

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ЛЮ ДУНЬ, ЧЖАО ЦЗЮНЬ

ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Под общей редакцией

*Заслуженного деятеля науки Российской Федерации,
доктора технических наук, профессора В. В. Салмина*

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов и по направлению подготовки 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика

САМАРА

Издательство Самарского университета

2023

УДК 629.78.015(075)

ББК О62-015я7

Л930

Авторы: д-р техн. наук, профессор Лю Дунь,
д-р техн. наук, профессор Чжао Цзюнь

Лю, Дунь

Л930 **Динамика космического летательного аппарата: учебное пособие / Дунь Лю, Цзюнь Чжао;** пер. с китайского К. В. Петрухиной, Е. И. Сомова; под общ. ред. В. В. Салмина. – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 580 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1910-0

Впервые издано на китайском языке под заголовком «Динамика космических аппаратов», авторы Лю Дунь и Чжао Цзюнь; © Издательство Харбинского политехнического университета, Co, Ltd.

Версия перевода и издание настоящего учебного пособия были выполнены с разрешения издательства Харбинского политехнического университета, Co, Ltd.

УДК 629.78.015(075)

ББК О62-015я7

ISBN 978-5-7883-1910-0

© Самарский университет, 2023

空间飞行器动力学

刘墩 赵钧 编著

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	11
ВВЕДЕНИЕ	15
ЧАСТЬ 1 РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ.....	19
1 Основные характеристики планет и элементы их орбит ...	20
2 Выведение космического аппарата на орбиту	22
2.1 Уравнения движения ракеты-носителя	22
2.1.1 Основные системы координат	22
2.1.2 Уравнения движения РН.....	25
2.2 Выбор закона управления	27
2.2.1 Участок начального разворота ракеты-носителя.....	27
2.2.2 Участок гравитационного разворота ракеты-носителя.....	28
3 Орбиты КА.....	33
3.1 Ограниченная задача двух тел.....	33
3.2 Движение в центральном гравитационном поле.....	39
3.2.1 Общие сведения.....	39
3.2.2 Круговая орбита.....	46
3.2.3 Эллиптическая орбита	47
3.2.4 Параболическая орбита.....	54
3.2.5 Гиперболическая орбита.....	58
4 Формирование орбит и построении трассы подспутниковой точки	63
4.1 Формирование орбиты	63
4.2 Связь между элементами орбиты и параметрами запуска ..	70
4.3 Трасса подспутниковой точки	76

4.4	Дальность полета баллистических ракет.....	80
5	Маневрирование на орбите	83
5.1	Классификация маневров межорбитальных переходов	83
5.2	Одноимпульсные маневры (компланарные переходы между пересекающимися орбитами)	84
5.2.1	Одноимпульсные маневры в плоскости орбиты.....	84
5.2.2	Потребная энергетика одноимпульсного маневра.....	89
5.3	Компланарный переход между непересекающимися орбитами	93
5.4	Орбитальные маневры с малой тягой.....	102
5.5	Сближение и встреча космических аппаратов	109
5.5.1	Задача встречи КА на круговой орбите	109
5.5.2	Задача встречи КА на эллиптической орбите	112
5.5.3	Задача встречи КА на некомпланарных орбитах.....	114
5.6	Межорбитальные переходы с помощью аэродинамического маневра	116
6	Межпланетные перелеты.....	127
6.1	Синодический период обращения и стартовые окна	127
6.2	Гравитационные сферы действия планет. Метод кусочно-конической аппроксимации	129
6.3	Пертурбационный маневр.....	134
6.4	Полет к Луне.....	139
6.5	Межпланетные перелеты	154
6.6	Ограниченная задача трех тел	165
7	Относительное движение, сближение и стыковка космических аппаратов	179
7.1	Уравнения относительного движения	179

7.1.1 Уравнения относительного движения в орбитальной системе координат	179
7.1.2 Уравнения относительного движения в полярной системе координат	185
7.2 Сближение и стыковка КА.....	189
8 Теория возмущенного движения КА	219
8.1 Потенциал поля тяготения Земли	219
8.1.1 Потенциал шара со сферическим распределением плотности.....	221
8.1.2 Потенциал эллипсоида вращения с однородным распределением плотности.....	225
8.2 Влияние возмущений на движение КА	231
8.2.1 Метод оскулирующих элементов	231
8.2.2 Переход к переменной $u = \omega + \theta$ в уравнениях в оскулирующих элементах.....	242
8.2.3 Компоненты возмущающего ускорения: касательное f_τ и нормальное f_σ	243
8.2.4 Сводка уравнений в оскулирующих элементах	244
8.3 Возмущенное движение КА.....	246
8.3.1 Возмущения, вызванные нецентральностью гравитационного поля Земли	246
8.3.2 Возмущения орбиты КА, вызываемые действием атмосферы. Определение времени существования КА на орбите.....	254
8.3.3 Возмущенное движение КА на геостационарной орбите (ГСО)	267
9 Спуск космических аппаратов	275
9.1 Процесс спуска КА	275
9.2 Классификация способов спуска ЛА	279

9.2.1 Баллистические ЛА	280
9.2.2 ЛА полубаллистического типа.....	281
9.2.3 ЛА с подъемной силой.....	282
9.3 Участок внеатмосферного полета	282
9.4 Уравнения движения ЛА в атмосфере.....	288
9.5 Перегрузка, нагрев и управление движением ЛА в атмосфере	292
9.5.1 Баллистический спуск.....	292
9.5.2 Полубаллистический спуск ЛА	298
9.5.3 Коридор входа и свойства аэродинамической перегрузки	308
9.5.4 Многократный проход через атмосферу	314
ЧАСТЬ 2 ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС	317
10 Кинематика движения ЛА вокруг центра масс	318
10.1 Основные системы координат	318
10.2 Углы Эйлера и матрица преобразования координат	320
10.3 Переход от связанной $Ox_{\text{л}}, y_{\text{л}}, z_{\text{л}}$ к фиксированной системе координат Ox_b, y_b, z_b	333
11 Основные уравнения динамики движения космического аппарата вокруг центра масс	336
11.1 Кинетическая энергия.....	336
11.2 Угловой момент. Момент импульса	339
11.3 Уравнение Эйлера.....	341
11.4 Упрощение уравнений движения твердого КА относительно центра масс	343
12 Гравитационный момент и гравитационная стабилизация спутника	346

12.1 Гравитационный момент	346
12.2 Гравитационная стабилизация спутника на круговой орбите	352
12.3 Гравитационная стабилизация движения спутника по углу тангажа на круговых и околокруговых орбитах.....	357
12.4 Влияние потерь энергии на гравитационно- стабилизированный спутник.....	361
13 Космический аппарат, вращающийся вокруг одной из осей.....	375
13.1 Характеристики свободного вращения осесимметричного КА	376
13.2 Свободные вращения космического аппарата.....	386
13.3 Устойчивость вращения относительно осей инерции	391
13.4 Свободные вращения твердого тела с потерей энергии..	396
13.5 Влияние гравитационного момента на КА с одним вращением	399
13.6 Демпфирование колебаний в стабилизированном вращением КА	406
13.7 Два вида вынужденных движений вращающегося КА ...	419
14 КА с двойным вращением	426
14.1 Уравнения динамики КА.....	427
14.2 Движение КА с двойным вращением	437
14.3 Устойчивость КА	442
14.4 КА с двойным вращением с потерями энергии.....	446
14.5 Влияние гравитационного момента на КА	452
14.6 Демпфирование колебаний КА с двойным вращением...	455
15 КА с трехосной стабилизацией	473
15.1 Динамические уравнения КА с маховиками.....	473

15.2 Динамика неуправляемого движения КА с трехосной стабилизацией с маховиком.....	490
16 Космический аппарат с гибкими элементами и полостями, заполненными жидкостью.....	499
16.1 Динамические уравнения КА с гибкими элементами	500
16.1.1 Уравнения углового движения КА в векторной форме.....	501
16.1.2 Уравнения углового движения КА в компонентной форме.....	509
16.1.3 Решения упрощенных уравнений углового движения КА с гибкими элементами	512
16.2 КА с полостями, заполненными жидкостью	519
16.2.1 Уравнения углового движения КА в векторной форме.....	520
16.2.2 Уравнения углового движения КА в компонентной форме.....	524
ПРИЛОЖЕНИЯ	528
Приложение 1. Плотность атмосферы.....	528
Приложение 2. Формула Циолковского	532
Приложение 3. Векторы и векторные компоненты.....	535
Приложение 4. Момент инерции.....	549
Приложение 5. Векторные и тензорные производные	553
Приложение 6. Устойчивость и критерий Рауса-Гурвица	557
Приложение 7. Критерий устойчивости Гурвица	561
Приложение 8. Теорема об устойчивости по Ляпунову (вторая теорема)	563
Приложение 9. Основные теоремы об устойчивости движения	565

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателей предлагается учебное пособие «Динамика космического летательного аппарата», написанное профессорами Харбинского политехнического университета Лю Дунь и Чжао Цзюнь.

История взаимоотношений Самарского университета и Харбинского политехнического университета (ХПУ) началась в 1990 г. в рамках договора о подготовке специалистов для космической отрасли КНР. Преподаватели Самарского университета были приглашены для чтения лекций, проведения практических занятий по дисциплинам, составляющим фундаментальную основу для подготовки инженеров в области космических технологий. Кроме того, под их руководством студентами ХПУ были подготовлены выпускные дипломные проекты. Многие выпускники, прошедшие эту подготовку, в настоящее время занимают ведущие посты на предприятиях космической отрасли КНР, являются известными учеными и преподавателями.

В 2009 г. был подписан договор о подготовке в Самарском университете обучающихся из КНР по направлению подготовки «Космонавтика», в рамках которого было подготовлено более 50 бакалавров и магистров, работающих в настоящее время в качестве специалистов и преподавателей. Проходившие обучение в Самарском университете бакалавры помогли перевести на русский язык данное учебное пособие.

Параллельно развивалось научное сотрудничество: проводились конференции, семинары, разрабатывались планы совместных исследований. Многие ученые Самарского университета были приглашены в ХПУ для чтения лекций по перспективным направлениям космонавтики.

Учебное пособие имеет традиционную структуру и включает два раздела: «Расчет траекторий летательных аппаратов» и «Движение космического аппарата вокруг центра масс». Авторы

не ограничились освещением классических проблем динамики полета и управления угловым движением летательных аппаратов, но описали также новые задачи, возникающие в процессе разработки и создания современных космических систем.

Краткие сведения об авторах:

Профессор Лю Дунь, научный руководитель докторантуры, родился в 1932 году. Окончил Харбинский технологический институт в 1956 году.

С 1956 года работает в сфере высшего образования в аэрокосмической области. Директор научного общества космических технологий Китайской академии астронавтики; член профессионального комитета по организации и контролю научного Общества трения, директор профессионального комитета по смазке; иностранный академик Академии технологических наук. Специалист в области динамики и управлении космическими аппаратами; автор серии работ по механическому проектированию и газовой смазке; разработал метод активного подавления вибраций; предложил комбинированный метод наведения, который значительно повысил точность полета и посадки летательного аппарата; разработал технологию многоцелевого комбинированного использования газовой суспензии, используемой в крупномасштабном прецизионном оборудовании.

Является лауреатом Первой премии Национальной комиссии по оборонной науке, технологиям и промышленности Министерства аэрокосмической промышленности КНР.

Профессор Чжао Цзюнь родился в ноябре 1962 года, доктор технических наук, профессор аэрокосмической школы Харбинского политехнического института. Окончил факультет автоматического управления Пекинского института аэронавтики и астронавтики, занимается научными исследованиями в области авиационной науки и техники. Уже более 30 лет преподает дисциплины профессионального цикла, рецензирует журнал «Баллистика».

Член Китайского общества космических наук и Китайского общества механики Пекинского университета авиации и астронавтики. Ведет ряд профессиональных базовых курсов, таких как «Орбитальная динамика космических аппаратов»; основные направления научных исследований: динамика и управление космическими аппаратами, динамика и управление гибкой космической структурой, точки моделирования динамики летательных аппаратов; анализ и разработка наземного имитационного/испытательного оборудования для космических летательных аппаратов.

Опубликовал три учебника и несколько монографий. Является руководителем более 30 специальных научно-исследовательских проектов на национальном и министерском уровнях, а также совместных научно-исследовательских проектов, удостоенных первой премии в области национальной оборонной науки и техники за изобретение.

Является дважды лауреатом премий за научно-технический прогресс в области национальной обороны, обладателем премии за научно-технический прогресс, имеет патенты на изобретения.

Учебное пособие может быть полезно студентам, магистрантам, аспирантам и инженерам, специализирующимся в области проектирования космической техники.

При подготовке книги были использованы следующие источники:

- Иванов Н. М., Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Баллистика и навигация космических аппаратов, 1986;
- Hughes P. C. *Spacecraft Attitude Dynamics*. John Wiley and Sons, 1986;
- Лысенко Л. Н. Динамика наведения и основы управления сближением космических аппаратов, 1991;
- Longman R., Hagedorn P., Beck. *Stabilization due to Gyroscopic Coupling in Dual Spin Satellites Subject to Gravitational Torques*. *Celestial Mech*, 1981, 25;

- Артюхин Ю. П., Каргу Л. И., Симаев В. Л. Система управления КА, стабилизированных вращением, 1979.

