МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

Учебно-методический комплекс

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ
на 2009 – 2018 годы по проекту «Модернизация учебного процесса на факультете экономики и управления
на основе развития системы электронного и дистанционного обучения»
Соглашение № 1/21 от 3 июня 2013 г.

САМАРА
2013

УДК 629.78; 531.01.
Д466

Автор-составитель: **Дорошин Антон Владимирович**

Динамика движения космических аппаратов переменного состава [Электронный ресурс] : электрон. учебно-методический комплекс / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А. В. Дорошин - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав учебно-методического комплекса входят:

1. Электронное учебное пособие.
2. Вопросы к экзамену.
3. Рабочая программа дисциплины (курса)

УМК «Динамика движения космических аппаратов переменного состава» предназначен для студентов-магистрантов факультета летательных аппаратов, обучающихся по направлению подготовки магистров 161100.68 «Системы управления движением и навигация», семестр А (10).

УМК разработан на кафедре космического машиностроения.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)»

А.В. ДОРОШИН

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Издано в рамках выполнения Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва» на 2009-2018 годы.

Самара, 2013

УДК 629.78; 531.01
Д 696
Дорошин А.В. **Динамика движения космических аппаратов переменного состава**: Электронное учебное пособие / ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)», Самара, 2013.

Рассматриваются вопросы динамики движения космических аппаратов (КА) переменной массы. На примере движения космических аппаратов с двойным вращением изучены основные аспекты пространственного и траекторного движения на активных участках траекторий.

Описанные в пособии подходы позволяют проводить исследование движения КА с двойным вращением при стабилизации частичной закруткой, а также осуществлять выбор начальных условий движения и инерционно-массовых параметров подобных аппаратов, обеспечивающих реализацию тех или иных режимов движения.

Пособие предназначено для научно-методического сопровождения курса «Динамика движения космических аппаратов переменного состава», читаемого магистрантам СГАУ, обучающимся по направлению 161100.68 «Системы управления движением и навигация». Также пособие будет полезно студентам специалитета и магистрантам, обучающимся по смежным техническим и естественнонаучным специальностям и направлениям подготовки (в рамках УГС 010000 «Физико-математические науки» и 160000 «Авиационная и ракетно-космическая техника»).

Издано в рамках выполнения Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва» на 2009-2018 годы.

ВВЕДЕНИЕ

Современные тенденции развития ракетно-космической техники предполагают использование технических устройств, сочетающих в себе многостепенные исполняющие механизмы, двигательные установки и управляющие элементы. Для моделирования движения технические объекты и устройства могут быть представлены разнообразными системами твердых тел постоянного и переменного состава (массы) со взаимосвязями.

В настоящем пособии исследуется динамика космических аппаратов (КА) переменного состава на примере движения КА с двойным вращением на активном участке траектории спуска.

КА с двойным вращением представляют собой весьма распространенный тип космических аппаратов, выполненных по схеме соосных тел, где одно из тел представляет собой основное тело-корпус аппарата, а второе тело – вращающийся ротор-стабилизатор.

Задаче исследования движения КА с двойным вращением (соосных тел/ соосных КА/ спутников-гиростатов с двойным вращением) в научной литературе уделяется большое внимание ввиду ее практической важности и возможности непосредственного применения в области стабилизируемых космических аппаратов для астрономических, радиофизических и других научных исследований, а также спутников связи, к которым предъявляют жесткие требования по точности стабилизации углового положения относительно неподвижной системы координат [1-57]. Основополагающие вопросы, связанные с анализом невозмущенного движения соосных тел, перманентных вращений, демпфирования нутационных колебаний, устойчивости относительных равновесий и стационарных режимов движения систем, состоящих из нескольких соосных маховиков, в разное время рассматривались многими отечественными и зарубежными учеными, в том числе, Белецким В. В. [13, 14], Крементуло В. В. [38, 39], Колесниковым Н. Н. [35], Набиуллиным М. К. [47, 48], Зубовым В. И. [32], Нейштадтом А. И. и Пивоваровым М. Л. [49], Лиска Д. Дж. (Liska D. J.) [42], Бейнумом П. М. (Bainum P. M.), Фукселом П. Дж. (Fuechsel P. G.), Мэкисоном Д. Л. (Mackison D. L.) [12], Виньероном Ф. Р. (Vigneron F. R.) [18, 19], Лайкинсом П. У. (Likins P. W.) [41], Холлом (Hall C. D.) [57].

В частности, Д. Дж. Лиска рассмотрел [42] движение соосного маховика, состоящего из нескольких симметричных тел, и описал подход по представлению системы соосных тел одним моделирующим твердым телом, а также в рамках линеаризованных уравнений дал графическую интерпретацию движения соосных тел.

Дж. Мак-Интайр и М. Джанели приближенно рассмотрели задачу о колебаниях общей оси соосных тел при наличии асимметрии, связанной с малым угловым смещением оси симметрии маховика от оси вращения [43], и определили так называемый угол качания, соответствующий углу между осью вращения и вектором кинетического момента.

Движение и устойчивость спутника с двойным вращением, оснащенного демпфером нутации, с использованием метода осреднения линеаризованных динамических уравнений рассмотрено Бейнумом П. М., Фукселом П. Дж., Мэкисоном Д. Л. [12], а с двумя демпферами – Виньероном Ф. Р. [19]; определены случаи стабилизирующего и дестабилизирующего действия демпферов в условиях, близких к резонансным.

В работе Лайкинса П. У. [41] проведена оценка устойчивости угловых положений соосных тел при рассеивании энергии, а в работе Виньерона Ф. Р. [18] содержится обобщение исследований с учетом влияния поля тяготения.

Стабилизация положений равновесия и перманентных вращений свободного и несвободного твердого тела при помощи управляемых маховиков и гироскопов исследовалась в работах Крементуло В. В. [38, 39], в которых поставленная задача решается как задача синтеза оптимального управления.

Нейштадт А. И. и Пивоваров М. Л. рассмотрели движение динамически симметричного спутника с двойным вращением при эволюциях, связанных с медленным раскручиванием маховика [49]; исследовали бифуркации положений равновесия, медленный и быстрый переход через сепаратрису фазового пространства; обосновали случайный исход раскручивания маховика, выражаемый в возможном опрокидывании спутника, когда финальное вращение происходит вокруг главной оси инерции, ортогональной направлению первоначальной раскрутки. Движение составных спутников рассматривалось в работах В. В. Белецкого, например, в [13, 14] изучено движение связок тел на орбите.

В пособии рассматриваются вопросы, связанные с моделированием пространственного (углового) и траекторного (оргбитального) движения соосного КА переменного состава, включая динамические и инерционно-массовые модели КА с реактивными двигателями твердого топлива (РДТТ). Определяются аналитические зависимости для параметров ориентации КА на активном участке траектории спуска, выражаемые через интегралы Френеля, а также находится необходимое и достаточное условие, накладываемое на инерционно-массовые параметры аппарата, обеспечивающее затухание нутационных колебаний, приводящее к уменьшению рассеивания точек посадки.

Также в пособии рассматривается движение центра масс КА с двойным вращением на активном участке траектории спуска. С учетом зависимостей для параметров пространственной ориентации КА находятся интегралы для компонент скорости центра масс, выражаемые в цилиндрических функциях Бесселя, Струве, Вебера и Ангера. Проводится оценка эффективности стабилизации частичной закруткой продольной оси КА с двойным вращением путем вычисления значений угловой ошибки в выдаче тормозного импульса и относительной ошибки в приращении скорости центра масс, которые определяют величину рассеивания переходного импульса (а также точек посадки КА в режиме спускаемого аппарата).

Разработанные математические модели могут применяться для описания случаев движения КА переменной массы, как порождающие опорные модели для анализа движения при наличии разнообразных внешних возмущений, асимметрии в системе и эксцентриситетов тяги.

1. ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА НА ТРАЕКТОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЕГО ЦЕНТРА МАСС ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Одним из важных этапов движения КА переменного состава (массы) является его межорбитальный переход. Не ограничивая общности, рассмотрим выполнение межорбитального перехода КА на примере его спуска с орбиты, когда выполняется переход с рабочей орбиты на орбиту спуска (приводящую ко входу в атмосферу). Для реализации межорбитального перехода обычно выдается импульс тяги, изменяющий скорость центра масс КА, а, следовательно, и его орбиту. В случае выполнения спуска КА такой импульс должен обеспечить требуемые начальные условия входа КА в плотные слои атмосферы [56, 33] - обычно этот импульс является тормозящим. Посадка КА в штатном режиме в заданной области с минимальной величиной рассеивания точек посадки во многом определяется характеристиками аппарата и начальными условиями входа КА в атмосферу (рис.1).

Работа тормозной двигательной установки (ТДУ), создающей тормозную тягу, может продолжаться от нескольких секунд до нескольких десятков секунд. Для того чтобы сформировать и выдерживать все время работы ТДУ нужное направление вектора тормозной тяги, необходимо соответственным образом сориентировать продольную ось КА и каким-либо способом стабилизировать это направление.

Неэффективная стабилизация направления вектора тяги (продольной оси КА) приводит к возникновению прецессионного движения, «распыляющего» тягу, что в итоге изменяет его расчетное направление и величину, а также порождают ошибку в реализации межорбитального перехода (возмущает конечную орбиту). При реализации спуска КА это приводит к увеличению зоны рассеивания точек посадки (рис.1).

Из описанного выше следует, что для выполнения точных межорбитальных переходов необходимо учитывать пространственное движение КА переменного состава вокруг центра масс и его влияние на траекторное движение центра масс КА.

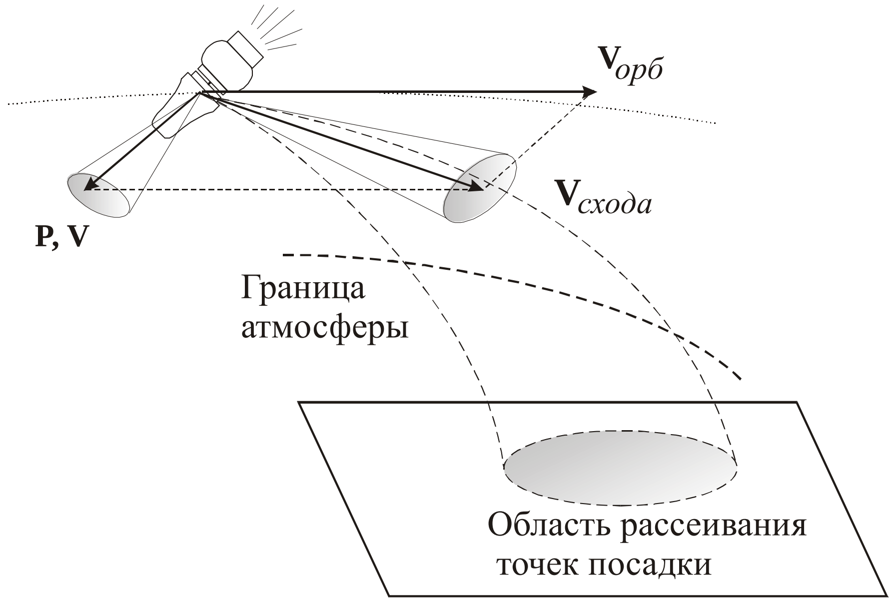


Рис.1. *Рассеивание точек посадки:*

P, **V** – тормозной импульс и придаваемая им скорость;
$\mathbf{V}_{орб}$ – орбитальная скорость;
$\mathbf{V}_{схода}$ – результирующая скорость схода в атмосферу

Для этих целей можно использовать гироскопическую стабилизацию продольной оси КА, основанную на приведении в быстрое вращение целиком всего КА, либо его части, выполняющей функции стабилизирующего блока. КА, допускающий закрутку стабилизирующего блока, можно назвать спускаемым аппаратом с двойным вращением, а сам способ стабилизации - стабилизацией частичной закруткой.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СООСНЫХ КА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Рассмотрим пространственное движение космического аппарата с двойным вращением на активном участке траектории спуска и будем осуществлять моделирование динамики на основе уравнений движения КА относительно выбранного полюса, совпадающего с начальным положением центра масс аппарата, как системы соосных тел с переменной массой. В качестве основных результатов анализа получим аналитические зависимости для параметров ориентации КА с двойным вращением на активном участке траектории спуска, выражаемые через интегралы Френеля. Указанные результаты позволят определить необходимое и достаточное условие, накладываемое на инерционно-массовые параметры и границы их изменения, обеспечивающее уменьшение амплитуды нутационных колебаний, что, в свою очередь, уменьшает рассеивание точек посадки аппарата.

2.1. Уравнения движения соосных КА переменной массы

Рассмотрим движение КА с двойным вращением, одно из тел которого является двигательной установкой (ДУ). Более того, рассмотрим ситуацию, когда двигательной установкой (на базе РДТТ) является соосное тело ротор.

Выгорание топлива приводит к изменению инерционно-массовых параметров двигательной установки, также вследствие выгорания топлива будет изменяться и относительное положение центра масс КА по отношению к его собственному корпусу.

Для моделирования движения спускаемого аппарата с вращающейся включенной ДУ можно применить механическую систему соосных тел с переменной массой одного из тел, при этом первым соосным телом (тело №1) будем считать вращающуюся двигательную установку, а вторым (тело №2) – основное тело КА.

Для описания движения тела переменной массы примем гипотезу контактного взаимодействия отбрасываемых частиц и тела, так называемую гипотезу «близкодействия» [37], согласно которой частицы, получившие относительную скорость при отделении от тела, уже не принадлежат телу и никак на него не действуют.

Для вывода уравнений движения системы соосных тел с переменной массой воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Следует учесть тот факт, что центр масс, как уже было замечено, движется относительно тел системы вследствие изменения массы первого соосного тела. Поэтому целесообразно записывать уравнения движения в системе координат, жестко связанной с телами и имеющей начало в точке O одного из тел (в нашем случае тела 2), совпадающей с начальным положением центра масс.

Введем следующие системы координат (рис. 2): $C\xi\eta\zeta$ - неподвижная в абсолютном пространстве система координат; $OXYZ$ – подвижная система координат с началом в точке системы O, оси которой остаются коллинеарными осям неподвижной системы все время движения; $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ – системы координат, жестко связанные соответственно с телами 2 и 1, вращающиеся относительно системы $OXYZ$.

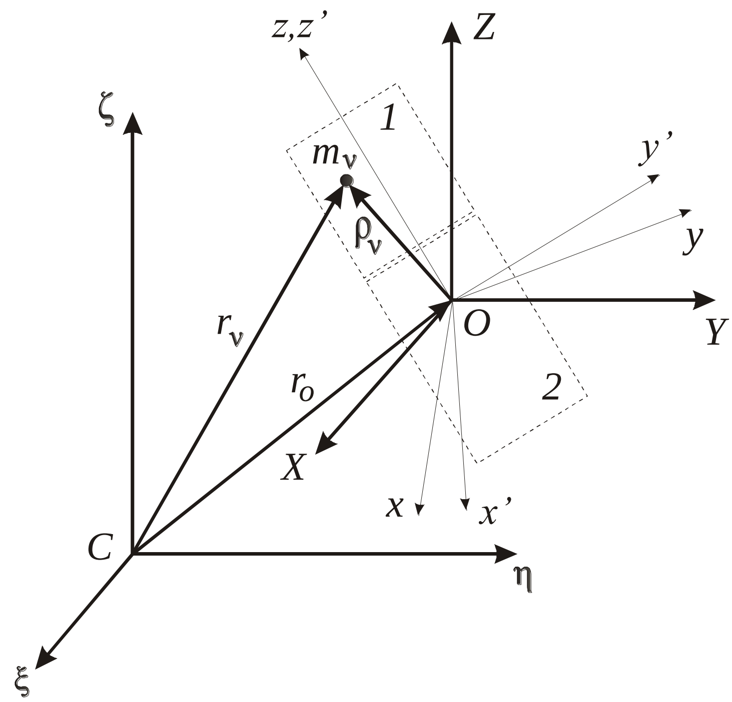


Рис. 2. *Используемые системы координат*

Для построения уравнений движения, прежде всего, необходимо вычислить кинетический момент системы с переменной массой [37]. Запишем кинетический момент соосных тел в неподвижной системе координат как сумму кинетических моментов всех точек, составляющих эти тела. Из рис.2 видно, что

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_\nu \,. \tag{2.1}$$

Точки, входящие в состав системы, отличаются своей принадлежностью к телу 1 или к телу 2. При выводе уравнений будем различать принадлежность точек телам 1 и 2 индексами ν_1 и ν_2.

Дифференцируя выражение (2.1) по времени, для скоростей точек получим:

$$\begin{aligned} &\vec{v}_{\nu_i} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{\nu_i}\,, \\ &i = 1{,}2\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ - угловые скорости движения связанных с телами 1 и 2 систем координат $Ox'y'z'$ и $Oxyz$ соответственно.

Тогда кинетический момент системы запишется:

$$\vec{K} = \sum_{\nu_1} \vec{r}_{\nu_1} \times m_{\nu_1} \vec{v}_{\nu_1} + \sum_{\nu_2} \vec{r}_{\nu_2} \times m_{\nu_2} \vec{v}_{\nu_2} \,. \tag{2.3}$$

Очевидны следующие соотношения:

$$\sum_{\nu_i} m_{\nu_i} = m_i, \quad \sum_{\nu_i} \vec{\rho}_{\nu_i} m_{\nu_i} = \vec{\rho}_{C_i} m_i\,,$$

где индекс C_i указывает на центр масс тела i.

С учетом (2.1) и (2.2), а также последних соотношений, выражение (2.3) можно переписать в следующем виде:

$$\vec{K}=\sum_{\nu_1} m_{\nu_1}\vec{\rho}_{\nu_1}\times\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_{\nu_1}+\vec{r}_O\times m_1\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_1}\times m_1\vec{v}_O+\vec{r}_O\times\vec{\omega}_1\times m_1\vec{\rho}_{C_1}+$$

$$+\sum_{\nu_2} m_{\nu_2}\vec{\rho}_{\nu_2}\times\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_{\nu_2}+\vec{r}_O\times m_2\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_2}\times m_2\vec{v}_O+\vec{r}_O\times\vec{\omega}_2\times m_2\vec{\rho}_{C_2}=$$

$$=\vec{K}_{1,O}+\vec{r}_O\times m_1\vec{v}_{C_1}^{(e)}+\vec{\rho}_{C_1}\times m_1\vec{v}_O+ \tag{2.4}$$

$$+\vec{K}_{2,O}+\vec{r}_O\times m_2\vec{v}_{C_2}^{(e)}+\vec{\rho}_{C_2}\times m_2\vec{v}_O=$$

$$=\vec{K}_1+\vec{K}_2,$$

где

$$\vec{K}_{1,O}=\sum_{\nu_1} m_{\nu_1}\vec{\rho}_{\nu_1}\times\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_{\nu_1},\qquad \vec{K}_{2,O}=\sum_{\nu_2} m_{\nu_2}\vec{\rho}_{\nu_2}\times\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_{\nu_2}\ -$$

кинетические моменты тел 1 и 2 относительно точки O, вычисленные в системе координат $OXYZ$;

$$\vec{v}_{C_1}^{(e)}=\vec{v}_O+\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_{C_1},\quad \vec{v}_{C_2}^{(e)}=\vec{v}_O+\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_{C_2}\ -$$

так называемые переносные скорости центов масс тел 1 и 2;

$$\begin{aligned}\vec{K}_1&=\vec{K}_{1,O}+m_1\vec{r}_O\times\vec{v}_{C_1}^{(e)}+\vec{\rho}_{C_1}\times m_1\vec{v}_O,\\ \vec{K}_2&=\vec{K}_{2,O}+m_2\vec{r}_O\times\vec{v}_{C_2}^{(e)}+\vec{\rho}_{C_2}\times m_2\vec{v}_O\ -\end{aligned} \tag{2.5}$$

кинетические моменты тел 1 и 2, вычисленные отдельно в неподвижной системе координат $C\xi\eta\zeta$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента системы переменной массы [37]:

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{M}^e+\vec{M}^R+\sum_{\nu}\vec{r}_\nu\times\frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}_\nu\ , \tag{2.6}$$

где $\vec{M}^e$ - главный момент внешних сил; $\vec{M}^R$ - главный момент реактивных сил; $\sum_{\nu}\vec{r}_\nu\times\frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}_\nu$ - сумма моментов количеств движений частиц, отброшенных в единицу времени в их переносном движении относительно неподвижной системы координат.

Следуя [37], запишем теорему об изменении кинетического момента системы соосных тел относительно поступательно движущихся относительно неподвижного пространства осей *OXYZ*. Получим некоторые вспомогательные соотношения. Вычислим скорость изменения радиусов-векторов центров масс тел в системе *OXYZ*:

$$\frac{d\vec{\rho}_{C_i}}{dt} = \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i} + \vec{q}_{C_i}, \tag{2.7}$$

где $\vec{q}_{C_i}$ - относительная скорость центра масс C_i, обусловленная изменением его положения относительно тел в связи с переменностью их масс.

Принимая во внимание соотношение (2.7), найдем производную переносной скорости центров масс тел:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_{C_i}^{(e)}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_O + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i}\right] = \\ &= \vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_i \times \vec{\rho}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{q}_{C_i} = \\ &= \vec{w}_{C_i}^{(e)} + \vec{\omega}_i \times \vec{q}_{C_i}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\vec{w}_{C_i}^{(e)} = \vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_i \times \vec{\rho}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i}. \tag{2.9}$$

Последнее выражение определяет ускорение той точки подвижного пространства, с которой в данный момент совпадает центр масс тела i, т.е. переносное ускорение центра масс C_i.

Распишем также величину $\sum\limits_{\nu_i} \frac{dm_{\nu_i}}{dt}\left(\vec{\omega}_i \times \rho_{\nu_i}\right)$, необходимую для дальнейших преобразований:

$$\sum_{\nu_i}\frac{dm_{\nu_i}}{dt}\left(\vec{\omega}_i\times\vec{\rho}_{\nu_i}\right)=\vec{\omega}_i\times\sum_{\nu_i}\frac{dm_{\nu_i}}{dt}\vec{\rho}_{\nu_i}=$$

$$=\vec{\omega}_i\times\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu_i}m_{\nu_i}\vec{\rho}_{\nu_i}\right)-\sum_{\nu_i}m_{\nu_i}\dot{\vec{\rho}}_{\nu_i}\right]=\vec{\omega}_i\times\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\rho}_{C_i}\right)-\sum_{\nu_i}m_{\nu_i}\left(\vec{\omega}_i\times\vec{\rho}_{\nu_i}\right)\right]=$$

$$=\vec{\omega}_i\times\left[\frac{dm_i}{dt}\vec{\rho}_{C_i}+m_i\dot{\vec{\rho}}_{C_i}-\vec{\omega}_i\times\sum_{\nu_i}m_{\nu_i}\vec{\rho}_{\nu_i}\right]=\vec{\omega}_i\times\left[\frac{dm_i}{dt}\vec{\rho}_{C_i}+m_i\dot{\vec{\rho}}_{C_i}-\vec{\omega}_i\times m_i\vec{\rho}_{C_i}\right]=$$

$$=\vec{\omega}_i\times\left[\frac{dm_i}{dt}\vec{\rho}_{C_i}+m_i\left(\vec{q}_{C_i}+\vec{\omega}_i\times\vec{\rho}_{C_i}\right)-\vec{\omega}_i\times m_i\vec{\rho}_{C_i}\right]=\vec{\omega}_i\times\left[\frac{dm_i}{dt}\vec{\rho}_{C_i}+m_i\vec{q}_{C_i}\right]. \tag{2.10}$$

Для того, чтобы получить теорему об изменении кинетического момента относительно поступательно движущихся осей, воспользуемся (2.6), преобразовав правую и левую части выражения (2.6) с учетом соотношений (2.7)-(2.10). Продифференцируем по времени выражение для кинетического момента системы (2.4):

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{K}}{dt}=&\frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt}+\vec{v}_O\times m_1\vec{v}^{(e)}_{C_1}+\vec{r}_O\times\frac{dm_1}{dt}\vec{v}^{(e)}_{C_1}+\vec{r}_O\times m_1\left(\overline{w}^{(e)}_{C_1}+\vec{\omega}_1\times\vec{q}_{C_1}\right)+\\
&+\left(\vec{q}_{C_1}+\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_{C_1}\right)\times m_1\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_1}\times\frac{dm_1}{dt}\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_1}\times m_1\frac{d\vec{v}_O}{dt}+\\
&+\frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt}+\vec{v}_O\times m_2\vec{v}^{(e)}_{C_2}+\vec{r}_O\times\frac{dm_2}{dt}\vec{v}^{(e)}_{C_2}+\vec{r}_O\times m_2\left(\overline{w}^{(e)}_{C_2}+\vec{\omega}_2\times\vec{q}_{C_2}\right)+\\
&+\left(\vec{q}_{C_2}+\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_{C_2}\right)\times m_2\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_2}\times\frac{dm_2}{dt}\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_2}\times m_2\frac{d\vec{v}_O}{dt}=\\
&=\frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt}+\vec{r}_O\times\frac{dm_1}{dt}\vec{v}^{(e)}_{C_1}+\vec{r}_O\times m_1\left(\overline{w}^{(e)}_{C_1}+\vec{\omega}_1\times\vec{q}_{C_1}\right)+\\
&+\vec{q}_{C_1}\times m_1\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_1}\times\frac{dm_1}{dt}\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_1}\times m_1\vec{w}_O+\\
&+\frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt}+\vec{r}_O\times\frac{dm_2}{dt}\vec{v}^{(e)}_{C_2}+\vec{r}_O\times m_2\left(\overline{w}^{(e)}_{C_2}+\vec{\omega}_2\times\vec{q}_{C_2}\right)+\\
&+\vec{q}_{C_2}\times m_2\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_2}\times\frac{dm_2}{dt}\vec{v}_O+\vec{\rho}_{C_2}\times m_2\vec{w}_O.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Преобразуем правую часть выражения (2.7):

$$\vec{M}^e = \vec{M}_1^e + \vec{M}_2^e = \vec{r}_O \times \vec{R}_1^e + \vec{r}_O \times \vec{R}_2^e + \vec{M}_O^e = \vec{r}_O \times \vec{R}^e + \vec{M}_O^e,$$

$$M^R = \vec{M}_1^R + \vec{M}_2^R = \vec{r}_O \times \vec{\Phi}_1^R + \vec{r}_O \times \vec{\Phi}_2^R + \vec{M}_O^R = \vec{r}_O \times \vec{\Phi}^R + \vec{M}_O^R,$$

$$\begin{aligned}
\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}_\nu &= \sum_{\nu_1} \vec{r}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\vec{v}_{\nu_1} + \sum_{\nu_2} \vec{r}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt}\vec{v}_{\nu_2} = \\
&= \vec{r}_O \times \frac{dm_1}{dt}\vec{v}_O + \vec{r}_O \times m_1\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{q}_{C_1}\right) + \vec{r}_O \times \frac{dm_1}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{C_1}\right) + \\
&+ \left[m_1\vec{q}_{C_1} + \frac{dm_1}{dt}\vec{\rho}_{C_1}\right] \times \vec{v}_O + \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right) + \\
&+ \vec{r}_O \times \frac{dm_2}{dt}\vec{v}_O + \vec{r}_O \times m_2\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{q}_{C_2}\right) + \vec{r}_O \times \frac{dm_2}{dt}\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{C_2}\right) + \\
&+ \left[m_2\vec{q}_{C_2} + \frac{dm_2}{dt}\vec{\rho}_{C_2}\right] \times \vec{v}_O + \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt}\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}\right),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\vec{R}_i^e$, $\vec{\Phi}_i^R$ - результирующие всех внешних и всех реактивных сил, приложенных к телу i; $\vec{M}_O^e$ и $\vec{M}_O^R$ - главные моменты внешних и реактивных сил относительно точки O.

