

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем

Н.С. Коротков

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Учебное пособие

Издательство «Универс-групп»
2004

УДК 538.56
ББК 22.313
К 687

К 687 **Коротков Н.С.** Дифракция электромагнитных волн: Учебное пособие. Самара: Изд-во «Универс-групп», 2004. -24 с.

ISBN 5-467-00025-X

В учебном пособии кратко изложены вопросы теории дифракционных явлений, рассмотрены строгий и приближенные методы решения дифракционных задач. Учебное пособие предназначено студентам радиофизической специализации для использования по дисциплинам специализации и в радиофизическом практикуме.

УДК 538.56
ББК 22.313

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Коротков Н.С.
Рецензент: доктор технических наук, профессор Комов А.Н.

ISBN 5-467-00025-X

© Н.С. Коротков, 2004

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет: Петренко О.А.

Подписано в печать 02.04.04. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл. печ. л. 1,4; уч.-изд. л. 1,5.
Гарнитура Times. Тираж 100 экз. Заказ № 171

Издательство «Универс-групп»,
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1

Отпечатано ООО «Универс-групп»

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1. Введение

При прохождении волн мимо кромок тел, находящихся в среде, они отклоняются от прямолинейного движения и изменяют свою структуру. Это явление называют дифракцией, а задачи, в которых рассматриваются явления дифракции, - дифракционными задачами.

Дифракция – характерная особенность распространения волн в среде независимо от их природы. Дифракцией звуковых волн объясняется возможность слышать звуковые сигналы за каким-либо препятствием. Дифракция приводит к нарушению прямолинейности распространения света при прохождении мимо резких краев непрозрачных или полупрозрачных тел, сквозь узкие отверстия. Дифракцией радиоволн вокруг поверхности земли объясняется прием длинных и средних радиоволн далеко за пределами прямой видимости излучающей антенны.

Дифракционные явления играют существенную роль и в СВЧ диапазоне как при распространении в околосемном пространстве, так и в радиотехнических устройствах (дифракционных антеннах, дифракционных решетках и т.п.)

Теоретическое исследование дифракционных явлений сводится к определению электромагнитных полей по заданному исходному (первичному) полю и заданным электрическим и геометрическим параметрам тела. Если тело, на котором происходит дифракция, имеет простую геометрическую форму (бесконечный круглый цилиндр, шар и др.), то можно получить точные аналитические соотношения для волн. Для большинства же случаев дифракционных задач могут быть получены только приближенные решения.

В данном пособии рассмотрены принципы строгой постановки задач дифракции электромагнитных волн на металлических телах и их точного решения на конкретном примере, а также принципы приближенного решения задач дифракции с примером.

2. Строгая постановка задачи дифракции

При постановке задачи считается, что первичная волна – монохроматическая, плоская, поперечная, а её характеристики (электрическое \vec{E} и магнитное \vec{H} поля) известны. Источники поля находятся вне рассматриваемой области (в самой области $\vec{j}^{cm} = 0$, $\rho^{cm} = 0$). Среда считается безграничной, однородной и линейной, её параметры: ϵ_a (абсолютная диэлектрическая проницаемость), μ_a

(абсолютная магнитная проницаемость), σ (удельная электрическая проводимость) – величины постоянные. Для простоты берется $\sigma = 0$. Также считается, что в рассматриваемой области находится только одно тело, имеющее конечные размеры и бесконечную проводимость ($\sigma_T = \infty$, идеальное тело), поверхность тела S ограничена.

Решение задачи проводится с использованием метода комплексных амплитуд.

Графическое представление задачи показано на рис.1.

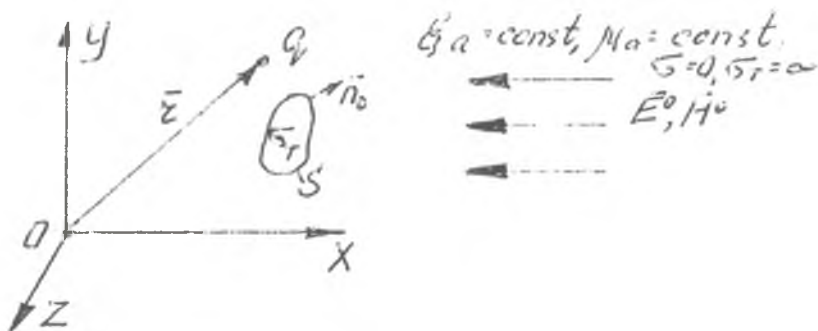


Рис.1. Строгая постановка задачи дифракции q- точка наблюдения

Система координат (вид и направление осей) выбирается, исходя из удобства решения задачи. При рассмотрении задачи в общем виде берется Декартова система координат. Векторы в изложении и на рисунках выделяются чертой над обозначением.

Под действием поля первичной волны (\vec{E}^0 и \vec{H}^0) на поверхности S тела возникают электрические токи, которые создают вторичную волну с электрическим полем \vec{E}^1 и \vec{H}^1 . Поле в точке наблюдения в общем случае создается первичной и отраженной от поверхности тела вторичной волной. В области геометрической тени поле создается только вторичной волной.

Так как первичное поле (\vec{E}^0, \vec{H}^0) известно, задача сводится к определению вторичного поля. При этом достаточно определить только один из векторов вторичного поля, обычно определяется вектор \vec{E}^1 , другой вектор - \vec{H}^1 - определяется непосредственно из второго уравнения Максвелла.

При решении векторы полей и источников записываются в комплексном виде. Вид записи для напряженностей электрического и магнитного полей будет таким:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(n\vec{r} \pm kt + \varphi_0)} = \vec{E}_m e^{i(n\vec{r} \pm kt)} = \vec{E}_a e^{i n \vec{r}} \quad (1)$$

где: \vec{E}_0 – амплитуда электрического поля,

$\vec{E}_m = E_0 e^{i\varphi_0}$ – комплексная амплитуда электрического поля, φ_0 – начальная фаза электрического поля,

$\vec{E}_k = \vec{E}_m e^{+ikx}$ – комплексная функция электрического поля.