С целью обеспечения удобства зрительного восприятия учебного материала было решено не включать в текст ссылки на каждый конкретный источник.

Редакторы русского перевода приносят извинения за возможные неточности в терминологии и освещении сложных вопросов динамики полета, что связано с трудностями перевода книги на русский язык. Все математические выкладки приведены в авторской редакции.

При подготовке материалов к печати были учтены весьма ценные замечания ученых, известных в области динамики космических аппаратов: члена-корреспондента Российской Академии наук, доктора технических наук, профессора Г. П. Аншакова, доктора технических наук, профессора И. В. Белоконова. Выражаем им искреннюю благодарность за проявленный интерес к работе и ряд полезных советов.

Перевод этой книги на русский язык был приурочен к празднованию 90-летия нашего коллеги, профессора Лю Дуня, которое состоялось 8 октября 2022 года. Поздравляем с юбилеем и искренне желаем ему крепкого здоровья и творческого долголетия!

*В.В. Салмин,
К. В. Петрухина,
Е. И. Сомов*

ВВЕДЕНИЕ

Время появления ракет большинство историков относят ко временам китайской династии Хань (206 г. до н. э. – 220 г. н. э.), связывая это событие с открытием пороха и началом его использования для фейерверков и развлечений. Сила, возникающая при взрыве порохового заряда, была способна двигать различные предметы. Позже этот принцип нашел применение при создании первых пушек и мушкетов. Снаряды порохового оружия могли летать на далекие расстояния, однако еще не являлись ракетами в полном смысле этого слова, поскольку не имели собственных запасов топлива. Тем не менее, именно изобретение пороха стало основной предпосылкой возникновения настоящих ракет. Описание летающих «огненных стрел», применявшихся китайцами, показывает, что эти стрелы уже можно было по праву считать ракетами. К ним прикреплялась трубка из уплотненной бумаги, открытая только с одного конца и заполненная горючим составом. Этот заряд поджигался, после чего стрела запускалась с помощью лука. Такие стрелы применялись при осаде укреплений, против судов и кавалерии.

В XIII веке вместе с монгольскими завоевателями ракеты попали в Европу, и в 1248 году английский философ и естествоиспытатель Роджер Бэкон опубликовал труд по их применению.

Известно, что ракеты применялись русскими казаками начиная с XVI-XVII веков. Многоступенчатые ракеты были описаны в XVI веке Конрадом Хаасом и в XVII веке литовским военным инженером Казимиром Семеновичем.

В Индии в конце XVIII века ракетное оружие применялось весьма широко, в частности, существовали особые отряды ракетчиков, общая численность которых достигала порядка 5000 человек. Ракетные стрелы-снаряды, представлявшие собой трубки с

зарядом горючего вещества, применялись индийцами в сражениях с британскими войсками.

В начале XIX века британская армия также приняла на вооружение боевые ракеты, производство которых наладил Уильям Конгрив (Ракета Конгрива). В то же время российский офицер Александр Засядько разрабатывал теорию ракет. Он, в частности, пытался рассчитать, сколько пороха необходимо для запуска ракеты на Луну. Большого успеха в совершенствовании ракет достиг в середине XIX века российский генерал артиллерии Константин Константинов. Русский изобретатель Николай Кибальчич в 1881 году выдвинул идею ракетного двигателя.

Ракетная артиллерия широко применялась вплоть до конца XIX века. Ракеты были более легкими и подвижными, чем артиллерийские орудия. Точность и кучность ведения огня ракетами была небольшой, но сопоставимой с артиллерийскими орудиями того времени. Во второй половине XIX века появились нарезные артиллерийские орудия, обеспечивающие большую точность и кучность огня, и ракетная артиллерия была снята с вооружения. Сохранились лишь фейерверочные и сигнальные ракеты.

В конце XIX века стали предприниматься попытки математически объяснить реактивное движение и создать более эффективное ракетное вооружение. В России одним из первых этим вопросом занялся Николай Тихомиров в 1894 году.

Теорией реактивного движения занимался гениальный русский ученый Константин Циолковский. В своей статье «Исследование мировых пространств реактивными приборами» он выдвинул идею об использовании ракет для космических полетов и утверждал, что наиболее эффективным топливом для них было бы сочетание жидких кислорода и водорода. Ракету для межпланетных сообщений он спроектировал в 1903 году.

Немецкий учёный Герман Оберт в 1920-е годы также изложил принципы межпланетного полета. Кроме того, он проводил стендовые испытания ракетных двигателей.

Американский ученый Роберт Годдард в 1923 году начал разрабатывать жидкостный ракетный двигатель, первый работающий прототип которого был создан к концу 1925 года, и 16 марта 1926 г. он осуществил запуск первой жидкостной ракеты, для которой в качестве топлива использовались бензин и жидкий кислород.

Работы Циолковского, Оберта и Годдарда были продолжены группами энтузиастов ракетной техники в США, СССР и Германии. В СССР исследовательские работы вела Группа изучения реактивного движения (Москва) и Газодинамическая лаборатория (Ленинград). В 1933 году на их основе был создан Реактивный институт (РНИИ), где в том же году было завершено начатое еще в 1929 году создание принципиально нового оружия – реактивных снарядов, установка для запуска которых позднее получила прозвище «Катюша».

17 августа 1933 года была запущена ракета «ГИРД 9», которую можно считать первой советской зенитной ракетой. Она достигла высоты 1,5 км, а следующая ракета «ГИРД 10», запущенная 25 ноября 1933 года, достигла уже высоты в 5 км.

В Германии подобные работы вело Немецкое Общество межпланетных сообщений. 14 марта 1931 года Йоханнес Винклер осуществил первый в Европе удачный запуск жидкостной ракеты.

Конструктор Вернер фон Браун с декабря 1932 года начал разработку ракетных двигателей на артиллерийском полигоне германской армии в Куммерсдорфе. Созданный им двигатель был использован на опытной ракете А-2, успешно запущенной с острова Боркум 19 декабря 1934 года. После прихода нацистов к

власти в Германии были выделены средства на разработку ракетного оружия, и весной 1936 года была одобрена программа строительства ракетного центра в Пенемюнде, руководителем которого был назначен Вальтер Дорнбергер, а техническим директором – фон Браун. В нём была разработана баллистическая ракета А-4 с дальностью полета 320 км. Во время Второй мировой войны 3 октября 1942 года состоялся первый успешный запуск этой ракеты, а в 1944 году началось её боевое применение под названием «Фау-2» (V-2).

Военное применение V-2 показало огромные возможности ракетной техники, и наиболее мощные послевоенные державы – США и СССР – также начали разработку баллистических ракет.

В 1957 году в СССР под руководством Сергея Королева была создана первая в мире межконтинентальная баллистическая ракета Р-7 как средство доставки ядерного оружия, которая в том же году была использована для запуска первого в мире искусственного спутника Земли. Так началось применение ракетных технологий для космических полётов.

12 апреля 1961 года Советский Союз отправил космонавта Юрия Гагарина в космос на корабле «Восток». Советский Союз стал первой страной, запустившей зонд на Луну 3 января 1959 года. Соединенные Штаты Америки осуществили серию пилотируемых полетов на Луну, первая высадка на поверхность спутника Земли осуществлена 20 июля 1969 года.

В настоящее время КНР уверенно вошла в число ведущих космических держав, создав ряд ракет-носителей семейства «Великий поход», осуществив серию полетов человека в космос. Китайские ученые реализуют проект создания орбитальной космической станции и приступили к осуществлению программы пилотируемых полетов к Луне.

ЧАСТЬ 1
РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

1 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАНЕТ И ЭЛЕМЕНТЫ ИХ ОРБИТ

Основные константы Земли:

- гравитационная постоянная $\mu_{\oplus} = 3.986 \times 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$;
- экваториальный радиус Земли $R_{\oplus} = 6378 \text{ км}$;
- радиус земной орбиты $r_{\oplus} = 1.496 \times 10^8 \text{ км}$ (равен 1 астрономической единице);
- орбитальная скорость $v_{\oplus} = 29.78 \text{ км/с}$.

Основные константы Луны:

- гравитационная постоянная $\mu_{\text{Л}} = 4.887 \times 10^3 \text{ км}^3/\text{с}^2$;
- средний радиус Луны $R_{\text{Л}} = 1738 \text{ км}$;
- радиус лунной орбиты $r_{\text{Л}} = 3.844 \times 10^5 \text{ км}$;
- эксцентриситет лунной орбиты $e_{\text{Л}} = 0.0549$;
- орбитальная скорость $v_{\text{Л}} = 1.02 \text{ км/с}$;
- радиус сферы действия по отношению к Земле $\rho = 66.1 \times 10^3 \text{ км}$.

Основные константы Солнца:

- гравитационная постоянная $\mu_{\odot} = 1.327 \times 10^{11} \text{ км}^3/\text{с}^2$;
- средний радиус Солнца $R_{\odot} = 6.98 \times 10^5 \text{ км}$.

Основные константы планет Солнечной системы приведены в таблице 1.1

Таблица 1.1. Основные константы планет Солнечной системы

Планета	Средний радиус орбиты / 10^6 км	Эксцентриситет, e	Относительная масса (планета/Солнце)	Радиус сферы действия / 10^5 км	Гравитационный параметр / $(\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2})$	\angle гол между плоскостями экватора и плоскостями орбиты	\angle гол между плоскостями орбиты планеты и плоскостями эклиптики	Средняя орбитальная скорость / $(\text{км} \cdot \text{с}^{-1})$	Орбитальный звездный цикл / а	Цикл встречи с Землей / сут.	Средний диаметр по экватору / 10^4 км	Высота атмосферы / км	Время с момента перехода с Земли / сут
Меркурий	57.91	0.20563	0.00164×10^{-4}	1.12	$(2.16-2.19) \times 10^4$	0°	7°	47.82	0.241	115.88	0.481	-	105.5
Венера	108.21	0.00679	0.0245×10^{-4}	6.16	3.253×10^5	178°	$323'$	34.99	0.615	583.92	1.21	120	146.1
Земля	149.60	0.01672	0.0304×10^{-4}	9.29	3.986×10^5	$2327'$	-	29.76	1.0	-	1.2742	100	-
Марс	227.94	0.09338	0.00324×10^{-4}	5.78	4.29×10^4	$2448'$	$1^\circ 51'$	24.11	1.881	779.94	0.0678	100	258.9
Юпитер	778.34	0.04845	9.55×10^{-4}	482	1.268×10^8	$3^\circ 6'$	$1^\circ 18'$	13.05	11.862	398.88	13.92	400	997.6
Сатурн	1427.0	0.05569	2.86×10^{-4}	545	3.799×10^7	$2645'$	$2^\circ 29'$	9.64	29.458	378.09	11.48	500	2208.2
Уран	2871.0	0.04724	0.436×10^{-4}	519	5.798×10^6	98°	$0^\circ 46'$	6.80	84.015	369.66	5.34	500	5428.9
Нептун	4498.6	0.00858	0.518×10^{-4}	868	6.977×10^6	29°	$1^\circ 46'$	5.43	164.8	367.49	4.97	400	11183.6
Плутон	5912.0	0.25344	0.0025×10^{-4}	341	$(3-3.7) \times 10^5$		178°	4.8	247.69	366.74	0.55	-	16654.7

2 ВЫВЕДЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОРБИТУ

Выведением космического аппарата (КА) на орбиту называется его доставка ракетой-носителем (РН) на заданную высоту с заданной скоростью и в заданном направлении. Таким образом, космический аппарат будет двигаться по определенной орбите для решения различных целевых задач.

2.1 Уравнения движения ракеты-носителя

2.1.1 Основные системы координат

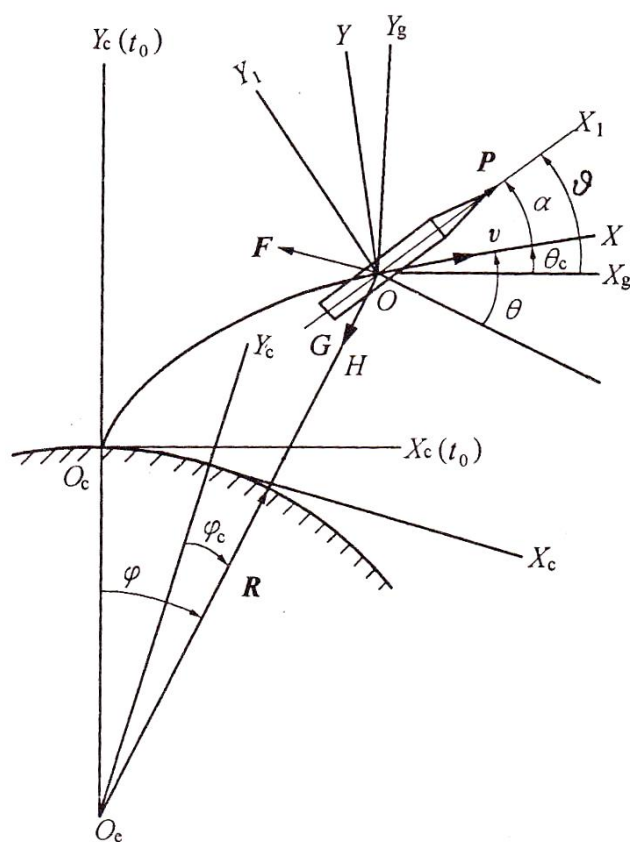


Рис. 2.1. Системы координат

В зависимости от решаемых задач расчет траектории выведения может производиться в различных системах координат (рис. 2.1). Наиболее удобна стартовая система координат $O_c X_c Y_c Z_c$, которая увязывает траекторию с местом старта, с местами падения ускорителей ступеней и с измерительными пунктами, контролирующими траекторию и работу систем ракеты. В стартовой системе координат начало располагается на поверхности Земли в точке старта O_c , ось $O_c X_c$ лежит в горизонтальной плоскости и задается азимутом запуска, ось $O_c Y_c$ направлена противоположно направлению силы тяжести в точке O_c , а ось $O_c Z_c$ дополняет систему до правой.