С учетом (2.11) и (2.12) после сокращений выражение для теоремы об изменении кинетического момента (2.7) запишется:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt} + \vec{r}_O \times m_1\vec{w}_{C_1}^{(e)} + \vec{\rho}_{C_1} \times m_1\vec{w}_O + \frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt} + \vec{r}_O \times m_2\vec{w}_{C_2}^{(e)} + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2\vec{w}_O = \\
&= \vec{r}_O \times \vec{R}_1^e + \vec{r}_O \times \vec{\Phi}_1^R + \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right) + \\
&+ \vec{r}_O \times \vec{R}_2^e + \vec{r}_O \times \vec{\Phi}_2^R + \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt}\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}\right) + \\
&+ \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^R.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Запишем теорему о движении центра масс системы переменной массы:

$$m\vec{w}_C^{(e)} = \vec{R}^e + \vec{\Phi}^R. \qquad (2.14)$$

На основании теоремы (2.14) запишем для центров масс тел следующие уравнения движения, добавив к активным внешним и реактивным силам силы взаимодействия тел:

$$m_1\vec{w}_{C_1}^{(e)} = \vec{R}_1^e + \vec{\Phi}_1^R + \vec{N}_{12}, \qquad m_2\vec{w}_{C_2}^{(e)} = \vec{R}_2^e + \vec{\Phi}_2^R + \vec{N}_{21}, \qquad (2.14')$$

где $\vec{N}_{ij}$ - сила, действующая на тело i со стороны тела j, причем по закону равенства сил действия и противодействия: $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$.

Из последних соотношений следует:

$$\begin{aligned} \vec{r}_O \times m_1\vec{w}_{C_1}^{(e)} &= \vec{r}_O \times \left(\vec{R}_1^e + \vec{\Phi}_1^R + \vec{N}_{12}\right), \\ \vec{r}_O \times m_2\vec{w}_{C_2}^{(e)} &= \vec{r}_O \times \left(\vec{R}_2^e + \vec{\Phi}_2^R - \vec{N}_{12}\right). \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Используя определение центра масс можно записать:

$$\vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O = \left(\frac{\vec{\rho}_{C_1}m_1 + \vec{\rho}_{C_2}m_2}{m}\right) \times m\vec{w}_O = \vec{\rho}_{C_1} \times m_1\vec{w}_O + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2\vec{w}_O, \qquad (2.16)$$

где m – масса системы двух тел.

С учетом (2.15) и (2.16) теорему об изменении кинетического момента относительно системы осей $OXYZ$ можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt} + \frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt} &= \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^R + \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right) + \\ &+ \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt}\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}\right) - \vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O. \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Распишем левую часть выражения (2.17) с использованием понятия локальной производной в связанных с телами системах координат. При этом локальную производную от кинетического момента тела 2 будем искать в связанной с телом системе координат $Oxyz$, вращающейся относительно

$OXYZ$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, а локальную производную от кинетического момента тела 1 – в системе $Ox'y'z'$, вращающейся со скоростью $\vec{\omega}_1$.

Учитывая последнее обстоятельство, для системы $OXYZ$ запишем:

$$\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_{1,O} + \left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{2,O}}{dt}\right)_{Oxyz} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_{2,O} = \tag{4.18}$$

$$= \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^R + \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right) + \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt}\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}\right) - \vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O,$$

где за скобками локальных производных в нижнем индексе указаны системы координат, в которых они берутся.

Перепишем выражение (2.18) в следующем окончательном виде:

$$\begin{gathered}\left[\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} - \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right)\right] + \\ + \left[\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{2,O}}{dt}\right)_{Oxyz} - \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt}\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}\right)\right] + \\ + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_{1,O} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_{2,O} = \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^R - \vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O.\end{gathered} \tag{2.19}$$

После приведенных выше общих рассуждений перейдем к построению уравнений движения КА с двойным вращением как системы соосных тел, опираясь его на конкретные конструктивные особенности. Переменным по массе примем лишь тело 1, соответствующее тормозной двигательной установке. Из этого следует, что тело 2, соответствующее спускаемой капсуле, не создает реактивных сил, а также, в отличие от тела 1, не изменяет своих инерционно-массовых параметров, вычисленных в связанной с телом системе координат $Oxyz$ (так как точка O не изменяет своего положения относительно тел). Пусть тела 1 и 2 являются динамически симметричными, и пусть в процессе изменения массы тела 1 его динамическая симметрия не нарушается. При этом центр масс системы двух тел смещается с некоторой скоростью $\boldsymbol{q_c}$ строго вдоль направления продольной оси в сторону центра масс тела 2. Выберем за точку O, как уже отмечалось, точку, совпадающую с начальным положением центра масс системы (рис. 3). Предположим также, что отброс точек при выработке топлива происходит строго в направлении продольной оси без линейных и угловых эксцентриситетов тяги, и тогда моменты от реактивных сил относительно точки O будут отсутствовать. Запишем угловые скорости и кинетические моменты тел в проекциях на оси своих связанных систем координат:

$$\vec{\omega}_1 = p'\vec{i}\,'+q'\vec{j}\,'+r'\vec{k}\,'; \qquad \vec{\omega}_2 = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k};$$
$$\vec{K}_{1,O} = A_1(t)p'\vec{i}\,'+A_1(t)q'\vec{j}\,'+C_1(t)r'\vec{k}\,'; \qquad \vec{K}_{2,O} = A_2 p\vec{i} + A_2 q\vec{j} + C_2 r\vec{k},$$

где A_i и C_i - моменты экваториальный и продольный моменты инерции тела i, вычисленные в связанной с телом системе координат (для тела 2 – $Oxyz$, для тела 1 – $Ox'y'z'$,); $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, $\{\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'\}$ - орты указанных систем.

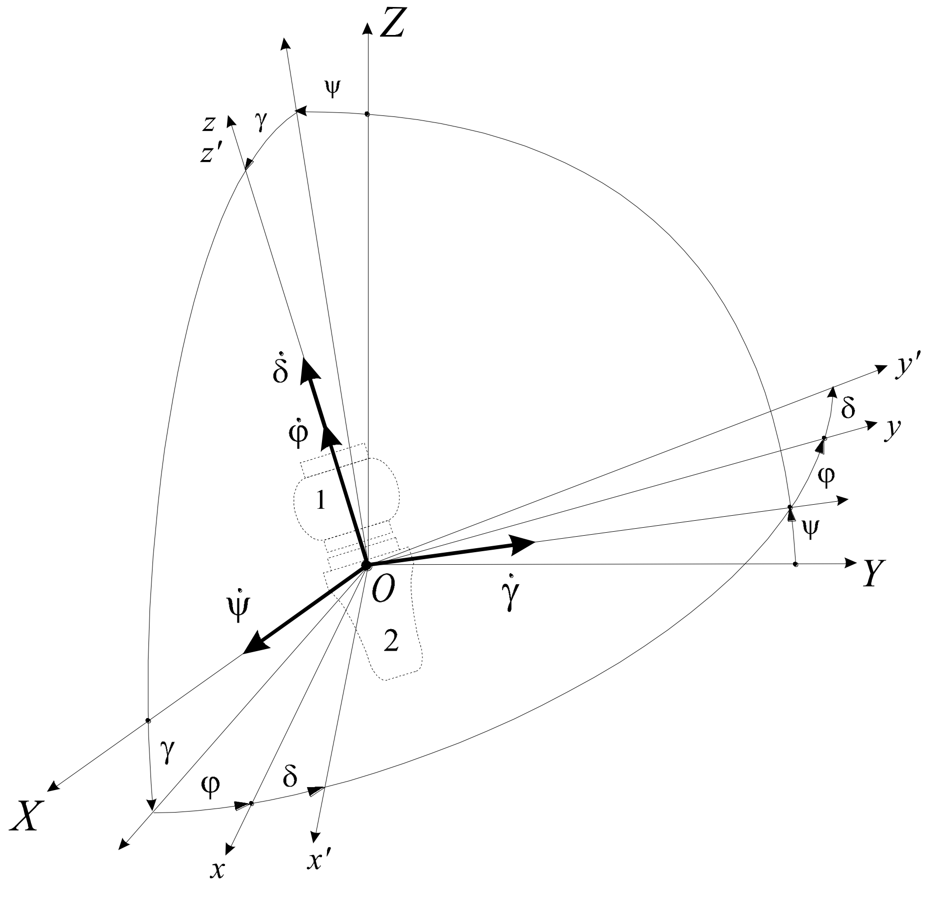


Рис. 3. *Используемые системы координат и параметры ориентации*

Тела системы могут вращаться относительно друг друга лишь в направлении общей продольной оси, совпадающей с Oz (а также с Oz'). При этом угол и скорость закручивания тела 1 относительно тела 2 в направлении продольной оси Oz обозначим, соответственно, как δ и σ, причем $\sigma = \dot{\delta}$. Ориентация соосных тел как спускаемого аппарата с двойным вращением и используемые системы координат указаны на рис. 31. Для рассматриваемого вида относительного движения тел будем иметь следующую связь компонент угловых скоростей тел:

$$p' = p\cos\delta + q\sin\delta, \quad q' = q\cos\delta - p\sin\delta, \quad r' = r + \sigma. \qquad (2.20)$$

Рассмотрим свободное движение системы соосных тел переменной массы при отсутствии внешних сил $\left(\vec{R}^e = \vec{R}_1^e + \vec{R}_2^e = 0\right)$ и моментов $\left(\vec{M}_O^e = 0\right)$. При выбранных предположениях выражение (2.19), определяющее теорему об изменении кинетического момента в поступательно движущихся осях $OXYZ$, запишется:

$$\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{2,O}}{dt}\right)_{Oxyz} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_{2,O} + \left[\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} - \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right)\right] + $$
$$+ \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_{1,O} = -\vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O. \qquad (2.21)$$

Распишем проекцию на ось Ox' связанной с телом 1 системы координат $Ox'y'z'$ величины, стоящей в квадратных скобках в выражении (2.21). Опираясь на определение понятий главных и центробежных моментов инерции тел, а также на предположение о том, что динамическая симметрия тела 1 не нарушается в процессе изменения его массы (центробежные моменты инерции тождественно равны нулю), можно записать:

$$\vec{L} \overset{df}{=} \left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt} \right)_{Ox'y'z'} - \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1} \right),$$

$$L_{x'} = \frac{dA_1}{dt} p' + A_1 \dot{p}' - \sum_{\nu_1} \left[\vec{\omega}_1 \rho_{\nu_1}^2 - \vec{\rho}_{\nu_1} \left(\vec{\rho}_{\nu_1} \cdot \vec{\omega}_1 \right) \right]_{x'} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} =$$

$$= \frac{dA_1}{dt} p' + A_1 \dot{p}' - p' \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left(y'^2_{\nu_1} + z'^2_{\nu_1} \right) + q' \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} x'_{\nu_1} y'_{\nu_1} + r' \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} x'_{\nu_1} z'_{\nu_1} =$$

$$= \frac{dA_1}{dt} p' + A_1 \dot{p}' - p' \frac{dA_1}{dt} = A_1 \dot{p}'.$$

Аналогично находятся две другие проекции и поэтому для введенного вектора $\boldsymbol{L}$ можно записать:

$$L_{x'} = A_1 \dot{p}', \qquad L_{y'} = A_1 \dot{q}', \qquad L_{z'} = C_1 \dot{r}'. \tag{2.22}$$

Найдем проекции на оси системы координат $Oxyz$ произвольного вектора $\boldsymbol{a}$, записанного в проекциях на оси системы $Ox'y'z'$:

$$a_x = a_{x'} \cos\delta - a_{y'} \sin\delta; \quad a_y = a_{y'} \cos\delta + a_{x'} \sin\delta; \quad a_z = a_{z'}. \tag{2.23}$$

Запишем выражение (2.21) в проекциях на оси связанной с телом 2 системы координат $Oxyz$, опираясь на соотношения (2.20) и выражения (2.22), (2.23):

$$\begin{gathered}
\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{p} + \left(C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t)\right)qr + C_1(t)q\sigma = -\left[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O\right]_x, \\
\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{q} + \left(A_2 + A_1(t) - C_2 - C_1(t)\right)pr - C_1(t)p\sigma = -\left[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O\right]_y, \\
C_2\dot{r} + C_1(t)\left(\dot{r} + \dot{\sigma}\right) = -\left[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O\right]_z.
\end{gathered} \tag{2.24}$$

В силу принятых предположений о характере изменения массы системы, проекции векторов скорости относительного движения центра масс и его текущего положения в обеих системах координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ запишутся одинаково:

$$q_{Cx} = q_{Cx'} = 0; \quad q_{Cy} = q_{Cy'} = 0; \quad q_{Cz} = q_{Cz'} \overset{df}{=} -q_C;$$
$$\rho_{Cx} = \rho_{Cx'} = 0; \quad \rho_{Cy} = \rho_{Cy'} = 0; \quad \rho_{Cz} = \rho_{Cz'} \overset{df}{=} \rho_C. \qquad (2.25)$$

Используя выражение (2.9) и уравнения движения центров масс (2.14′) при отсутствии внешних сил и моментов в системе координат $Oxyz$ можно записать:

$$\vec{\Phi}^R = m_1\vec{w}_{C_1}^{(e)} + m_2\vec{w}_{C_2}^{(e)} = (m_1+m_2)\vec{w}_O + \left(\vec{\varepsilon}_2 + \dot{\vec{\sigma}}\right)\times m_1\vec{\rho}_{C_1} + (\vec{\omega}_2+\vec{\sigma})\times(\vec{\omega}_2+\vec{\sigma})\times m_1\vec{\rho}_{C_1} +$$
$$+\vec{\varepsilon}_2\times m_2\vec{\rho}_{C_2} + \vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_2\times m_2\vec{\rho}_{C_2} = m\vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_2\times m\vec{\rho}_C + \vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_2\times m\vec{\rho}_C + \dot{\vec{\sigma}}\times m_1\vec{\rho}_{C_1};$$
$$\vec{w}_O = \frac{1}{m}\left(\vec{\Phi}^R + \vec{R}^e - \vec{\varepsilon}_2\times m\vec{\rho}_C - m\vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_C - \dot{\vec{\sigma}}\times m_1\vec{\rho}_{C_1}\right). \qquad (2.26)$$

Так как в рассматриваемом случае $\vec{\Phi}^R = \left(0,0,\Phi_z^R\right)$; $\dot{\vec{\sigma}}\times m_1\vec{\rho}_{C_1} = 0$; $\vec{R}^e = 0$; $\vec{\rho}_C\times\left(\vec{\omega}_2\times\left(\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_C\right)\right) = \vec{\rho}_C\times\vec{\omega}_2\left(p\rho_x + q\rho_y + r\rho_z\right)$; $\rho_{Cx} = \rho_{Cy} = 0$; $\rho_{Cz} = \rho_C$, то, вычисляя правые части выражений (2.24), в проекциях на оси $Oxyz$ в матричном виде получим:

$$\left[m\vec{\rho}_C\times\vec{w}_O\right] = -m\rho_C^2\cdot\begin{bmatrix}\dot{p}-rq\\ \dot{q}+rp\\ 0\end{bmatrix}. \qquad (2.27)$$

В последнем выражении проекция центра масс системы на продольную ось изменяется во времени, т.е. $\rho_C = \rho_C(t)$.

С учетом (2.27) уравнения (2.24) запишутся:

$$\left(A_2 + A_1(t) - m\rho_C^2(t)\right)\dot{p} + \left(C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t) + m\rho_C^2(t)\right)qr + C_1(t)q\sigma = 0,$$
$$\left(A_2 + A_1(t) - m\rho_C^2(t)\right)\dot{q} + \left(A_2 + A_1(t) - m\rho_C^2(t) - C_2 - C_1(t)\right)pr - C_1(t)p\sigma = 0, \qquad (2.28)$$
$$C_2\dot{r} + C_1(t)\left(\dot{r}+\dot{\sigma}\right) = 0.$$

Будем рассматривать такие системы соосных тел, для которых характерны малые относительные смещения центра масс в процессе изменения массы и, следовательно, величины $m\rho_C^2(t)$ можно исключить из рассмотрения. Например, в практических задачах дистанционного зондирования земной поверхности используются такие малые КА, для которых величина ρ_C во все время движения не становится больше *0,03* м. При этом подобные КА имеют следующие примерные диапазоны изменения инерционно-массовых параметров в процессе выработки топлива: m ~ 65 ÷ 50 кг, A_1 ~ 3 ÷ 1 кг·м^2, A_2 ~ 3 кг·м^2, C_1 ~ 0,4 ÷ 0,2 кг·м^2, C_2 ~ 0,3 кг·м^2.

Для таких КА справедливы следующие ограничения, накладываемые на инерционно-массовые параметры:

$$\sup_t m\rho_C^2(t) < 0{,}1\,кг\cdot м^2, \qquad A_2 + A_1(t) >> m\rho_C^2(t),$$

поэтому в уравнениях (2.28) можно опустить из рассмотрения величины $m\rho_C^2(t)$.

С учетом последнего предположения уравнения свободного движения системы соосных тел с переменной массой можно записать:

$$\begin{gathered}\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{p} + \left(C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t)\right)qr + C_1(t)q\sigma = 0,\\ \left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{q} + \left(A_2 + A_1(t) - C_2 - C_1(t)\right)pr - C_1(t)p\sigma = 0,\\ C_2\dot{r} + C_1(t)\left(\dot{r} + \dot{\sigma}\right) = 0.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Система (2.29) показывает, что уравнения движения соосных тел с переменной массой в случае небольших относительных смещений центра масс отличаются от уравнений движения соосных тел постоянной массы (2.5) лишь тем, что моменты инерции переменны во времени.

Уравнение для относительного угла закручивания можно получить с помощью уравнения Лагранжа второго рода, общий вид которого с учетом переменности массы можно записать [37] :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\partial T}{\partial \delta} = Q_\delta + P_\delta,$$

где

$$P_\delta = \sum_{\nu} \frac{dm_\nu}{dt}\left(\vec{u}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \sigma}\right) = \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{u}_{\nu_1} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\nu_1}}{\partial \sigma}\right) =$$

$$= \sum_{\nu_1}\left(\frac{dm_{\nu_1}}{dt}\vec{u}_{\nu_1} \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right)\right) = \sum_{\nu_1}\left(\frac{dm_{\nu_1}}{dt}\vec{u}_{\nu_1} \cdot \frac{\partial\vec{\omega}_1}{\partial\sigma} \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right) =$$

$$= \sum_{\nu_1}\left(\frac{dm_{\nu_1}}{dt}\begin{vmatrix} u_{x\nu_1} & u_{y\nu_1} & u_{z\nu_1} \\ 0 & 0 & 1 \\ x_{\nu_1} & y_{\nu_1} & z_{\nu_1}\end{vmatrix}\right) = \sum_{\nu_1}\frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left[u_{y\nu_1}x_{\nu_1} - u_{x\nu_1}y_{\nu_1}\right] -$$

обобщенная реактивная сила.

Так как $\vec{u}_{\nu_1} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1} + \vec{V}_{r\nu_1}$, а также предполагая, что реактивная тяга направлена только вдоль продольной оси:

$$\sum_{\nu_1}\frac{dm_{\nu_1}}{dt}V_{xr\nu_1} = \sum_{\nu_1}\frac{dm_{\nu_1}}{dt}V_{yr\nu_1} = 0, \quad \sum_{\nu_1}\frac{dm_{\nu_1}}{dt}V_{zr\nu_1} = \Phi_z^r,$$

запишем последнее выражение в виде:

$$P_\delta = \sum_{\nu_1}\frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left[u_{y\nu_1}x_{\nu_1} - u_{x\nu_1}y_{\nu_1}\right] = \sum_{\nu_1}\frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left[v_{Oy}x_{\nu_1} - v_{Ox}y_{\nu_1}\right] +$$

$$+ \sum_{\nu_1}\frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left[x_{\nu_1}^2 + y_{\nu_1}^2\right]\cdot(r+\sigma) + \sum_{\nu_1}\frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left[-px_{\nu_1}z_{\nu_1} - qy_{\nu_1}z_{\nu_1}\right] =$$

$$= \sum_{\nu_1} v_{Oy}\frac{d}{dt}\left(m_{\nu_1}x_{\nu_1}\right) - \sum_{\nu_1} v_{Ox}\frac{d}{dt}\left(m_{\nu_1}y_{\nu_1}\right) + \frac{dC_1(t)}{dt}(r+\sigma) + p\dot{I}_{1xz} + q\dot{I}_{1yz} =$$

$$= v_{Oy}\frac{d}{dt}\left(m_1 x_{C_1}\right) - v_{Ox}\frac{d}{dt}\left(m_1 y_{C_1}\right) + \frac{dC_1(t)}{dt}(r+\sigma) + p\dot{I}_{1xz} + q\dot{I}_{1yz}.$$

Считая, что центробежные моменты инерции тела 1 тождественно равны нулю, т.е. происходит симметричное выгорание топлива, а также учитывая то обстоятельство, что центр масс тела 1 все время движения остается на продольной оси $\left(x_{C_1} \equiv y_{C_1} \equiv 0\right)$, выражение для обобщенной реактивной силы P_δ, можно записать в окончательном виде:

$$P_\delta = \frac{dC_1(t)}{dt}(r+\sigma).$$

Для кинетической энергии системы и обобщенной силы справедливы следующие выражения:

$$T = \frac{1}{2}\left[A_1(t)\left(p^2 + q^2\right) + C_1(t)(r+\sigma)^2\right] + \frac{1}{2}\left[A_2\left(p^2+q^2\right) + C_2 r^2\right],$$
$$Q_\delta = M_{1,z} + M_\delta,$$

где M_δ - момент внутреннего взаимодействия тел; $M_{1,z}$ - момент внешних сил, приложенных к телу 1; A_i, C_i - главные моменты инерции тела i.

Так как выражение для кинетической энергии явно не зависит от угла относительного закручивания, то уравнение Лагранжа запишется следующим образом:

$$C_1(t)(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_{1,z} + M_\delta. \qquad (2.30)$$

Отметим, что уравнение относительного закручивания (2.30) для системы переменного состава отличается от аналогичного уравнения для соосных тел постоянного состава (2.6) только лишь тем, что продольный момент инерции становится функцией времени.

С учетом (2.30) при отсутствии моментов внешних сил уравнения (2.29) можно записать:

$$\begin{gathered}
\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{p} + \left(C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t)\right)qr + C_1(t)q\sigma = 0, \\
\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{q} + \left(A_2 + A_1(t) - C_2 - C_1(t)\right)pr - C_1(t)p\sigma = 0, \\
\dot{r} = -\frac{M_\delta}{C_2}, \qquad \dot{\sigma} = \frac{M_\delta\left(C_1(t) + C_2\right)}{C_2 C_1(t)}.
\end{gathered} \qquad (2.31)$$

Уравнения (2.31) представляют собой динамические уравнения свободного движения системы соосных тел переменного состава с учетом внутреннего взаимодействия. Уравнения (2.31) могут использоваться для описания пространственного движения КА с двойным вращением на активном участке спуска.

Следует отметить, что из полученных уравнений (2.28), полагая скорость относительной закрутки σ тождественно равной нулю, следуют уравнения свободного движения динамически симметричного твердого тела переменного состава вокруг своего центра масс при отсутствии реактивных моментов, записанные А. А. Космодемьянским [37, 44]:

$$\begin{cases} A(t)\,\dot{p} + \big(C(t) - A(t)\big)qr = 0; \\ A(t)\,\dot{q} + \big(A(t) - C(t)\big)\,pr = 0; \\ C(t)\,\dot{r} = 0. \end{cases}$$

2.2. Инерционно-массовая модель реактивного двигателя твердого топлива

Прежде чем переходить к поиску зависимостей движения соосных тел с переменной массой от времени, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с конструкцией и работой реактивных двигателей твердого топлива (РДТТ). РДТТ используются в качестве тормозных двигательных установок на малых КА систем дистанционного зондирования. В исследуемой задаче ДУ является также вращающимся стабилизирующим блоком, поэтому ее рабочие и инерционно-массовые характеристики, а также их изменение в процессе работы требуют отдельного рассмотрения. Для указанных целей предлагается краткий обзор основ конструкции и особенностей работы РДТТ подробно описанных, например, в [16, 17, 51].

РДТТ относятся к так называемым химическим или термохимическим ракетным двигателям. Все они работают по принципу превращения потенциальной химической энергии топлива в кинетическую энергию истекающих из двигателя газов. РДТТ состоит из корпуса, топливного заряда, реактивного сопла, воспламенителя и других элементов (рис. 4).

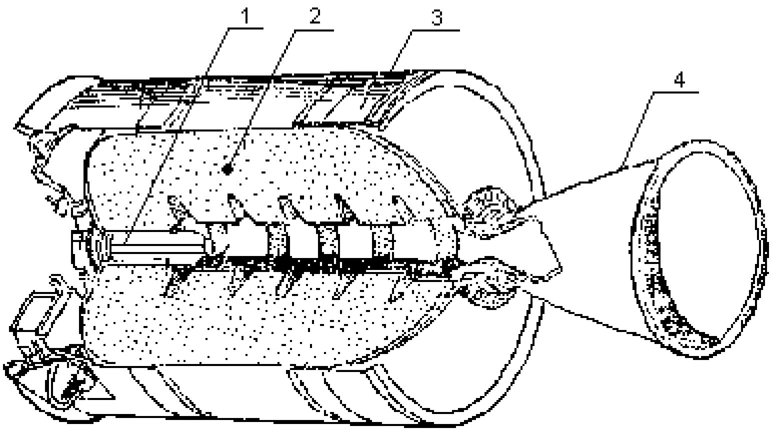


Рис. 4. *Конструктивная схема РДТТ*:

1 – воспламенитель, 2 - топливный заряд, 3- корпус, 4-сопло

Корпус РДТТ представляет собой прочный сосуд цилиндрической, сферической или другой формы, изготовленный либо из металла, либо из пластика. В корпусе содержится прочно скрепленный с ним заряд твердого топлива: обычно - механическая смесь кристаллического неорганического окислителя (например, перхлората аммония) с металлическим горючим (алюминий) и полимерным горючим связующим (полибутадиеновый каучук). Для зажигания топлива используется воспламенительное устройство, которое может входить непосредственно в конструкцию РДТТ или быть автономным (например, специальный пусковой двигатель). В простейшем случае воспламенительное устройство представляет собой быстровоспламеняющийся пакет дымного пороха в оболочке из материи или металла, который поджигается с помощью электрозапала или пиросвечи с пиропатроном.

