень уравнения $x^3 + 4x - 1 = 0$. Запишем уравнение в виде $x^3 = 1 - 4x$, построим графики функций $y = x^3$, $y = 1 - 4x$ и найдем приближенно абсциссу их точки пересечения.

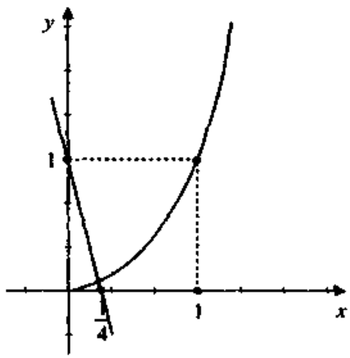

Рис. 16.

Из рисунка 16 видно, что абсцисса точки пересечения графиков принадлежит сегменту $[0, \frac{1}{4}]$. Проверим выполнимость достаточных условий:

1. $F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{64} + 1 - 1 > 0$, $F(0) = -1 < 0$.

2. $F'(x) = 3x^2 + 4$, на сегменте $[0, \frac{1}{4}]$ $F'(x) > 0$.

Вывод: в сегменте $[0, \frac{1}{4}]$ находится единственный корень уравнения $x^3 + 4x - 1 = 0$.

Рассмотрим теперь методы уточнения корней

1°. Метод «вилки».

Пусть внутри сегмента $[a, b]$ находится единственный корень C уравнения $F(x) = 0$. Можно за приближенное значение корня взять число $C_1 = \frac{a+b}{2}$ (середину отрезка $[a, b]$, см. рисунок 17).

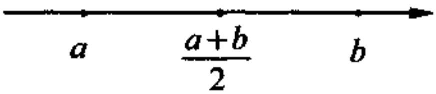

Рис. 17.

Погрешность такого приближения не превосходит половины длины отрезка $[a, b]$, $\Delta \le \dfrac{b-a}{2}$. Если такая точность не достаточна, то делим отрезок $[a, b]$ пополам (точкой C_1) и выбираем тот из двух полученных отрезков, на концах которого функция $F(x)$ принимает значения разных знаков. Обозначаем этот отрезок $[a_1, b_1]$, причем $F(a_1) \cdot F(b_1) < 0$. Вновь выбираем его середину, точку $C_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ и полагаем $C \approx C_2$ с погрешностью $\Delta < \dfrac{b-a}{2^2}$. (Если получим, что $F(C_2) = 0$, то C_2 – точное значение корня уравнения). Если полученная точность нас не устраивает, то продолжаем этот процесс далее и на каком-то k-том шаге получаем отрезок $[a_k, b_k]$, такой что $F(a_k)F(b_k) < 0$. Берем его середину $C_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$. Возможно два варианта, либо $F(C_{k+1}) = 0$ и $C = C_{k+1}$, либо этот процесс продолжается неограниченно.

В результате неограниченного процесса получаем последовательность стягивающихся сегментов, которая, в силу теоремы Кантора, имеет единственную точку C, принадлежащую всем сегментам последовательности. Эта точка C и есть корень уравнения $F(x) = 0$. Процесс уточнения корня можно оборвать на любом k-том шаге, полагая $C \approx \dfrac{a_k + b_k}{2}$ с погрешностью $\Delta < \dfrac{b_k - a_k}{2} = \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$.

2°. Метод итераций.

Уравнение $F(x) = 0$ запишем в виде $x = f(x)$. Последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ будем называть итерационной последовательностью уравнения $x = f(x)$, если для любого $n \geq 1$ элемент x_n выражается через элемент x_{n-1} по рекуррентной формуле $x_n = f(x_{n-1})$, а в качестве x_0 может быть взято любое число из области определения функции $f(x)$.

Теорема 9.12. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, все члены итерационной последовательности $x_n \in [a, b]$ и $\lim x_n = C$, то C есть корень уравнения $x = f(x)$.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Имеем $(\forall n)(x_n \leq b)$ $(\forall n)(x_n \geq a)$. Переходя к пределу в обоих неравенствах, получаем $a \leq c \leq b$, то есть $C \in [a, b]$. В силу непрерывности функции $f(x)$, можно перейти к пределу в формуле $x_n = f(x_{n-1})$, после чего получаем $C = f(C)$.

Теорема доказана.

Следующая теорема формулирует условия, при которых итерационная последовательность сходится к корню данного уравнения.