Характер влияния основных сил, действующих на РН, наиболее удобно исследовать, используя скоростную $OXYZ$ или связанную систему координат $OX_1Y_1Z_1$.

Начало связанной системы координат располагается в центре масс РН, ось OX_1 направлена по продольной оси ракеты, ось OY_1 перпендикулярна ей и лежит в плоскости движения, а ось OZ_1 дополняет систему до правой.

Начало скоростной системы координат совпадает с началом связанной системы координат. Ось OX направлена по вектору \bar{V} скорости РН, ось OY перпендикулярна ей и лежит в плоскости траектории, а ось OZ перпендикулярна им обеим и лежит в плоскости, касательной к траектории.

В плане технической реализации закона управления угловым положением ракеты наиболее удобное является нормальная система координат $OX_g Y_g Z_g$, которая в начальный момент старта t_0 совпадает со стартовой системой, и в дальнейшем сохраняет неизменное положение в пространстве.

Для перевода векторов из одной системы координат в другую необходимо выполнить последовательные повороты осей систем координат (рис. 2.2а – 2.2в).

Для перехода из нормальной системы координат $OX_g Y_g Z_g$ в связанную $OX_1 Y_1 Z_1$ необходимо выполнить три последовательных поворота.

1) Поворот вокруг оси OY_g на угол ψ – угол рыскания. Это угол между проекцией связанной оси OX_1 на местную горизонтальную плоскость и направлением оси OX_g нормальной системы координат. Получаем новую систему координат $OX'Y_gZ'$.

2) Поворот вокруг оси OZ' на угол ϑ – угол тангажа. Это угол между направлением связанной оси OX_1 и местной горизонтальной плоскостью. Получаем систему координат $OX_1 Y'Z'$.

3) Поворот вокруг оси OX_1 на угол γ – угол крена. Это угол между вертикальной плоскостью симметрии РН и местной вертикальной плоскостью, содержащей ось OX .

На рис. 2.2б аналогично производится переход из нормальной системы координат $OX_g Y_g Z_g$ в связанную $OX_1 Y_1 Z_1$ с помощью трех поворотов на углы $\theta_c, \gamma_c, \psi_c$. Здесь ψ_c – угол пути или угол поворота траектории РН. Это угол между проекцией вектора скорости на местную горизонтальную плоскость и осью OX_g . Угол θ_c – угол наклона траектории, угол между вектором скорости и местной горизонтальной плоскостью. Угол γ_c – угол крена.

На рис. 2.2в показан переход из скоростной системы координат $OXYZ$ в связанную $OX_1 Y_1 Z_1$ с помощью двух последовательных поворотов на углы α и β . Угол α – угол атаки, угол между осью OX_1 связанной системы координат и проекцией скорости на плоскость $OX_1 Y_1$. Угол β – угол скольжения, угол между вектором скорости и его проекцией на вертикальную плоскость симметрии.

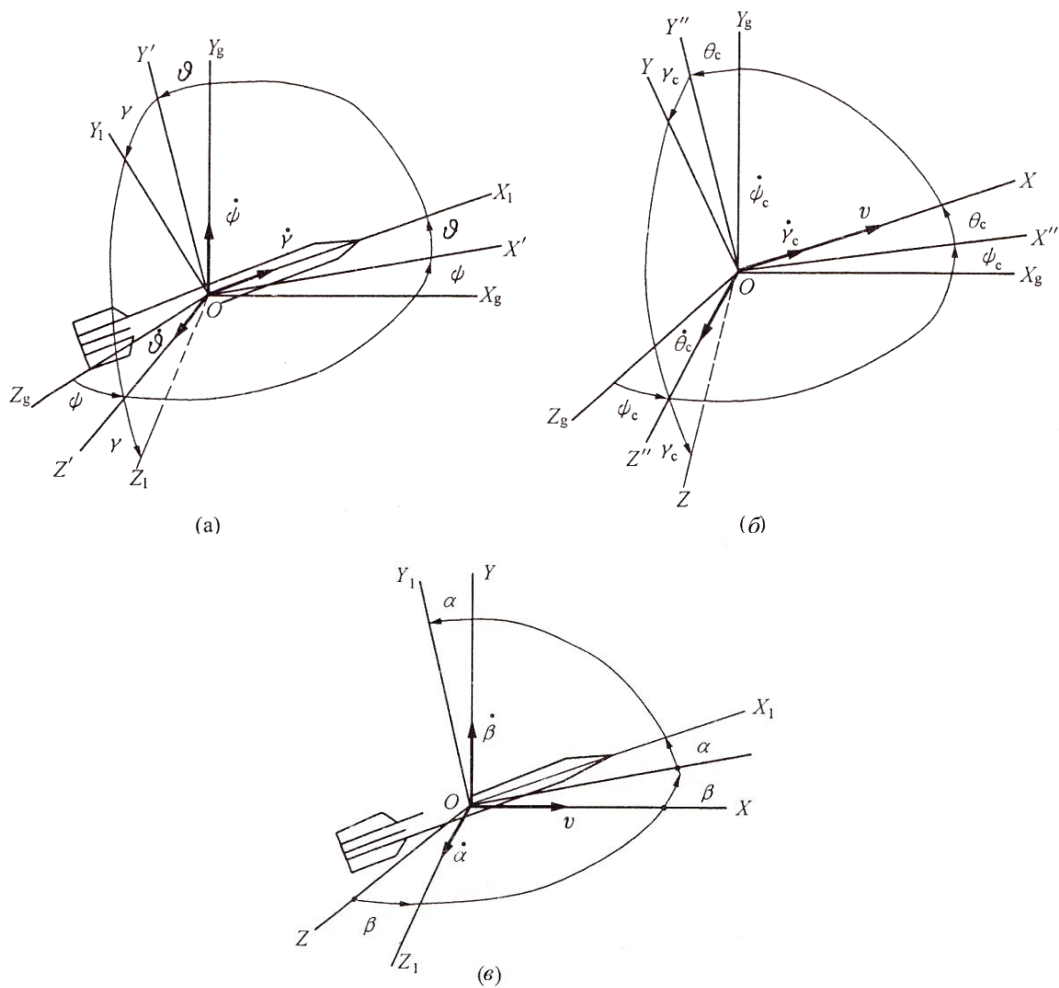


Рис. 2.2. Переходы между системами координат

2.1.2 Уравнения движения РН

При старте на ракету-носитель действуют следующие силы: тяга ракетного двигателя \bar{P} , аэродинамическая \bar{F} и гравитационная \bar{G} силы. Если \bar{a} – ускорение центра масс ракеты-носителя, а M – ее масса, то дифференциальное уравнение движения РН в векторной форме имеет вид:

$$M\bar{a} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{G}. \quad (2.1)$$

Аэродинамическая сила возникает в результате воздействия набегающего потока воздуха на поверхность ракеты. Обычно

рассматривают ее проекции на оси либо связанной, либо скоростной системы координат. Например, ее проекции F_x, F_y, F_z на оси скоростной системы координат $OXYZ$, где F_x – сила лобового сопротивления, F_y – подъемная сила и F_z – боковая сила.

Если рассматривать движение ракеты-носителя только в продольной плоскости, то уравнение (2.1) можно переписать в скалярной форме, получим уравнение баланса сил или динамические уравнения в проекциях на оси OX и OY , а также кинематическое уравнение для высоты, т.е.:

$$\begin{cases} M \frac{dv}{dt} = P \cos \alpha - F_x - Mg \sin \theta, \\ Mv \frac{d\theta}{dt} = P \sin \alpha + F_y - Mg \cos \theta, \\ \frac{dH}{dt} = v \sin \theta. \end{cases} \quad (2.2)$$

В скоростной системе координат $OXYZ$ проекция вектора скорости на ось OX может быть записана $\bar{v} = v\bar{i}$ (i – единичный положительный вектор вдоль оси OX). Тогда вектор ускорения РН \bar{a} может быть выражен через производные:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{i} + v \frac{d\bar{i}}{dt}. \quad (2.3)$$

Согласно Приложению 5 производную $\frac{d\bar{i}}{dt}$ можно записать в виде:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{i}}{\Delta t} = \bar{\omega} \times \bar{i}.$$

Отсюда видно, что производная по времени от единичного вектора является векторным произведением угловой скорости и этого единичного вектора.

Подставляя последнее выражение в (2.3) и учитывая, что $\bar{\omega} = \frac{d\theta_c}{dt} \bar{k}$, получим:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{i} + v \frac{d\theta_c}{dt} \bar{j}, \quad (2.4)$$

где \bar{j}, \bar{k} – единичные векторы вдоль осей OY и OZ соответственно, а компоненты ускорения ракеты-носителя вдоль направлений OX и OY можно получить из выражения (2.4) в виде $\frac{dv}{dt}$ и $v \frac{d\theta_c}{dt}$. Эти компоненты являются левой частью уравнений (2.2).

2.2 Выбор закона управления

При определении закона управления необходимо руководствоваться рядом ограничений, диктуемых требованиями эксплуатации, прочности конструкции РН, возможности аппаратурной стабилизации и др. Старт современных РН всегда вертикальный ($\theta_c = \theta = 90^\circ, \alpha = 0$) ввиду относительно невысокой начальной тяговооруженности.

2.2.1 Участок начального разворота ракеты-носителя

После первых 10 – 15 с вертикального полета происходит относительно кратковременное изменение угла атаки, вследствие чего движение РН отклоняется от вертикального. Закон изменения угла атаки α на этом участке траектории может определяться таким выражением:

$$\alpha(t) = \alpha_m \sin^2 \frac{\pi(t-t_1)}{(t-t_1) + k(t_2-t)}, \quad (2.5)$$

где t_1 – момент начала изменения угла атаки; t_2 – момент окончания участка; k – отношение времени изменения α от нуля до минимума α_m ко времени его изменения до нуля:

$$k = \frac{t_m - t_1}{t_2 - t_m}.$$

Обычно $k = 1/4$, а характер закона изменения модуля угла α по времени показан на рис. 2.3 ($\alpha < 0$).

Кроме изменения угла α при развороте корпуса ракеты-носителя происходит также и уменьшение угла θ до значений, меньших 90° . Этот угол можно рассчитать по формуле (2.2).

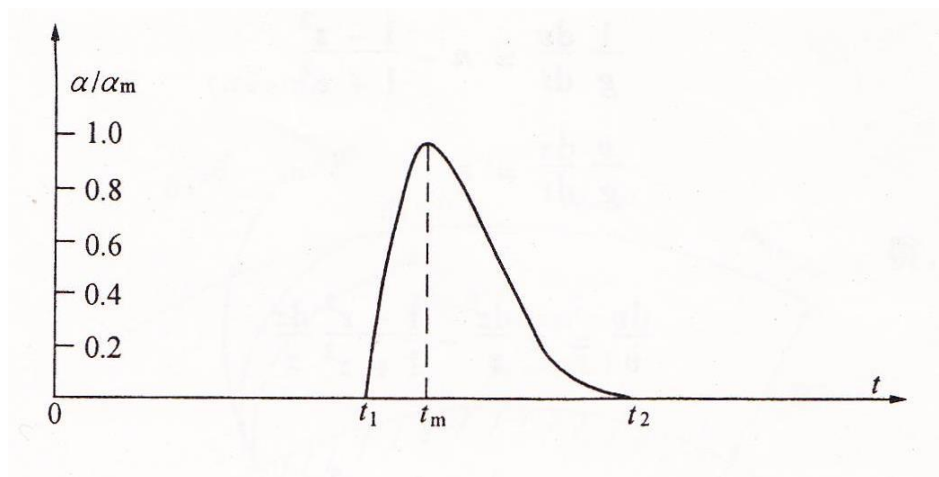


Рис. 2.3. Изменение угла атаки

2.2.2 Участок гравитационного разворота ракеты-носителя

Участок траектории выведения, проходящий в плотных слоях атмосферы, характеризуется требованием $\alpha = 0$ или $\alpha \approx 0$, которое определяется необходимостью ограничить действующие на ракету аэродинамические силы как для обеспечения прочности, так и для снижения требований к органам управления. На этом участке искривление траектории достигается (если не учитывать

возмущения) только действием силы притяжения, вследствие чего его иногда называют гравитационным разворотом. На последующих участках траектории выведения, где скоростным напором можно пренебречь, угол атаки может быть принят отличным от нуля, что позволяет строить траектории, оптимальные с точки зрения энергетики.