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t \pm kx + \varphi_m)} = \vec{H}_m e^{i(\omega t \pm kx)} = \vec{H}_k e^{i\omega t}, \quad (2)$$

где: \vec{H}_0 – амплитуда магнитного поля,

$\vec{H}_m = H_0 e^{i\varphi_m}$ – комплексная амплитуда магнитного поля, φ_m – начальная фаза магнитного поля,

$\vec{H}_k = \vec{H}_m e^{+ikx}$ – комплексная функция магнитного поля.

В формулах(1) и (2) черта показывает векторный характер полей, а точка над обозначениями – комплексный характер записи. Знак минус перед kx относится к волне, распространяющийся в положительном направлении x , а знак плюс перед kx относится к встречной волне.

В формулах (1) и (2) имеются и такие обозначения:

ω – циклическая частота полей, поскольку среда линейная ω будет одной и той же величиной для всех волн.

$\kappa = \beta - i\alpha$ – коэффициент распространения волн, в среде без потерь $\alpha = 0$ (так как $\sigma = 0$), $\kappa = \beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ – длина волн в среде. В среде без потерь $\varphi_s = \varphi_m$. Поляризация волн определяется поляризацией вектора \vec{E} .

Для первичной волны в обозначения электрического и магнитного векторов дополнительно вводятся индексы «0», для вторичной – индекс «1» (черточка). Таким образом, обозначения полей первичной волны будут иметь вид: \vec{E}^0 , \vec{H}^0 , и для вторичной волны: \vec{E}^1 , \vec{H}^1 .

Во внешней по отношению к поверхности S среде вектор \vec{E} удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{E}_k + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{E}_k = 0. \quad (3)$$

На поверхности S касательная составляющая полного электрического поля $\vec{E}k^0 + \vec{E}k^1$ согласно граничным условиям равна нулю, то есть

$$[\vec{n}_0, \vec{E}k^0] |_{s} + [\vec{n}_0, \vec{E}k^1] |_{s} = 0$$

или

$$[\vec{n}_0, \vec{E}k^1] |_{s} = - [\vec{n}_0, \vec{E}k^0] |_{s}, \quad (4)$$

где: \vec{n}_0 – единичная нормаль, внешняя к поверхности S,

$\vec{E}k^0$ - функция электрического поля первичной волны,

$\vec{E}k^1$ - функция электрического поля вторичной волны.

В бесконечно удаленных точках решение уравнения (3) должно удовлетворять определенным условиям – условиям излучения [1÷3].

В соответствии с этими условиями при $f_r \rightarrow \infty$ поля \vec{E} и \vec{H} должны убывать быстрее, чем $\frac{1}{r}$. Условия излучения всегда выполняются в

реальных средах. В средах без потерь условия излучения будут определяться выражениями:

$$\lim r \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial r} + i\omega \sqrt{\epsilon_s \mu_s} \vec{E} \right) = 0,$$

$$\lim r \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial r} + i\omega \sqrt{\epsilon_s \mu_s} \vec{H} \right) = 0.$$

Физически эти выражения эквивалентны требованию, чтобы при $r \rightarrow \infty$ поле имело характер расходящихся от источника сферических волн.

При выполнении условий излучения дифракционная задача для тел, не имеющих острых кромок, будет иметь единственное решение.

Если тело имеет острые кромки, то для единственности решения задачи необходимо выполнение дополнительных условий – условий на ребре [2]. Здесь последний случай не рассматривается.

2.1. Дифракция плоской электромагнитной волны на круговом цилиндре

Эта частная задача представляет интерес тем, что для неё можно провести строгое решение. Сформулируем её. Пусть имеется бесконечный идеально проводящий круговой цилиндр радиуса a , на который перпендикулярно его оси падает плоская поперечная линейно-поляризованная волна (рис.2)

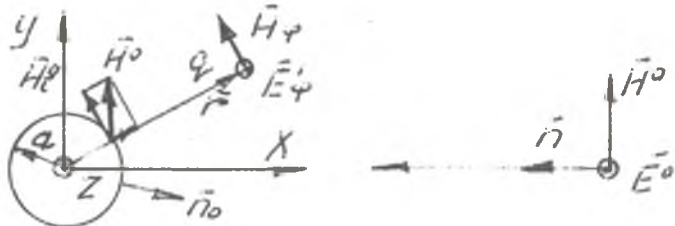


Рис.2. Графическое представление задачи

Решение задачи проведём в цилиндрической системе координат (r, φ, z) с ортами $\vec{r}_0, \vec{\varphi}_0, \vec{z}_0$. Ось Z направим вдоль оси цилиндра. Вектор электрического поля \vec{E}^0 первичной волны направим вдоль оси Z .

Напряженность электрического поля $\vec{E}^0 k$ в цилиндрической системе координат имеем вид:

$$\vec{E}^0 k(r, \varphi) = \vec{E} m^0 e^{ikr \cos \varphi} = \vec{z}_0 \cdot \vec{E} m^0 e^{ikr \cos \varphi}. \quad (5)$$

Напряженность магнитного поля первичной волны описывается выражением:

$$\vec{H} k^0(r, \varphi) = \vec{H} m^0 e^{ikr \cos \varphi} = \left[\vec{n}, \vec{E} m^0 \right] e^{ikr \cos \varphi}, \quad (6)$$

где Z_c – волновое сопротивление.

Напряженность электрического поля вторичной волны \vec{E}^1 также будет направлена вдоль Z . Векторы полей \vec{E} и \vec{H} зависят только от координат r и φ - двумерная дифракционная задача.