Теорема 9.13. *Пусть C - корень уравнения $x = f(x)$ и пусть в сегменте $[C - \varepsilon, C + \varepsilon]$ выполняется условие $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Тогда итерационная последовательность (x_n), у которой в качестве x_0 взято любое число из сегмента $[C - \varepsilon, C + \varepsilon]$, сходится к C.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Покажем вначале, что все элементы итерационной последовательности $x_n \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]$. Докажем это методом математической индукции. Пусть $x_0 \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]$, предположим, что $x_{n-1} \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]$. Покажем, что и $x_n \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]$. Применим к функции $f(x)$ на сегменте $[C, x_{n-1}]$ формулу Лагранжа, с учетом того, что $f(x_{n-1}) = x_n$

и $f(C) = C$, получим

$$f(x_{n-1}) - f(C) = f'(\xi)(x_{n-1} - C),$$

или

$$x_n - C = f'(\xi)(x_{n-1} - C), \tag{45}$$

где $x_{n-1} < \xi < C$, то есть $\xi \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]$.

Так как $|f'(\xi)| \le \alpha < 1$, то получаем оценку из формулы (45)

$$|x_n - C| < |x_{n-1} - C|.$$

Это означает, что каждый последующий элемент x_n ближе к C, чем предыдущий и поэтому $x_n \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]$. Таким образом, $\forall n\ x_n \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]$.

Покажем теперь, что $\lim x_n = C$. Из формулы (45) имеем

$$|x_n - C| \le \alpha |x_{n-1} - C| \le \alpha^2 |x_{n-2} - C| \le \ldots \le \alpha^n |x_0 - C|.$$

Так как $|\alpha| < 1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$ и, переходя к пределу в неравенстве $|x_n - C| \le \alpha^n |x_0 - C|$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - C| = 0,$$

то есть $\lim x_n = C$. Теорема доказана.

Замечание. Заключение теоремы 9.13 справедливо, когда нам известен симметричный относительно C сегмент $[C-\varepsilon, C+\varepsilon]$. На практике такое удается найти не всегда, мы знаем только, что $C \in [a, b]$, в котором $|f'(x)| \le \alpha < 1$, но не знаем ближе к какому концу расположен корень C. Заметим, что где бы внутри сегмента $[a, b]$ точка C ни находилась, хотя бы один из двух сегментов $[a, 2C - a]$ или $[2C - b, b]$ принадлежит целиком сегменту $[a, b]$. Поэтому, хотя бы одна из точек, a или b принадлежит симметричному относительно корня C, сегменту, на котором $|f'(x)| \le \alpha < 1$. Стало быть, по крайней мере, одну из точек a или b можно, согласно доказанному в теореме 9.13, выбрать за x_0. Конкретно, за x_0 следует выбирать ту из двух точек a или b, для которой первое приближение $x_1 = f(x_0)$ не выходит за пределы сегмента $[a, b]$.

Геометрическое истолкование метода итераций

Рассмотрим уравнение $x = f(x)$, которое на сегменте $[a, b]$ имеет единственный корень. На практике чаще всего встречается случай, когда производная $f'(x)$ на $[a, b]$ не меняет знак.

Покажем, что если $f'(x) > 0$, то итерационная последовательность (x_n) монотонная.

Пусть $x_0 > C$, тогда из формулы (45) получаем

$$x_1 - C = f'(\xi_1)(x_0 - C),$$

так как $f'(\xi) > 0$ и $x_0 - C > 0$, то $x_1 - C > 0$ и $x_1 > C$, но $x_1 < x_0$. Продолжаем:

$$x_2 - C = f'(\xi_2)(x_1 - C).$$

Аналогично получаем, что $x_2 > C$, но $x_2 < x_1 < x_0$ и так далее последовательность (x_n) монотонно убывает.

Если $x_0 < C$, то аналогичными рассуждениями показываем, что последоательность (x_n) монотонно возрастает. Можно этот процесс проиллюстрировать на рисунке 18.

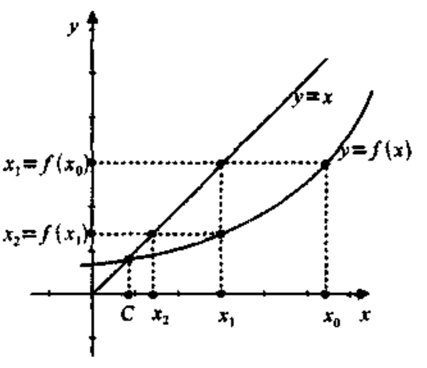

Рис. 18.