Так как уравнения движения являются нелинейными и зависящими от времени, траектория ракеты-носителя может быть рассчитана только с помощью компьютера, однако можно получить упрощенные уравнения движения в форме аналитически решений. Если пренебречь аэродинамическими силами и суточным вращением Земли, а также принять допущение о том, что поле силы тяжести является плоским и однородным, то уравнения (2.2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} &= \frac{P}{Mg} - \sin \theta, \\ \frac{v}{g} \frac{d\theta}{dt} &= -\cos \theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для этих нелинейных уравнений при заданном $\frac{P}{Mg}$ могут быть получены численные решения

$$z = \tan \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}. \quad (2.7)$$

ИЛИ

$$z^2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}, \quad \sin \theta = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}. \quad (2.8)$$

Тогда из выражения (2.7) можно получить:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{1 + \sin \theta} \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.9)$$

Если обозначить $\frac{P}{Mg} = n$ и в (2.6) подставить (2.7) и (2.9), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} &= n - \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \\ \frac{v}{g} \frac{dz}{dt} &= z. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поделим первое уравнение на второе, получим

$$\frac{dv}{v} = n \frac{dz}{z} - \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \frac{dz}{z}.$$

После интегрирования получим

$$\ln v = \ln z^n + \ln \frac{1 + z^2}{z} + \ln C$$

или

$$v = Cz^{n-1}(1 + z^2). \quad (2.11)$$

Здесь постоянная интегрирования определяется выражением:

$$C = \frac{v(0)}{z(0)^{n-1}(1 + z^2(0))}. \quad (2.12)$$

Подставив (2.11) в (2.10) и проинтегрировав, получим

$$t = \frac{C}{g} \int_{z(0)}^z z^{n-2} (1+z^2) dz = \frac{C}{g} z^{n-1} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{z^2}{n+1} \right) \Big|_{z_0}^z. \quad (2.13)$$

С помощью уравнений (2.11) – (2.13) можно рассчитать движение РН на участке гравитационного разворота. Алгоритм расчета следующий: сначала необходимо определить $z(0)$ из выражения (2.7) в соответствии с начальным значением $\theta(0)$, а затем для $v(0)$ следует вычислить C с помощью выражения (2.12), после чего задать угол наклона траектории θ и рассчитать значения z, v, t по формулам (2.7), (2.11), (2.13).

Координаты РН можно рассчитать с помощью выражений:

$$\frac{dy_c}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dx_c}{dt} = v \cos \theta. \quad (2.14)$$

Движение РН в неоднородном гравитационном поле Земли и с учетом ее вращения вокруг своей оси рассчитывается аналогично, но с использованием более сложных уравнений.

Если считать, что оставшаяся часть траектории формируется по тангенциальному закону, то для данной ракеты-носителя существует единственная круговая околоземная орбита высотой H^* , для которой выполняются конечные условия выведения: $V_\kappa^* = V_{кр}^*$ ($V_{кр}^* = \sqrt{fm_3 / (R_3 + H^*)}$); $\theta_\kappa^* = 0$ (рис. 2.4). Причем это достигается при $\alpha_m = \alpha_m^*$ в выражении (2.5). В случае же, если $\alpha_m > \alpha_m^*$, то траектории будут расположены выше, тогда $\theta_\kappa > 0$, $H_\kappa > H_\kappa^*$, а $V_\kappa < V_{кр}^*$ (при грузе, выводимом на круговую орбиту высотой H^*). При $\alpha_m < \alpha_m^*$, наоборот, траектории будут расположены ниже и $\theta_\kappa < 0$, $H_\kappa < H_\kappa^*$, а $V_\kappa > V_{кр}^*$.

Орбита высотой H^* может быть достигнута и при $\alpha_m \neq \alpha_m^*$. В этом случае для выполнения конечных условий выхода на орбиту ИСЗ необходимо создавать на отдельном участке нормальную составляющую тяги двигателей РН: при $\alpha_m > \alpha_m^*$ – направленную к Земле ($\alpha < 0$), а при $\alpha_m < \alpha_m^*$ – от Земли ($\alpha > 0$) (рис. 2.5).

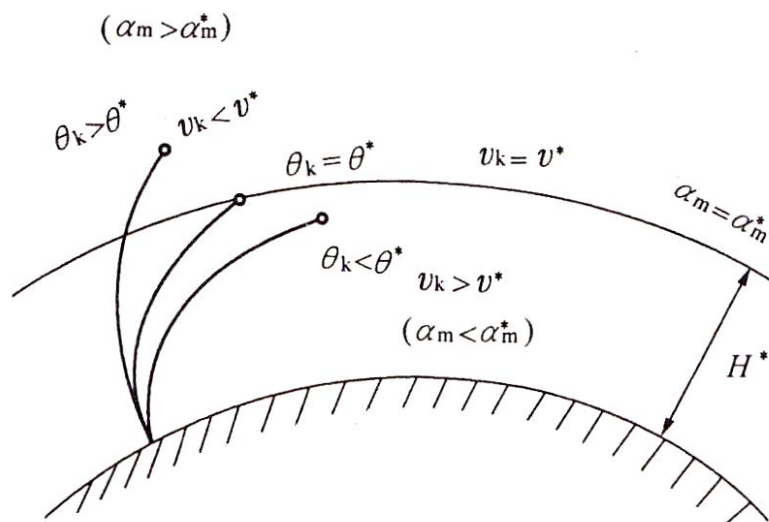


Рис. 2.4. Траектории выведения при однопараметрическом тангенциальном управлении для различных начальных условий

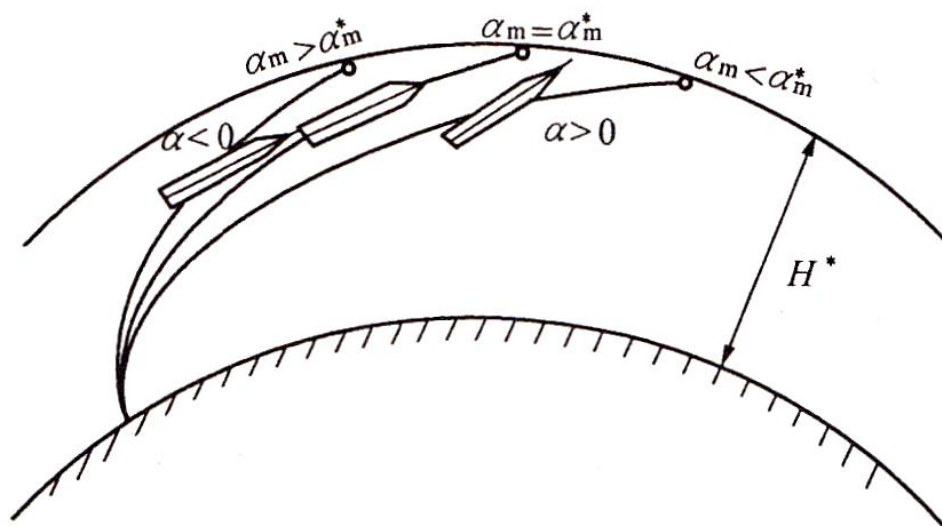


Рис. 2.5. Выведение РН при различных углах атаки

3 ОРБИТЫ КА

В этой главе рассматривается задача двух тел, а именно невозмущенное движение КА в центральном гравитационном поле. Притяжением других небесных тел Вселенной пренебрегают. В задаче двух тел учитывается единственная сила – сила ньютоновского взаимодействия между двумя материальными точками, например, между космическим аппаратом и Землей. В последующих главах будет также рассматриваться задача N-тел.

3.1 Ограниченная задача двух тел

В этом разделе будет рассматриваться движение двух тел в инерциальном пространстве. Пусть $OXYZ$ – инерциальная система отсчета, в которой движутся два объекта в виде материальных точек массами m_1 и m_2 соответственно. Центр масс системы двух тел расположен в точке C на расстоянии \bar{r} от точки m_2 . Пусть расстояния от начала координат до точек m_2 , m_1 и C равны соответственно \bar{r}_2 , \bar{r}_1 , \bar{r}_c , тогда можно записать:

$$m_1(\bar{r}_1 - \bar{r}_c) + m_2(\bar{r}_2 - \bar{r}_c) = 0. \quad (3.1)$$

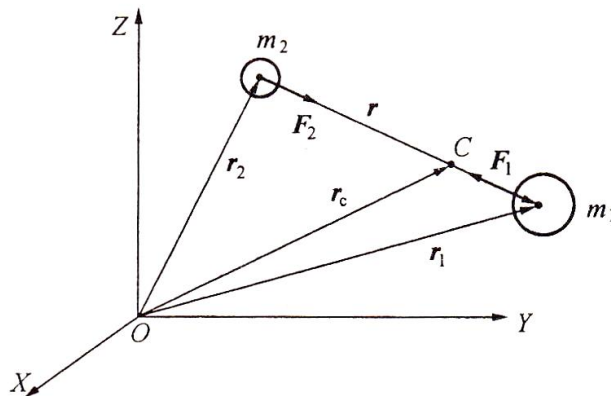


Рис. 3.1. Модель задачи двух тел

Используя геометрические соотношения, получим:

$$\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2.$$

Выражая \bar{r}_1 и \bar{r}_2 из (3.1) с учетом геометрии, получим:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{r}, \quad (3.2a)$$

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{r}. \quad (3.2b)$$

Таким образом, ускорения тел m_1 и m_2 можно записать в виде

$$\ddot{\bar{r}}_1 = \ddot{\bar{r}}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\bar{r}}, \quad (3.3a)$$

$$\ddot{\bar{r}}_2 = \ddot{\bar{r}}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\bar{r}}. \quad (3.3b)$$

Согласно второму закону Ньютона силы, действующие на тела m_1 и m_2 , равны

$$\bar{F}_1 = m_1 \ddot{\bar{r}}_1, \quad \bar{F}_2 = m_2 \ddot{\bar{r}}_2. \quad (3.4)$$

В задаче двух тел считается, что на тела действуют только гравитационные силы, равные по модулю и противоположные по направлению:

$$\bar{F}_2 = -\bar{F}_1 = Gm_1m_2 \frac{\bar{r}}{r^3}. \quad (3.5)$$

Здесь G – гравитационная постоянная.

Подставляя (3.3а) и (3.3б) в (3.4) с учетом (3.5), получим:

$$\ddot{\vec{r}}_c(m_1 + m_2) = 0.$$

Для этого должны быть выполнены следующие условия:

$$\ddot{\vec{r}}_c = 0, \quad \dot{\vec{r}}_c = const. \quad (3.6)$$

Следовательно, у центра системы двух тел ускорения нет, так как скорость постоянна, а движение является линейным или стационарным. Используя формулы (3.6), (3.3а) и (3.5), получим

$$\ddot{\vec{r}} + G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} = 0.$$

Обозначим

$$\mu = G(m_1 + m_2), \quad (3.7)$$

тогда

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0. \quad (3.8)$$

Это и есть основное уравнение задачи двух тел, из которого можно получить характеристики движения КА.

Пусть $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v}$ – момент импульса (или момент количества движения) единичной массы m_1 относительно массы m_2 , тогда для \vec{h} можем записать:

$$\dot{\vec{h}} = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}. \quad (3.9)$$

С учетом

$$\vec{r} \times \vec{r} = 0, \quad \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0,$$

получим

$$\dot{\vec{h}} = 0, \quad \vec{h} = const. \quad (3.10)$$

Формула (3.10) выражает закон сохранения момента количества движения. Видно, что относительное движение КА происходит в постоянной (невращающейся) плоскости, проходящей через центр гравитирующего тела.

Запишем выражение для кинетической энергии тел m_1 и m_2 :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2.$$

Подставим сюда выражения (3.2а) и (3.2б):

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{r}}_c \cdot \dot{\vec{r}}_c + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}. \quad (3.11)$$

Кинетическая энергия является характеристикой поступательного и вращательного движения системы.

Далее для анализа траектории относительного движения умножим (3.8) справа на $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$, получим:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) = 0. \quad (3.12)$$

Для второго слагаемого применим формулу разложения векторно-векторного произведения $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ и преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) &= \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \dot{\vec{r}} r^2 = \vec{r} r \frac{dr}{dt} - \dot{\vec{r}} r^2 = \\ &= -r^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3.12) с учетом $h = const$, интегрируя, получим

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} = \mu \left(\frac{\bar{r}}{r} + \bar{e} \right). \quad (3.13)$$

где \bar{e} – постоянный вектор интегрирования, известный как вектор эксцентриситета. Если умножить (3.13) скалярно на \bar{r} , получим

$$\bar{r} \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} \right) = \mu(r + r e \cos \theta),$$

где θ – угол между векторами \bar{e} и \bar{r} .