Уравнение Гельмгольца для вторичного электрического поля в цилиндрической системе координат будет иметь вид [4]:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \vec{E} k^1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E} k^1}{\partial \varphi^2} + k^2 \vec{E} k^1 = 0, \quad (7)$$

где $r > a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Напряженность электрического поля $\vec{E} k^1$ на поверхности S должна удовлетворять граничному условию (2), которое в цилиндрической системе координат записываются в виде:

$$\vec{E} k^1(a, \varphi) = - \vec{E} m^0 e^{ika \cos \varphi}. \quad (8)$$

Условие излучения состоит в том, что при $r \rightarrow \infty$ вторичное поле должно иметь только волну, уходящую в бесконечность от оси Z .

Решение уравнение (7) удобно искать методом разделения переменных, положив

$$\vec{E} k^1(r, \varphi) = R(r) \cdot \phi(\varphi). \quad (9)$$

После подстановки решения (9) в уравнение (7) и проведения соответствующих методу стереотипных преобразований получаем:

$$\frac{1}{R} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 \right) = - \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} . \quad (10)$$

Как видно из (10) левая часть уравнения зависит только от r , правая – только от φ . Так как переменные r и φ независимы, то, следовательно, уравнение (10) будет равенством двух независимых функций. Это возможно только в том случае, когда эти функции по отдельности равны одной и той же постоянной величине. Обозначая постоянную величину через p^2 , приходим к двум независимым дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + p^2 \phi = 0 , \quad (11)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) R = 0 . \quad (12)$$

Решение уравнения (11) описывается функцией

$$\phi = A \sin p\varphi + B \cos p\varphi , \quad (13)$$

где A и B – постоянные интегрирования.

Поскольку напряженность электрического поля первичной волны является четной функцией относительно угла φ (симметрия задачи относительно плоскости xoz), то и функция ϕ , а следовательно, и функция $\vec{E}k^1$ должны быть четными относительно φ . Таким образом, в уравнении (13) постоянная A должна быть равна нулю, и решение для $\phi(\varphi)$ примет вид:

$$\phi(\varphi) = B \cos p\varphi . \quad (14)$$

При изменении угла φ на 2π значение функции $\vec{E}k^1$ должно остаться прежним, то есть $\vec{E}k^1(r, \varphi + 2\pi) = \vec{E}k^1(r, \varphi)$, а это значит, что и функция $\phi(\varphi)$ должна удовлетворять соотношению

$$\phi(\varphi + 2\pi) = \phi(\varphi) . \quad (15)$$

Условие (15) выполняется, если p – целое число, то есть

$$p = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Уравнение (12) является уравнением Бесселя, его решение представляется в виде:

$$R(r) = C^1 I_p(kr) + D^1 N_p(kr), \quad (17)$$

где $I_p(kr)$ и $N_p(kr)$ - функция Бесселя p -го порядка первого и второго рода соответственно, а C^1 и D^1 - постоянные интегрирования.

В данной задаче решение уравнения Бесселя (12) может быть выражено через функции Бесселя третьего рода (функции Ханкеля):

$$R(r) = CH_p^{(1)}(kr) + DH_p^{(2)}(kr), \quad (18)$$

$$\text{где } H_p^{(1)}(kr) = I_p(kr) + iN_p(kr) - \quad (19)$$

функция Ханкеля p -го порядка первого рода,

$$H_p^{(2)}(kr) = I_p(kr) - iN_p(kr) - \quad (20)$$

функция Ханкеля p -го порядка второго рода, C и D - постоянные интегрирования. При $r \rightarrow \infty$

$$H_p^{(1)}(kr) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left[kr - \frac{\pi}{4}(2p+1)\right]}, \quad (21)$$

$$H_p^{(2)}(kr) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{-i\left[kr - \frac{\pi}{4}(2p+1)\right]}. \quad (22)$$

Как видно из (21) и (22) функция Ханкеля первого рода соответствует волне, распространяющейся из бесконечности к оси цилиндра, а функция Ханкеля второго рода соответствует волне, распространяющейся от оси цилиндра в бесконечность вдоль радиусов r . Следовательно, условие излучения соответствует функция Ханкеля второго рода $H_p^{(2)}(kr)$, тогда $C = 0$.

Окончательно решение для $R(r)$ примет вид (см.(18)):

$$R(r) = DH_p^{(2)}(kr), \quad (23)$$

а общим решением уравнения (7) может служить функция

$$\vec{E}_{kp}^1 = D_p H_p^{(2)}(kr) \text{Cosp}\varphi, \quad (24)$$

где $D_p = BD$ - некоторая постоянная.

Теперь используя граничное условие (8), представим искомое решение $\vec{E}_r^1(r, \varphi)$ в виде суперпозиции всех возможных функций (24):

$$\vec{E}_r^1(r, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} D_p H_p^{(2)}(kr) \text{Cosp}\varphi. \quad (25)$$

Коэффициенты D_p получаются при подстановке (25) в граничное условие (8). В результате будем иметь:

$$\sum_{p=0}^{\infty} D_p H_p^{(2)}(ka) \text{Cosp}\varphi = -\vec{E}_m^0 \left[I_p(ka) + 2 \sum_{p=0}^{\infty} (i)^p I_p(ka) \text{Cosp}\varphi \right]. \quad (26)$$

Левую и правую часть равенства (26) можно рассматривать как разложение в ряд Фурье одной и той же функции. Следовательно,

$$D_0 = -\vec{E}_m^0 \frac{I_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}, \quad (27)$$

$$D_p = -\vec{E}_m^0 \frac{I_p(ka)}{H_p^{(2)}(ka)} \quad \text{при } p=1,2,3\dots$$

Подставив (27) в (25), получим окончательное выражение для напряженности вторичного электрического поля \vec{E}_{kr}^1 (этот вектор направлен вдоль Z):

$$\vec{E}_{kr}^1 = -\vec{z}_0 \vec{E}_m^0 \left[\frac{I_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} \cdot H_0^{(2)}(kr) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (i)^p \cdot \frac{I_p(ka)}{H_p^{(2)}(ka)} \cdot H_p^{(2)}(kr) \text{Cosp}\varphi \right]. \quad (28)$$

Ряд в выражении (28) абсолютно сходящийся, его можно почленно дифференцировать. Теперь, используя второе уравнение Максвелла и выражение (28), определяем напряженность магнитного поля вторичной волны \vec{H}_{kr}^1 (касательная составляющая к поверхности цилиндра), которая вместе с \vec{E}_{kr}^1 определяем распространение вторичной волны в направлении r :

$$\vec{H}_{kr}^1 = \vec{\varphi}_0 \frac{i\vec{E}_m^0}{\omega\mu_a} \left[\frac{I_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} \cdot \frac{dH_0^{(2)}(kr)}{dr} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (i)^p \frac{I_p(ka)}{H_p^{(2)}(ka)} \cdot \frac{dH_p^{(2)}(kr)}{dr} \cdot \text{Cosp}\varphi \right]. \quad (29)$$

Соотношения (28) и (29), таким образом, определяют поле в точке наблюдения q .