Пусть $f'(x) < 0$. Тогда из формулы (45) имеем

$$x_1 - C = f'(\xi_1)(x_0 - C) < 0,$$

откуда $x_1 - C < 0$. Затем

$$x_2 - C = f'(\xi_2)(x_1 - C) > 0,$$

следовательно $x_2 - C > 0$ и так далее. Мы получаем, что любые два элемента итерационной последовательности лежат по разные стороны от C (рисунок 19).

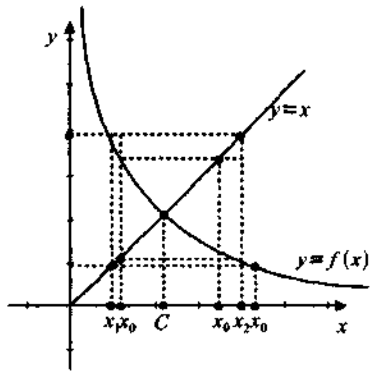

Рис. 19.

Оценка погрешности метода итераций производится по формуле

$$|x_n - C| \leq \alpha^n(b - a),$$

где $\alpha = \sup\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

Рассмотрим два частных случая метода итераций: метод касательных и метод хорд.

Метод касательных. Пусть единственный искомый корень уравнения $F(x) = 0$ находится на сегменте $[a, b]$. За x_0 возьмем любую точку этого сегмента. Найдем на графике функции $y = F(x)$ точку B_0 с абсциссой x_0 и проведем через нее касательную к графику функции. Уравнение касательной $y - y_0 = F'(x_0)(x - x_0)$. Найдем точку пересечения касательной с осью OX, для этого положим в уравнении касательной $y = 0, y_0 = F(x_0)$ получим $x_1 = x_0 - \dfrac{F(x_0)}{F'(x_0)}$ – первое приближение корня.

Затем найдем на графике функции $y = F(x)$ точку с абсциссой x_1 и вновь проведем через нее касательную к графику:

$$y - F(x_1) = F'(x_1)(x - x_1).$$

Точку пересечения ее с осью OX обозначим x_2,

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}.$$

Продолжая далее этот процесс, получим реккурентную формулу процесса

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{46}$$

(x_n) — итерационная последовательность метода касательных для уравнения $F(x) = 0$, если каждый ее член, при $n \geq 1$, вычисляется по формуле (46). За x_0 берется любое значение из сегмента $[a, b]$.

Графически это выглядит так (см. рисунок 20).

На практике за начальное приближение корня x_0 берут обычно один из концов отрезка $[a, b]$, но такой, чтобы точка пересечения первой касательной с осью OX не вышла за пределы отрезка $[a, b]$.

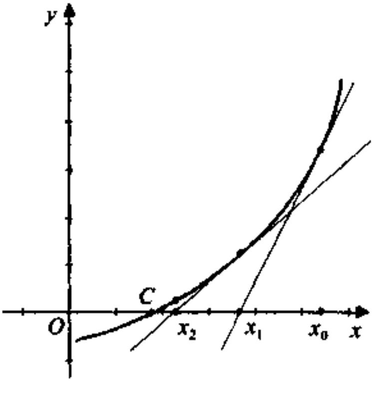

Рис. 20.

Для правильного выбора начального приближения нужно исследовать график функции $y = F(x)$ на сегменте $[a, b]$ на монотонность и направление вогнутости. Возможны четыре варианта поведения кривой на отрезке $[a, b]$.

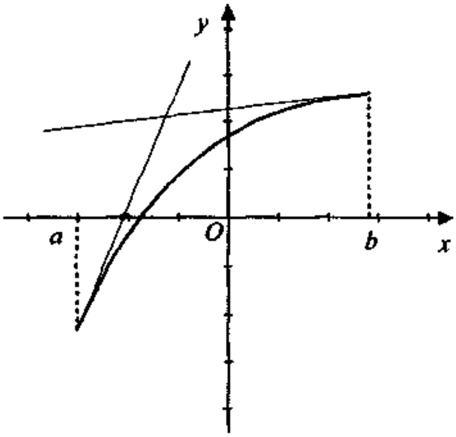

Рис. 21. $F'(x) > 0$, $F''(x) < 0$.