В зависимости от конкретного назначения космические РДТТ могут иметь тягу от сотых долей ньютона до нескольких меганьютонов, а продолжительность работы - от долей секунды до нескольких минут. В рассматриваемой задаче спуска КА с двойным вращением рассматриваются РТДД с тягой до 1500 H и продолжительностью работы в диапазоне $T \sim 15 \div 25\ c$.

При всей простоте функциональной схемы РДТТ расчет его рабочих характеристик представляет собой сложную задачу. Решается она при помощи методов внутренней баллистики РДТТ, обсуждение которых выходит за рамки настоящей работы и которые приведены в соответствующей литературе [16, 17, 51]. В этой связи отметим лишь основные особенности процессов выгорания, необходимые для дальнейшего механического моделирования движения КА с РДТТ.

Так, в том случае, когда физические условия во всех точках горящей поверхности заряда одинаковы и топливо однородно, оно сгорает равномерно, параллельными слоями, т. е. фронт горения перемещается от поверхностных слоев в глубь заряда с одинаковой скоростью во всех точках. Постоянство тяги или необходимое изменение ее во времени достигается применением топлив с разными скоростями горения и выбором соответствующей конфигурации топливного заряда. В рассматриваемой задаче имеет место постоянство тяги ДУ, поэтому согласно гипотезе Циолковского [37] будет иметь место линейный закон изменения массы КА во все время работы РДТТ. На конце активного участка происходит мгновенное отключение ДУ, так называемая «отсечка» тяги путем гашения заряда при быстром снижении давления в камере сгорания двигателя (пиротехнический пробой корпуса РДТТ, впрыскивание жидкости в камеру РДТТ и др. способы).

В космических РДТТ широко применяются так называемые заряды канального горения (рис. 5), сгорающие по поверхностям, которые образованы внутренними осевыми каналами круглого, звездообразного или другого поперечного сечения. Также распространены пакетные шашечные заряды, равномерно распределенные по объему камеры сгорания. Чтобы исключить горение по торцевым поверхностям (как и по части внутренних), на них наносят так называемые бронирующие покрытия на основе тех же материалов, что используются для теплозащиты корпуса. Часто применяются заряды более сложных конфигураций, образованных сочетанием упомянутых простых форм.

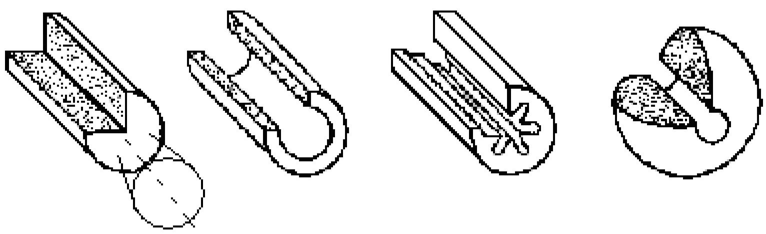


Рис. 5. *Виды топливных зарядов РДТТ*

Из линейного по времени закона расхода массы и анализа видов топливных зарядов, в особенности пакетно-шашечных и со звездообразной рабочей поверхностью, с высокой степенью точности следует линейный по времени закон убывания продольного и экваториального моментов инерции динамически симметричной ДУ.

Проиллюстрируем это на примере выгорания цилиндрического заряда из цилиндрических шашек и со звездообразной рабочей поверхностью (рис. 6).

Моменты инерции однородного цилиндра радиуса R и высоты H можно вычислить по формулам:

$$I_z = \frac{1}{2} mR^2, \quad I_x = m\left(\frac{H^2}{3} + \frac{R^2}{4}\right),$$

где m – масса однородного цилиндра.

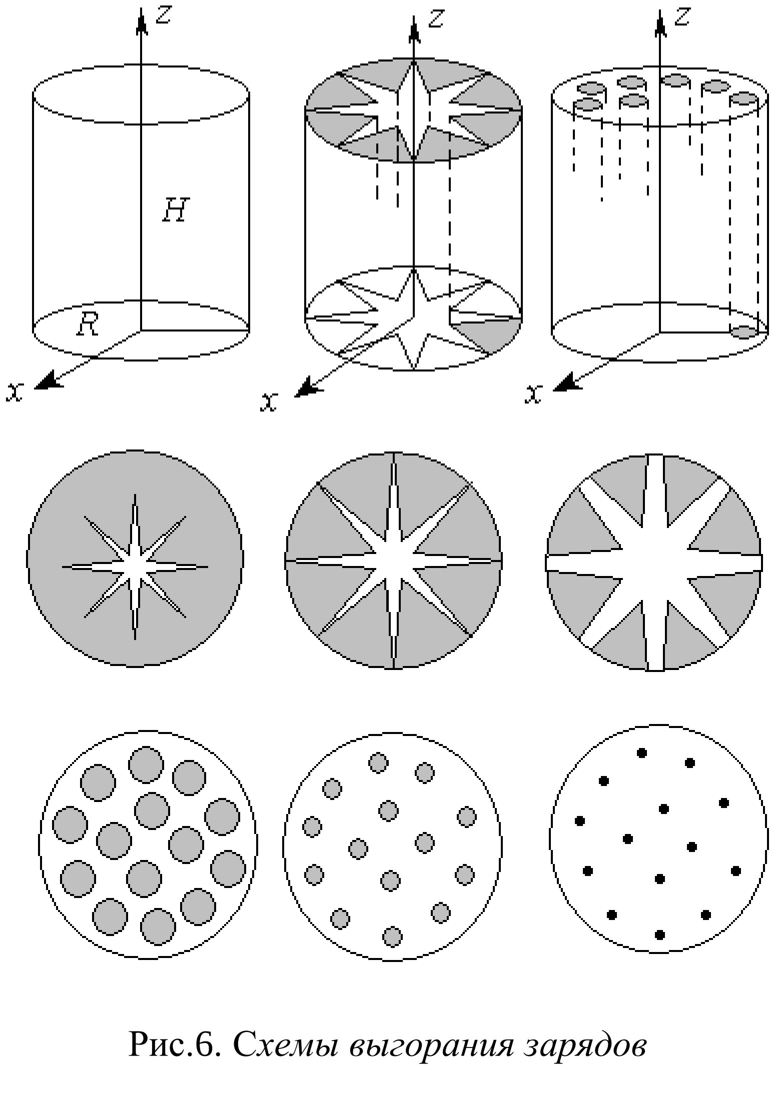


Рис.6. С*хемы выгорания зарядов*

Из схем выгорания приближенно можно заключить, что геометрическая конфигурация точек топлива почти не меняется в процессе выгорания, а топливо остается вполне равномерно распределенным по всему объему зарядов, и только средняя плотность топлива в общем объеме заряда равномерно и линейно убывает. Таким образом, заряд при работе РДТТ приближенно сохраняет топологическую конфигурацию и инерционные свойства цилиндра, что является справедливым для любой другой пространственной формы заряда. Так как моменты инерции сплошного равномерного цилиндра и любой другой равномерно заполненной материальной пространственной формы пропорциональны массе, которая линейно убывает во времени, то можно приближенно считать, что и моменты инерции зарядов также убывают по линейному закону:

$$I_z(t) \approx m(t)\frac{R^2}{2} = I_{z0} - at, \quad I_x(t) \approx m(t)\left(\frac{H^2}{3} + \frac{R^2}{4}\right) = I_{x0} - bt.$$

Для других рабочих поверхностей и форм топливных зарядов вполне справедливым будет замечание о гораздо худшем соответствии изменения моментов инерции линейному закону. Однако, и для остальных форм зарядов на начальном этапе можно принять линейный закон изменения моментов инерции, хотя бы для проведения самого первого и весьма приближенного анализа движения.

Таким образом, приведено обоснование возможности использования линейных законов изменения для всех инерционно-массовых характеристик КА с РДТТ при постоянном расходе топлива, включая продольные и экваториальные моменты инерции.

Теперь можно перейти к поиску приближенных зависимостей от времени для параметров движения соосных тел с переменной массой и линейными законами изменения всех инерционно-массовых параметров системы.

2.3. Приближенные решения для параметров движения системы переменной массы

Перейдем к определению зависимостей параметров движения КА с переменной массой от времени.

Предположим, что изменяющиеся инерционно-массовые параметры являются линейными функциями времени, тогда для моментов инерции тел можно записать:

$$A_1(t) = A_1 - \frac{A_1 - A_{1,k}}{T} t, \quad A_2 = const, \quad C_1(t) = C_1 - \frac{C_1 - C_{1,k}}{T} t, \quad C_2 = const, \tag{2.32}$$

где A_i, C_i - величины экваториальных и продольных моментов инерции тел, соответствующие началу работы тормозной двигательной установки; $A_{1,k}$, $C_{1,k}$ - величины, соответствующие завершению процесса выгорания топлива; T–время работы ДУ.

Динамические уравнения (2.31) при отсутствии момента внутреннего взаимодействия с учетом зависимостей (2.32) перепишем в виде [3]:

$$\begin{gathered} (A - at)\dot{p} - (A - at - C_2)qr + q(C_1 - ct)(r + \sigma) = 0, \\ (A - at)\dot{q} - (C_2 - A + at)pr - p(C_1 - ct)(r + \sigma) = 0, \\ \dot{r} = 0, \qquad \dot{\sigma} = 0, \end{gathered} \tag{2.33}$$

где $A = A_1 + A_2$, $a = \dfrac{A_1 - A_{1,k}}{T}$, $c = \dfrac{C_1 - C_{1,k}}{T}$.

Из последних уравнений системы (2.33) следует, что $r = r_0$, $\sigma = \sigma_0$.

Перейдем в системе (2.33) к переменным $\{G, F\}$ типа “амплитуда-фаза” с помощью следующей замены, аналогичной (3.9):

$$p(t) = G(t)\sin F(t), \quad q(t) = G(t)\cos F(t). \tag{2.34}$$

С учетом замены (2.34) уравнения (2.33) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}(A-at)\dot{G}&=0,\\(A-at)\dot{F}&=k-nt,\end{aligned} \tag{2.35}$$

где $k=r_0(A-C_1-C_2)-C_1\sigma_0, \quad n=ar_0-c[r_0+\sigma_0]$.

Запишем точное решение системы (2.35):

$$\begin{aligned}&G=L_0\,,\\&F(t)=s_0+\frac{n}{a}t-\left(\frac{k}{a}-\frac{A\cdot n}{a^2}\right)ln\left(1-\frac{a}{A}t\right),\end{aligned} \tag{2.36}$$

где $L_0 = const$, $s_0 = const$ – начальные значение для амплитуды и фазы.

Предположим, что относительное изменение моментов инерции, соответствующих началу и концу процесса выгорания топлива, достаточно мало и, следовательно, малой является величина aT/A. Решение (2.36) следует рассматривать на временном интервале $t\in[0,T]$, так как именно на этом промежутке времени происходит выработка топлива и изменение массы. На указанном временном интервале для аргумента натурального логарифма, содержащегося в решении для фазы F, справедливо следующее ограничение: $0\le\frac{a}{A}t\le\frac{a}{A}T<1$, которое удовлетворяет интервалу сходимости следующего разложения функции в степенной ряд:

$$\ln(1-\xi)=-\xi-\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}-\ldots, \qquad \xi\in(-1,\,1\,). \tag{2.37}$$

Запишем решение для фазы с учетом разложения (2.37), отбрасывая из рассмотрения величины, пропорциональные a^2T^2/A^2, как члены более высокого порядка малости:

$$F(t)=s_0+\omega\cdot t+\mu\cdot t^2\,, \tag{2.38}$$

где $\quad \omega=\frac{k}{A}, \quad \mu=\frac{1}{2}\left(\frac{a\cdot k}{A^2}-\frac{n}{A}\right)$.

Окончательно для экваториальных угловых скоростей можно записать:

$$p(t)=L_0\sin\left(s_0+\omega\cdot t+\mu\cdot t^2\right), \quad q(t)=L_0\cos\left(s_0+\omega\cdot t+\mu\cdot t^2\right). \tag{2.39}$$

Из (2.39) видно, что в случае постоянства массы ($\mu = 0$) решения для экваториальных угловых скоростей будут совпадать с полученными ранее зависимостями (2.9) и (3.11) с учетом (3.9).

Решения (2.39) можно представить в следующем виде [3]:

$$p(t) = L_0 \sin\left(s_0 + [\omega + \mu \cdot t] \cdot t\right), \qquad q(t) = L_0 \cos\left(s_0 + [\omega + \mu \cdot t] \cdot t\right). \tag{2.40}$$

Из выражений (2.40) видно, что, в связи с изменением массы системы экваториальные угловые скорости имеют постоянную амплитуду и изменяющуюся во времени частоту, убывание или возрастание которой будет определяться знаком величины μ.

Перейдем к нахождению параметров, определяющих ориентацию КА. Для рассмотрения практической задачи стабилизации продольной оси КА с вращающимся стабилизирующим блоком введем следующую тройку углов эйлерового типа ψ, γ, φ , фиксирующих положение тела 2 в пространстве, и угол δ закрутки тела 1 относительно тела 2, направления отсчетов которых представлены на рис. 3.

Для данных углов справедливы следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= p \sin\varphi + q \cos\varphi, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos\gamma}\left(p\cos\varphi - q\sin\varphi\right), \\ \dot{\varphi} &= r - \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\left(p\cos\varphi - q\sin\varphi\right), \\ \dot{\delta} &= \sigma. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Очевидно, что угол относительного закручивания будет являться линейной функцией времени: $\delta = \sigma_0 t + \delta_0$.

Найдем решение системы (2.41), рассматривая конкретный режим движения КА с двойным вращением, а именно, когда реализована частичная закрутка, при которой в быстрое вращение вокруг продольной оси приведен стабилизирующий блок (тело 1), а тело 2 вдоль продольной оси не закручено, т.е. $r_0=0$. Частичная закрутка КА предполагает малость экваториальных составляющих угловой скорости системы p и q, что, в свою очередь, обеспечивается малостью амплитуды L_0. Более того, рассмотрим случай движения с малыми величинами углов γ и ψ. Малость углов γ и ψ соответствует движению с малыми углами нутации θ (углами между осями OZ и Oz), для которых выполняется следующее соотношение сферической геометрии, определяющее теорему Пифагора на сфере:

$$\cos\theta = \cos\gamma \cdot \cos\psi \,. \tag{2.42}$$

Учитывая малость величин в соотношении (2.42), можно записать:

$$\theta^2 \cong \gamma^2 + \psi^2 \,. \tag{2.43}$$

Из введенных выше предположений малости величин в случае частичной закрутки, а также выражений (2.41) и (2.39) следует:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= L_0 \sin\left(s_0 + \omega \cdot t + \mu \cdot t^2 + \varphi\right), \\ \dot{\psi} &= L_0 \cos\left(s_0 + \omega \cdot t + \mu \cdot t^2 + \varphi\right), \\ \dot{\varphi} &= -\gamma \cdot L_0 \cos\left(s_0 + \omega \cdot t + \mu \cdot t^2 + \varphi\right). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Последнее выражение (2.44) показывает, что величина $\dot{\varphi}$ более высокого порядка малости, чем $\dot{\gamma}$ или $\dot{\psi}$, так как включает произведение двух малых величин $\gamma \cdot L_0$. Поэтому можно считать, что на достаточно малом временном промежутке, соответствующем выгоранию топлива ($T \approx 15\text{-}25$ *с*), $\dot{\varphi} \cong 0$. Не ограничивая общности, для угла собственного вращения можно положить: $\varphi = const = 0$.

Тогда для двух оставшихся углов можно записать:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= L_0 \sin\left(s_0 + \omega \cdot t + \mu \cdot t^2\right), \\ \dot{\psi} &= L_0 \cos\left(s_0 + \omega \cdot t + \mu \cdot t^2\right). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Рассмотрим два возможных случая движения, реализуемых при следующих ограничениях на знаки величин:

1) $\mathrm{sgn}(\omega) = \mathrm{sgn}(\mu)$; (2.46)

$$2)\ \operatorname{sgn}(\omega) = -\operatorname{sgn}(\mu). \qquad (2.47)$$

Проведем интегрирование в первом случае (2.46), считая для определенности величины частоты ω и параметра μ положительными.

$$\gamma(t)-\gamma_0 = L_0\int_0^t \sin\left(s_0+\omega\cdot t+\mu\cdot t^2\right)dt = L_0\int_0^t \sin\left(\mu\left[t+\frac{\omega}{2\mu}\right]^2+\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\right)dt =$$

$$= L_0\cos\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\int_0^t \sin\left(\mu\left[t+\frac{\omega}{2\mu}\right]^2\right)dt + L_0\sin\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\int_0^t \cos\left(\mu\left[t+\frac{\omega}{2\mu}\right]^2\right)dt =$$

$$= L_0\cos\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\int_{\frac{\omega}{2\mu}}^{t+\frac{\omega}{2\mu}} \sin\left(\mu\tau^2\right)d\tau + L_0\sin\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\int_{\frac{\omega}{2\mu}}^{t+\frac{\omega}{2\mu}} \cos\left(\mu\tau^2\right)d\tau =$$

$$= L_0\cos\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot\int_{\frac{\omega}{2\mu}}^{t+\frac{\omega}{2\mu}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\cdot\tau\right]^2\right)d\left[\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\cdot\tau\right]+ \qquad (2.48)$$

$$+ L_0\sin\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot\int_{\frac{\omega}{2\mu}}^{t+\frac{\omega}{2\mu}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\cdot\tau\right]^2\right)d\left[\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\cdot\tau\right]=$$

$$= L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot\cos\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\left\{S\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\left[t+\frac{\omega}{2\mu}\right]\right)-S\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi\mu}}\right)\right\}+$$

$$+ L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot\sin\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\left\{C\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\left[t+\frac{\omega}{2\mu}\right]\right)-C\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi\mu}}\right)\right\},$$

где функции

$$C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx, \quad S(x)=\int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx -$$

представляют собой интегралы Френеля [36].

Аналогично получаем зависимость для угла ψ:

$$\psi(t)-\psi_0 = L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot\cos\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\left\{C\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\left[t+\frac{\omega}{2\mu}\right]\right)-C\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi\mu}}\right)\right\}-$$
$$-L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot\sin\left[s_0-\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\left\{S\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\left[t+\frac{\omega}{2\mu}\right]\right)-S\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi\mu}}\right)\right\}. \tag{2.49}$$

Во втором случае (2.47), принимая величину частоты положительной, получим:

$$\gamma(t)-\gamma_0 = L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}\cdot\sin\left[s_0+\frac{\omega^2}{4|\mu|}\right]\cdot\left\{C\left(\sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}}\left[t-\frac{\omega}{2|\mu|}\right]\right)+C\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi|\mu|}}\right)\right\}-$$
$$-L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}\cdot\cos\left[s_0+\frac{\omega^2}{4|\mu|}\right]\cdot\left\{S\left(\sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}}\left[t-\frac{\omega}{2|\mu|}\right]\right)+S\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi|\mu|}}\right)\right\},$$

(2.50)

$$\psi(t)-\psi_0 = L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}\cdot\cos\left[s_0+\frac{\omega^2}{4|\mu|}\right]\cdot\left\{C\left(\sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}}\left[t-\frac{\omega}{2|\mu|}\right]\right)+C\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi|\mu|}}\right)\right\}+$$
$$+L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}\cdot\sin\left[s_0+\frac{\omega^2}{4|\mu|}\right]\cdot\left\{S\left(\sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}}\left[t-\frac{\omega}{2|\mu|}\right]\right)+S\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi|\mu|}}\right)\right\}.$$

Аналогичным образом можно получить решения для углов γ и ψ при отрицательных величинах частоты ω и параметра μ:

$$\gamma(t)-\gamma_0 = -L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}\cdot\cos\left[-s_0-\frac{\omega^2}{4|\mu|}\right]\cdot\left\{S\left(\sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}}\left[t+\frac{|\omega|}{2|\mu|}\right]\right)-S\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2\pi|\mu|}}\right)\right\}+$$
$$+L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}\cdot\sin\left[s_0+\frac{\omega^2}{4|\mu|}\right]\cdot\left\{C\left(\sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}}\left[t+\frac{|\omega|}{2|\mu|}\right]\right)-C\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2\pi|\mu|}}\right)\right\},$$

(2.51)

$$\psi(t)-\psi_0 = L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}\cdot\cos\left[s_0-\frac{\omega^2}{4|\mu|}\right]\cdot\left\{C\left(\sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}}\left[t+\frac{|\omega|}{2|\mu|}\right]\right)-C\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2\pi|\mu|}}\right)\right\}-$$

$$+L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}\cdot\sin\left[s_0+\frac{\omega^2}{4|\mu|}\right]\cdot\left\{S\left(\sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}}\left[t+\frac{|\omega|}{2|\mu|}\right]\right)-S\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2\pi|\mu|}}\right)\right\},$$

а также при отрицательном значении частоты ω и положительном значении параметра μ:

$$\gamma(t)-\gamma_0 = -L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot sin\left[-s_0+\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\left\{C\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\left[t-\frac{|\omega|}{2\mu}\right]\right)+C\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2\pi\mu}}\right)\right\}-$$

$$-L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot cos\left[-s_0+\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\left\{S\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\left[t-\frac{|\omega|}{2\mu}\right]\right)+S\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2\pi\mu}}\right)\right\},$$

(2.52)

$$\psi(t)-\psi_0 = L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot\cos\left[-s_0+\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\left\{C\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\left[t-\frac{|\omega|}{2\mu}\right]\right)+C\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2\pi\mu}}\right)\right\}+$$

$$+L_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\cdot\sin\left[s_0+\frac{\omega^2}{4\mu}\right]\cdot\left\{S\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\left[t-\frac{|\omega|}{2\mu}\right]\right)+S\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2\pi\mu}}\right)\right\}.$$

Таким образом, получены зависимости от времени углов ориентации соосных тел в пространстве для обоих возможных случаев движения (2.46) и (2.47).

Дадим оценку величине угла нутации, являющейся одним из определяющих факторов рассеивания тормозного импульса КА с двойным вращением. В рассматриваемой практической задаче имеет место малость параметра μ. Введем медленную поправку к частоте $\tau=\mu t$ и перепишем выражения (2.45) в следующем виде [3]:

$$\dot\gamma = L_0\sin\left(\left[\omega+\tau\right]\cdot t+s_0\right),$$
$$\dot\psi = L_0\cos\left(\left[\omega+\tau\right]\cdot t+s_0\right).$$

Следуя [1], самое грубое представление о движении системы можно получить, если принять τ в качестве параметра (взяв, например, его среднее значение: $\tau = \bar{\tau} = \mu T/2$). Тогда, решая последние приближенные дифференциальные уравнения, для углов ориентации приближенно можно записать [3]:

$$\gamma(t) \approx -\frac{L_0}{\omega+\tau}\left[\cos\left(\left[\omega+\tau\right]\cdot t+s_0\right)-\cos s_0\right]+\gamma_0,$$
$$\psi(t) \approx \frac{L_0}{\omega+\tau}\left[\sin\left(\left[\omega+\tau\right]\cdot t+s_0\right)-\sin s_0\right]+\psi_0. \qquad (2.53)$$

Из выражения (2.43) и последних зависимостей следует приближенная зависимость угла нутации от времени [3]:

$$\theta^2(t) \approx \frac{2L_0^2}{(\omega+\tau)^2}\left[1-\cos\left(\left[\omega+\tau\right]\cdot t\right)\right]+\frac{2L_0}{\omega+\tau}\left\{\psi_0\left(\sin\left(\left[\omega+\tau\right]\cdot t+s_0\right)-\sin s_0\right)-\right.$$
$$\left.-\gamma_0\left(\sin\left(\left[\omega+\tau\right]\cdot t+s_0\right)-\sin s_0\right)\right\}+\theta_0^2, \qquad (4.54)$$

где $\theta_0^2 = \gamma_0^2 + \psi_0^2$ - начальная величина угла нутации.

Из анализа величины знаменателя у амплитуды нутационных колебаний в приближенной зависимости (2.54) следует, что в случае движения, определяемом условием (2.46), когда величины μ и ω имеют одинаковые знаки, имеет место уменьшение амплитуды нутационных колебаний, а при условии (2.47) – рост амплитуды колебаний угла нутации.

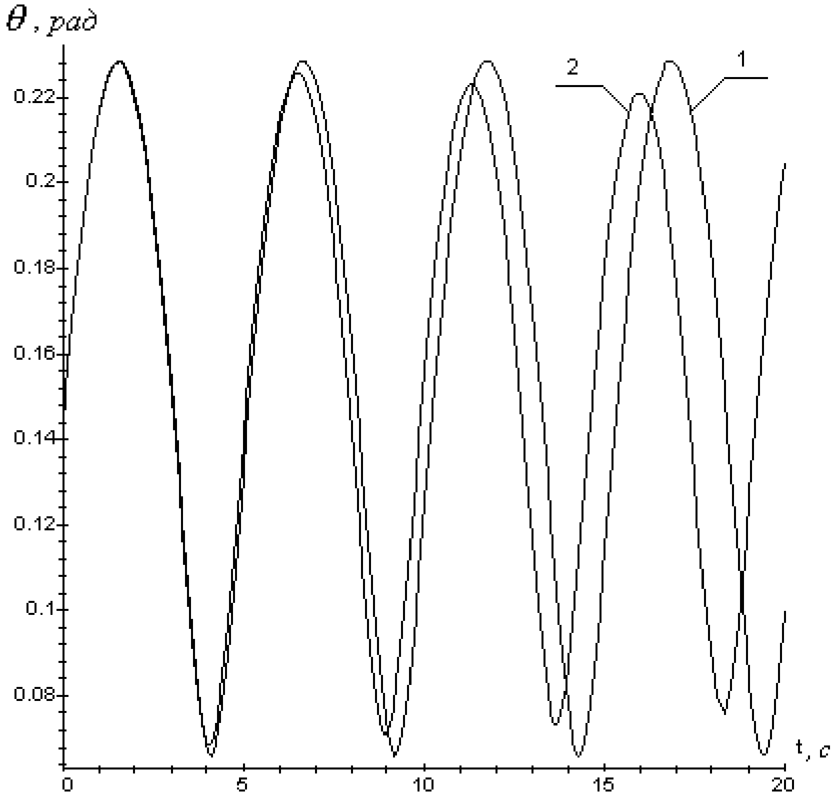
Последнее обстоятельство является особенно важным в свете того, что с увеличением раствора конуса нутации увеличивается отклонение от допустимых направлений выдачи тормозного импульса, что, в свою очередь, приводит к рассеванию точек посадки КА.