Используя последнее соотношение (30) и граничные условия для \vec{H}_1^0 на поверхности S идеального цилиндра, можно получить выражение для плотности токов проводимости, текущих по поверхности цилиндра. Граничные условия для магнитного поля на поверхности цилиндра. Граничные условия для магнитного поля на поверхности цилиндра имеют вид:

$$\left[\vec{n}_0, (\vec{H}_1^0 + \vec{H}_1^1) \right]_{r=a} = \vec{z}_0 \vec{j}_z \Big|_{r=a}, \quad (30)$$

Выражение (29) и (30) дают:

$$\vec{j}_z = \vec{E}_m^0 + \left\{ \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} \cos \varphi \cdot e^{ika \cos \varphi} + \frac{i}{\omega \mu_n} \left[\frac{I_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} \cdot \frac{dH_0^{(2)}(kr)}{dr} \right]_{r=a} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (i)^p \frac{I_p(ka)}{H_p^{(2)}(ka)} \cdot \frac{dH_p^{(2)}(kr)}{dr} \Big|_{r=a} \cdot \cos p \varphi \right\}$$

(31)

Сделав суммирование усеченного ряда в последней формуле (достаточная точность достигается при $p_{\max} \approx 2ka$) и выделив действительную часть из оставленных членов, можно получить соотношение для определения амплитуд плотности токов на поверхности цилиндра. На рисунке 3 показано такое распределение для плотности токов в относительных (нормированных) единицах при различных значениях ka [5]:

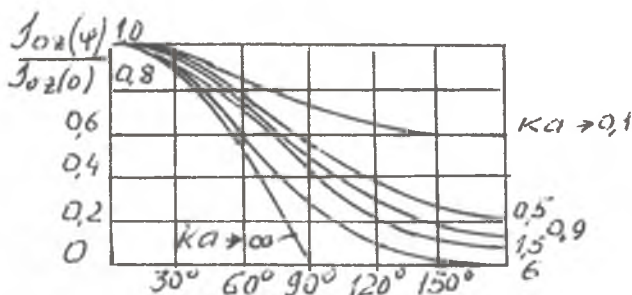


Рис.3. Распределение амплитуд плотности токов на поверхности проводящего цилиндра

Как видно из рисунка 3 по поверхности цилиндра значительные токи текут не только по облучаемой источником части, но и в области

тени (не облучаемой части цилиндра). Величина плотности токов зависит от соотношения a/λ , при увеличении этого отношения плотность токов в области тени снижается, что естественно влияет на распределение электрического и магнитного полей вторичной волны.

На рисунке 4 показаны нормированные кривые зависимости амплитуд напряженности электрического поля вторичной волны от величины ka при $kr \gg 1$ и $r = \text{const}$ [5]

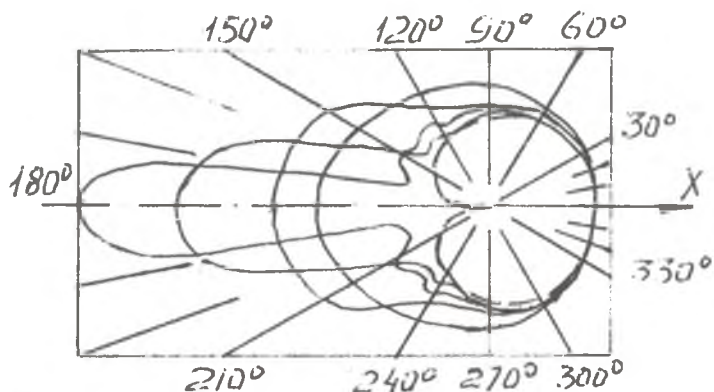


Рис.4. Распределение амплитуд электрического поля вторичной волны в относительных единицах $E_{0s}(\varphi)/E_{0s}(\varphi=0)$ при различных ka

Решение (28) пригодно для цилиндра любого радиуса, однако с увеличением радиуса величина ka становится большой и само решение становится неудобным для анализа. На рисунке 4 использовались более простые асимптотические формулы. Как видно из расчетных данных приведенный метод позволяет рассчитать поле во всем пространстве, окружающем цилиндр. В зоне тени, где поле появляется за счет затекания токов, при $ka > 4$ ($a \sim \lambda$) поле имеет резко выделенный максимум, превышающий амплитуду поля в зоне видимости. Дифракционная картина симметрична относительно оси x , что связано с геометрической симметрией задачи. И использованный в этой задаче метод Фурье позволяет получить решение дифракционной задачи и для других тел простой конфигурации (эллиптического цилиндра, бесконечно тонкой ленты, сферы, эллипсоида вращения, конуса и др.).

3. Приближенные методы решения задач дифракции

На практике часто приходится решать задачи дифракции электромагнитных волн, падающих на тела сложной конфигурации, поверхности которых не совпадают ни с одной из координатных поверхностей применяемых систем координат. В этом случае приходится применять приближенные методы.

3.1. Принципы приближенного решения задач дифракции

В основе принципов приближенного решения задач дифракции лежат волновая теория электромагнитного поля, геометрическая оптика и метод краевых волн.