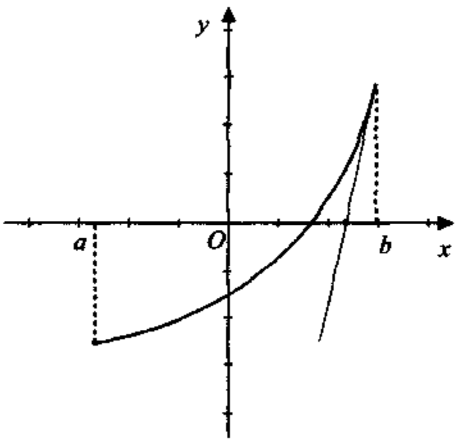

Рис. 22. $F'(x) > 0$, $F''(x) > 0$.

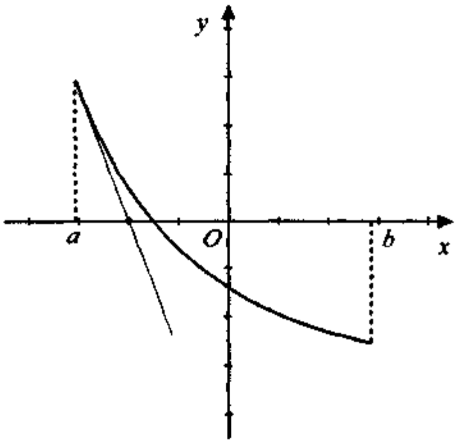

Рис. 23. $F'(x) < 0$, $F''(x) > 0$.

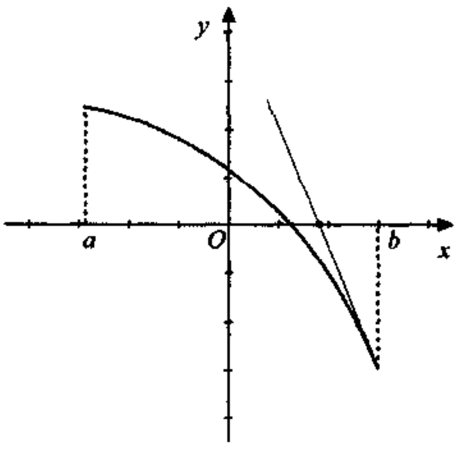

Рис. 24. $F'(x) < 0$, $F''(x) < 0$.

На первом чертеже видно, что если касательную провести в точке с абсциссой $x_0 = b$, то точка пересечения касательной с осью OX выйдет за пределы отрезка $[a, b]$. Итак, в первом и третьем случаях за x_0 берут точку a, во втором и четвертом – точку b.

Или: $x_0 = a$, если $F'(x) \cdot F''(x) < 0$ и
$x_0 = b$, если $F'(x) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$.

Метод хорд. Уравнение $F(x) = 0$ рассматриваем на сегменте $[a, b]$, C – корень уравнения, принадлежащий данному сегменту. В качестве нулевого приближения берем любую точку $x_0 \in [a, b]$ и рассматриваем на графике функции $y = F(x)$ точку $A_0(x_0, F(x_0))$. Через данную точку и один из концов дуги (например, точку $B(b, F(b))$) проводим хорду, ее уравнение

$$\frac{x - x_0}{b - x_0} = \frac{y - F(x_0)}{F(b) - F(x_0)}.$$

Далее ищем абсциссу точки пересечения хорды с осью OX и принимаем ее за первое приближение корня x_1. Полагая в уравнении хорды $y = 0$, получаем

$$x_1 = -\frac{F(x_0)(b - x_0)}{F(b) - F(x_0)} + x_0.$$

На графике функции находим точку с абсциссой x_1 и вновь проводим хорду через точки $A_1(x_1, F(x_1))$ и $B(b, f(b))$. Абсцисса точки пересечения этой хорды с осью OX будет вторым приближением корня

$$x_2 = -\frac{F(x_1)(b - x_1)}{F(b) - F(x_1)} + x_1.$$

Продолжая далее этот процесс, получим реккурентную формулу метода хорд:

$$x_{n+1} = -\frac{F(x_n)(b - x_n)}{F(b) - F(x_n)} + x_n.$$

Замечание. Если на отрезке $[a, b]$ кривая монотонно возрастает и вогнута, то есть $F'(x) > 0$, $F''(x) > 0$, как это изображено на рисунке 25, то за неподвижный конец хорд берется точка $B(b, F(b))$. Эта же точка берется и в случае, когда $F'(x) < 0$ и $F''(x) < 0$. Если же $F'(x) \cdot F''(x) < 0$, то есть первая и вторая производная разного знака, то за неподвижный конец хорд следует брать точку $A(a, F(a))$, иначе хорда может не пересечь ось OX внутри отрезка $[a, b]$.