Из приведенных рассуждений следует, что уменьшение или увеличение раствора конуса нутации определяется совпадением или различием знаков величин μ и ω.

Приближенная зависимость от времени угла нутации (2.54) была приведена для иллюстрации влияния знака параметра μ на качественную картину движения КА. Если необходимо, более точную в рамках сделанных предположений зависимость угла нутации от времени можно получить, подставив выражения (2.48), (2.49), (2.50) и (2.51) в соотношение (2.43).

Приведем сравнительные результаты расчетов зависимости угла нутации с использованием выражений (2.42), (2.48)–(2.52), проведенных с начальными условиями движения и инерционно-массовыми параметрами, соответствующими положительной (рис. 7, 8) и отрицательной (рис. 9, 10) величинам частоты ω при различных сочетаниях знаков параметра μ.

Таким образом, выводы об уменьшении или об увеличении амплитуды нутационных колебаний в зависимости от сочетаний знаков ω и μ, следующие из простой аналитической зависимости (2.54), подтверждаются результатами расчетов по полным уравнениям, которые приведены на рис. 7-10.



<u>*Инерционно-массовые параметры*</u>*:*

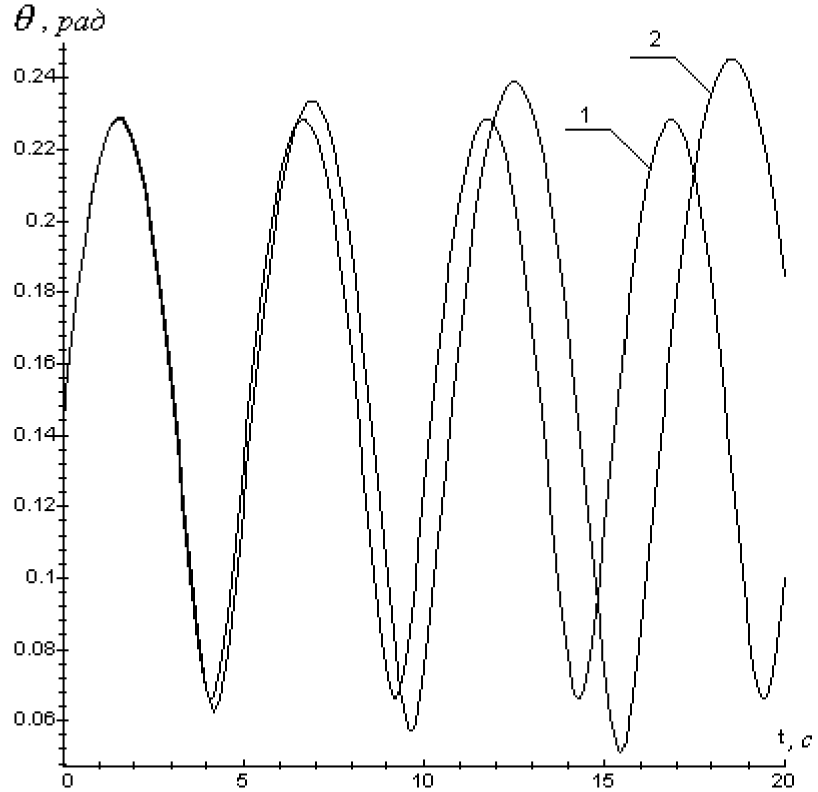
A_1 = 3,5 кг·м^2,
$A_{1,k}$ = 1 кг·м^2,
C_1 =0,4 кг·м^2,
$C_{1,k}$ = 0,3 кг·м^2,
A_2 = 3 кг·м^2,
C_2 = 0,3 кг·м^2,

<u>*Начальные условия движения*</u>*:*

$\psi_0 = \gamma_0$ =0,1 рад,
r_0 = 0 рад/с,
σ_0 = - 20 рад/с,
L_0 =0,1 рад/с,
s_0 = 1 рад,
T = 20 с.

ω = 1,231 рад/с,
μ = 0,004 рад/с^2.

Рис.7. *Уменьшение нутационных колебаний в системе с переменной массой:*
1 – система с постоянной массой, 2 – система с переменной массой



<u>*Инерционно-массовые параметры*</u>*:*

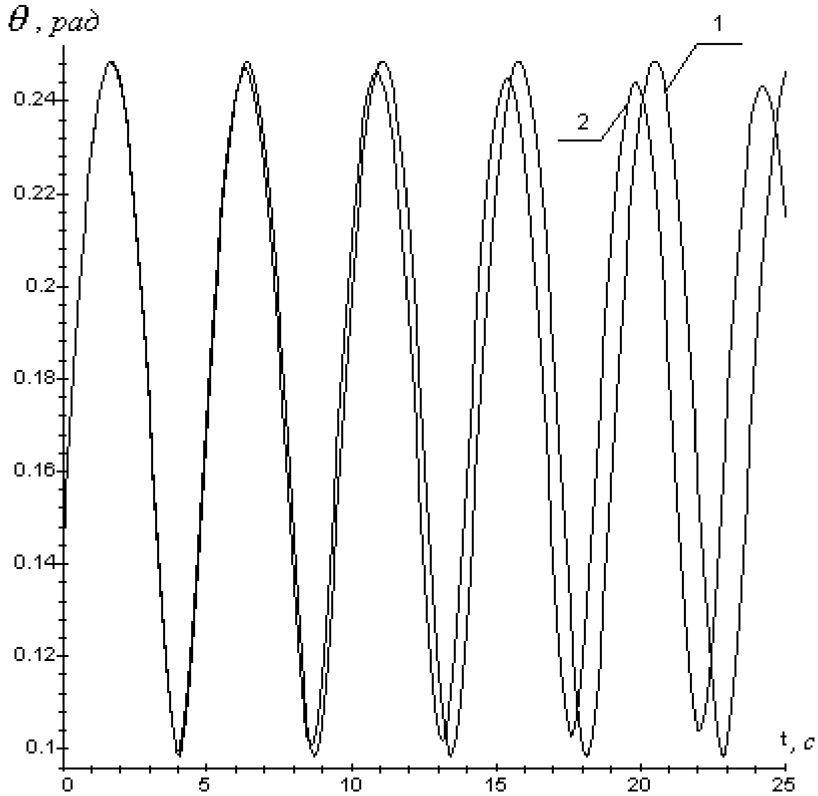
A_1 = 3,5 кг·м^2,
$A_{1,k}$ = 1,5 кг·м^2,
C_1 =0,4 кг·м^2,
$C_{1,k}$ = 0,2 кг·м^2,
A_2 = 3 кг·м^2,
C_2 = 0,3 кг·м^2,

<u>*Начальные условия движения*</u>*:*

$\psi_0 = \gamma_0$ =0,1 рад,
r_0 = 0 рад/с,
σ_0 = - 20 рад/с,
L_0 =0,1 рад/с, s_0 = 1 рад,
T = 20 с.

ω = 1,231 рад/с,
μ = - 0,006 рад/с^2.

Рис. 8. *Увеличение нутационных колебаний в системе с переменной массой:*
1 – система с постоянной массой, 2 – система с переменной массой



<u>Инерционно-массовые параметры</u>:

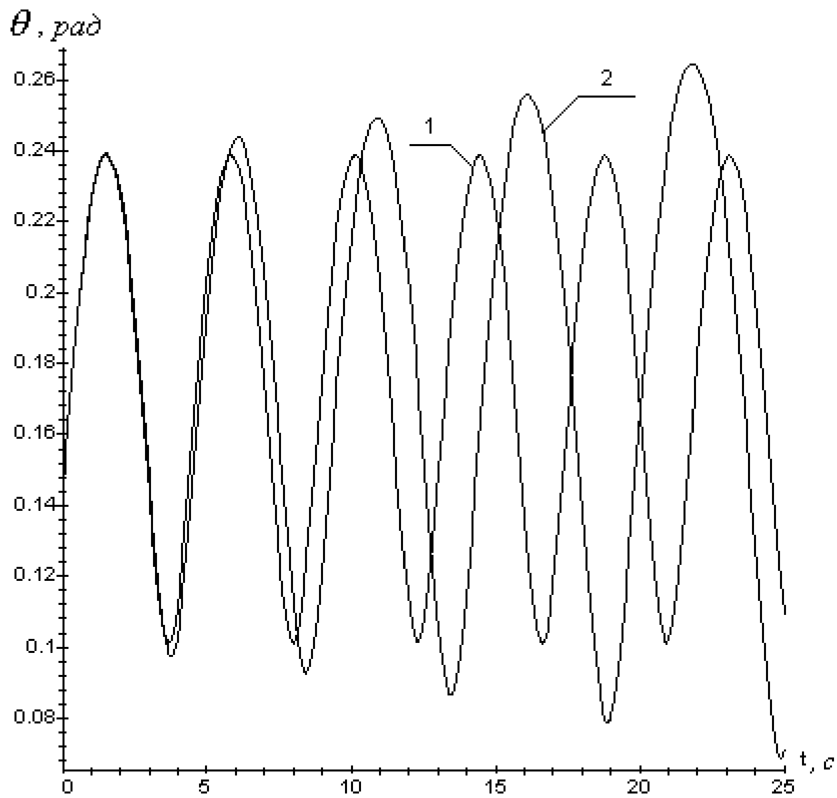
$A_1 = 3$ *кг·м*^{2},
$A_{1,k} = 1$ *кг·м*^{2},
$C_1 = 0{,}4$ *кг·м*^{2},
$C_{1,k} = 0{,}3$ *кг·м*^{2},
$A_2 = 3$ *кг·м*^{2},
$C_2 = 0{,}3$ *кг·м*^{2},

<u>Начальные условия движения</u>:

$\psi_0 = \gamma_0 = 0{,}1$ *рад*,
$r_0 = 0$ *рад/с*, $\sigma_0 = 20$ *рад/с*,
$L_0 = 0{,}1$ *рад/с*, $s_0 = 1$ *рад*,
$T = 25$ *с*.

$\omega = -1{,}333$ *рад/с*,
$\mu = -\ 0{,}002$ *рад/с*^{2}.

Рис. 9. *Уменьшение нутационных колебаний в системе с переменной массой:*
1 – система с постоянной массой, 2 – система с переменной массой



<u>Инерционно-массовые параметры</u>:

$A_1 = 2{,}5$ *кг·м*^{2},
$A_{1,k} = 1{,}5$ *кг·м*^{2},
$C_1 = 0{,}4$ *кг·м*^{2},
$C_{1,k} = 0{,}2$ *кг·м*^{2},
$A_2 = 3$ *кг·м*^{2},
$C_2 = 0{,}3$ *кг·м*^{2},

<u>Начальные условия движения</u>:

$\psi_0 = \gamma_0 = 0{,}1$ *рад*,
$r_0 = 0$ *рад/с*, $\sigma_0 = 20$ *рад/с*,
$L_0 = 0{,}1$ *рад/с*, $s_0 = 1$ *рад*,
$T = 25$ *с*.

$\omega = -1{,}455$ *рад/с*,
$\mu = 0{,}009$ *рад/с*^{2}.

Рис. 10. *Увеличение нутационных колебаний в системе с переменной массой:*
1 – система с постоянной массой, 2 – система с переменной массой

2.4. Необходимое и достаточное условие уменьшения амплитуды нутационных колебаний

Как уже было показано, для уменьшения амплитуды колебаний по углу нутации необходимо и достаточно того, чтобы величины μ и ω имели одинаковые знаки. При этом, чем большие значения по величине принимает параметр μ, тем более быстро происходит затухание нутационных колебаний. Опираясь на это основное условие, можно получить критерий для дальнейшей минимизации амплитуды нутационных колебаний, согласно которому можно определить оптимум в пространстве инерционно-массовых параметров. Оптимум представляет собой точку в пространстве проектных параметров, для которой обеспечивается наибольшее и наибыстрейшее затухание нутационных колебаний. Указанный критерий оптимальности можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}\mu = \operatorname{sgn}\omega, \\ |\mu| \to \sup. \end{cases} \tag{2.55}$$

В случае, когда реализуется стабилизация продольной оси КА с помощью частичной закрутки, т.е. когда $r_0 = 0$, для μ и ω выполняются соотношения:

$$\mu = \frac{-\sigma_0}{2T(A_1 + A_2)^2}\left[\Delta_A \cdot C_1 - \Delta_C \cdot (A_1 + A_2)\right],$$
$$\omega = \frac{-C_1\sigma_0}{A_1 + A_2}, \tag{2.56}$$

где

$$\Delta_A = A_1 - A_{1,k}, \qquad \Delta_C = C_1 - C_{1,k}.$$

С учетом (2.56) критерий (2.55) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta_A \cdot C_1 > \Delta_C \cdot (A_1 + A_2), \\ \Delta_A \cdot C_1 - \Delta_C \cdot (A_1 + A_2) \to \sup\limits_{\{\Delta_A, \Delta_C\}}. \end{cases} \qquad (2.57)$$

Величины $\{\Delta_A,\ \Delta_C\}$ образуют в рассматриваемой задаче пространство проектных параметров, в котором, согласно (2.57), выбирается наиболее подходящая точка. Подобные подходы могут встречаться в других задачах поиска наилучших и в определенных смыслах оптимальных решений и управляющих величин при аналитическом проектировании разнообразных механических систем.

При получении критерия (2.57) было опущено то обстоятельство, что чем большие значения принимает скорость относительной закрутки σ_0, тем более эффективной является стабилизация и тем меньшие амплитуды имеют нутационные колебания. Следовательно, возможное увеличение величины σ_0 считается очевидным и не является предметом оптимизации, длительность работы двигательной установки T также не варьируется.

Опираясь на критерий (2.57) и принимая во внимание то, что управляющие величины $\Delta_A,\ \Delta_C$ существенно положительны в рассматриваемой задаче, в качестве необходимого и достаточного условия уменьшения амплитуды нутационных колебаний можно записать [3]:

$$\frac{\Delta_A}{A_1 + A_2} > \frac{\Delta_C}{C_1}. \qquad (2.58)$$

Оптимальными величинами $\Delta_A^*,\ \Delta_C^*$ будут являться такие величины из подмножества проектных параметров P^* (рис. 11), при которых $\Delta_A/(A_1 + A_2) - \Delta_C/C_1 \to \sup\limits_{\{\Delta_A, \Delta_C\}}$.

Подмножество P^* проектных параметров, для которых амплитуда нутационных колебаний не увеличивается, представлено для некоторой гипотетической области гипотетически возможных проектных параметров (рис. 11) в пространстве $\{\Delta_A,\ \Delta_C\}$, располагающихся выше прямой:

$$\Delta_A = k \cdot \Delta_C, \tag{2.59}$$

где $k = (A_1 + A_2)/C_1$.

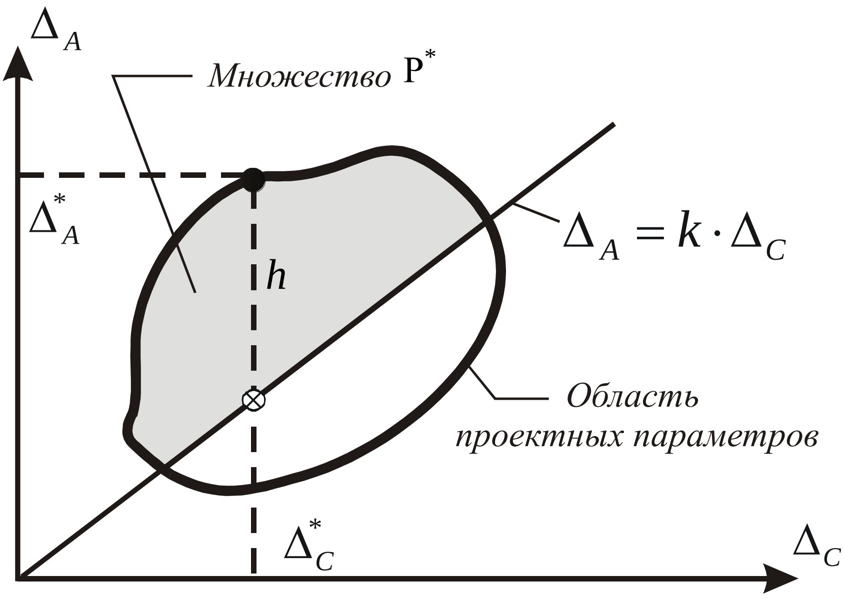


Рис. 11. *Выбор оптимальных значений из множества* P^**,*
обеспечивающих наименьшую амплитуду нутационных колебаний

Оптимальными величинами $\Delta_A^*,\ \Delta_C^*$ будут являться те величины, лежащие на границе множества P^*, которые имеют наибольшее удаление h от прямой (2.59) по оси Δ_A. Выбор оптимальных величин определяется конфигурацией множества возможных проектных параметров. Невыполнение условия (2.58) приводит к росту амплитуды колебаний по углу нутации и, следовательно, к увеличению рассеивания точек посадки.

Таким образом, получены аналитические зависимости параметров ориентации КА с двойным вращением на активном участке траектории спуска, выражаемые через интегралы Френеля, а также найдено необходимое и достаточное условие, накладываемое на инерционно-массовые параметры, обеспечивающее уменьшение амплитуды нутационных колебаний, что, в свою очередь, уменьшает рассеивание точек посадки аппарата.

3. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС КА С ДВОЙНЫМ ВРАЩЕНИЕМ НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ СПУСКА

В предыдущих главах было проведено исследование пространственного движения КА с двойным вращением вокруг полюса, совпадающего с начальным положением центра масс аппарата. Оставим в силе предположение о малом относительном смещении центра масс вследствие выгорания топлива, принятого ранее для получения зависимостей от времени параметров ориентации. Для оценки эффективности стабилизации частичной закруткой достаточно рассмотреть движение центра масс КА с двойным вращением.

3.1. Уравнения движения центра масс спускаемого аппарата

Рассмотрим движение относительно некоторой инерциальной системы координат центра масс КА с двойным вращением на активном участке траектории спуска. Активный участок характеризуется сравнительно короткой длительностью работы тормозной двигательной установки (T~*15-25 с.*), и поэтому путь КА, пройденный на активном участке, будет относительно небольшим. В этом случае движение можно рассматривать как движение в плоском поле тяготения [45], пренебрегая вращением Земли, и взять некоторое среднее значение ускорения свободного падения на высоте орбиты (для высот 100 $\div$ 200 *км* от поверхности Земли $g \approx 9{,}51$ $м/с^2$ [30]).

Пусть указанная система координат $OXYZ$ движется в абсолютном пространстве прямолинейно с постоянной скоростью $V_{орб}$, соответствующей непродолжительному участку орбитального движения КА. Выберем следующее расположение осей системы. Оси OZ и OY лежат в плоскости орбиты, причем положение OZ соответствует расчетному направлению выдачи тормозного импульса, а ось OX перпендикулярна орбитальной плоскости и образует с перечисленными осями правую систему (рис. 12).

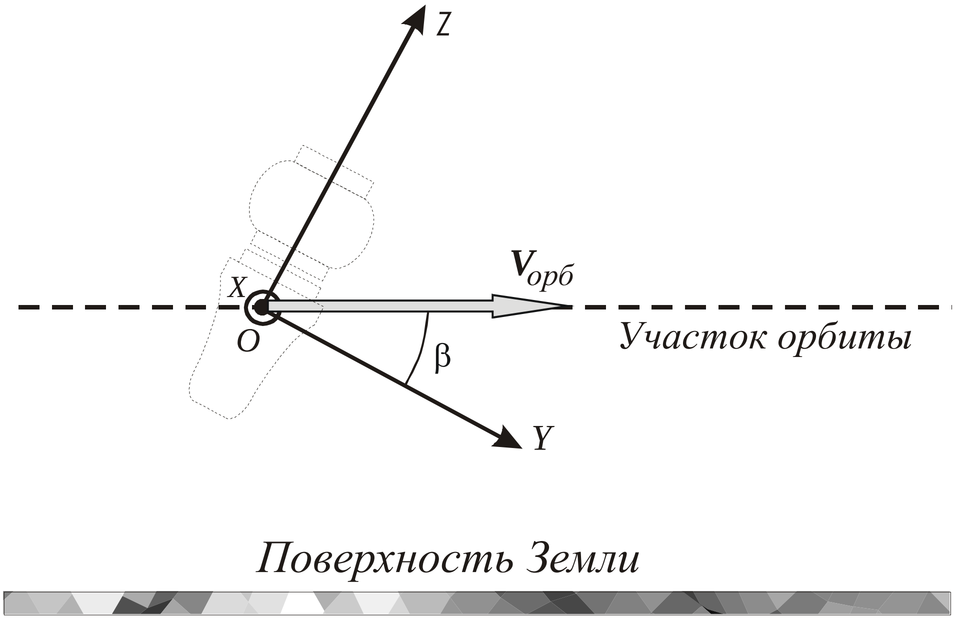


Рис. 12. *Движение и ориентация инерциальной системы координат OXYZ*

В предыдущей главе определены параметры ориентации КА относительно центра масс (рис. 3) в случае свободного углового движения. В силу малых размеров аппарата и малых относительных смещений его центра масс можно использовать полученные решения для углов ориентации (2.48)-(2.53) при рассмотрении пространственного движения КА вокруг центра масс и движения центра масс в плоском поле силы тяжести на активном участке спуска.

По-прежнему будем считать, что вектор тормозной тяги направлен вдоль продольной оси КА, линейные и угловые эксцентриситеты тяги отсутствуют, а изменение массы происходит по линейному закону, что соответствует постоянной силе реактивной тяги $(P = 1400\ H)$:

$$m(t) = m_0(1 - \alpha \cdot t), \tag{3.1}$$

где $\alpha = \dfrac{m_0 - m_k}{m_0 T}$ - удельный секундный расход топлива [37] в тормозной двигательной установке.

Запишем уравнения движения центра масс КА в проекциях на инерциальные оси *OXYZ*:

$$\begin{cases} m(t)\ddot{X} = -P\sin\gamma \ , \\ m(t)\ddot{Y} = G\sin\beta + P\sin\psi\cos\gamma \ , \\ m(t)\ddot{Z} = -G\cos\beta - P\cos\psi\cos\gamma \ , \end{cases} \tag{3.2}$$

где $G = m(t)g$ - сила тяжести, P - постоянная сила реактивной тяги, а β - заданный угол выдачи тормозного импульса к направлению движения вдоль орбиты (β ~ 35÷45°).

3.2. Приближенные аналитические зависимости для параметров движения центра масс КА

Получим приближенное решение системы (3.2), принимая в качестве зависимостей для углов ориентации приближенные зависимости (2.53), в которых величина τ рассматривалась как постоянный параметр. Так как для рассматриваемой задачи характерны малые значения удельного расхода массы (α ~ 0,01 *кг/с*), то величину $\alpha \cdot t = \lambda$ можно также положить в качестве параметра, взяв ее среднее значение $\bar{\lambda} = \alpha T/2$. Поэтому для массы КА можно принять ее постоянное среднее значение: $m = m_0(1 - \bar{\lambda})$.

Учитывая последние допущения, систему (3.2) можно переписать:

$$\begin{cases} \dot{V}_X = \dfrac{-P}{m}\sin\left(-R\cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma\right), \\ \dot{V}_Y = g\sin\beta + \dfrac{P}{m}\sin\left(R\sin[\Omega t + s_0] + f_\psi\right)\cos\left(-R\cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma\right), \\ \dot{V}_Z = -g\cos\beta - \dfrac{P}{m}\cos\left(R\sin[\Omega t + s_0] + f_\psi\right)\cos\left(-R\cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma\right), \end{cases} \tag{3.3}$$

где $R = \dfrac{L_0}{\omega + \tau}$, $\Omega = \omega + \tau$, $f_\gamma = \gamma_0 - R\cos s_0$, $f_\psi = \psi_0 - R\sin s_0$,

$$V_X = \dot{X}, \quad V_Y = \dot{Y}, \; V_Z = \dot{Z}. \tag{3.4}$$

Уравнения системы (3.3) можно интегрировать отдельно. При этом, как будет показано, их интегралы запишутся в цилиндрических функциях Бесселя, Ангера, Вебера и Струве [54].