3.1.1. Волновая теория электромагнитного поля

Наиболее теоретически и практически важной проблемой электромагнетизма является исследование процессов излучения и распространения волн в различных средах в присутствии тел конечных размеров, в частности дифракционных процессов. Математически задача ставится следующим образом (рис.5): задается некоторая произвольная область V , ограниченная системой поверхностей S_1, S_2, \dots, S_p . В этой области задается произвольное распределение источников поля. Требуется найти векторы электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} в произвольной точке q внутри области.

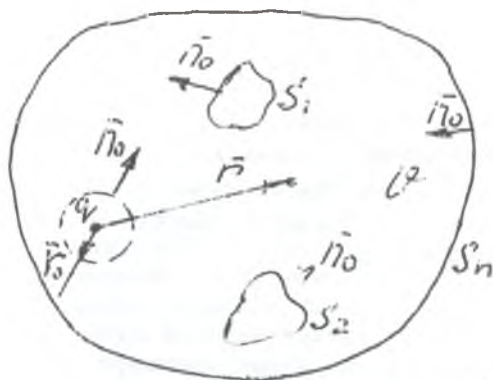


Рис.5. Постановка задачи

Источниками поля в общем случае могут быть как электрические и магнитные (условные) токи и заряды, так и электрические и магнитные поля (согласно принципу эквивалентных токов).

Задача может быть решена методом непосредственного интегрирования уравнений Максвелла (в векторном виде). Из них получаются волновые уравнения для напряженностей электрического и магнитного полей, которые интегрируются в общем V при использовании векторной теоремы Грина и функции источника $\bar{a}\psi = \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \bar{a}$, где r - расстояние от точки наблюдения q до источника ($r \neq 0$). При этом малая часть области, окружающей точку наблюдения q , должна быть исключена из рассмотрения (при $r \rightarrow 0 \quad \psi \rightarrow \infty$). Обычно эта область берется в виде сферы с радиусом r_0 . В результате интегрирования при $r_0 \rightarrow 0$ (объем сферы $V^{II} \rightarrow 0$) получаются соотношения для векторов поля в точке наблюдения:

$$\dot{\vec{E}}_q = \frac{1}{2\pi} \int_V \left\{ -i\omega\mu_a \dot{\vec{j}} - [\dot{\vec{j}}_m, \text{grad}\psi] + \frac{\dot{\rho}}{\epsilon_a} \text{grad}\psi \right\} dV + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1+S_2+\dots+S_n} \left\{ i\omega\mu_a \dot{\vec{j}} [\vec{n}_0, \dot{\vec{H}}] + \right. \quad (32)$$

$$\left. [\vec{n}_0, \dot{\vec{E}}] \text{grad}\psi \right\} + (\vec{n}_0, \dot{\vec{H}}) \text{grad}\psi \} dS,$$

$$\dot{\vec{H}}_q = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ -i\omega\epsilon_a \dot{\vec{j}} + [\dot{\vec{j}}, \text{grad}\psi] + \frac{\dot{\rho}_m}{\mu_a} \text{grad}\psi \right\} dV + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1+S_2+\dots+S_n} \left\{ i\omega\epsilon_a \dot{\vec{j}} [\vec{n}_0, \dot{\vec{E}}] + \right. \quad (33)$$

$$\left. [\vec{n}_0, \dot{\vec{H}}] \text{grad}\psi \right\} + (\vec{n}_0, \dot{\vec{H}}) \text{grad}\psi \} dS,$$

где $\dot{\vec{j}}$ - плотность электрического тока источников,

$\dot{\vec{j}}_m$ - плотность магнитного тока (условного) источников,

$\dot{\rho}$ - плотность электрических зарядов источников,

$\dot{\rho}_m$ - плотность магнитных зарядов (условных) источников,

ϵ_a, μ_a - диэлектрическая и магнитная проницаемость среды,

S_1, S_2, \dots, S_n - внутренние области объема V с поверхностью S_n ,

\vec{n}_0 - единичный вектор внутренней нормали,

$$\psi = \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (34)$$

$$\text{grad}\psi = \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \vec{n}_0 \right) \Big|_{r=r_0} \cdot \vec{n}_0 = \left(-ik - \frac{1}{r_0} \right) \cdot \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \vec{n}, \quad (35)$$

$\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}$ - электрический и магнитный векторы на поверхностях S_1, \dots, S_n , которые могут быть полями, создаваемыми как внутренними

источниками объема V , так и источниками, находящимися вне области.

В поверхностных интегралах формул (32) и (33) использован принцип эквивалентных токов, позволяющий определить вклад в электромагнитное поле в точке наблюдения граничных значений векторов \vec{E}, \vec{H} .

Объемные источники, состоящие из токов и зарядов, также вносят свой вклад в электромагнитное поле в точке наблюдения. Этот вклад определяется объемными интегралами в (32) и (33).

Для определения полей часто применяется и скалярная формула Грина [1,2]:

$$\int_V \{ \Phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \Phi \} dV = - \int_S \left(\Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS .$$

Положив $\psi = \frac{e^{-ikr}}{r}$, для области V за исключением малой сферы Σ , окружающей точку наблюдения, получим:

$$\Phi_v = - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] dS \quad (36)$$

Поле \vec{E} удовлетворяет условиям применимости формулы Грина (непрерывна, имеет первую и вторую производные как внутри объема, так и на границе).

Формула (36) при подстановке в нее координатных составляющих, вектора E (вместо ϕ) позволяет получить координатные составляющие вектора E в любой точке рассматриваемого объема через значения соответствующих координатных составляющих \vec{E} и их производных по n на границе.

Формула (36) является математической формулировкой известного принципа Гюйгенса-Кирхгофа. Суть принципа состоит в том, что функция ϕ , удовлетворяющая скалярному волновому уравнению, в любой точке наблюдения является суперпозицией сферических волн, излучаемых элементарными источниками. В качестве исходной граничной поверхности с заданными векторами поля можно выбрать, в частности, какую-нибудь волновую поверхность. Тогда в соответствии с принципом можно определить любую другую волновую поверхность, то есть осуществить переход от одной волновой поверхности к другой.