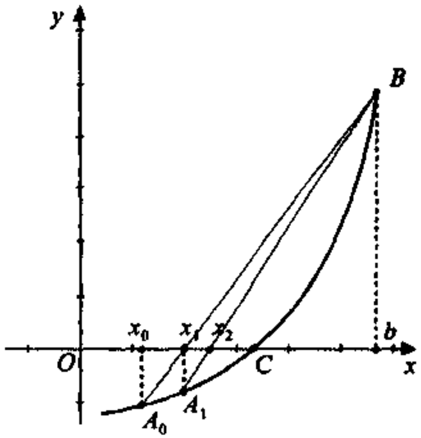

Рис. 25.

Как в методе касательных, так и в методе хорд мы приближаемся к искомому корню уравнения с одной стороны (это видно из чертежей). На практике обычно применяют комбинированный метод хорд и касательных, который позволяет приближаться к корню с обеих сторон. Схема этого метода такова. После отделения корней уравнения $F(x) = 0$ устанавливаем вид кривой $y = F(x)$ на сегменте $[a, b]$, то есть ищем $F'(x)$ и $F''(x)$. Пусть для определенности $F'(x) > 0$ и $F''(x) < 0$. Тогда в точке $A(a, F(a))$ проводим касательную к кривой $y = F(x)$ и находим абсциссу ее точки пересечения с осью OX. Это будет точка x_1, лежащая слева от корня уравнения C.

Через точки $A(a, F(a))$ и $B(b, F(b))$ проводим хорду, точка пересечения которой с осью OX (точка x_2) будет находиться правее корня (см. рисунок 26). Мы получили, что корень уравнения $C \in [x_1, x_2]$. Можно положить

$$C \approx \frac{x_1 + x_2}{2}$$

с погрешностью

$$\Delta < \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

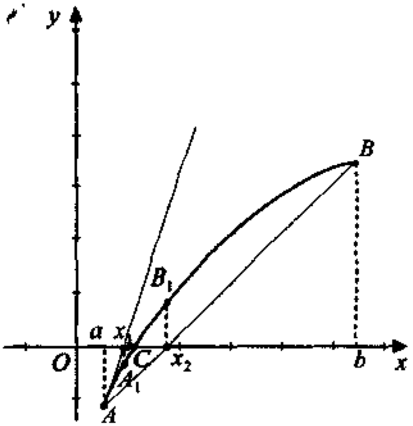

Рис. 26.

Если эта точность нас не устраивает, повторяем процесс еще раз. Через точки $A_1(x_1, F(x_1))$ и $B_1(x_2, F(x_2))$ проводим хорду, а в точке $A_1(x_1, F(x_1))$ проводим касательную к графику функции. В результате получаем отрезок $[x_3, x_4] \subset [x_1, x_2]$, в котором содержится корень уравнения. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность.

Например, как было показано ранее, корень уравнения

$$F(x) = x^3 + 4x - 1 = 0$$

принадлежит сегменту $[0, \frac{1}{4}]$.

Так как на этом сегменте $F'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ и $F''(x) = 6x > 0$, то график функции $y = x^3 + 4x - 1$ на $[0, \frac{1}{4}]$ имеет вид, показанный на рисунке 27, и, очевидно, касательную к графику нужно проводить в точке с абсциссой $x = \frac{1}{4}$.

Уравнение касательной:

$$y - \frac{1}{4^3} = \frac{19}{16}\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

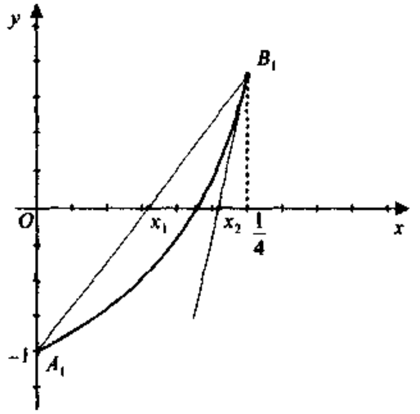

Рис. 27.