Найдем интеграл первого уравнения (3.3).

$$V_{Xk} - V_{X0} = -\int_0^T \frac{P}{m} \sin\left(-R\cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma\right) dt =$$

$$= \frac{P}{m}\int_0^T \left[\sin\left(R\cos[\Omega t + s_0]\right)\cos f_\gamma - \cos\left(R\cos[\Omega t + s_0]\right)\sin f_\gamma\right] dt = \tag{3.5}$$

$$= \frac{P}{m}\left(i_1 \cos f_\gamma - i_2 \sin f_\gamma\right),$$

где

$$i_1 = \int_0^T \sin\left(R\cos[\Omega t + s_0]\right) dt = \frac{1}{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \sin\left(R\cos\xi\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Omega}\int_0^{\xi_1} \sin\left(R\cos\xi\right) d\xi - \frac{1}{\Omega}\int_0^{\xi_0} \sin\left(R\cos\xi\right) d\xi = \tag{3.6}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\,\Omega}\left[H_0(\xi_1, R) - H_0(\xi_0, R)\right],$$

$$i_2 = \int_0^T \cos\left(R\cos[\Omega t + s_0]\right) dt = \frac{1}{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \cos\left(R\cos\xi\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Omega}\int_0^{\xi_1} \cos\left(R\cos\xi\right) d\xi - \frac{1}{\Omega}\int_0^{\xi_0} \cos\left(R\cos\xi\right) d\xi = \tag{3.7}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\,\Omega}\left[I_0(\xi_1, R) - I_0(\xi_0, R)\right],$$

$$\xi_0 = s_0, \quad \xi_1 = \Omega T + s_0 .$$

Здесь $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ – полная гамма-функция, а

$$H_0(x, y) = \frac{2}{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_0^x \sin\left(y\cos\xi\right) d\xi, \qquad I_0(x, y) = \frac{2}{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_0^x \cos\left(y\cos\xi\right) d\xi$$ -

неполные нулевого порядка функции Струве и Бесселя соответственно [54]; при $x = \pi/2$ они будут называться полными функциями Струве и Бесселя или просто функциями Струве и Бесселя. Для решения второго уравнения (3.3) вычислим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T sin\left(R\,sin[\Omega t+s_0]+f_\psi\right)cos\left(-R\,cos[\Omega t+s_0]+f_\gamma\right)dt=\\
&=\int_0^T\Big\{\left[sin\left(R\,sin[\Omega t+s_0]\right)cos\,f_\psi+cos\left(R\,sin[\Omega t+s_0]\right)sin\,f_\psi\right]\times\\
&\times\left[cos\left(-R\,cos[\Omega t+s_0]\right)cos\,f_\gamma+sin\left(R\,cos[\Omega t+s_0]\right)sin\,f_\gamma\right]\Big\}dt=\\
&=i_I\,cos\,f_\psi\,cos\,f_\gamma+i_{II}\,cos\,f_\psi\,sin\,f_\gamma+\\
&\qquad+i_{III}\,sin\,f_\psi\,cos\,f_\gamma+i_{IV}\,sin\,f_\psi\,sin\,f_\gamma\,,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

где

$$\begin{aligned}
i_I&=\int_0^T\sin\left(R\sin[\Omega t+s_0]\right)\cos\left(-R\cos[\Omega t+s_0]\right)dt,\\
i_{II}&=\int_0^T\sin\left(R\sin[\Omega t+s_0]\right)\sin\left(R\cos[\Omega t+s_0]\right)dt,\\
i_{III}&=\int_0^T\cos\left(R\sin[\Omega t+s_0]\right)\cos\left(-R\cos[\Omega t+s_0]\right)dt,\\
i_{IV}&=\int_0^T\cos\left(R\sin[\Omega t+s_0]\right)\sin\left(R\cos[\Omega t+s_0]\right)dt.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

Вычислим каждый из интегралов (3.9).

$$i_I=\frac{1}{2}\left(i'_I+i''_I\right),\quad i_{II}=\frac{1}{2}\left(i'_{II}-i''_{II}\right),\quad i_{III}=\frac{1}{2}\left(i'_{II}+i''_{II}\right),\quad i_{IV}=\frac{1}{2}\left(i'_I-i''_I\right),\tag{3.10}$$

где

$$i'_I=\int_0^T\sin\left(R\sin[\Omega t+s_0]+R\cos[\Omega t+s_0]\right)dt\,,\quad i''_I=\int_0^T\sin\left(R\sin[\Omega t+s_0]-R\cos[\Omega t+s_0]\right)dt\,,$$

$$i'_{II}=\int_0^T\cos\left(R\sin[\Omega t+s_0]-R\cos[\Omega t+s_0]\right)dt\,,\quad i''_{II}=\int_0^T\cos\left(R\sin[\Omega t+s_0]+R\cos[\Omega t+s_0]\right)dt\,.$$

Найдем штрихованные величины:

$$i_I' = \int_0^T \sin\left(R\sin\left[\Omega t + s_0\right] + R\sin\left[\frac{\pi}{2} - \Omega t - s_0\right]\right) dt = \int_0^T \sin\left(2R\sin{}^{\pi}\!/_4 \cos\left[\Omega t + s_0 - {}^{\pi}\!/_4\right]\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Omega}\left[\int_0^{\xi_3} \sin\left(R'\cos\xi\right) d\xi - \int_0^{\xi_2} \sin\left(R'\cos\xi\right) d\xi\right] = \frac{\Gamma\left({}^1\!/_2\right)\sqrt{\pi}}{2\,\Omega}\left[H_0\left(\xi_3, R'\right) - H_0\left(\xi_2, R'\right)\right], \quad (3.11)$$

$$i_I'' = \int_0^T \sin\left(R\sin\left[\Omega t + s_0\right] - R\sin\left[\frac{\pi}{2} - \Omega t - s_0\right]\right) dt = \int_0^T \sin\left(2R\cos{}^{\pi}\!/_4 \sin\left[\Omega t + s_0 - {}^{\pi}\!/_4\right]\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Omega}\left[\int_0^{\xi_3} \sin\left(R'\sin\xi\right) d\xi - \int_0^{\xi_2} \sin\left(R'\sin\xi\right) d\xi\right] = \frac{\pi}{\Omega}\left[E_0\left(\xi_2, R'\right) - E_0\left(\xi_3, R'\right)\right], \quad (3.12)$$

$$i_{II}' = \int_0^T \cos\left(R\sin\left[\Omega t + s_0\right] - R\sin\left[\frac{\pi}{2} - \Omega t - s_0\right]\right) dt = \int_0^T \cos\left(2R\cos{}^{\pi}\!/_4 \sin\left[\Omega t + s_0 - {}^{\pi}\!/_4\right]\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Omega}\left[\int_0^{\xi_3} \cos\left(R'\sin\xi\right) d\xi - \int_0^{\xi_2} \cos\left(R'\sin\xi\right) d\xi\right] = \frac{\pi}{\Omega}\left[J_0\left(\xi_2, R'\right) - J_0\left(\xi_3, R'\right)\right], \quad (3.13)$$

$$i_{II}'' = \int_0^T \cos\left(R\sin\left[\Omega t + s_0\right] + R\sin\left[\frac{\pi}{2} - \Omega t - s_0\right]\right) dt = \int_0^T \cos\left(2R\sin{}^{\pi}\!/_4 \cos\left[\Omega t + s_0 - {}^{\pi}\!/_4\right]\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Omega}\left[\int_0^{\xi_3} \cos\left(R'\cos\xi\right) d\xi - \int_0^{\xi_2} \cos\left(R'\cos\xi\right) d\xi\right] = \frac{\Gamma\left({}^1\!/_2\right)\sqrt{\pi}}{2\,\Omega}\left[I_0\left(\xi_3, R'\right) - I_0\left(\xi_2, R'\right)\right], \quad (3.14)$$

где $\xi_3 = \Omega T + s_0 - {}^{\pi}\!/_4, \quad \xi_2 = s_0 - {}^{\pi}\!/_4, \quad R' = R\sqrt{2}$,

$E_0(x,y) = \dfrac{-1}{\pi}\displaystyle\int_0^x \sin(y\sin t)dt$, $J_0(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^x \cos(y\sin t)dt$ - неполные нулевого порядка функции Вебера и Ангера соответственно; при $x=\pi/2$ они будут называться полными функциями Вебера и Ангера или просто функциями Вебера и Ангера [54].

Теперь можно записать решение для второго уравнения (3.3):

$$\begin{aligned} V_{Yk} - V_{Y0} = Tg\sin\beta + \frac{P}{m}\big(& i_I \cos f_\psi \cos f_\gamma + i_{II} \cos f_\psi \sin f_\gamma + \\ & + i_{III} \sin f_\psi \cos f_\gamma + i_{IV} \sin f_\psi \sin f_\gamma \big). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для поиска квадратуры третьего уравнения (3.3), вычислим интеграл:

$$\int_0^T \cos\left(R\sin[\Omega t + s_0] + f_\psi\right)\cos\left(-R\cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma\right)dt =$$

$$= \int_0^T \left\{ \left[\cos\left(R\sin[\Omega t + s_0]\right)\cos f_\psi - \sin\left(R\sin[\Omega t + s_0]\right)\sin f_\psi\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\cos\left(-R\cos[\Omega t + s_0]\right)\cos f_\gamma + \sin\left(R\cos[\Omega t + s_0]\right)\sin f_\gamma\right]\right\}dt = \tag{3.16}$$

$$= i_{III}\cos f_\psi \cos f_\gamma + i_{IV}\cos f_\psi \sin f_\gamma -$$

$$- i_I \sin f_\psi \cos f_\gamma - i_{II}\sin f_\psi \sin f_\gamma \,.$$

Решение для третьего уравнения (3.3) запишется в виде:

$$V_{Zk} - V_{Z0} = -Tg\cos\beta + \frac{P}{m}\Big(i_{III}\cos f_\psi \cos f_\gamma + i_{IV}\cos f_\psi \sin f_\gamma - \\ - i_I \sin f_\psi \cos f_\gamma - i_{II}\sin f_\psi \sin f_\gamma\Big). \tag{3.17}$$

Так как выбранная инерциальная система координат *OXYZ* движется со скоростью, соответствующей скорости движения КА по орбите на момент включения тормозной двигательной установки, то в решениях (3.5), (3.15) и (3.17) начальные значения скоростей следует положить равными нулю:

$$V_{X0} = V_{Y0} = V_{Z0} = 0\,. \tag{3.18}$$

3.3. Оценка эффективности стабилизации КА частичной закруткой

Решения (3.5), (3.15) и (3.17) позволяют проводить оценку эффективности стабилизации продольной оси частичной закруткой. В практической деятельности используются следующие две оценки эффективности стабилизации [7]:

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{V_{Xk}^2 + V_{Yk}^2}}{\left|\vec{V}_k\right|} \le \overline{\Pi}_1, \qquad \Pi_2 = \frac{\left|\vec{V}_н - \vec{V}_k\right|}{\left|\vec{V}_н\right|} \cdot 100\% \le \overline{\Pi}_2, \quad (3.19)$$

где $\left|\vec{V}_k\right| = \sqrt{V_{Xk}^2 + V_{Yk}^2 + V_{Zk}^2}$ - величина скорости центра масс КА в конце работы тормозной двигательной установки, а $\left|\vec{V}_н\right| = \int_0^T \left|\vec{R}\right| dt = \frac{T}{m}\sqrt{G^2 + 2gP\cos\beta + P^2}$ - номинальное значение конечной скорости центра масс КА, вычисляемое через импульс равнодействующей от сил реактивной тяги и тяжести при отсутствии нутационных колебаний. Первая оценка (3.19) характеризует угловую ошибку Π_1 в выдаче тормозного импульса, а вторая – относительную ошибку Π_2 по величине в приращении скорости центра масс. При этом значения ошибок Π_1 и Π_2 в оценках (3.19) сравниваются с их некоторыми допустимыми величинами $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$, которые определяются требованиями к величине рассеивания точек посадки КА и являются заданными.

Вообще говоря, при более точных расчетах целесообразно определять величину номинальной скорости с учетом переменности массы КА:

$$V_{Xн} = 0, \qquad V_{Yн} = Tg\sin\beta,$$

$$V_{Zн} = -Tg\cos\beta - \frac{P}{m_0}\int_0^T \frac{dt}{1-\alpha t} = -Tg\cos\beta + \frac{P}{\alpha\, m_0}\ln\left|1-\alpha T\right|,$$

$$V_н = \sqrt{\left(Tg \sin \beta\right)^2 + \left(-Tg \cos \beta + \frac{P}{\alpha\, m_0} \ln\left|1 - \alpha T\right|\right)^2}\,. \qquad (3.20)$$

В заключение приведем результаты численных расчетов для некоторой гипотетической области проектных параметров (рис. 13), из которой выделено подмножество P^* (рис. 14, 15). Проведен расчет (рис. 14) максимальных значений углов нутации по формулам (2.54); выделены значения, соответствующие точкам подмножества P^* и оптимальным величинам Δ_A^*, Δ_C^*.

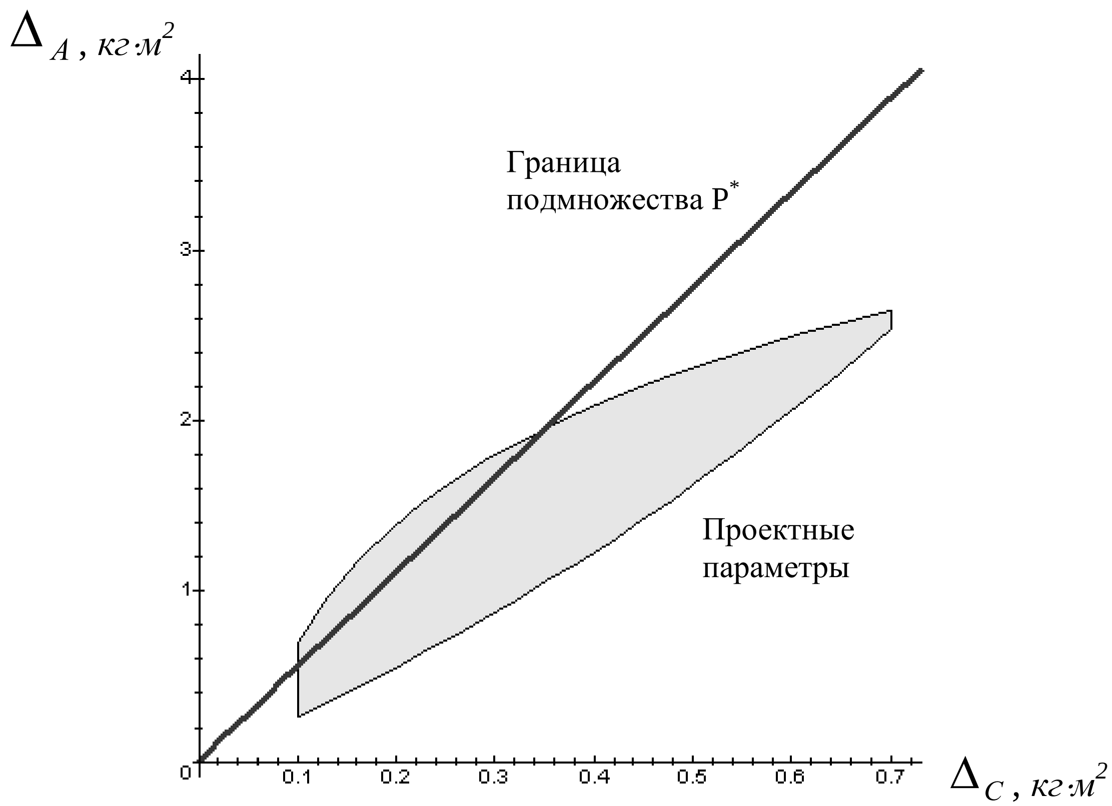


Рис. 13. *Область возможных проектных параметров*

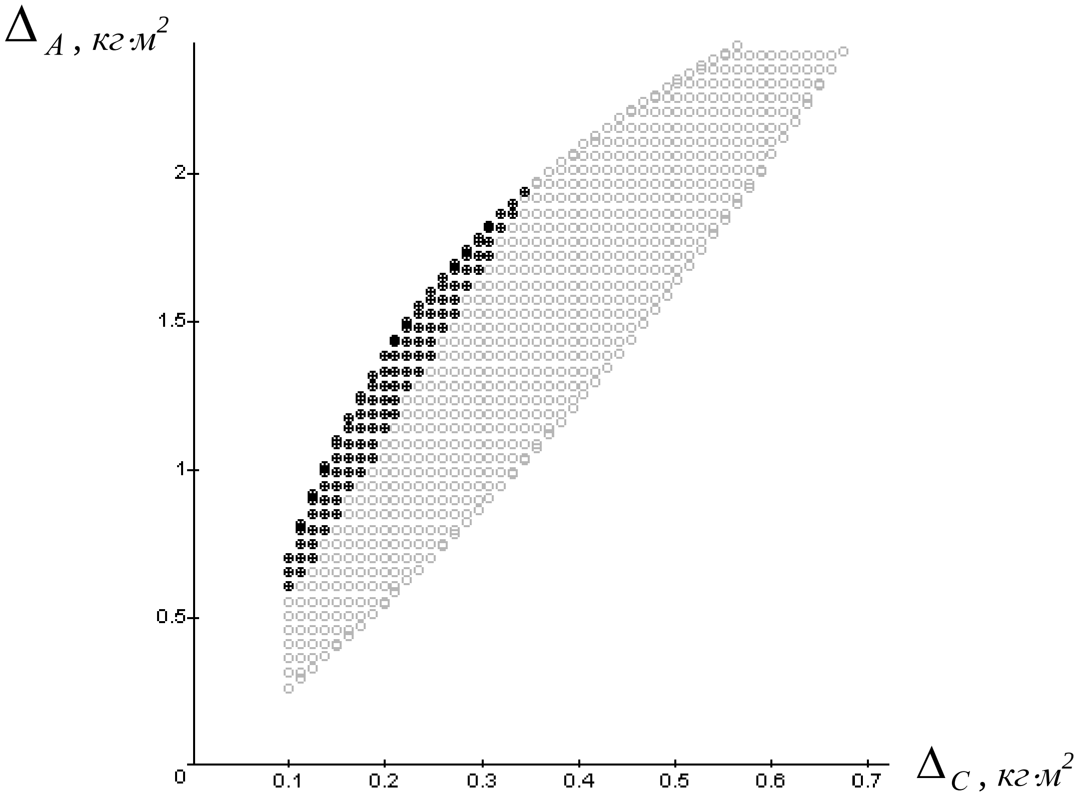


Рис. 14. *Подмножество* P* *в пространстве проектных параметров*

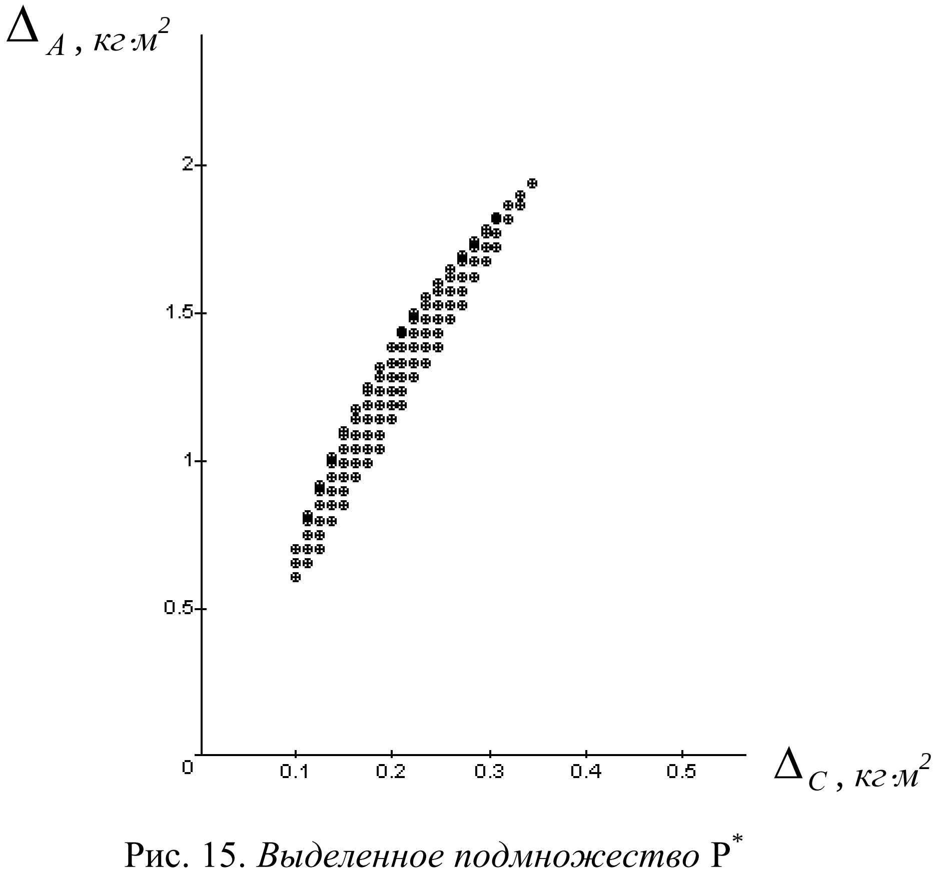


Рис. 15. *Выделенное подмножество* P*

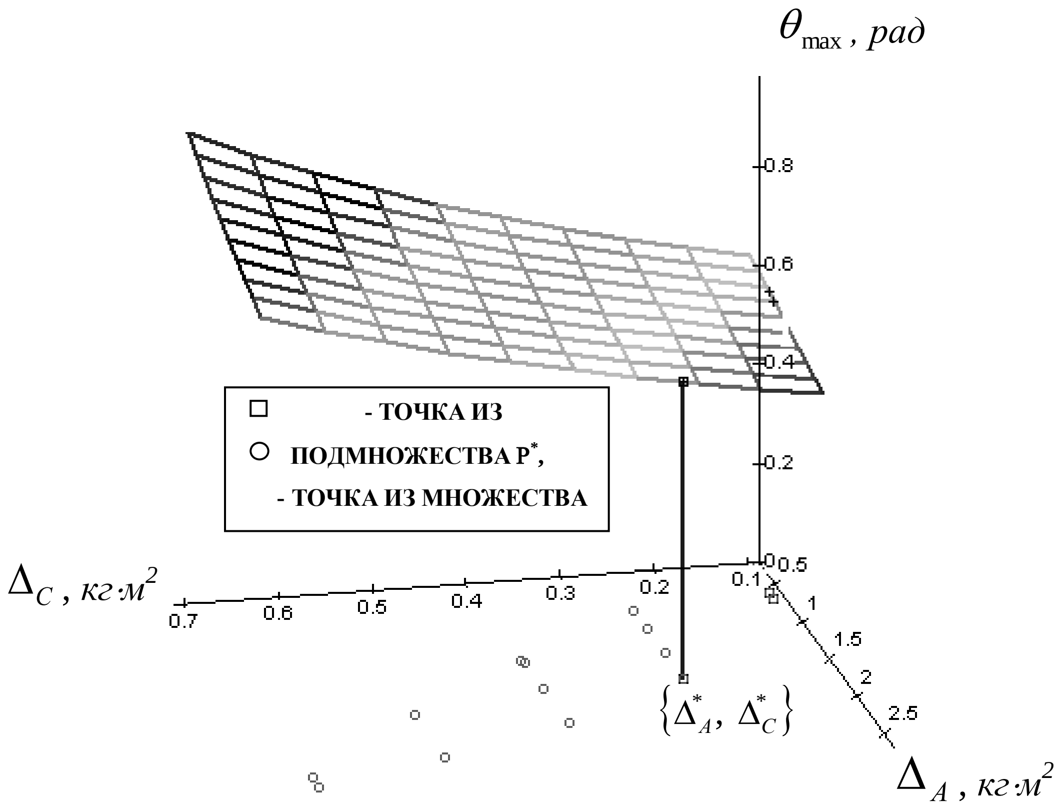


Рис.16. *Максимальные значения угла нутации и оптимальные величины* $\{\Delta_A^*,\ \Delta_C^*\}$

Указанные расчеты были проведены при следующих начальных условиях движения и инерционно-массовых параметрах КА:

Параметры оптимальной стабилизации Таблица 1

Начальные условия движения:	*Инерционно-массовые параметры КА:*
$\psi_0 = \gamma_0 = 0{,}1$ *рад*, $\beta = \pi/4$ *рад*,	$A_1 = 2{,}5$ *кг·м²*, $A_2 = 2{,}5$ *кг·м²*,
$r_0 = 0$ *рад/с*, $\sigma_0 = 20$ *рад/с*,	$C_1 = 0{,}9$ *кг·м²*, $C_2 = 0{,}3$ *кг·м²*,
$L_0 = 1{,}1$ *рад/с*, $s_0 = 0$ *рад*, $T = 25$ *с*,	$m_0 = 65$ *кг*, $m_k = 50$ *кг*, $m = 57$ *кг*, $P = 1400$ *Н*.

Для параметров (табл. 1) также были проведены расчеты значений ошибок Π_1 и Π_2 в точках области проектных параметров и подмножества P^*. На рисунках (рис. 17, 18) представлены результаты, полученные с помощью аналитических зависимостей (3.5), (3.15) и (3.17). Результаты расчетов значений ошибок Π_1 и Π_2, полученные путем численного интегрирования полных систем дифференциальных уравнений (2.33), (2.41) и (3.2), представлены на рис. 19 и 20, при этом для определения номинальной скорости была применена формула (3.20).

На рисунках встречаются следующие графические обозначения:

○ - точки из пространства проектных параметров;

□ - точка из подмножества P^*;

⊕ - значение соответствующей ошибки, вычисленное для "оптимальной" точки.