Принцип Гюйгенса-Кирхгофа является частным случаем общего принципа эквивалентных токов, учитывающего векторных характер электромагнитных полей.

Рассмотренные в этом параграфе принципы и формулы составляют основу волновой теории электромагнитного поля, которые позволяют изучить различные явления при излучении и распространении волны в пространстве, содержащем различные источники и тела. Сюда входят и задачи дифракции. Определение полей при дифракции является зачастую весьма трудной задачей. Нередко вычисление полей производится приближенными методами, суть которых состоит в том, что вначале приближенно определяются касательные составляющие \vec{E}_t и \vec{H}_t на поверхности, поверхность разбивается на элементы участка (элементы Гюйгенса), по значениям \vec{E}_t и \vec{H}_t на которых определяется суммарное поле в точке наблюдения.

В задачах дифракции нашли широкое применения два метода: метод физической оптики (приближение Гюйгенса-Кирхгофа) и метод геометрической оптики. При решении задач дифракции на острых краях дополнительно используется метод краевых волн.

3.1.2. Метод физической оптики

Суть метода физической оптики состоит в следующем. Рассматриваемое тело считается идеально проводящим. Линейные размеры тела ℓ и минимальный радиус кривизны R_{\min} велики по сравнению с длиной волны ($\ell \gg \lambda, R_{\min} \gg \lambda$), тело облучается источником Q . В этом случае затеканием токов на теневую сторону тела можно пренебречь и предположить, что в каждой облученной части поверхности тела плотность тока будет такой же, какой она была бы при заданном внешнем поле на идеально проводящей плоскости, касательной к поверхности тела в рассматриваемой точке. Такая постановка задачи приближенная, так как при конечных размерах тела токи всегда затекают на теневую сторону, реальное распределение токов на облученной стороне отличается от предполагаемого. Плотность токов на облученной стороне поверхности тела определяется по касательной составляющей магнитного поля, создаваемого источником, на идеально проводящей плоскости. По известным токам на поверхности тела теперь можно определить вторичное поле в любой точке пространства (используя, например, векторный потенциал), кроме области тени (на теневой стороне плотность поверхностных токов считается равной нулю).

3.1.3. Метод геометрической оптики

Метод геометрической оптики, как и в случае метода физической оптики, применяется при линейных размерах тела, значительно превышающих длину волны и имеющих достаточно гладкую поверхность с минимальным радиусом кривизны, значительно превышающим длину волны.

Основные принципы геометрической оптики состоят в следующем. Падающая волна считается плоской. Среда считается непроводящей. Вводится понятие лучей – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением распространения волны. В однородной среде лучи прямые, в неоднородной среде – криволинейные. Такое представление будет тем точнее, чем меньше длина волны. Результаты же, полученные в приближении геометрической оптики, можно рассматривать как асимптотическое решение волновой задачи при $\lambda \rightarrow 0$.

При определении поля по методу геометрической оптики считается, что каждой точке луча соответствуют определенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} . Векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны лучу, их фазы изменяются линейно вдоль него, а характер изменения амплитуд векторов поля устанавливается на основе закона сохранения энергии. Энергия электромагнитной волны распространяется вдоль лучей (перпендикулярно волновому фронту). Луч, падающий на поверхность раздела двух сред разделяется на отраженный и преломленный. Направления отраженного и преломленных лучей определяются законами Снелиуса, а амплитуды векторов поля – формулами Френеля.

Если отражение происходит от поверхности идеально проводящего тела, то нормальная составляющая напряженности электрического поля отраженного луча равна нормальной составляющей напряженности электрического поля падающего луча в точке падения, а касательные составляющие напряженности электрического поля падающего и отраженного лучей отличаются только знаком (изменение ориентации вектора \vec{E}). Зная поле отраженного луча в точке отражения, можно найти поле в любой точке этого луча, рассматривая энергетическую трубку с ее главным радиусом кривизны фронтов падающей и отраженной волн, что является чисто геометрической задачей. Если через рассматриваемую точку пространства проходит несколько лучей, то в этой точке определяется сумма полей этих лучей.

Часто методы физической оптики и геометрической оптики применяются совместно.

3.1.4. Метод краевых волн.

Метод краевых волн является развитием и уточнением метода

физической оптики применительно к выпуклым металлическим телам, поверхность которых имеет изломы.

Суть метода состоит в следующем. Падающая на идеально проводящее тело плоская электромагнитная волна наводит на его поверхности электрические токи, которые создают вторичную волну. В физической оптике предполагается, что плотность токов \vec{j}_s , наведенных на поверхности тела S , равна

$$\vec{j}_s = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{j}_{s0} = 2[\vec{n}_0, \vec{H}^0] \text{ на } S_0, \\ 0 \quad \text{ на } S_1, \end{array} \right.$$

где S_0 и S_1 - облучаемая и теневая части поверхности тела, \vec{n}_0 - орт внешней нормали к поверхности тела S , \vec{H}^0 - напряженность магнитного поля падающей (первичной) волны, \vec{j}_{s0} - плотность токов на освещенной части поверхности.

В реальности плотность токов на поверхности тела, отличается от \vec{j}_{s0} и равна

$$\vec{j}_s = \vec{j}_{s0} + \vec{j}_s^1$$

где \vec{j}_s^1 - добавочная часть тока, обусловленного искривлением поверхности тела (отклонением поверхности тела от бесконечной плоскости).

Учет только составляющей \vec{j}_{s0} дает решение в приближении физической оптики. Для получения более точного решения необходимо учесть и добавочную составляющую \vec{j}_s^1 .