Используя правило смешанного произведения векторов $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$, получим:

$$h^2 = \mu(r + r e \cos \theta),$$

откуда

$$r = \frac{h^2 / \mu}{1 + e \cos \theta}. \quad (3.14)$$

Умножая (3.13) скалярно на \bar{h} , получим:

$$\bar{h} \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} \right) = \mu \left(\bar{h} \cdot \frac{\bar{r}}{r} + \bar{h} \cdot \bar{e} \right).$$

Так как вектор \bar{h} перпендикулярен вектору скорости $\frac{d\bar{r}}{dt}$ и вектору \bar{r} , первый член в правой и левой частях приведенного выше уравнения должен быть равен нулю:

$$\bar{h} \cdot \bar{e} = 0. \quad (3.15)$$

Из последнего выражения видно, что векторы \bar{h} и \bar{e} перпендикулярны, т.е. вектор \bar{e} находится в плоскости движения тел m_1 и m_2 , его направление и величина остаются постоянными безразмерными величинами.

Из (3.14) следует, что при $\theta = 0$ $r = r_{\min}$, т. е. тело m_1 находится на минимальном расстоянии от тела m_2 . Угол θ отсчитывается по минимальной относительной радиальной траектории и называется углом истинной аномалии. Также из выражения (3.14) видно, что при $e = 0$ движение происходит по круговой орбите. В таблице 3.1 приведены другие значения эксцентриситета и типы соответствующих им траекторий.

Таблица 3.1. Формы траекторий

Значение эксцентриситета e	Форма траектории
$e = 0$	круг
$0 < e < 1$	эллипс
$e = 1$	парабола
$e > 1$	гипербола

На рис. 3.2а и 3.2б показаны траектории движения системы из двух тел с центром в точке C в инерциальном пространстве для $e = 0.707$ и $e = 0$ соответственно. На рис. 3.2, точки $1, 2, \dots$ и $1', 2', \dots$ – положения тел m_1 и m_2 в моменты времени t_1, t_2, \dots . Отрезки $\overline{1'1}, \overline{2'2}$ связывают положения тел m_1 и m_2 по радиусу \bar{r} в каждый момент времени. Согласно выражению (3.14), при $e = 0.707$ длина этих отрезков изменяется по эллиптическому за-

кону (рис. 3.2а), а точка C лежит на отрезке. При $e=0$ отрезок делится на части, обратно пропорциональные массам m_1 и m_2 , при этом модуль \bar{r} остается постоянным (рис. 3.2б).

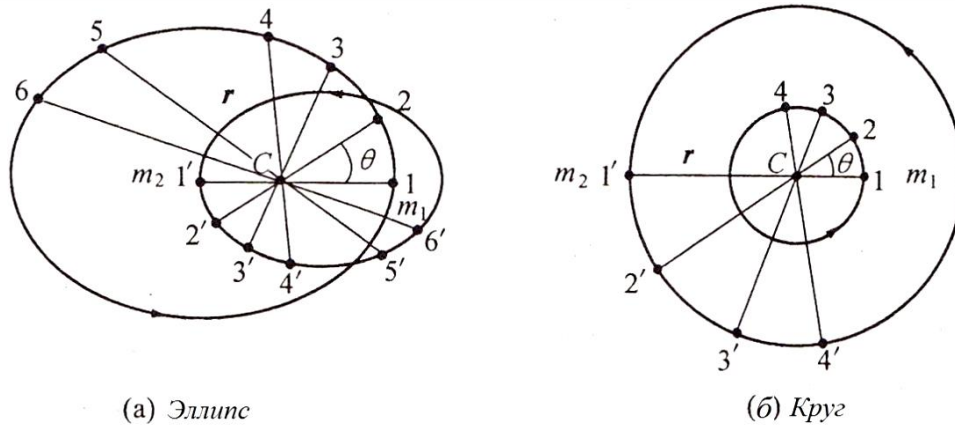


Рис. 3.2. Эллиптическая и круговая траектории в рамках задачи двух тел

3.2 Движение в центральном гравитационном поле

3.2.1 Общие сведения

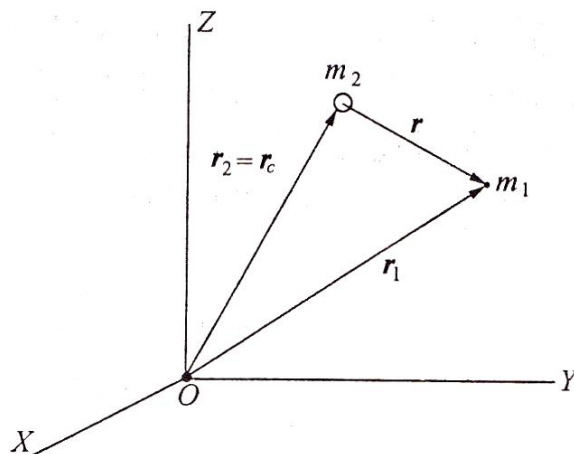


Рис. 3.3. Движение КА в центральном гравитационном поле

Если в системе движутся два тела массами m_1 и m_2 , причем $m_2 \gg m_1$, тогда центры тяжести m_2 и C совпадают. Если в формуле (3.7) обозначить $\mu = Gm_2$, массой m_1 пренебречь, $\bar{r}_2 = \bar{r}_C$

(рис. 3.3), то основная формула задачи двух тел, полученная в разделе 3.1, будет иметь тот же вид:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0. \quad (3.16)$$

Постоянная интеграла площадей запишется как (3.14).

Получим выражение для постоянной интеграла энергии. Для этого умножим слева скалярно выражение (3.16) на $2\dot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned} 2\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + 2\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{dt}(\bar{v}^2) + \frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt}(\bar{r}^2) = \\ &= \frac{d}{dt}(\bar{v}^2) - 2\mu \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = 0. \end{aligned}$$

Так как $\mu = const$, то

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon_e. \quad (3.17)$$

Здесь ε_e – постоянная интеграла энергии. Формула (3.17) выражает закон сохранения энергии: $\frac{v^2}{2}$ – кинетическая энергия тела единичной массы; $\frac{\mu}{r}$ – потенциальная энергия тела единичной массы на расстоянии r от притягивающего тела с гравитационным параметром μ . Это можно доказать следующим образом.

В центральном гравитационном поле на тело массой m_1 со стороны тела m_2 действует сила

$$\vec{F} = -\frac{\mu m_1}{r^3} \vec{r}.$$

Для того чтобы переместить тело m_1 из точки с радиус-вектором \bar{r}_1 в точку с радиус-вектором \bar{r}_2 , необходимо совершить работу

$$-\mu m_1 \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \bar{r} ds,$$

где ds – элементарная дуга траектории, ограниченная векторами \bar{r}_1 и \bar{r}_2 (рис. 3.4):

$$\bar{r} ds = r ds \cos(\bar{r}, \hat{ds}) = r dr.$$

Здесь (\bar{r}, \hat{ds}) – угол между \bar{r} и ds , dr – проекция ds на \bar{r} (рис. 3.4). Подставив $\bar{r} ds = r dr$ в интеграл, получим:

$$\frac{\mu m_1}{r_2} - \frac{\mu m_1}{r_1}.$$

При удалении тела m_1 на бесконечное расстояние $r \rightarrow \infty$ от притягивающего тела m_2 потенциальная энергия станет равной нулю $\frac{\mu m_1}{r} \rightarrow 0$. Тогда потенциальная энергия в точке с радиус-вектором \bar{r}_1 будет равна $\frac{\mu m_1}{r_1}$. А в любой точке траектории с радиусом \bar{r} потенциальная энергия для тела единичной массы запишется как

$$U = -\frac{\mu}{r_1}. \quad (3.18)$$

Обратите внимание на то, что потенциальная энергия равна нулю на бесконечности и отрицательна на конечном расстоянии.

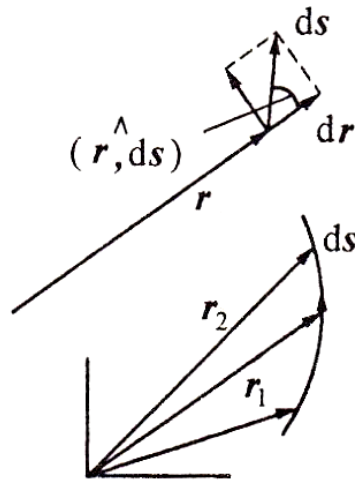


Рис. 3.4. К выводу формулы для потенциальной энергии

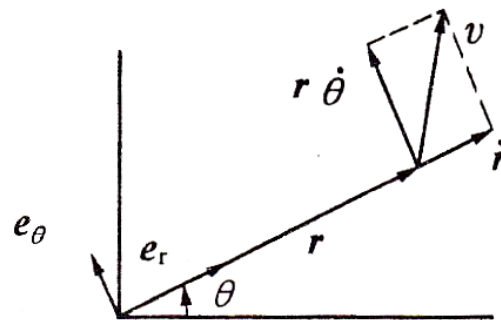


Рис. 3.5. Компоненты скорости

Таким образом, из выражения (3.17) следует, что в любой точке орбиты сумма кинетической и потенциальной энергии космического аппарата всегда постоянна.

Вектор скорости можно также записать в компонентной форме. Для этого запишем выражение для радиус-вектора \vec{r} в виде $\vec{r} = r\vec{e}_r$, где \vec{e}_r – единичный вектор вдоль радиального направления \vec{r} (рис. 3.5), а производная по времени от \vec{r} по времени имеет вид:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r.$$

Применяя правило взятия производной от единичного вектора по времени (см. Приложение 5), получим $\dot{\bar{e}}_r = \bar{\omega} \times \bar{e}_r$, где $\bar{\omega}$ – угловая скорость вектора \bar{r} в инерциальном пространстве (ее модуль равен $\dot{\theta}$). Вектор $\dot{\bar{e}}_r$ перпендикулярен вектору \bar{r} . Единичный вектор \bar{e}_θ лежит в плоскости движения тела m_1 в направлении его движения, т. е.

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta. \quad (3.19)$$

Здесь \dot{r} и $r\dot{\theta}$ – компоненты вектора скорости \bar{v} в радиальном и трансверсальном направлениях соответственно.

Если умножить выражение (3.19) само на себя и подставить в (3.17), получим:

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = \varepsilon_e. \quad (3.20)$$

Запишем выражение для модуля момента импульса h с помощью рис. 3.5:

$$h = |\bar{r} \times \bar{V}| = rv \sin(\bar{r}, \hat{\bar{v}}) = r^2\dot{\theta}. \quad (3.21)$$

Подставляя это выражение в (3.20), получим

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon_e. \quad (3.22)$$

Уравнения (3.17), (3.20) и (3.22) – разные формы закона сохранения энергии при движении тела в центральном гравитационном поле.

В уравнении (3.14), описывающем траекторию движения КА, введем обозначение

$$p = \frac{h^2}{\mu}. \quad (3.23)$$

Тогда (3.14) переписывается в виде:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \quad (3.24)$$

Из таблицы 3.1 видно, что величина эксцентриситета e может принимать различные значения, определяющие формы конических сечений (рис. 3.6), где m_2 – фокус конического сечения. Пусть $\theta = 90^\circ$, тогда $r = p$, p – фокальный параметр орбиты. В случае $\theta = 0^\circ$ $r = r_{\min}$.

Также $\theta = 0^\circ$ соответствует нулевой линии или линии аписид (рис. 3.7).

В 1609 – 1619 годах немецкий астроном Иоганн Кеплер вывел три закона движения небесных тел. Первый закон Кеплера: траектория КА в задаче двух тел есть коническое сечение, в одном из фокусов которого расположен притягивающий центр.

Выражение (3.21) можно переписать в виде

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

или через секториальную площадь dA , которую ометает радиус-вектор при повороте на угол $d\theta$:

$$h = 2 \frac{dA}{dt}. \quad (3.25)$$

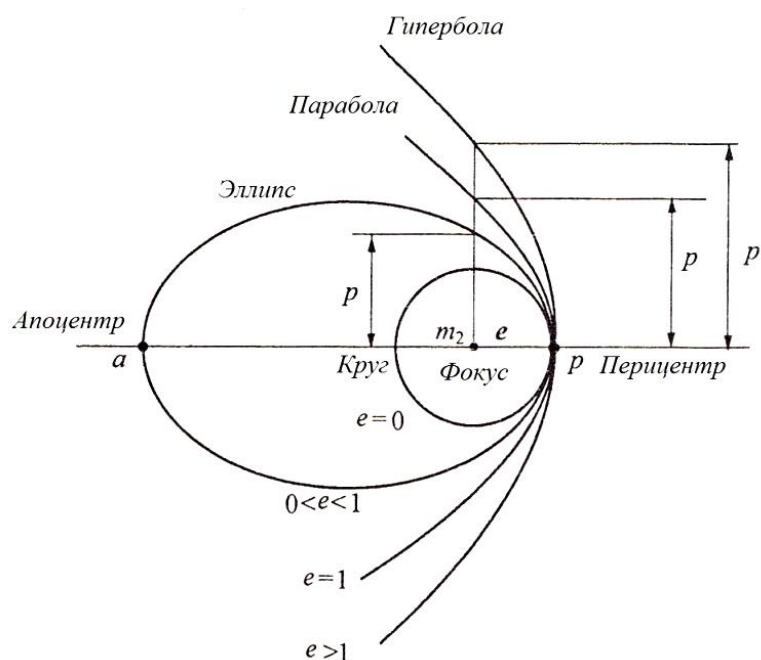


Рис. 3.6. Виды конических сечений

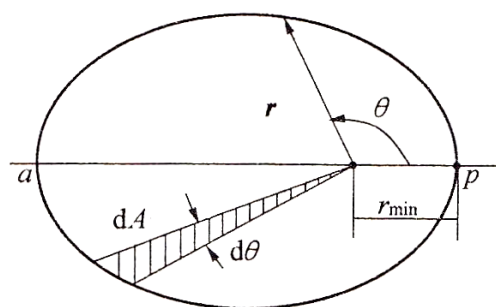


Рис. 3.7. Площадь, ометаемая радиус-вектором

Поскольку момент импульса сохраняется (см. выражение (3.10)), то из приведенного выше уравнения следует, что площадь сектора, ометаемого космическим аппаратом в единицу времени, является постоянной. Этот вывод справедлив для всех четырех типов орбит и называется вторым законом Кеплера. Очевидно, что чем больше радиус орбиты, тем меньше скорость в этой точке, и наоборот, чем ближе КА находится к центру орбиты, тем выше скорость.