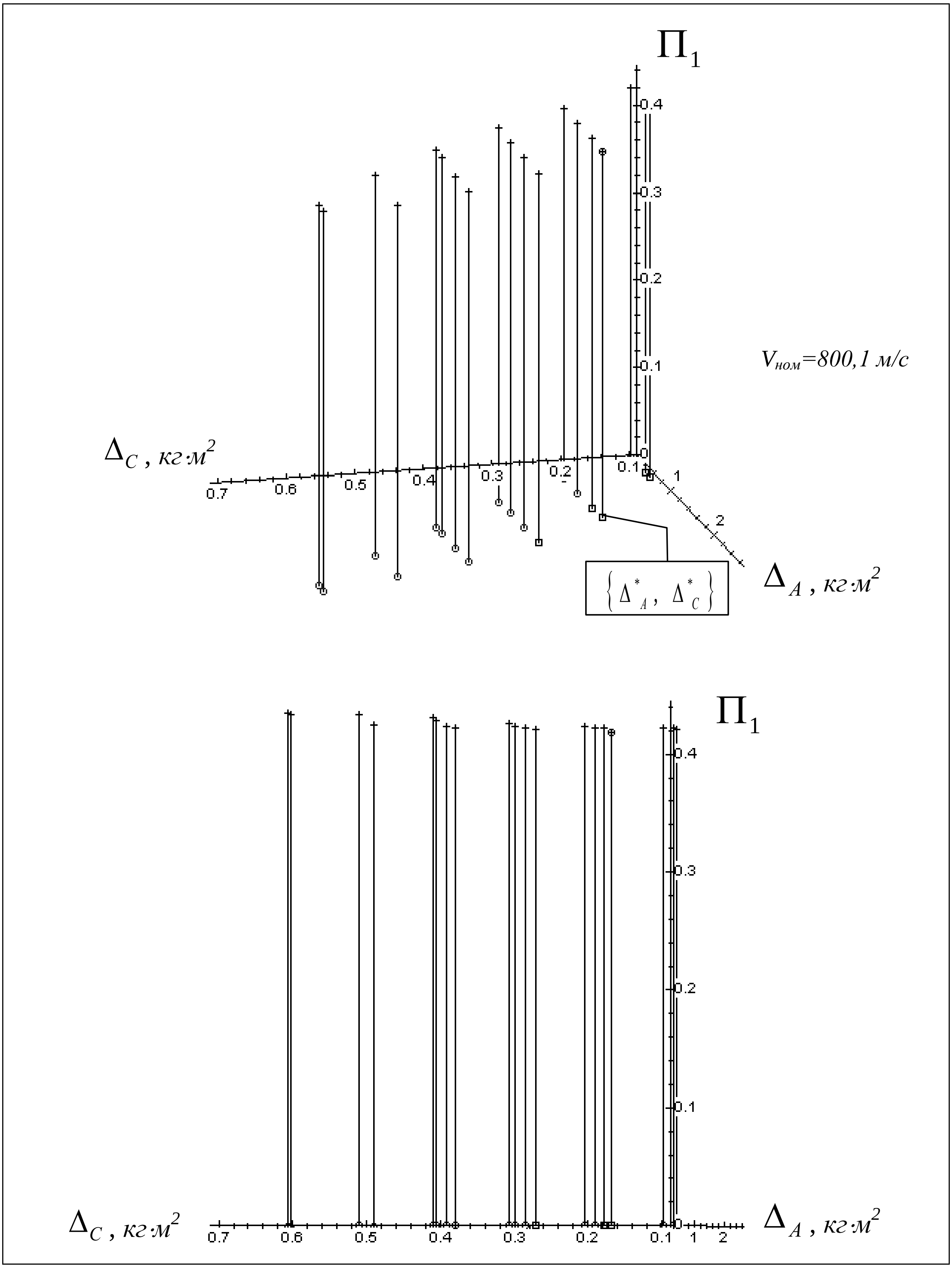


Рис. 17. *Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса*

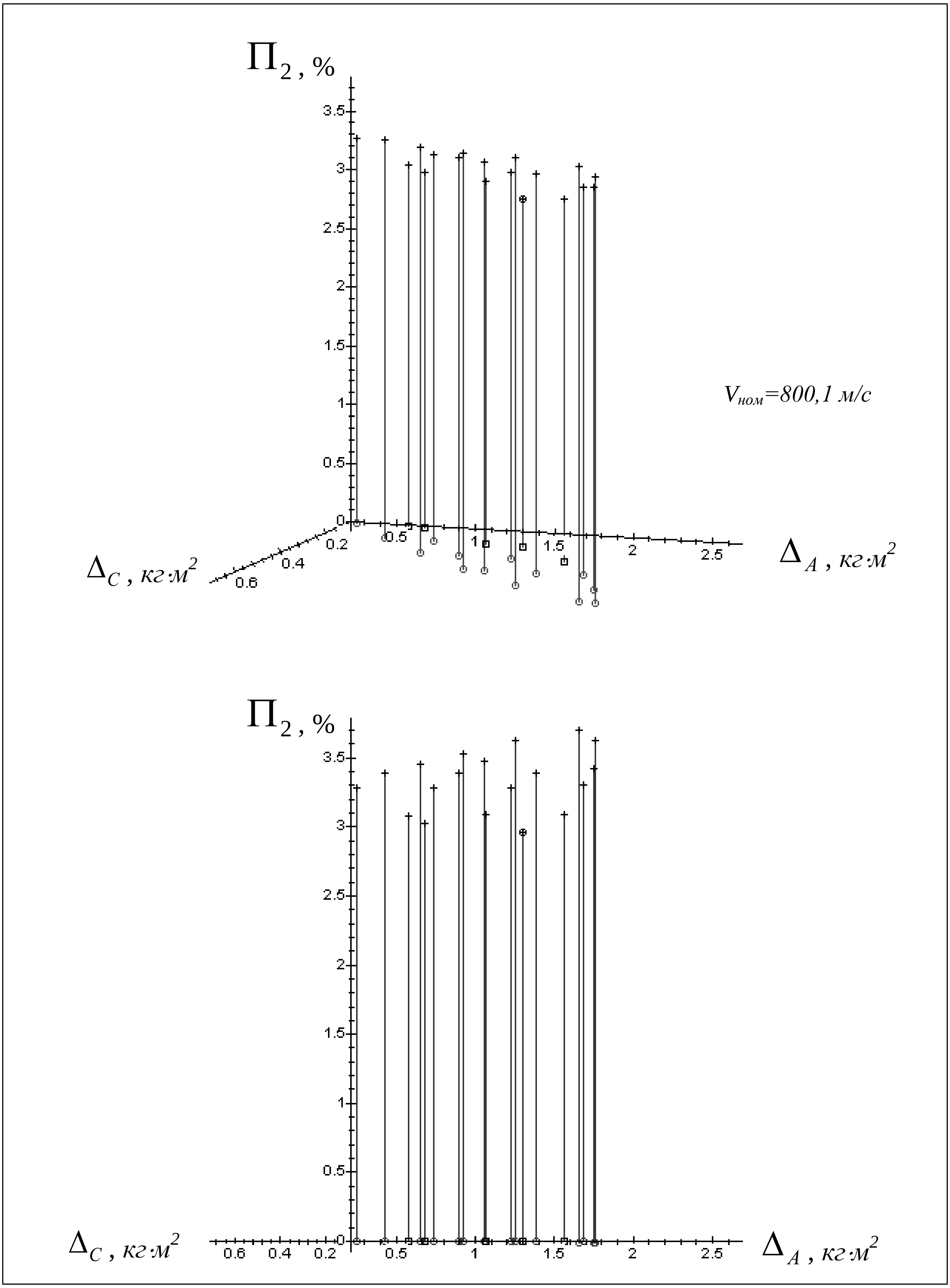


Рис. 18. *Значения относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине*

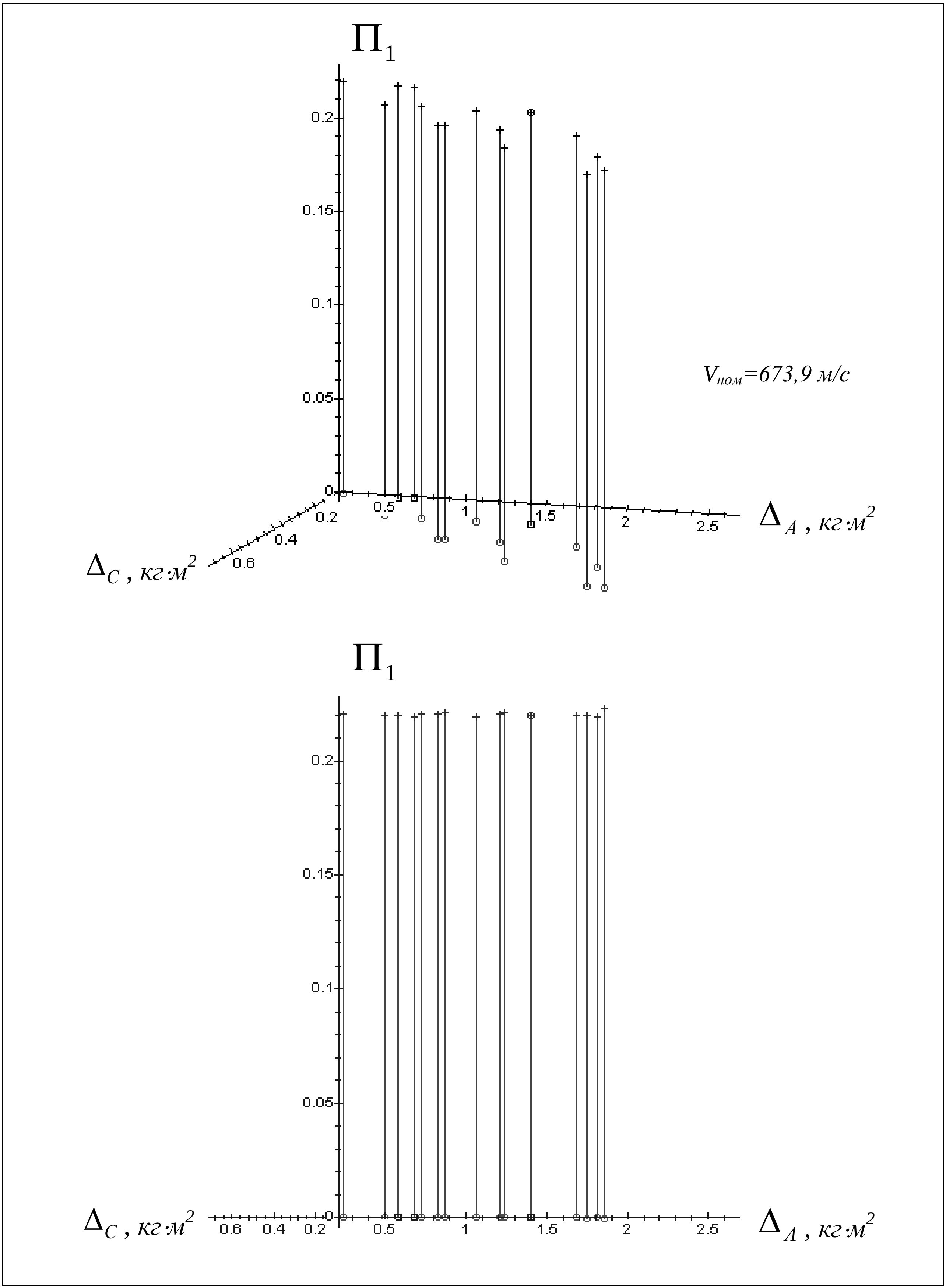


Рис. 19. *Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса при численном интегрировании*

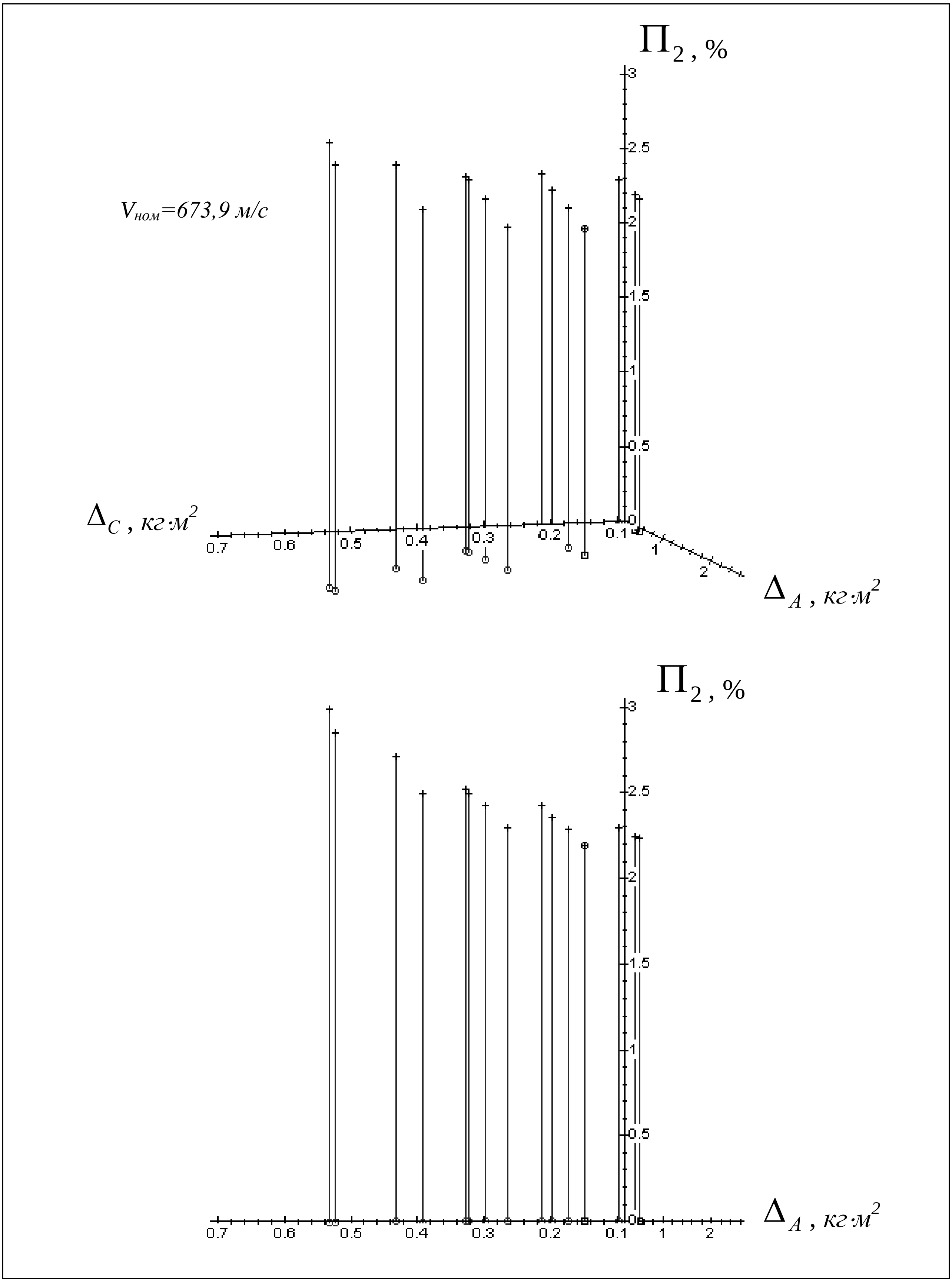


Рис. 20. *Значения относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине при численном интегрировании*

Из расчетов следует, что значения угловой ошибки Π_1 и ошибки по величине Π_2 в выдаче тормозного импульса завышены примерно в *1,5-2* раза при расчетах по аналитическим зависимостям по сравнению с результатами численного интегрирования полных уравнений. Это завышение гарантирует получение на практике меньших ошибок, по сравнению со значениями, следующими из аналитических зависимостей.

Видно также, что величины угловых ошибок, вычисленные в оптимальной точке $\left\{\Delta_A^*,\ \Delta_C^*\right\}$, не являются наименьшими. Это объясняется тем, что угловая ошибка существенно зависит от длительности работы тормозной двигательной установки. На рис.21 представлены зависимости угловых ошибок от длительности работы ТДУ для некоторых точек пространства проектных параметров, а жирной линией изображена соответствующая зависимость для оптимальной точки $\left\{\Delta_A^*,\ \Delta_C^*\right\}$. Расчет проводился для моментов времени, начиная с *t=0,1 с*, так как в начальный момент времени угловая ошибка не определена.

Оптимальность точки $\left\{\Delta_A^*,\ \Delta_C^*\right\}$ в данном случае заключается в том, что при прочих равных начальных условиях движения и инерционно-массовых параметрах КА наблюдается самая малая амплитуда и самое быстрое затухание нутационных колебаний (рис. 22) и, как следствие, самое быстрое затухание колебаний значений угловой ошибки (рис. 21), при этом ошибка по величине всегда принимает свое наименьшее значение (рис. 23).

Из приведенных рассуждений следует, что из-за колебаний величины угловой ошибки необходимо обращать внимание не столько на значение, сколько на скорость ее изменения, выбирая точку пространства проектных параметров с наиболее быстрым затуханием амплитуды колебаний. При этом всегда будет наблюдаться соответствие этой оптимальной точки с наименьшим значением ошибки в выдаче тормозного импульса по величине, т.е. вторая оценка (3.19) является ведомой.

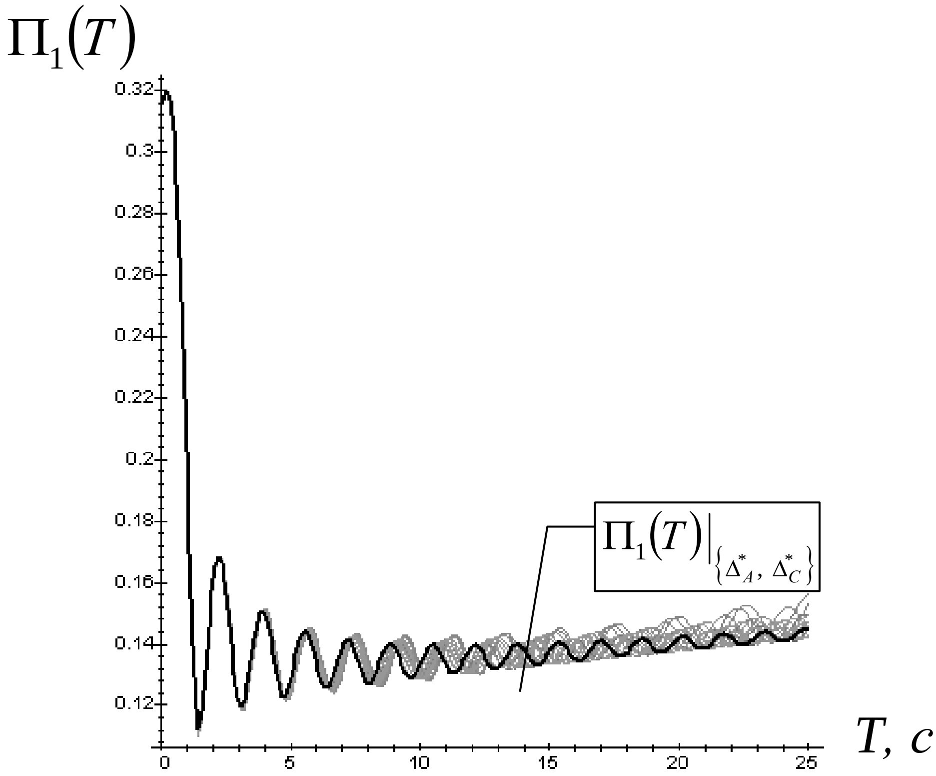


Рис. 21. *Зависимости “угловых” ошибок от длительности работы ТДУ*

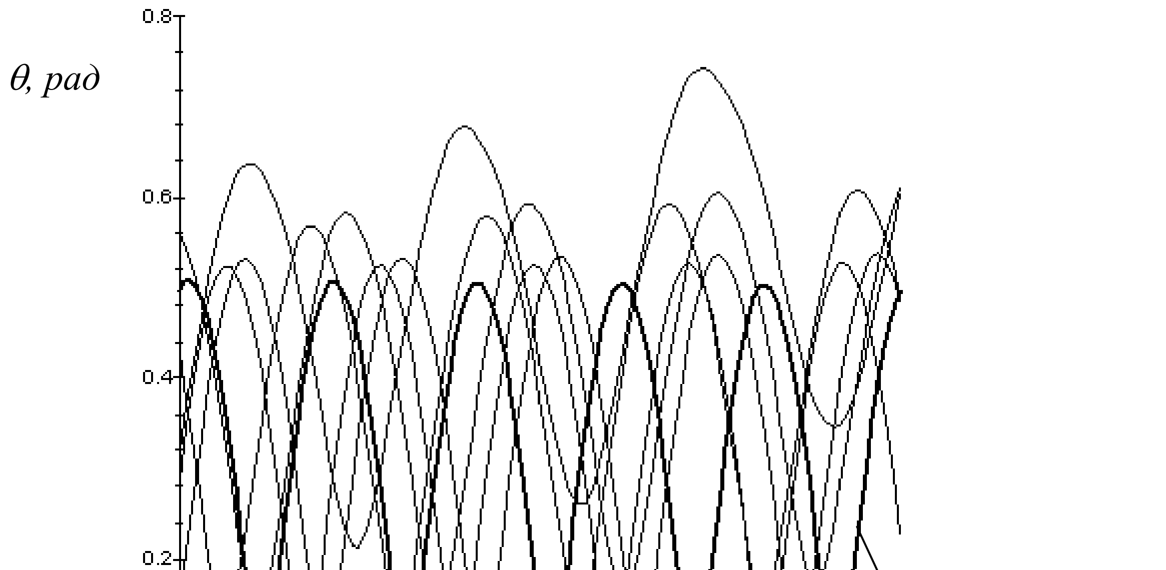


Рис. 22. *Зависимости угла нутации от времени, полученные для точек из пространства проектных параметров и оптимальной точки* $\{\Delta_A^*,\ \Delta_C^*\}$

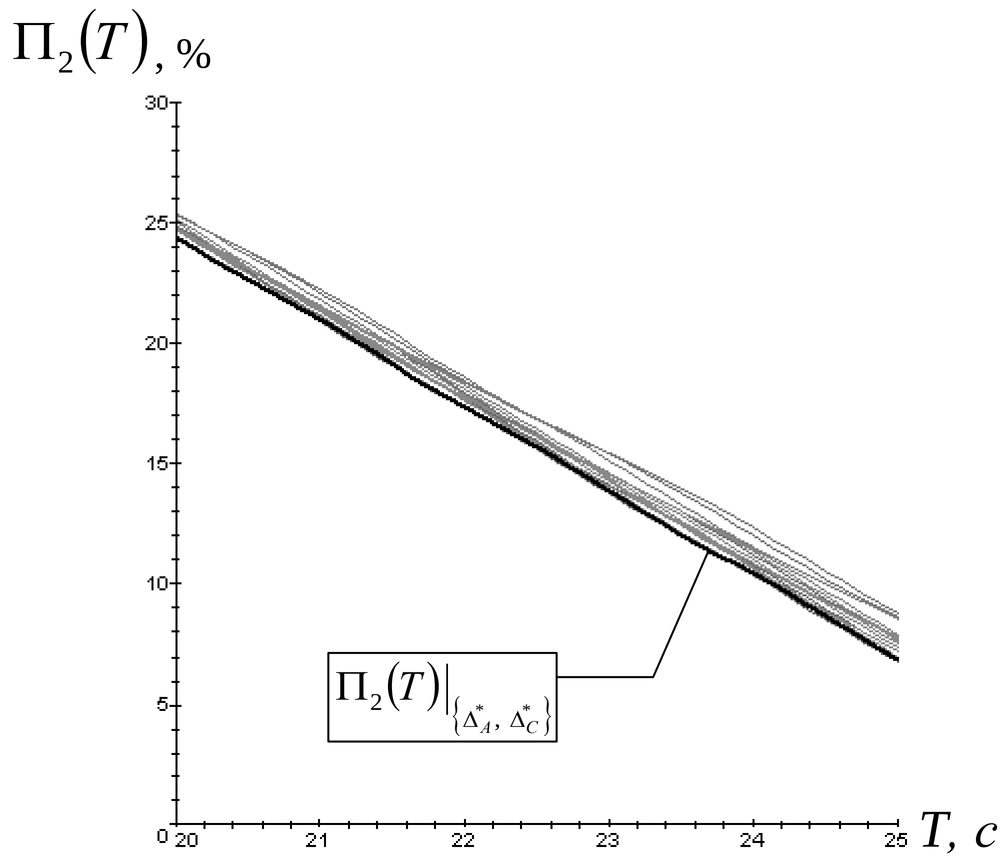


Рис. 23. *Значения относительных ошибок “по величине” в зависимости от длительности работы ТДУ*

Отметим, что приведенные выше расчеты соответствуют, в определенном смысле, “хорошей” или оптимальной стабилизации КА частичной закруткой, при которой наблюдаются небольшие значения угловой ошибки $\prod_1$ и ошибки по величине $\prod_2$. Для реализации оптимальной стабилизации были приняты большая скорость закрутки и малые начальные отклонения по угловым скоростям и углам ориентации (табл. 1).

Приведем еще два расчета указанных параметров движения и значений ошибок: 1) рис. 24-27 - для случая “удовлетворительной” стабилизации, соответствующего малой скорости закрутки и малым начальным отклонениям по угловым скоростям и углам ориентации (табл. 2);

2) рис. 28-31 - для случая “плохой” стабилизации, реализующегося при малой скорости закрутки и больших начальных отклонениях по угловым скоростям и углам ориентации (табл. 3).

Параметры "удовлетворительной" стабилизации Таблица 2

Начальные условия движения:	*Инерционно-массовые параметры КА:*
$\psi_0 = \gamma_0 = 0{,}11$ *рад*, $\beta = \pi/4$ *рад*,	$A_1 = 2{,}5$ *кг·м*^{2}, $A_2 = 2{,}5$ *кг·м*^{2},
$r_0 = 0$ *рад/с*, $\sigma_0 = 10$ *рад/с*,	$C_1 = 0{,}9$ *кг·м*^{2}, $C_2 = 0{,}3$ *кг·м*^{2},
$L_0 = 0{,}5$ *рад/с*, $s_0 = 0$ *рад*, $T = 20$ *с*,	$m_0=65$ *кг*, $m_k=50$ *кг*, $m=57$ *кг*, $P=1400$ *Н*.