Положим в нем $y = 0$ и найдем соответствующее значение x, которое обозначим x_2

$$x_2 = \frac{9}{38} \approx 0,2369.$$

Точки $A_1(0,-1)$ и $B(\frac{1}{4}, \frac{1}{4^3})$ соединим хордой. Ее уравнение:

$$4x = \frac{(y+1)4^3}{1+4^3}.$$

Положим в нем y равным нулю и найдем соответствующее значение x, которое обозначим x_1. Получим

$$x_1 = \frac{16}{25} = 0,2461.$$

В результате приходим к заключению, что искомый корень уравнения принадлежит сегменту [0,2369; 0,2461]. Если за приближенное значение корня взять середину сегмента *С* яз 0,241, то погрешность не будет превышать половины длины сегмента, то есть Д < 0,005. Если полученная точность недостаточна, процесс следует повторить.

Варианты индивидуального задания по темам «Исследование функции с помощью производной. Приближенное решение уравнений комбинированным методом хорд и касательных»

I. По плану, предложенному в пункте 7^0 исследовать функции и построить их графики.

1) $y = (x-1)^2(x+1)^3$, $\quad y = (x+1)^3 x^{\frac{2}{3}}$;

2) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$, $\quad y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

3) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$, $\quad y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$;

4) $y = \dfrac{x}{3-x^2}$, $\quad y = \cos^3 x + \sin^3 x$;

5) $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$, $\quad y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$;

6) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\quad y = \sqrt[3]{\dfrac{x^4 - 2x^2}{x-1}}$;

7) $y = (x^2-4)^2$, $\quad y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$;

8) $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{10}$, $\quad y = \dfrac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$;

9) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$, $\quad y = e^{\sin x} - \sin x$;

10) $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{2x^2 - x - 1}$, $\quad y = e^{2x - x^2}$;

11) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\quad y = x^2 \ln x$;

12) $y = \dfrac{x^3 - 9x}{10}$, $\quad y = \sqrt{x^3 - x}$;

13) $y = \dfrac{1}{10}(4x - 5x^3 + x^5)$, $\quad y = \ln \cos x$;

14) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$, $\quad y = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^3$;

15) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$, $\quad y = \sin x + \cos^2 x$;

16) $y = x + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$, $\quad y = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}$;

17) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$, $\quad y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$;

18) $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$, $\quad y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$;

19) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, $\quad y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$;

20) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$, $\quad y = \sqrt[3]{x} - \dfrac{x}{3}$;

21) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$, $\quad y = x - 2 \arctan x$;

22) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$, $\quad y = x^3 e^{-x}$;

23) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$, $\quad y = x^2 e^{-x^2}$;

24) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, $\quad y = x^2 e^{-x}$;

25) $y = \dfrac{2}{(3 - x^2)(5 - x^2)}$, $\quad y = e^{-\frac{1}{x^2}}$;

26) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1} + x$, $\quad y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$;

27) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, $\quad y = x^x$;

28) $y = \dfrac{3x - 2}{5x^2}$, $\quad y = x \ln x$;

29) $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\quad y = e^{\frac{1}{x}}$.

II. Найти наименьший положительный (или наибольший отрицательный) корень уравнения с точностью до $0,001$ комбинированным методом хорд и касательных.

1. $x^3 - 4x^2 + 2 = 0;$
2. $x^3 - 3x^2 - 3 = 0;$
3. $x^3 + 2x - 11 = 0;$
4. $x + \lg x = 0,5;$
5. $3x - \cos x - 1 = 0;$
6. $x^4 - 4x - 2 = 0;$
7. $x^5 - x - 1 = 0;$
8. $x^3 + 2x + 7,8 = 0;$ (отрицательный)
9. $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0;$
10. $x^3 - 0,2x^2 + 0,2x - 1,2 = 0;$
11. $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0;$
12. $tgx = x;$
13. $x^5 - x - 0,2 = 0;$
14. $x - \sin x = 0,25;$
15. $x^3 + x = 1000;$
16. $x^3 - x - 1 = 0;$
17. $x^3 - 3x + 1 = 0;$
18. $x^5 + 5x^4 - 5 = 0;$
19. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0;$

20. $x^3 + 2x^2 - 3x - 7 = 0;$

21. $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0;$

22. $x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0;$

23. $x^3 + 3,38x - 1,54 = 0;$

24. $x^3 + 6x - 8 = 0;$

25. $x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0;$

26. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0;$

27. $\cos x = x^2;$

28. $x \cdot \lg x = 1;$

29. $x - 0,1 \sin x = 2.$