Далее рассмотрим различные типы орбит и основные параметры движения КА по ним.

3.2.2 Круговая орбита

При $e = 0$ имеем случай круговой орбиты, а уравнения (3.14) и (3.24) принимают вид:

$$r = h^2 / \mu = p. \quad (3.26)$$

Ясно, что $\dot{r} = 0$, тогда из (3.19) следует, что скорость будет иметь только вертикальную составляющую

$$v_c = r\dot{\theta}. \quad (3.27)$$

Здесь v_c – скорость на круговой орбите (индекс «с» указывает на движение по круговой орбите). Если в (3.26) подставить $h = rv_c$, то

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \quad (3.28)$$

Из этого уравнения можно получить величину первой космической скорости $v_c = 7,9 \text{ км/с}$, которая равна круговой скорости у поверхности Земли.

Период обращения:

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}. \quad (3.29)$$

Для Земли минимальное значение периода обращения составляет 84.5 минут.

Из приведенного выше соотношения (3.22) можно получить постоянную энергии для движения по круговой орбите

$$\varepsilon_e = -\frac{\mu}{2r}. \quad (3.30)$$

Эта величина отрицательна, т.к. кинетическая энергия движения по круговой орбите меньше потенциальной энергии.

3.2.3 Эллиптическая орбита

За один оборот спутника по эллиптической орбите длина его радиус-вектора один раз достигает своего максимального и один раз своего минимального значения (рис. 3.8).

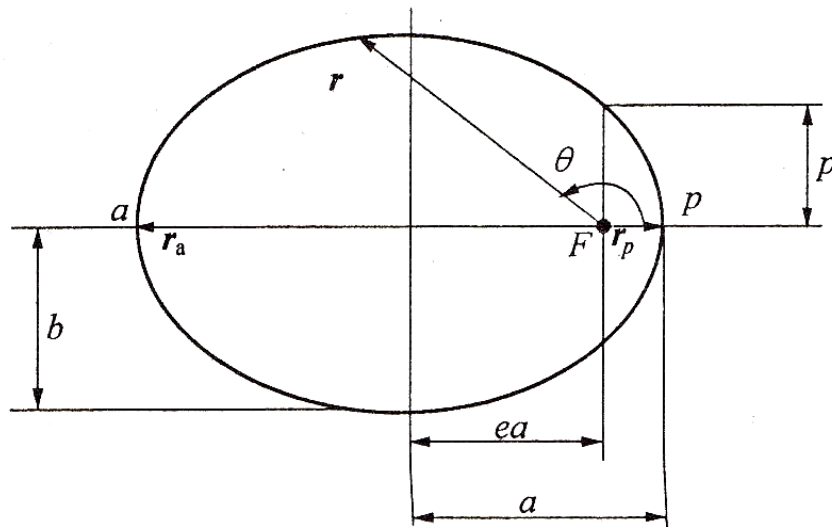


Рис. 3.8. Геометрические параметры эллиптической орбиты

При $\theta=0$ из выражения (3.24) можно получить формулу для радиуса перицентра

$$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e). \quad (3.31)$$

При $\theta = \pi$ аналогично получается выражение для радиуса апоцентра орбиты

$$r_{\alpha} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \quad (3.32)$$

Большая полуось орбиты определяется выражением:

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad (3.33)$$

где $p = a(1-e^2)$ – фокальный параметр орбиты

Эксцентриситет:

$$e = \frac{r_{\alpha} - r_p}{r_{\alpha} + r_p}. \quad (3.34)$$

Из канонического уравнения эллипса можно найти малую полуось и площадь:

$$b^2 = a^2(1-e^2),$$

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}. \quad (3.35)$$

Иногда при описании движения КА по эллиптической орбите удобно вместо угла истинной аномалии θ использовать угол эксцентрической аномалии ψ (рис. 3.9):

$$\cos \psi = \frac{ea + r \cos \theta}{a}, \quad (3.36)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}. \quad (3.37)$$

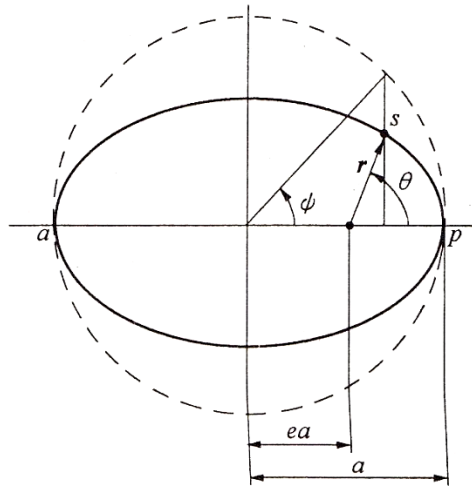


Рис. 3.9. Углы истинной и эксцентрической аномалии

Выражение (3.20) с учетом того, что в (3.24) производная $\dot{r} = 0$ при $\theta = 0$, примет вид:

$$\frac{r_p^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \varepsilon_e.$$

С учетом (3.21) и (3.23):

$$\mu \left(\frac{p}{2r_p^2} - \frac{1}{r_p} \right) = \varepsilon_e.$$

Так как $r_p = a(1-e)$ и $p = a(1-e^2)$, то полная энергия движения КА по эллиптической орбите запишется в виде:

$$-\frac{\mu}{a} = \varepsilon_e.$$

С учетом (3.20), (3.22) и (3.17) можно получить различные выражения для полной энергии:

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \quad (3.38a)$$

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2 / r^2) - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \quad (3.38б)$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}. \quad (3.38в)$$

Так как a и μ – величины положительные, то постоянная интеграла энергии отрицательна.

Подставим (3.21) в (3.23):

$$p = \frac{r^4 \dot{\theta}^2}{\mu}.$$

Уравнения (3.14) и (3.24) не очень четко отражают взаимосвязь между орбитальным движением и временем. Получим эту взаимосвязь с помощью уравнения (3.24), разделив переменные в последнем выражении

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta.$$

Нахождение времени в последнем выражении сводится к решению трансцендентного уравнения.

Если в (3.24) подставить выражение (3.33), получим

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (3.39)$$

Из (3.36) можно получить

$$\cos \psi = \frac{a-r}{ae}. \quad (3.40)$$

Продифференцировав, получим:

$$\sin \psi = \frac{\dot{r}}{\dot{\psi}} \frac{1}{ae}.$$

Возводя в квадрат выражение для $\sin \psi$ и подставляя в него $\cos \psi$, получим:

$$\left(\frac{\dot{r}}{\dot{\psi}} \right)^2 = a^2 e^2 - (a-r)^2.$$

Умножим (3.38б) на $2ar^2/\mu$, далее используя выражения (3.23) и (3.33), чтобы исключить h^2/μ и p , получим:

$$\frac{r^2 \dot{r}^2 a}{\mu} = a^2 e^2 - (a-r)^2.$$

Теперь приравняем левые части последних двух уравнений:

$$\frac{\dot{r}^2 a}{\mu} = \frac{1}{\dot{\psi}^2} = \left(\frac{dt}{d\psi} \right)^2.$$

Из выражения (3.40) выразим r и подставим в приведенную выше формулу, получим:

$$(1 - e \cos \psi) d\psi = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt.$$

Если началом движения считается $\psi = 0$ (КА находится в перигее), тогда после интегрирования последнего выражения получим:

$$nt_p = \psi - e \sin \psi . \quad (3.41)$$

Это уравнение Кеплера, которое связывает положение спутника на орбите со временем, прошедшим после прохождения спутником перицентра. Здесь t_p – момент времени прохождения спутника через перигей орбиты; n – среднее движение, которое определяется выражением:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} . \quad (3.42)$$

Используя выражения (3.41), (3.36) или (3.37), (3.24), можно получить взаимосвязь между r, θ и временем прохождения через перицентр t_p в каждой точке орбиты.

Чтобы в выражении (3.41) перейти от угла ψ к θ и получить уравнение для угла истинной аномалии и времени t_p , необходимо подставить выражение (3.39) в (3.36).

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \left[e + \frac{(1 - e^2) \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right]^2} \\ &= \frac{1}{1 + e \cos \theta} \sqrt{(1 + e \cos \theta)^2 - \left[e(1 + e \cos \theta) + (1 - e^2) \cos \theta \right]^2} = \\ &= \frac{1}{1 + e \cos \theta} \sqrt{(1 + e \cos \theta)^2 - (1 + e \cos \theta)^2} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} . \end{aligned}$$

Из (3.37) с учетом последнего выражения:

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right).$$

Тогда (3.41) перепишем в виде:

$$t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \right]. \quad (3.43)$$

Доказано, что скорость КА на эллиптической орбите подчиняется второму закону Кеплера. Из приведенной выше формулы или после интегрирования выражения (3.25) можно получить продолжительность одного оборота КА (период обращения):

$$T = \frac{2A}{h}.$$

Подставляя выражение (3.35) для исключения A , а также (3.23) и (3.33) в последнее выражение, получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (3.44)$$

Это уравнение соответствует выражению (3.29), полученному для кругового движения, и отражает третий закон Кеплера. Из приведенного выше уравнения видно, что период обращения КА на эллиптической орбите зависит только от большой полуоси. Подставим выражение (3.42) в (3.44), получим:

$$T = \frac{2\pi}{n}. \quad (3.45)$$

Отсюда видно, что на эллиптической орбите среднее движение n эквивалентно средней угловой скорости КА.

Зависимость между вектором скорости и вектором \bar{r} можно получить из выражения (3.38в):

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}. \quad (3.46)$$

В перигее орбиты скорость максимальна v_p , а в апогее – минимальна v_α :

$$v_p = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_\alpha}{r_\alpha + r_p}}, \quad (3.47)$$

$$v_\alpha = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_\alpha} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha} \frac{2r_p}{r_\alpha + r_p}}. \quad (3.48)$$

Указанные выше уравнения получены из выражения для постоянной интеграла энергии. Движение по эллиптическим и круговым орбитам является периодическим, круг является частным случаем эллипса при $e = 0$.

3.2.4 Параболическая орбита

При $e = 1$ имеем случай параболической орбиты, и формула (3.24) примет вид:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}. \quad (3.49)$$

При $\theta_\infty = \pi$ КА движется по касательной к асимптоте параболы в бесконечность $r = \infty$ (рис. 3.10).

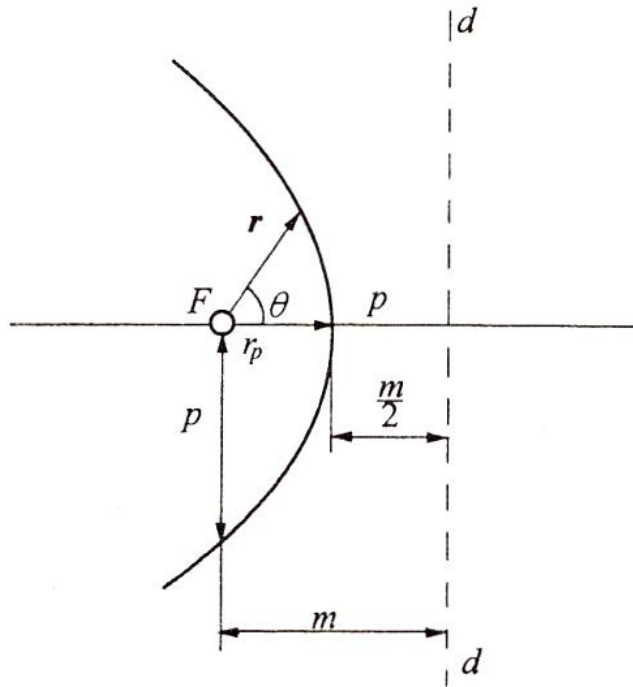


Рис. 3.10. Параболическая орбита

Производная от (3.49) запишется в виде:

$$\dot{r} = \frac{p \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \dot{\theta}.$$

Скорость:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^4} p^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\theta}^2.$$

Используя (3.49), (3.21) и (3.23), перепишем последнее выражение в виде

$$v^2 = \left(\frac{\sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} + 1 \right) r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{2r^2 \dot{\theta}^2}{1 + \cos \theta} = \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{p} = \frac{2h^2}{pr} = \frac{2\mu}{r}$$

или

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \quad (3.50)$$

Общий вид формул (3.50) и (3.28) схож. Можно сделать вывод, что для движения КА по параболической орбите его скорость должна быть в 1.414 раз больше первой космической. Вторая космическая скорость – это параболическая скорость у поверхности Земли. Она равна 11.2 км/с.