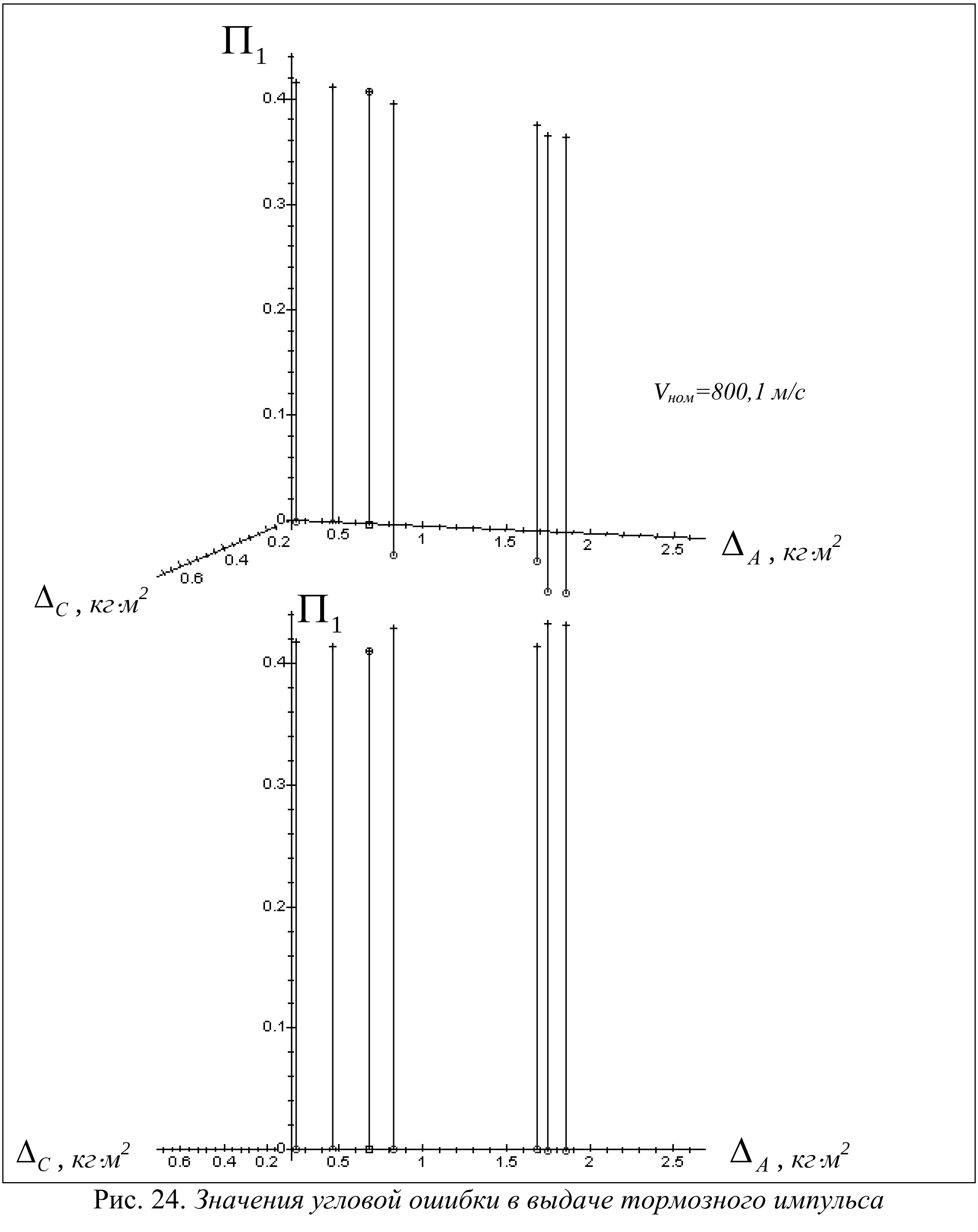


Рис. 24. *Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса*

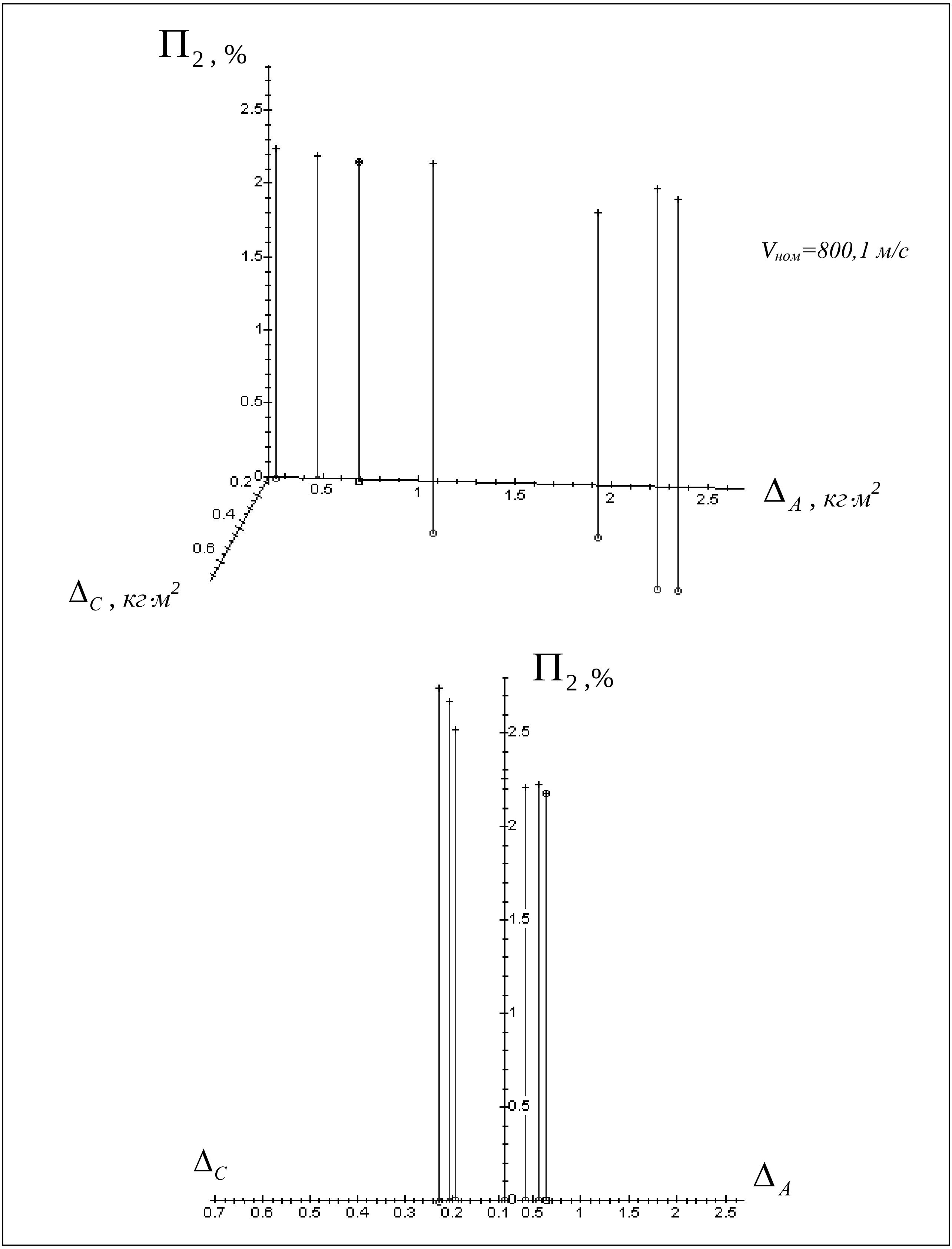


Рис. 25. *Значения относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине*

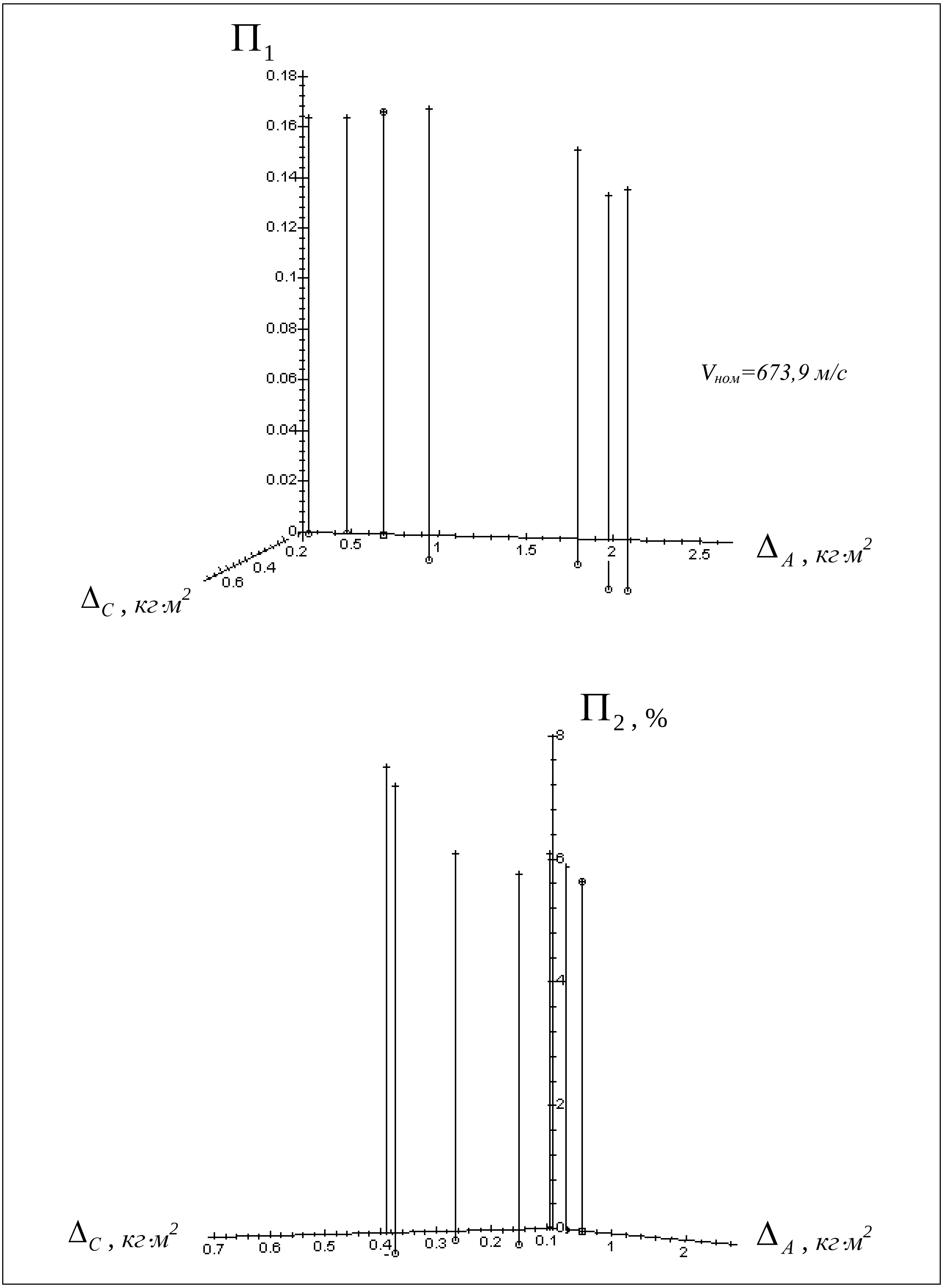


Рис. 26. *Значения “угловой” ошибки и ошибки “по величине” при численном интегрировании*

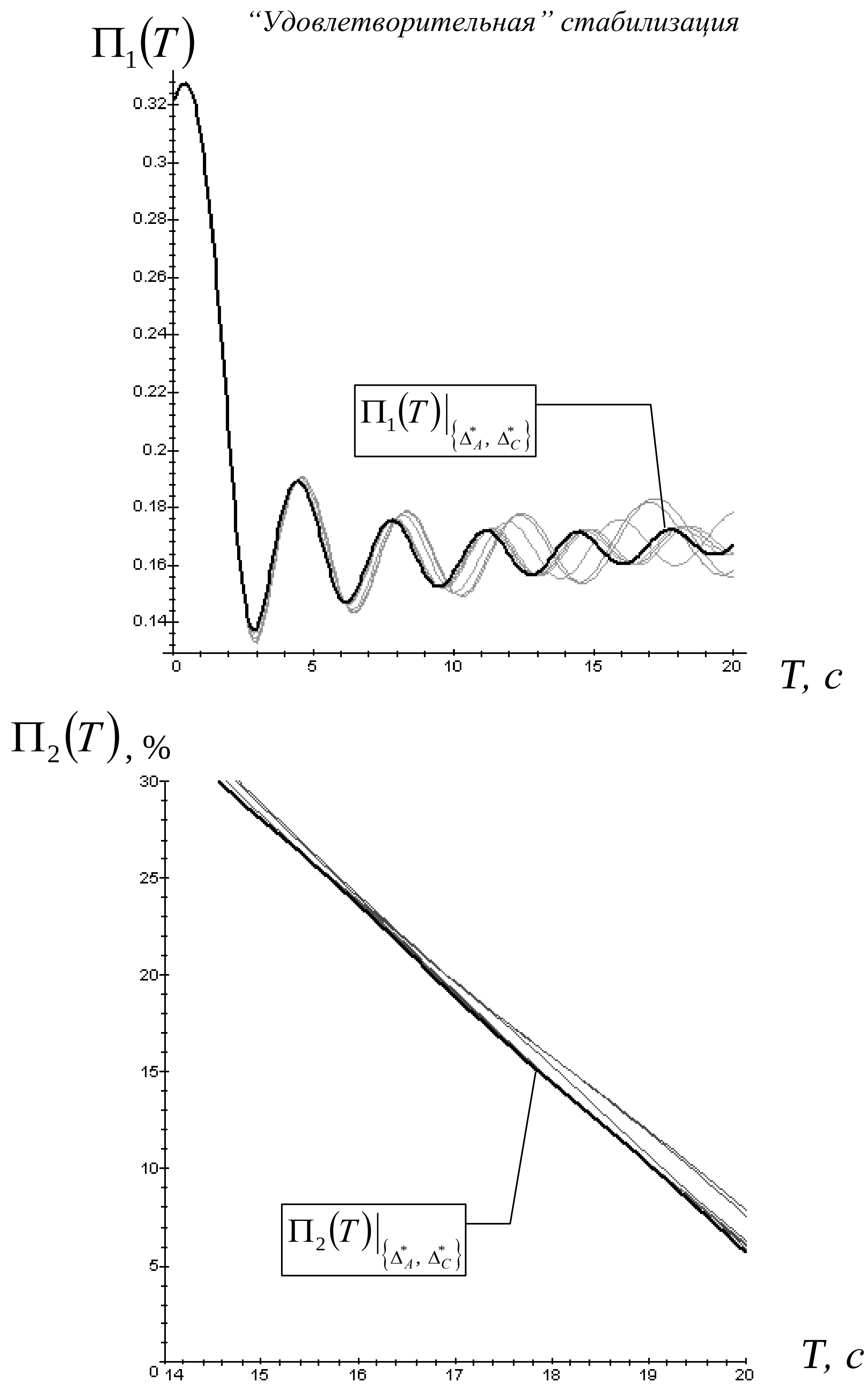


Рис. 27. *Зависимости “угловых” ошибок и относительных ошибок “по величине” от длительности работы ТДУ*

Параметры “плохой” стабилизации Таблица 3

Начальные условия движения:	*Инерционно-массовые параметры КА:*
$\psi_0 = \gamma_0 = 0{,}81$ *рад*, $\beta = \pi/4$ *рад*,	$A_1 = 2{,}5$ *кг·м*^{2}, $A_2 = 2{,}5$ *кг·м*^{2},
$r_0 = 0$ *рад/с*, $\sigma_0 = 10$ *рад/с*,	$C_1 = 0{,}9$ *кг·м*^{2}, $C_2 = 0{,}3$ *кг·м*^{2},
$L_0 = 1{,}5$ *рад/с*, $s_0 = 0$ *рад*, $T = 20$ *с*,	$m_0 = 65$ *кг*, $m_k = 50$ *кг*, $m = 57$ *кг*, $P = 1400$ *Н*.

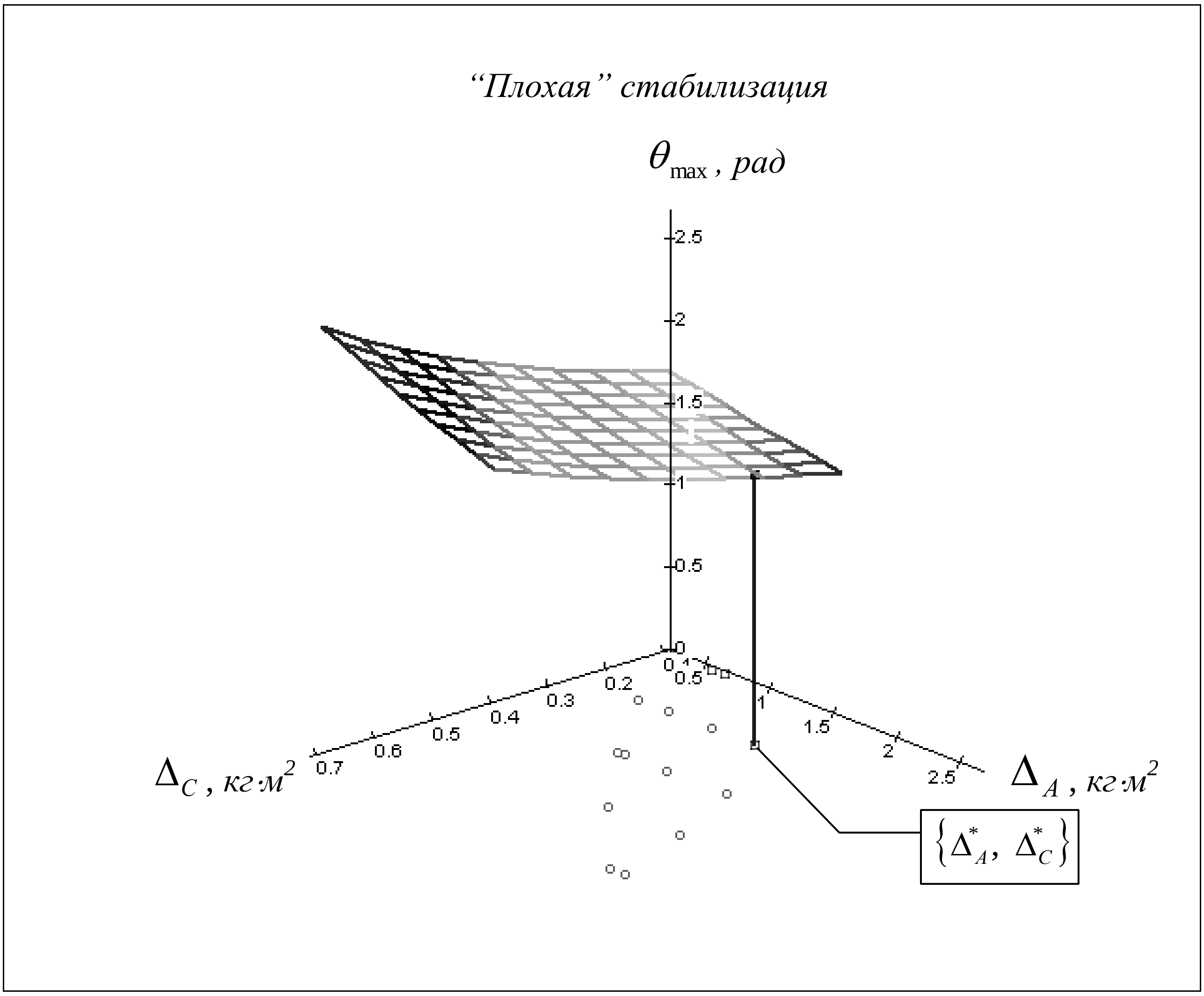


Рис. 28. *Максимальные значения угла нутации и оптимальные величины* $\{\Delta_A^*,\ \Delta_C^*\}$

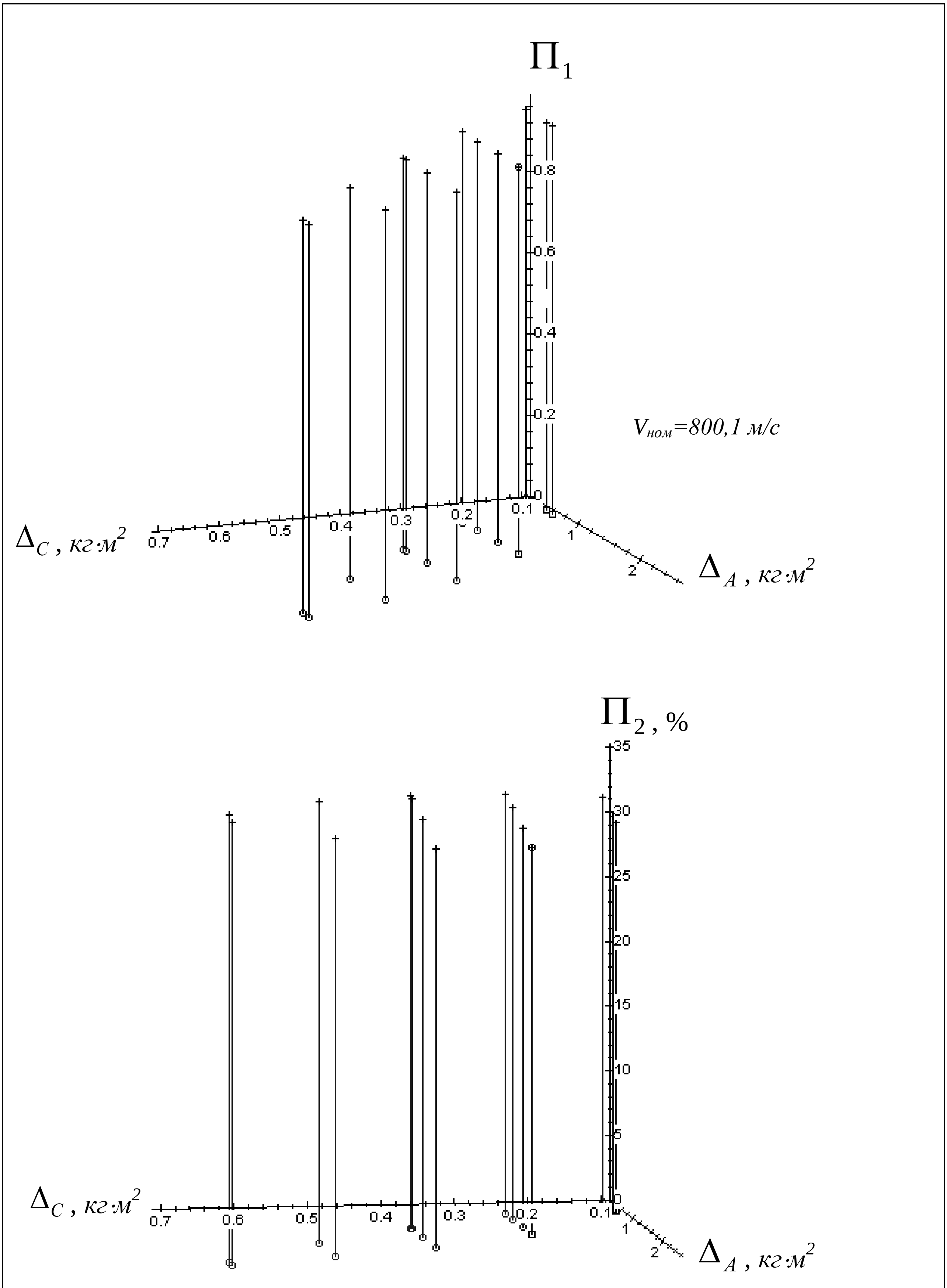


Рис. 29. *Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса и относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине*

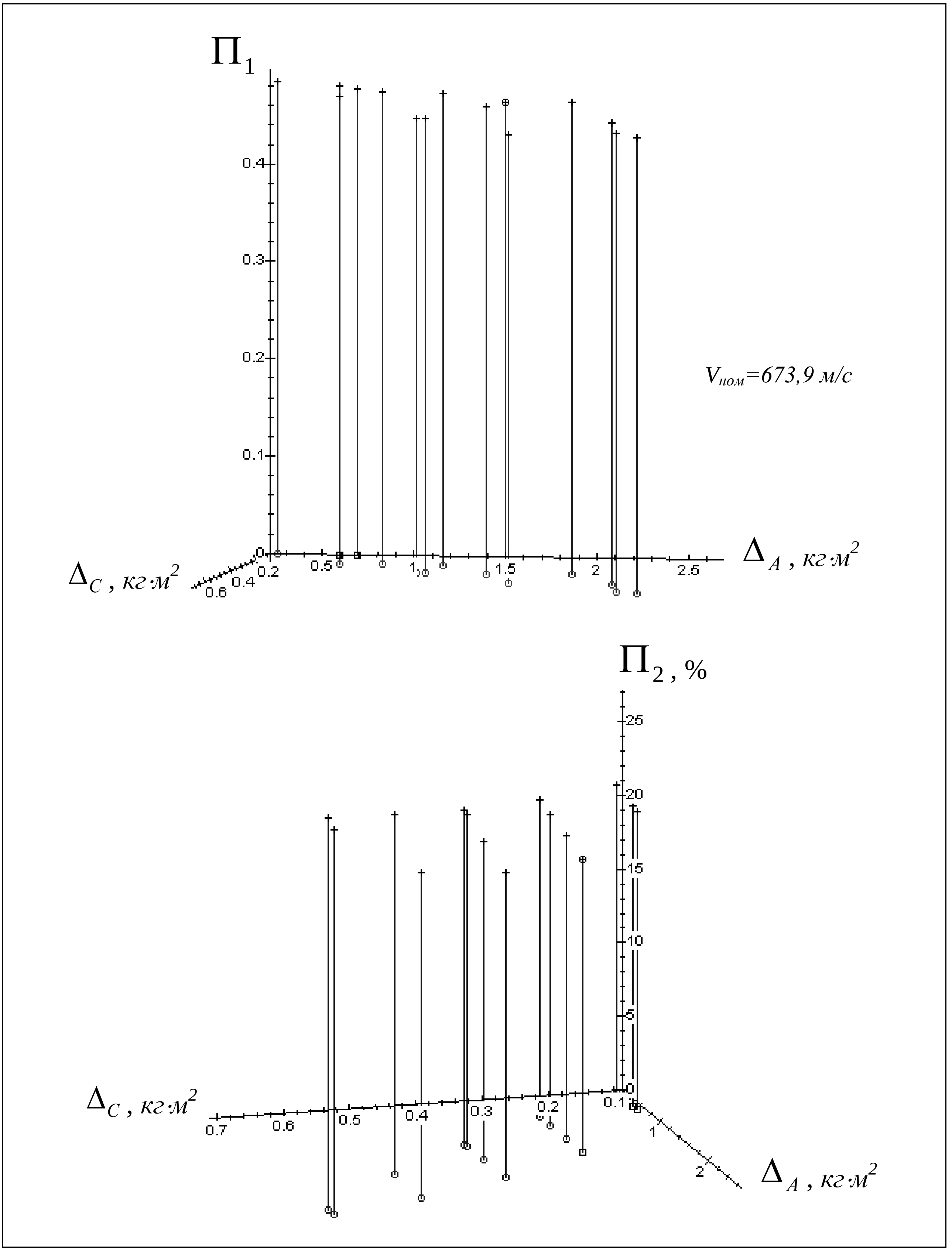


Рис. 30. *Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса и относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине при численном интегрировании*

“Плохая” стабилизация

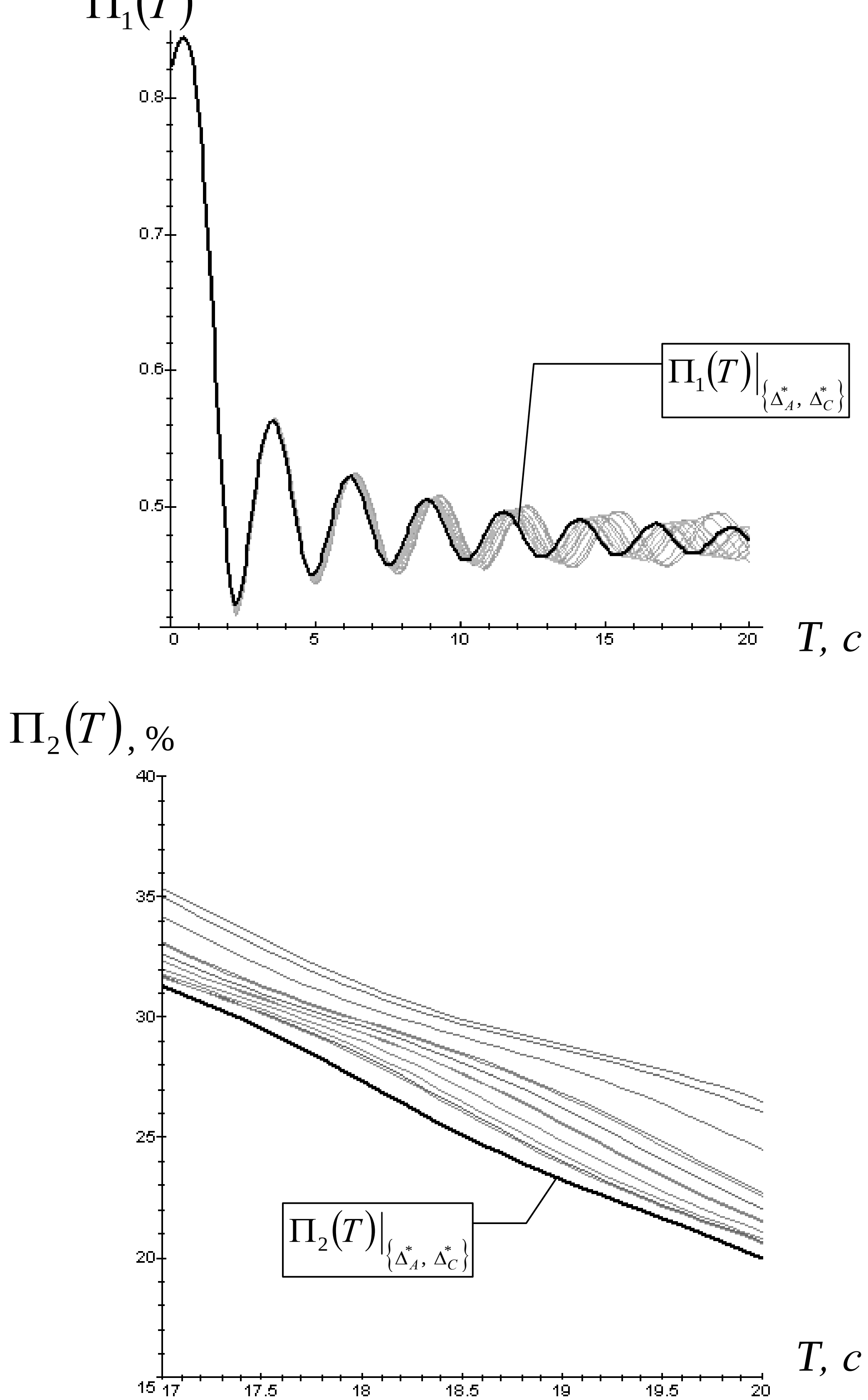


Рис. 31. *Зависимости “угловых” ошибок и ошибок “по величине” от длительности работы ТДУ*

Расчеты, во-первых, подтвердили тот вполне очевидный факт, что чем больше скорость закрутки, тем меньше угловая ошибка и ошибка по величине выдачи тормозного импульса. Во-вторых, показано, что из пространства проектных параметров следует выбирать точку $\left\{\Delta_A^*,\ \Delta_C^*\right\}$, которая оказывается наилучшей, так как ей соответствует самое быстрое затухание и самая малая амплитуда нутационных колебаний [3], а также наименьшие значения ошибок “по углу” и “по величине”.