Добавочную составляющую можно получить при строгом решении, что зачастую связано с большими математическими трудностями. Поэтому приходится в большинстве случаев ограничиваться определением приближенных значений \vec{j}_s^1 (при определенных упрощающих допущениях). Метод краевых волн позволяет находить эти приближенные значения \vec{j}_s^1 , обусловленных наличием ребер на поверхности выпуклого идеально проводящего тела, если его размеры и расстояние между ребрами велики по сравнению с длиной волны.

Подробно метод краевых волн описан в книге Уфимцева П.Я. [8].

3.2. Дифракция плоской электромагнитной волны на отверстии в плоском проводящем экране

Здесь мы рассматриваем пример применения приближенных методов расчета полей в сложных дифракционных задачах.

Пусть плоская волна с векторами

$$\begin{aligned} \vec{E}_k^0 &= -\vec{x}_0 \dot{E}_m^0 e^{-ikz}, \\ \vec{H}_k^0 &= -\vec{y}_0 \dot{H}_m^0 e^{-ikz}. \end{aligned} \quad (37)$$

падет на бесконечный проводящий экран, расположенный в плоскости $z=0$ (рис.6).

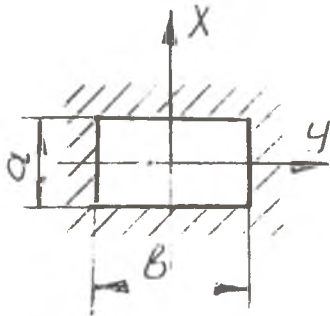
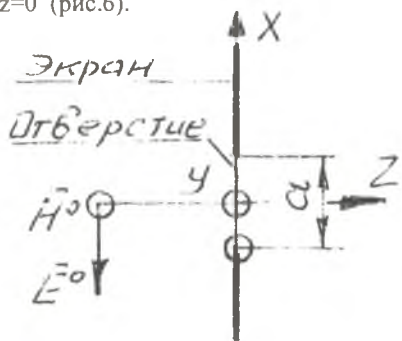


Рис.6. Постановка задачи дифракции

Рис.7. Размеры отверстия

Требуется рассчитать электромагнитное поле, проникающее в правое полупространство ($z \geq 0$) через отверстие прямоугольной формы (рис.7).

Для расчета вторичного электромагнитного поля используем принцип эквивалентных токов в сочетании с методом геометрической оптики. По законам геометрической оптики поле, проникающее за экран при падении на него плоской волны, представляется в виде пучка лучей, параллельных оси Z , с поперечным сечением той же формы, что и отверстие. На самом деле, поле в правом полупространстве имеет другую структуру. Тем не менее соотношения геометрической оптики можно использовать для приближенного определения распределения векторов поля в плоскости $z = 0^+$ (справа от плоскости отверстия при $z \rightarrow 0$). Согласно законам геометрической оптики распределения поля на отверстии должно совпадать с распределением поля падающей

(первичной) волны, а на остальной части плоскости $z = 0^+$ (теньевая сторона экрана) векторы \vec{E} и \vec{H} должны обращаться в нуль.

Все изложенное будет приближенно справедливо лишь при условии, что размеры отверстия в экране значительно больше длины волны ($a \gg \lambda, b \gg \lambda$). В действительности структура поля на отверстии отличается от той структуры, которую имеет падающая волна, вследствие искажений, возникающих вблизи кромок экрана. Однако для больших отверстий относительное влияние этих искажений на вторичное поле будет не столь значительным как, например, при малых отверстиях. Далее, в отличие от исходных допущений на теневой части экрана истинное поле не обращается в нуль. На самом деле, по экрану и в теневой части его течет электрический ток, и, следовательно, касательная составляющая вектора \vec{H} на нем отлична от нуля. Однако, как показывает опыт, проникновение поля в область тени вблизи экрана оказывается незначительным, если $a \gg \lambda, b \gg \lambda$.

В соответствии с изложенным граничные условия для векторов \vec{E} и \vec{H} искомого электромагнитного поля в плоскости $z = 0^+$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_m &= \begin{cases} -\vec{x}_0 \dot{E}_m^0 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_1 \end{cases} \\ \vec{H}_m &= \begin{cases} -\vec{y}_0 \dot{H}_m^0 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь S_0 - площадь отверстия,

S_1 - теневая поверхность экрана

По принципу эквивалентных токов распределению поля (38) в плоскости $Z = 0^+$ соответствуют поверхностные плотности электрических и магнитных токов:

$$\begin{aligned} \vec{j}_s &= \begin{cases} \vec{x}_0 \dot{H}_m^0 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_1 \end{cases} \\ \vec{j}_{ms} &= \begin{cases} \vec{y}_0 \dot{E}_m^0 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Для определения поля, проникающего в правое полупространство через отверстие, необходимо найти поле поверхностных электрических и магнитных токов (см 39).

Проекции векторов \vec{E} и \vec{H} на больших расстояниях от отверстия определяющая по схеме рис.8 в сферической системе координат по формулам (40).

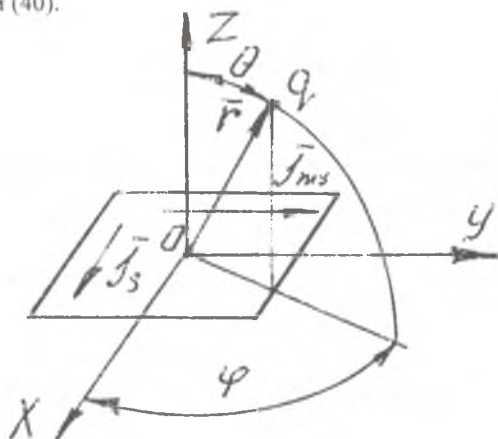


Рис.8. Схема определения векторов вторичного поля

$$\dot{E}_{k\theta} = -\frac{i}{2\lambda} j_s Z_c S_0 \frac{e^{-ib}}{r} \frac{\sin X}{X} \cdot \frac{\sin Y}{Y} (1 + \cos\theta) \cos\varphi,$$

$$\dot{E}_{k\varphi} = -\frac{i}{2\lambda} j_s Z_c S_0 \frac{e^{-ib}}{r} \frac{\sin X}{X} \cdot \frac{\sin Y}{Y} (1 + \cos\theta) \sin\varphi,$$

$$\dot{H}_{k\theta} = -\frac{\dot{E}_\varphi}{Z_c},$$

$$\dot{H}_{k\varphi} = -\frac{\dot{E}_\theta}{Z_c} \quad (40)$$

$$X = \frac{ka}{2} \sin\theta \cos\varphi,$$

$$\text{Где } Y = \frac{kb}{2} \sin\theta \sin\varphi,$$

$$S = ab,$$

$$j_s^0 = \dot{H}_s^0,$$

Z_c – волновое сопротивление.