Подставив (3.50) в (3.17), мы увидим, что на параболической орбите постоянная интеграла энергии равна нулю

$$\varepsilon_e = 0. \quad (3.51)$$

Это означает, что на параболической орбите кинетическая и потенциальная энергии равны.

Уравнение для времени движения по параболической орбите получим из выражения (3.21), которое можно переписать в виде $dt = r^2 d\theta / h$, с учетом (3.49) и (3.23)

$$dt = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{d\theta}{(1 + \cos\theta)^2}.$$

Аналогичное уравнение для эллиптической орбиты было сложным для интегрирования. Проинтегрировать приведенное выше уравнение возможно, если считать, что время в точке p равно нулю:

$$t_p = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.52a)$$

Так как $p = 2r_p$ (рис. 3.10), то

$$t_p = \sqrt{\frac{2r_p^3}{\mu}} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.52б)$$

Интервал времени движения КА из положения r_1 в положение r_2 можно определить следующим образом: сначала с помощью тригонометрической формулы $(1 + \cos \theta) = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ и преобразования выражения (3.49) получим:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{p}{2r}, \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} &= 1 - \frac{p}{2r}. \end{aligned}$$

Далее, поделив второе выражение на первое и учитывая, что $p = 2r_p$:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{r}{r_p} - 1}. \quad (3.53)$$

Из (3.52б) можно найти интервал времени движения между двумя точками, удаленными от перицентра на расстояния r_1 и r_2 :

$$\begin{aligned} \Delta T &= t_p(r = r_2) - t_p(r = r_1) = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2r_p^3}{\mu}} \left[\sqrt{\left(\frac{r_2}{r_p} - 1\right)} \left(1 + \frac{r_2}{2r_p}\right) - \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_p} - 1\right)} \left(1 + \frac{r_1}{2r_p}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Следует отметить, что движение КА по параболическим орбитам, так же как и по гиперболическим, не является периодическим. Движение по параболической орбите ($e=1$) является предельным случаем движения по гиперболической орбите ($e>1$), с которым на практике сталкиваются гораздо чаще.

3.2.5 Гиперболическая орбита

При $e>1$ имеем уравнение (3.24) гиперболической орбиты. Гипербола имеет две ветви, по одной из которых движется КА (рис. 3.11).

$$r_p = ea - a = a(e - 1). \quad (3.55)$$

Из (3.24) с учетом $\theta=0$ получим

$$r_p = \frac{p}{1 + e}. \quad (3.56)$$

Тогда, приравнивая правые части и выражая p , получим

$$p = a(e^2 - 1). \quad (3.57)$$

Для гиперболической орбиты угол истинной аномалии не может бесконечно возрастать. При $r=\infty$ имеем предельное значение угла θ_∞ , которое определяются из (3.24):

$$\cos \theta_\infty = -\frac{1}{e} \text{ или } \theta_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right). \quad (3.58)$$

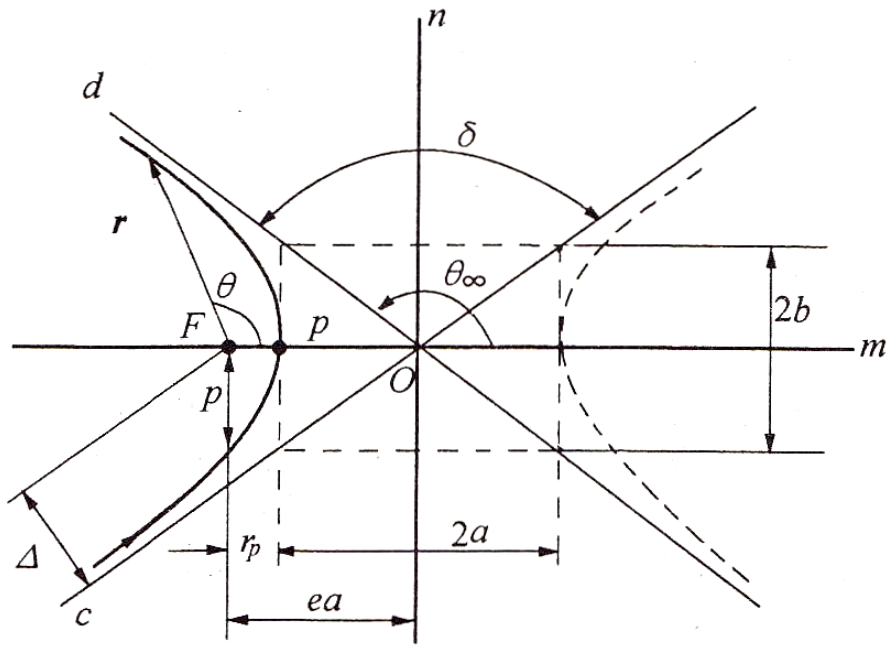


Рис. 3.11. Гиперболическая орбита

Асимптота od и ось om образуют угол θ_∞ (рис. 3.11). Угол между асимптотами – δ . Таким образом, КА движется из асимптотической бесконечности вдоль oc , затем в окрестности фокуса (притягивающего центра) поворачивается на угол $\pi - \delta$, а когда направление его радиус-вектора становится параллельным асимптоте в окрестности фокуса (притягивающего центра) радиус-вектор точки снова устремляется к бесконечности.

Предельное значение угла истинной аномалии можно записать также в виде

$$\theta_\infty = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \quad (3.59)$$

или приравняв правую часть (3.59) к правой части (3.58), получим:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{e}. \quad (3.60)$$

Используя формулы (3.24), (3.55) и (3.56), можно получить выражение для постоянной интеграла энергии, аналогичное выражению (3.20):

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \quad (3.61a)$$

или

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}. \quad (3.61b)$$

Последнее выражение показывает, что полная энергия положительна, в то время как на рассмотренных круговых и эллиптических орбитах она отрицательна, а на параболической равна нулю. Из (3.61) можно найти скорость КА на бесконечности (т. е. при $r = \infty$):

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}. \quad (3.62)$$

Если F – фокус гиперболы, а Δ – расстояние от фокуса до асимптоты, то постоянную интеграла площадей для гиперболической орбиты можно записать в виде

$$h = v_{\infty}\Delta. \quad (3.63)$$

С учетом (3.23), (3.57), (3.62) перепишем последнее выражение

$$h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\Delta,$$

здесь

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1}. \quad (3.64)$$

Подставим в (3.64) выражения (3.62) и $a = \mu/v_\infty^2$, получим:

$$e^2 = 1 + \frac{v_\infty^4 \Delta^2}{\mu^2}. \quad (3.65)$$

Если из (3.55) выразить a и подставить в (3.62), можно получить другую формулу для эксцентриситета:

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu}. \quad (3.66)$$

Из (3.61б) можно получить выражение для скорости, аналогичное (3.62):

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}. \quad (3.67)$$

Выполнив действия, аналогичные тем, что были сделаны в разделе 3.2.3, получим:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta.$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^\theta \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \frac{1}{e^2 - 1} \left[\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right) \right].$$

Если КА в начальный момент времени находится в перицентре орбиты, время прохождения им через перицентр определяется выражением:

$$t_p = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left[\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right) \right] \frac{1}{e^2 - 1}.$$

При $p = a(e^2 - 1)$ последнее выражение приобретает вид

$$t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[\frac{e \sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right) \right] \frac{1}{e^2 - 1}. \quad (3.68)$$

4 ФОРМИРОВАНИЕ ОРБИТ И ПОСТРОЕНИЕ ТРАССЫ ПОДСПУТНИКОВОЙ ТОЧКИ

Содержание этой главы базируется на основных понятиях, полученных во второй главе, и включает вопросы определения параметров движения КА по известным параметрам орбиты и, наоборот, определение элементов орбиты по параметрам движения (векторам скорости и координат). Анализируется взаимосвязь между условиями запуска и параметрами орбиты при запуске КА с фиксированной на Земле точки. Также рассматриваются вопросы построения трассы подспутниковой точки.

4.1 Формирование орбиты

В этом разделе рассмотрим взаимосвязь между скоростью КА \bar{v}_0 , углом между вектором скорости и местной горизонтальной плоскостью β_0 , радиус-вектором \bar{r}_0 (рис. 4.1) и формой орбиты при выключенной двигательной установке на борту КА.

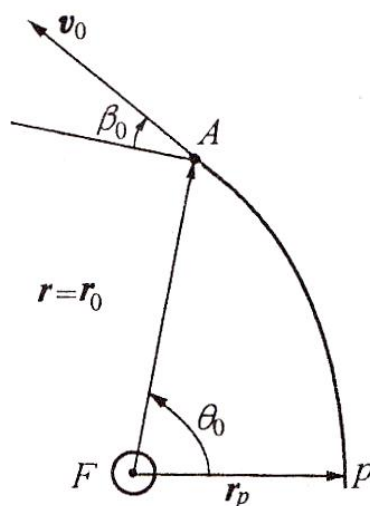


Рис. 4.1. Скорость движения КА по орбите

Если \bar{r}_0 и θ_0 – радиус-вектор и угол истинной аномалии в точке А (рис. 4.1), то из уравнения (3.24) для конического сечения можно найти эксцентриситет e и половину фокусного

расстояния p и, таким образом, определить орбиту КА. В общем случае, орбита КА может быть определена, если заданы любые два элемента из e, p, a . При $p = h^2/\mu$, зная β_0, r_0, v_0 , найдем:

$$h = v_0 r_0 \sin(\hat{v}_0, r_0) = v_0 r_0 \cos \beta_0. \quad (4.1)$$

По значению эксцентриситета e можно определить форму орбиты.

Для удобства дальнейших преобразований введем обозначение $\rho = \frac{1}{r}$, тогда выражение (3.24) запишется в виде

$$\rho = \frac{1}{r} = \frac{\mu(1 + e \cos \theta)}{h^2}. \quad (4.2)$$

Проекция скорости v_0 на горизонтальное направление $r\dot{\theta}$, что видно из рис. 4.1 и уравнений (3.21) и (4.1):

$$v_0 \cos \beta_0 = r_0 \dot{\theta}_0 = \frac{h}{r_0}. \quad (4.3)$$

Компонента скорости в радиальном направлении \dot{r} :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2} = -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) h = -\frac{d\rho}{d\theta} h. \quad (4.4)$$

Продифференцируем выражение (4.2) по времени $\frac{d\rho}{d\theta}$ и определим из рис. 4.1 $v_0 \sin \beta_0 = \dot{r}$:

$$v_0 \sin \beta_0 = \dot{r} = \frac{\mu e \sin \theta_0}{h}. \quad (4.5)$$

Подставляя выражение (4.1) и (3.24) в приведенную выше формулу, получим:

$$\begin{aligned} e \sin \theta_0 &= (r_0 v_0^2 / \mu) \sin \beta_0 \cos \beta_0, \\ e \cos \theta_0 &= (r_0 v_0^2 / \mu) \cos^2 \beta_0 - 1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поделим одно уравнение на другое и запишем сумму их квадратов:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{(r_0 v_0^2 / \mu) \sin \beta_0 \cos \beta_0}{(r_0 v_0^2 / \mu) \cos^2 \beta_0 - 1}, \quad (4.7)$$

$$e^2 = \left[(r_0 v_0^2 / \mu) - 1 \right]^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0. \quad (4.8)$$

Эксцентриситет e и угол θ_0 определяются из последних двух уравнений по уже известному r_0 , что позволяет получить p из (3.24). Таким образом, с помощью параметров β_0, v_0, r_0 определяется форма орбиты.

Большая полуось орбиты a может быть найдена из выражения (3.38в) или (3.61б) в зависимости от формы орбиты:

$$a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu}} \quad (\text{эллиптическая орбита}), \quad (4.9a)$$

$$a = \frac{r_0}{\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 2} \quad (\text{гиперболическая орбита}). \quad (4.9б)$$

Из (4.8) следует, что если $\beta_0 \neq 0$, то и эксцентриситет e никогда не будет нулевым. Случай, когда $\beta_0 = 0$, соответствует круговой орбите (3.28):

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}.$$

Это результат решения уравнения (3.28). При $e=1$ КА движется по параболической орбите, и скорость его движения можно найти с помощью выражения (4.8)

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}.$$

Это результат решения уравнения (3.50).

Уравнения (4.7) и (4.8) являются трансцендентными. Когда не требуется очень высокая точность, задача может быть решена графически. Решению уравнения (4.8) соответствует кривая на рис. 4.2 в поле безразмерных параметров $r_0 v_0^2 / \mu$, β_0 и эксцентриситета при различных значениях β_0 .