Таким образом, получены аналитические зависимости, позволяющие оценивать эффективность стабилизации КА с двойным вращением частичной закруткой и наглядно характеризовать качественную картину движения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрена динамика движения КА с двойным вращением при реализации активных маневров, связанных с межорбитальными переходами (на примере перехода на орбиту спуска). Проиллюстрировано решение ряда сопутствующих задач, связанных с анализом пространственного и траекторного движения КА, а также определения эффективности частичной закрутки.

Изучены следующие важные аспекты:

1. Моделирование и построение уравнений движения КА переменного состава.

2. Определение аналитических зависимостей для движения КА.

3. Получение условий уменьшения амплитуды нутационных колебаний соосных КА переменной массы.

4. Проведение оценки эффективности стабилизации частичной закруткой КА с двойным вращением.

Описанные в пособии подходы позволяют проводить исследование движения КА с двойным вращением при стабилизации частичной закруткой, а также осуществлять выбор начальных условий движения и инерционно-массовых параметров подобных аппаратов, обеспечивающих реализацию тех или иных режимов движения.

Пособие предназначено для научно-методического сопровождения курса «Динамика движения космических аппаратов переменного состава», читаемого магистрантам СГАУ, обучающимся по направлению 161100.68 «Системы управления движением и навигация». Также пособие будет полезно магистрантам, обучающимся по смежным техническим и естественнонаучным направлениям подготовки (в рамках УГС 01 «Физико-математические науки» и 16 «Авиационная и ракетно-космическая техника»).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аникеев Г. И.* Нестационарные почти периодические колебания роторов. М.: Наука, 1979. 136 с.
2. *Асланов В. С., Дорошин А. В.* Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении //Космические исследования. Т. 40. №2. 2002 г.
3. *Асланов В. С., Дорошин А. В., Круглов Г. Е.* Движение соосных тел переменного состава на активном участке спуска // Космические исследования. Т.43. №3, 2005. С.224-232.
4. *Асланов В. С., Дорошин А. В.* Движение системы соосных тел переменного состава. // Прикладная математика и механика. Т.68. Вып.6. 2004г.
5. *Асланов В. С., Дорошин А. В.* Стабилизация космического аппарата как системы соосных тел при ориентированном входе в атмосферу. // XXIV академические чтения по космонавтике. Тезисы докладов. М.: "Война и мир", 2000. С. 110-111.
6. *Асланов В. С., Дорошин А.В.* О двух случаях движения неуравновешенного гиростата. // Известия Академии Наук. Серия: Механика твердого тела, №4, 2006, с.42-55.
7. *Асланов В. С., Дорошин А.В.* Влияние возмущений на угловое движение КА на активном участке спуска // Космические исследования. Т.46. №2, 2008. С. 168-173.
8. *Асланов В. С., Тимбай И. А.* Некоторые задачи динамики неуправляемого спуска КА в атмосфере. // Космич. исслед. 1995.Т. 33. № 6. С. 639-645.
9. *Алексеев А.В., Дорошин А. В.* Движение системы соосных тел с медленно вращающимися роторами // Сборник трудов XII

Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2006 г. С.9-12.

10. *Алексеев А.В., Дорошин А.В.* Приведение спутника-гиростата с полостью с жидкостью к системам твердых тел с вязким трением // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». Вып.9. 2007. М.: Машиностроение. С. 26-33.

11. *Аншаков Г.П. Асланов В.С. Балакин В.Л. Квашин А.С. Круглов Г.Е. Юдинцев В.В. Дорошин А.В., Сверчков А.А.* Динамические процессы в ракетно-космических системах // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. Самара: СГАУ, №1, 2003 г.

12. *Бейнум П. М., Фуксел П. Дж., Мэкисон Д. Л.* Движение и устойчивость спутника с двойным вращением, снабженного демпферами нутации. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 59-78.

13. *Белецкий В. В., Новикова Е. Т.* О пространственном движении связки двух тел на орбите. // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. №5, С. 23-28.

14. *Белецкий В. В., Новикова Е. Т.* Об относительном движении связки двух тел на орбите. // Космич. исслед. 1969. Т.7. № 3. С. 377-384.

15. *Бухгольц Н. Н.*, Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972. Ч. 2. 332 с.

16. *Виницкий А. М.* Ракетные двигатели на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1973. 347 с.

17. *Виницкий А. М., Волков В. Т., Волковицкий И. Г., Холодилов С. В.* Конструкция и отработка РДТТ. М.: Машиностроение, 1980. 231 с.

18. *Виньерон Ф. Р.* Об устойчивости спутника с двойным вращением на круговой орбите. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 92-100.

19. *Виньерон Ф. Р.* Об устойчивости спутника с двойным вращением, снабженного двумя демпферами. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 79-91.

20. *Ганиев Р. Ф., Кононенко В.О*. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.

21. *Дорошин А. В.* Движение спускаемого аппарата с вращающимся стабилизирующим блоком. // Сборник трудов X Всероссийского научн.-тех. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самарский гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2002. С. 77-80.

22. *Дорошин А. В*. Эволюции прецессионного движения неуравновешенных гиростатов переменного состава // Прикладная математика и механика. Т.72. Вып.3. 2008. С.385-398.

23. *Дорошин А. В.* Моделирование движения спускаемого аппарата с частичной закруткой как системы соосных тел с упругой осью. // Сборник трудов IX Всероссийского научн.-тех. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самарский гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2000. С. 64-67.

24. *Дорошин А. В*. Стабилизация спускаемого аппарата с двойным вращением при наличии малой динамической асимметрии. // Ракетно-космическая техника. Научно-технический сборник. Серия XII. Вып. 1. “Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем”. Самара: ВКБ РКК “Энергия”, 2001. С. 133-150.

25. *Doroshin A.V.* Phase Space research of One Non-autonomous Dynamic System // Mathematical Methods and Computational Techniques in Research and Education. Proceedings of the 3rd WSEAS/IASME International Conference on DYNAMICAL SYSTEM and CONTROL. Arcachon, France, 2007, pp.161-165.

26. *Doroshin A.V.* Synthesis Of Attitude Motion Of Variable Mass Coaxial Bodies// WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS and CONTROL, Issue 1, Volume 3, January 2008 (ISSN: 1991-8763). Pp. 50-61.
27. *Doroshin A.V.* Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system // International Journal of Non-Linear Mechanics 45 (2010) 193–205.
28. *Doroshin A.V.* Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 16, Issue 8, August 2011, Pages 3188-3202.
29. *Doroshin A.V.* Heteroclinic dynamics and attitude motion chaotization of coaxial bodies and dual-spin spacecraft.// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 17, Issue 3, March 2012, Pages 1460-1474.
30. *Енохович А. С.* Справочник по физике и технике. М.: Просвещение, 1989. 224 с.
31. *Заболотнов Ю. М.* Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. I. // Космич. исслед. Т.31. № 6. 1993. С. 39-50.
32. *Заболотнов, Ю.М., Любимов В.В.* Вторичный резонансный эффект при движении КА в атмосфере // Космические исследования. - 1998.- Т. 36, № 2.-С.206-214.
33. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во ленинградского ун-та, 1983. 344 с.
34. *Каменков Е. Ф.* Маневрирование спускаемых аппаратов. М.: Машиностроение, 1983. 183 с.
35. *Колесников Н. Н.* Регулярная прецессия свободного гиростата. // Прикладная математика и механика. Т.30. № 3. 1966. С. 589-593.
36. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных и инженерных работников. М.: Наука, 1984. 832 с.

37. *Космодемьянский А. А.* Курс теоретической механики. Часть II. М.: Просвещение, 1966. 398 с.
38. *Крементуло В. В.* О стабилизации вращательного движения твердого тела при помощи двух маховиков. // Изв. АН СССР. МТТ. №5. 1974. С. 10-15.
39. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука, 1977. 264 с.
40. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Физматлит. 2001. 296 с.
41. *Лайкинс П. У., Цэн Гань-тай, Мингори Д. Л.* Устойчивые предельные циклы спутников с двойным вращением, обусловленные нелинейным демпфированием. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 101-122.
42. *Лиска Д. Дж.* Простое описание совместного нутационно - прецессионного движения в системе из n соосных вращающихся тел. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 9-28.
43. *Мак-Интайр Дж., Джанелли М.* О качании оси крепления составляющих тел спутника с двойным вращением. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 39-58.
44. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
45. *Миеле А.* Механика полета. М.: Наука, 1965. Т. 1. 407 с.
46. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
47. *Набиуллин М. К.* Об устойчивости стационарных движений свободного гиростата в осесиммтричных полях тяготения. // Изв. АН СССР. МТТ. №2. 1972. С. 17-26.
48. *Набиуллин М. К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1990. 354 с.

49. *Нейштадт А. И., Пивоваров М. Л.* Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением. // Прикладная математика и механика. 2000. Т.64. № 5.
50. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд. техн.-теорет. лит-ры, 1949. 550 с.
51. *Рожков В. В.* Двигатели ракет на твердом топливе. М.: Воениздат, 1971. 118 с.
52. *Соллогуб А. В., Аншаков Г. П., Данилов В. В.* Космические аппараты систем зондирования поверхности Земли. Под редакцией *Козлова Д.И.* М.: Машиностроение, 1993. 368 с.
53. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая школа, 1988. 184 с.
54. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.*, Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
55. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
56. *Ярошеский В. А*. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. М.: Наука, 1988. 336 с.
57. *Hall C. D*. Resonance capture in axial gyrostat. // J. Astronaut. V.43. №2. 1995. P.127-138.

УДК 531.01; 531.36; 517.9; 537.

Автор-составитель: **Дорошин Антон Владимирович**

Динамика движения космических аппаратов переменного состава: [Электронный ресурс] : Электронное учебное пособие.

Выполнено в рамках электрон. учебно-методического комплекса по курсу «Динамика движения космических аппаратов переменного состава» / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А. В. Дорошин - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Режим доступа: http://fla.ssau.ru/moodle/

Электронное учебное пособие «Динамика движения космических аппаратов переменного состава» предназначено для студентов-магистрантов факультета летательных аппаратов, обучающихся по направлению подготовки магистров 161100 «Системы управления движением и навигация».

Пособие разработано на кафедре космического машиностроения.

Издано в рамках выполнения Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва» на 2009-2018 годы.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1

1. Система переменного состава: определение и характеристики.
2. Инерционно-массовые модели РДТТ.
3. Критерии эффективности гироскопической стабилизации.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №2

1. Общие характерные свойства динамических процессов в системах переменного состава.
2. Геометрия выгорания зарядов РДТТ.
3. Методика оценки эффективности гироскопической стабилизации КА.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ______________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №3

1. Основные положения гипотезы близкодействия Космодемьянского А.А.
2. Аспекты выполнения межорбитальных маневров.
3. Уравнения движения центра масс системы переменного состава.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №4

1. Теорема об изменении кинетического момента системы переменного состава.
2. Характерные особенности процессов горения зарядов РДТТ.
3. Случаи хаотизации движения КА.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №5

1. Общая характеристика «оптимального» прецессионного движения КА переменного состава.
2. Уравнения движения твердого тела переменного состава вокруг полюса.
3. Методика оценки ошибки межорбитального маневра.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ___________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №6

1. Аспекты применения специальных функций Бесселя, Струве, Ангера для описания процессов динамики КА переменного состава.
2. Кинематические параметры углового движения КА.
3. Аспекты геометрического движения центра масс вследствие выгорания топлива.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №7

1. Характеристика использования КА с двойным вращением.
2. Определение ускорения выбранного «неподвижного» полюса КА переменного состава.
3. Критерии эффективности гироскопической стабилизации КА переменного состава.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №8

1. Уравнение Мещерского И.В. динамики точки переменного состава
2. Общие аспекты метода вычисления кривизны фазовой траектории для синтеза «оптимального» прецессионного движения КА переменного состава.
3. Примеры форм зарядов РДТТ.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №9

1. Математическое моделирование динамики систем переменного состава: используемые уравнения и основания для их вывода.
2. Характерные зависимости изменения моментов инерции КА при равномерном (по внутреннему объему) выгорании зарядов РДТТ.
3. Формы фазовых траекторий для апекса продольной оси КА переменного состава.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №10

1. Уравнения пространственного движения твердого тела постоянного состава.
2. Характерные зависимости изменения моментов инерции КА при торцевом выгорании зарядов РДТТ.
3. «Оптимальные» формы фазовых траекторий для апекса продольной оси КА переменного состава.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №11

1. Система переменного состава: определение и характеристики.
2. Инерционно-массовые модели РДТТ.
3. Критерии эффективности гироскопической стабилизации.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ______________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №12

1. Общие характерные свойства динамических процессов в системах переменного состава.
2. Геометрия выгорания зарядов РДТТ.
3. Методика оценки эффективности гироскопической стабилизации КА.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ______________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №13

1. Основные положения гипотезы близкодействия Космодемьянского А.А.
2. Аспекты выполнения межорбитальных маневров.
3. Уравнения движения центра масс системы переменного состава.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №14

1. Теорема об изменении кинетического момента системы переменного состава.
2. Характерные особенности процессов горения зарядов РДТТ.
3. Случаи хаотизации движения КА.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №15

1. Общая характеристика «оптимального» прецессионного движения КА переменного состава.
2. Уравнения движения твердого тела переменного состава вокруг полюса.
3. Методика оценки ошибки межорбитального маневра.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ___________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №16

1. Аспекты применения специальных функций Бесселя, Струве, Ангера для описания процессов динамики КА переменного состава.
2. Кинематические параметры углового движения КА.
3. Аспекты геометрического движения центра масс вследствие выгорания топлива.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №17

1. Характеристика использования КА с двойным вращением.
2. Определение ускорения выбранного «неподвижного» полюса КА переменного состава.
3. Критерии эффективности гироскопической стабилизации КА переменного состава.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ______________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №18

1. Уравнение Мещерского И.В. динамики точки переменного состава
2. Общие аспекты метода вычисления кривизны фазовой траектории для синтеза «оптимального» прецессионного движения КА переменного состава.
3. Примеры форм зарядов РДТТ.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №19

1. Математическое моделирование динамики систем переменного состава: используемые уравнения и основания для их вывода.
2. Характерные зависимости изменения моментов инерции КА при равномерном (по внутреннему объему) выгорании зарядов РДТТ.
3. Формы фазовых траекторий для апекса продольной оси КА переменного состава.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Кафедра космического машиностроения

Курс

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №20

1. Уравнения пространственного движения твердого тела постоянного состава.
2. Характерные зависимости изменения моментов инерции КА при торцевом выгорании зарядов РДТТ.
3. «Оптимальные» формы фазовых траекторий для апекса продольной оси КА переменного состава.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры КМ ____________________________.

Заведующий кафедрой ____/Кирилин А.Н./

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
(СГАУ)

СОГЛАСОВАНО

Управление образовательных программ

_________________/ А.В. Дорошин /

"_____"_________________ 20___ г.

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

______________/ В.Н. Матвеев /

"____" _______________ 20___ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование модуля (дисциплины)

Динамика движения космических аппаратов переменного состава

Цикл, в рамках которого происходит освоение модуля (дисциплины)	М.2		
Часть цикла			
Код учебного плана			

161100.68-2013-О-П-2г

Факультет	летательные аппараты		
Кафедра	космического машиностроения		
Курс	1		
Семестр	10 (А)		
Лекции (СЛ)	36		
Семинарские и практические занятия (СП)	36		
Лабораторные занятия (СЛР)	0	Экзамен	10 (А)
Контроль самостоятельной работы / Индивидуальные занятия (КСР / ИЗ)	0	Зачет	
Самостоятельная работа (СРС)	72		
Всего (Всего с экзаменами)	144		

Наименование стандарта, на основании которого составлена рабочая программа:

161100.68 Системы управления движением и навигация; утв. приказом Минобрнауки от 14.01.10 №28

Соответствие содержания рабочей программы, условий ее реализации, материально-технической и учебно-методической обеспеченности учебного процесса по дисциплине всем требованиям государственных стандартов подтверждаем.

Составители:

к.т.н., доцент Дорошин А.В. ________________________________

(подпись)

Заведующий кафедрой:

д.т.н., профессор Кирилин А.Н. ________________________________

(подпись)

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры

космического машиностроения

Протокол №___ от "____" _____________ 20___ г.

Наличие основной литературы в фондах научно-технической библиотеки (НТБ) подтверждаем:

Директор НТБ ________________ /________________________/

(подпись) (расшифровка подписи)

Согласовано:

Декан ________________ /________________________/

(подпись) (расшифровка подписи)

1 Цели и задачи модуля (дисциплины), требования к уровню освоения содержания

1.1 Перечень развиваемых компетенций

ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-7, ПК-8, ПК-10, ПК-12, ПК-23

1.2 Цели и задачи изучения модуля (дисциплины)

Основная цель дисциплины - сформировать у студентов необходимые компетенции (знания, умения, навыки и активные/деятельностные качества магистра) для моделирования/анализа/синтеза изучаемых процессов в динамической системе "КА переменного состава".

Декомпозиция цели представляет собой следующие составные части:
1.2.1. Освоение прикладных аспектов динамики твердого тела и систем твердых тел постоянного и переменного состава (массы). 1.2.2. Проведение анализа и синтеза динамических процессов и пространственного движения космических аппаратов (КА) переменной мас

сы. 1.2.3. Поиск оптимальных схем инерционно-массовой компоновки КА с ракетными двигателями твердого топлива (РДТТ). 1.2.4. Синтез оптимальных инерционно-массовых схем и выбор зарядов РДТТ. 1.2.5. Моделирование (математическое/имитационное/натурное) ди
намики КА переменной массы.

1.3 Требования к уровню подготовки студента, завершившего изучение данного модуля (дисциплины)

Студенты, завершившие изучение данной дисциплины, должны

знать:
-основные методы и приемы научного исследования в привязке к анализу/синтезу динамики КА переменного состава;
-основные принципы описания процессов, происходящих в динамике КА переменного состава;

уметь:
-осуществлять методологическое обоснование научного исследования;
-составлять адекватные математические модели динамических процессов;
-осуществлять аналитическое и численное моделирование;

владеть:
-необходимыми навыками научного исследования и егорезультатов;
-методами численного моделирования/анализа.

1.4 Связь с предшествующими модулями (дисциплинами)

Освоение материала данного курса предполагает владение базовыми математическими и механическими дисциплинами, включая дифференциальные уравнения, динамику твердого тела, теорию управления, а также навыки программирования в объеме учебного плана сопутствующих бакалавриатов по направленям 161100 "Системы управления движения и навигация" и 160400 "Ракетные комплексы и космонавтика".

1.5 Связь с последующими модулями (дисциплинами)

Материал курса должен помочь магистрантам адаптировать для использования весь арсенал полученных к настоящему моменту знаний в разрезе проведения математического моделирования/анализа/синтеза и численного эксперимента, что, в первую очередь, направлено на эффективную подготовку к написанию магистерской диссертации.

2 Содержание рабочей программы (модуля)

Семестр 1		
СЛ 0,25 36 часов 1 ЗЕТ	Активные 0,333	Вычислительные эксперименты в динамике КА переменного состава: численное интегрирование уравнений пространственного движения КА переменного состава
		Визуализация/анимация динамики движения КА переменного состава
	Интерактивные 0,333	Интегралы Френеля, функции Бесселя, Струве, Вебера и Ангера
		Кинематические параметры в динамике пространственного движения твердых тел и КА
	Традиционные 0,334	Аспекты динамики систем переменного состава: теория близкодействия А.А.Космодемьянского; теорема об изменении кинетического момента системы переменного состава; общие и частные случаи динамики твердого тела переменного состава
		Инерционно-массовые модели ракетных двигателей твердого топлива
		Анализ динамики движения твердого тела и соосных КА переменной массы
		Аспекты хаотизации динамики систем тел переменного состава
СП 0,25 36 часов 1 ЗЕТ	Активные 0,333	Вычислительные эксперименты в динамике КА переменного состава: совместное численное интегрирование уравнений пространственного и траекторного движения КА переменного состава

		Оценка эффективности гироскопической стабилизации соосного КА переменного состава при реализации частичной закрутки
	Интерактивные 0,333	Моделирование динамики КА переменного состава и синтез "оптимальных" зависимостей инерционно-массовых параметров
	Традиционные 0,334	Математическое моделирование, анализ и синтез динамики пространственного движения КА переменного состава: общий случай; частные случаи
СЛР 0 0 часов 0 ЗЕТ	Активные 0	
	Интерактивные 0	
	Традиционные 0	
КСР 0 0 часов 0 ЗЕТ	Активные 0	
	Интерактивные 0	
	Традиционные 0	
СРС 0,5 72 часов 2 ЗЕТ	Активные 0	
	Интерактивные 0,5	Анализ контента интернет-портала издательства ELSEVIER по макротеме "Динамика систем переменного состава"
	Традиционные 0,5	Анализ литературы, написание библтографического обзора, написание рефератов по макротеме "Динамика систем переменного состава"

3 Инновационные методы обучения

1. Использование математических пакетов (Maple, MatLab) для моделирования динамики КА переменного состава.
2. Составление программ на языках высокого уровня, предназначенных для моделирования и визуализации динамических процессов и движения КА переменного состава (в т.ч. с применением технологий OpenGL).
3. Использование в учебном процессе информационных материалов интернет-портала ELSEVIER.

4 Технические средства и материальное обеспечение учебного процесса

Предполагается использование:
-презентационной медиатехники и компьютерных классов кафедры КМ и

межвузовского медиацентра;
-подписки СГАУ к ресурсам издательств ELSEVIER и SPRINGER;
-учебно-лабораторной базы кафедры КМ.

5 Учебно-методическое обеспечение

5.1 Основная литература

1. Динамика движения космических аппаратов переменного состава: [Электронный ресурс] : Электронное учебное пособие.Выполнено в рамках электрон. учебно-методического комплекса по курсу «Динамика движения космических аппаратов переменного состава» / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А. В. Дороши
н - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

2. Оптимальное управление движением [Текст] : [учеб. пособие по группе направлений и специальностей механики] / В. В. Александров, В. Г. Болтянский, С. С. Лемак [и др. ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова]. - М. : Физматлит, 2005. - 374 с. - (Классич

еский университетский учебник / ред. совет: В. А. Садовничий (пред.) и др.). - ISBN 5-9221-0401-2

5.2 Дополнительная литература

1. Летов, Александр Михайлович. Динамика полета и управление [Текст] / А. М. Летов. - М. : Наука, 1969. - 359 с. - 5.00 р., 1.27 р.

2. Математическое моделирование в нелинейной динамике [Электронный ресурс] : [учеб. пособие для вузов по направлениям и специальностям: "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Механика"] / А. В. Дорошин ; Федер. агентство по образованию,
Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Электрон. дан. (1 файл : 3,19 Мбайт). - Самара : Изд-во СГАУ, 2008. - on-line. - Загл. с титул. экрана. - Электрон. версия печ. публикации. - ISBN 978-5-7883-0584-4 : 0.00Параллельные издания: печатный аналог : Дорошин А. В. Математическое моделирование в нелинейной динамике : [учеб. пособие для вузов по направлениям и специальностям: "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Механика"] / А. В. Дорошин. - Са
мара : Изд-во СГАУ, 2008. - 98 с. - ISBN 978-5-7883-0584-4 (Шифр СГАУ:6/Д 696-329460)

3. Attitude Dynamics and Control of a Dual-Spin-Spacecraft, Gyrostat-Satellites and Nanosatellites with Multyrotor Systems [Электронный ресурс] = Динамика и управление пространственным движением космических аппаратов и наноспутников с многороторными гироскопическими системами : Electronic Textbook / V. L. Balakin, A. V. Doroshin ; The Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Samara State Aerospace University (National Research University), Flight dynamics and control systems department. - Electronic text and

graphic data (2,17 Mb). - Samara : [б. и.], 2012. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM). - Загл. с контейнера. - 0.00Параллельные издания: Электронный аналог : Balakin V. L. Attitude Dynamics and Control of a Dual-Spin-Spacecraft, Gyrostat-Satellites and Nanosatellites with Multyrotor Systems : Electronic Textbook / V. L. Balakin, A. V. Doroshin. - Samara, 2012 on-line (Шифр 629.78/B 18-630470)

5.3 Электронные источники и интернет ресурсы

http://fla.ssau.ru/moodle/
http://www.elsevier.com

5.4 Методические указания и рекомендации

Занятия проводятся в форме лекций и практических (семинарских) занятий. На лекциях излагаются ключевые положения соответствующей темы, при этом конкретные примеры по этой теме разбираются на практических занятиях.Освоение курса предполагает самостоятельную работу студентов в следующих формах:
• конспектирование лекций;
• разбор лекционного материала;
• знакомство с основной и дополнительной литературой;
• подготовка к практическим занятиям по данной теме лекции;
• подготовка обзоров и рефератов по предложенным темам.