Изложенный метод решения дифракционной задачи использует приближенные граничные условия в плоскости $z = 0^+$. Поэтому найденное в результате решения поле в правом полупространстве будет в какой то степени отличаться от истинного поля.

Определим, например, проекцию \dot{E}_φ , касательную при $\theta = \frac{\pi}{2}$ к плоскости экрана. Из формул (40) имеем:

$$\dot{E}_{\varphi} = \frac{i}{2\lambda} H_0^0 Z_0 S_0 \frac{e^{-i\theta r}}{r} \cdot \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\varphi\right)}{\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\varphi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin\theta \sin\varphi\right)}{\frac{ka}{2} \sin\theta \sin\varphi} (1 + \cos\theta) \sin\varphi. \quad (41)$$

Т.к. по условию экран является бесконечно проводящим, то проекция \dot{E}_φ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ должна обратиться в нуль.

Однако из последнего выражения видно, что

$$\dot{E}_{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) \neq 0.$$

Следовательно, найденное поле не удовлетворяет граничным условиям в плоскости экрана.

Т.о., приближенное решение дифракционной задачи приводит к результатам, отличающимся от истинных при больших значениях угла θ . При малых θ результаты приближенного решения оказываются достаточно близкими к истинным.

Выражения (40) определяют вторичное электромагнитное поле в дальней зоне, здесь волна чисто сферическая (Фраунгоферова дифракция).

В ближней и промежуточной зонах дифракционные явления имеют другой характер. Здесь происходит превращения поля, сформировавшегося на отверстии, в сферическую волну (в этих областях наблюдается дифракция Френеля).

На рис.9. изображены кривые, дающие представление о распределении поля в плоскостях $z = \text{const}$, на различных расстояниях от него.

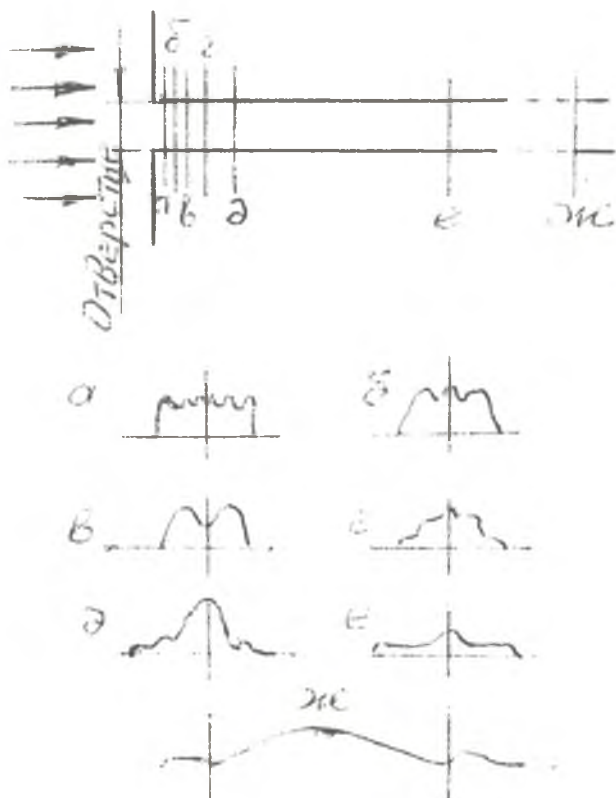


Рис.9. Распределение напряженности электрического поля в плоскости $z=\text{const}$ на различных расстояниях от источника (отверстия).

Вблизи источника распределение поля в поперечной плоскости приближается к тому, которое получается из законов геометрической оптики. По мере увеличения расстояния от плоскости $z=0$ структура поля сильно изменяется, пучок лучей как бы расплывается, превращаясь в сферическую волну.

Рассмотренный здесь метод используется при расчете дифракционных, рупорных и других антенн с излучающим отверстием.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Семенов А.А. Теория электромагнитных волн. – М.: Изд. МГУ, 1968. – 316 с.
2. Пименов Ю.В., Муравдов А.Д. Техническая электродинамика. – М.: РиЭ, 2000. – 536 с.
3. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. – М.: Сов. Радио, 1971. – 662 с.
4. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1961. – 370 с.
5. Потехин А.Н. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. – М.: Сов. Радио, 1948.
6. Коротков Н.С. Излучение электромагнитных волн. Радиофизический практикум. – Самара: Изд. Самарский университет, 1996. – 27 с.
7. Коротков Н.С. Излучение электромагнитных волн, часть 2. Учебное пособие. – Самара: Изд. Самарский университет, 2004. – 32 с.
8. Уфимцев П.Я. Методы краевых волн в физической теории дифракции. – М.: Советское радио, 1962.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение.....	3
2. Строгая постановка задачи дифракции.....	3
2.1. Дифракция плоской электромагнитной волны на круговом цилиндре.....	6
3. Приближенные методы решения дифракционных задач.....	13
3.1. Принципы приближенного решения задач дифракции.....	13
3.1.1. Волновая теория электромагнитного поля.....	13
3.1.2. Метод физической оптики.....	16
3.1.3. метод геометрической оптики.....	17
3.1.4. Метод краевых волн.....	17
3.2. Дифракция плоской электромагнитной волны на отверстии в плоском проводящем экране.....	19