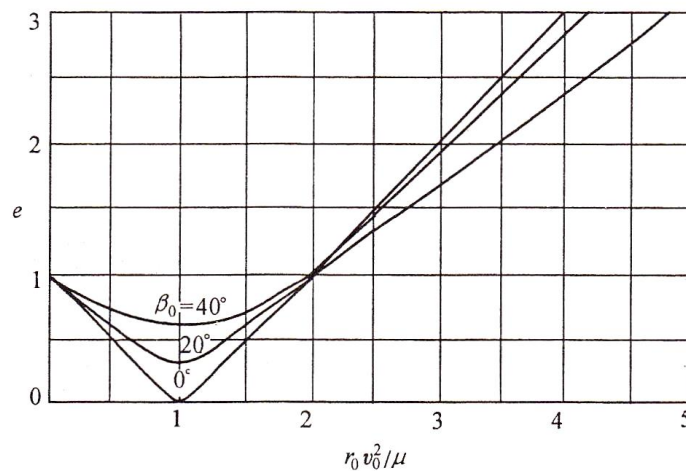


Рис. 4.2. Зависимость $e(r_0 v_0^2 / \mu)$ при различных значениях β_0

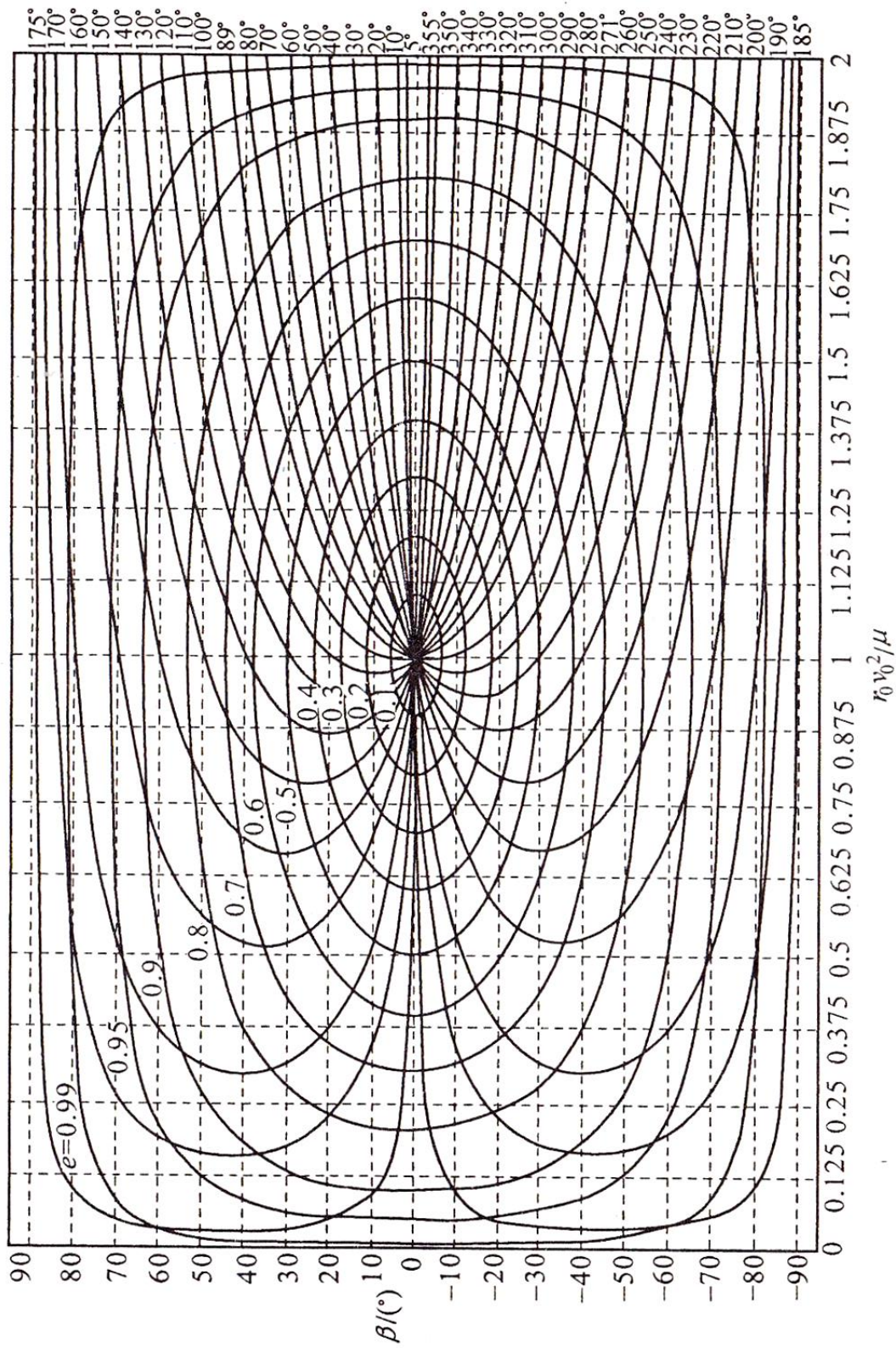


Рис. 4.3. Зависимость $\beta(rv^2/\mu)$, $\theta(rv^2/\mu)$ при различных значениях e для эллиптической траектории

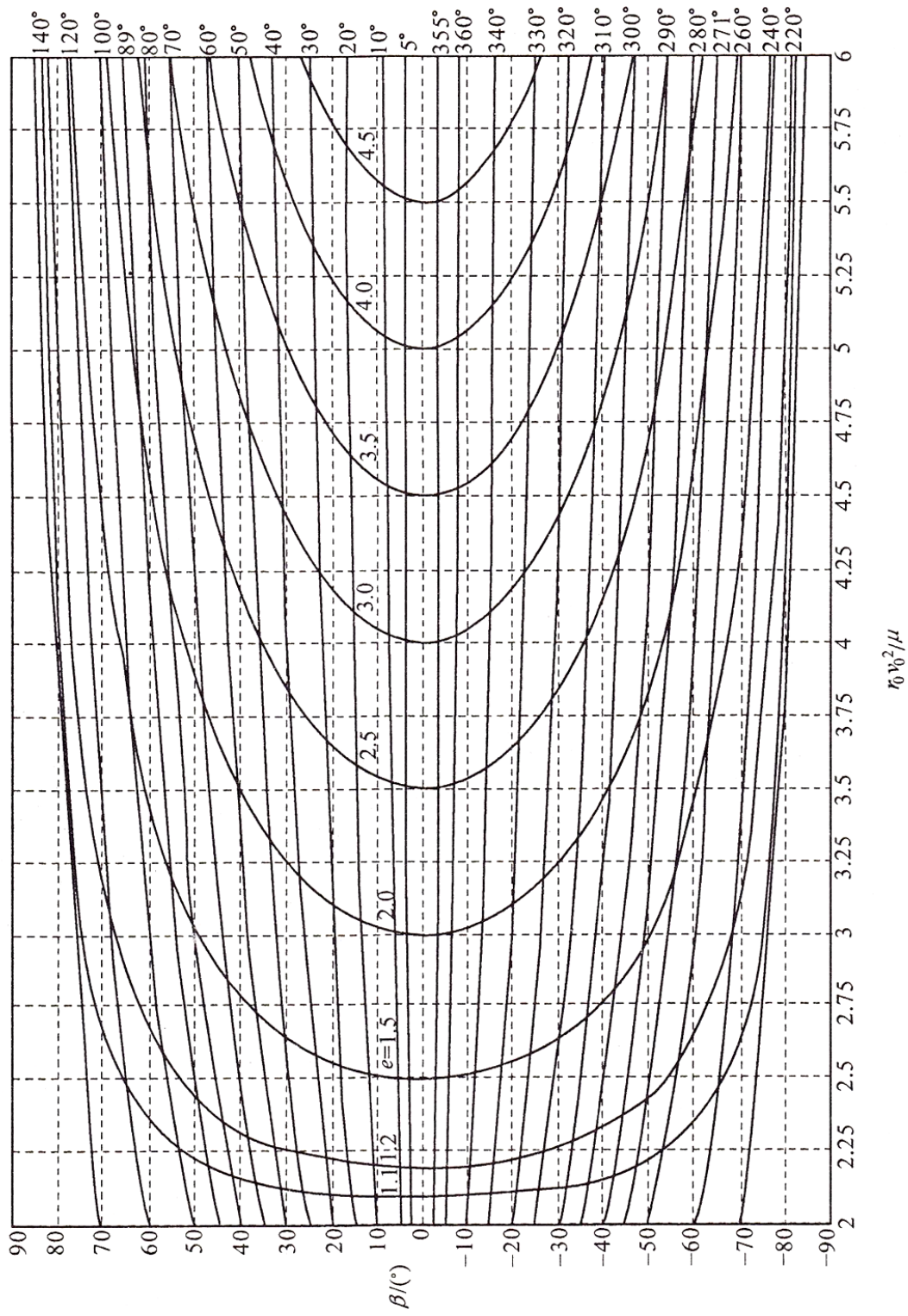


Рис. 4.4. Зависимость $\beta(rv^2/\mu)$, $\theta(rv^2/\mu)$ при различных значениях e для гиперболической траектории

Для эллиптической орбиты кривые, соответствующие уравнениям (4.7) и (4.8), показаны на рис. 4.3, для параболической – на рис. 4.4. Таким образом, если известны два параметра $e, r_0 v_0^2 / \mu, \theta_0$ или β_0 , то по графикам можно найти два других параметра.

Пример 1. Пусть задана высота орбиты $H_0 = 222 \text{ км}$, скорость входа КА в 1.2 раза больше круговой скорости, угол $\beta_0 = 20^\circ$. Требуется определить орбиту КА.

По условию задачи:

$$r_0 = R_{\oplus} + H_0 = 6378 + 222 = 6600 \text{ км},$$

$$\frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 1.2^2 = 1.44.$$

Из рис. 4.3 для $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 1.44$ и $\beta_0 = 20^\circ$ можно получить $e = 0.54$ и $\theta_0 = 60^\circ$, тогда из формулы (4.9(а)) получаем $a = 15357 \text{ км}$. Вид околоземной орбиты, построенный в масштабе, показан на рис. 4.5. Также для расчета этих параметров можно использовать формулы (4.7) и (4.8), результаты расчета будут теми же.

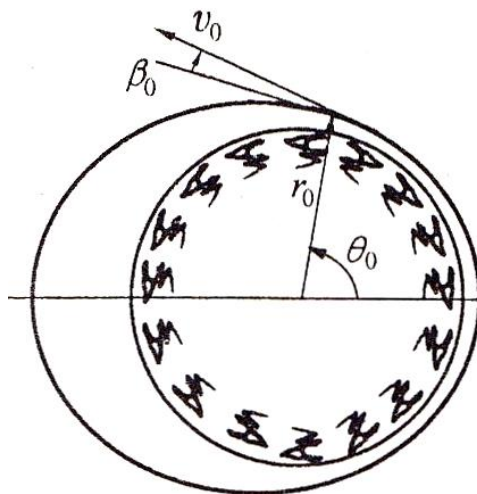


Рис. 4.5. Вид орбиты

4.2 Связь между элементами орбиты и параметрами запуска

Элементы орбиты определяют ориентацию плоскости орбиты в пространстве, ориентацию орбиты в ее плоскости, форму орбиты и положение космического аппарата на орбите. Существует 6 элементов орбиты. Это наклонение орбиты i , долгота восходящего узла Ω , аргумент перицентра ω , угол истинной аномалии θ , большая полуось a и эксцентриситет e .

Заметим, что плоскость орбиты космического аппарата должна проходить через центр масс гравитирующего тела (Земля). Это связано с тем, что силы в плоском движении должны лежать в этой плоскости и гравитационная сила должна проходить через центральное тело. Различными видами возмущений пренебрегаем.

Далее введем понятия широты и долготы. На рис. 4.6 показаны Земля, ось Земли, северный полюс N , южный полюс S . Окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси NS , называется экватором. Плоскости, проходящие через ось Земли, называются меридиональными плоскостями. Линия пересечения меридиональной плоскости с поверхностью Земли называется меридианом. Меридиан, который проходит через Гринвичскую обсерваторию под Лондоном, называется нулевым меридианом (начальной точкой отсчета долготы). В восточном направлении отсчитывается восточная долгота, в западном – западная. P – произвольная точка на поверхности Земли, которая имеет свои координаты долготы λ и широты φ . В северном полушарии отсчитывается северная широта, в южном – южная.

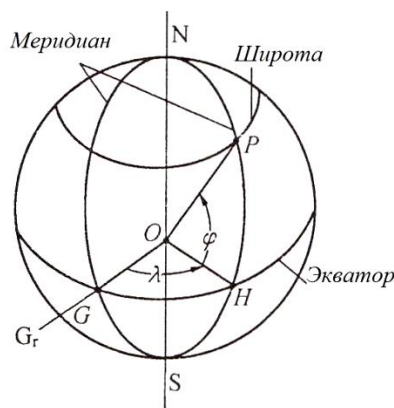


Рис. 4.6. Определение широты и долготы

На рис. 4.7 точка O – центр масс Земли. Небесная сфера – это сфера с произвольным радиусом и центром в точке O . Наклонение орбиты i и долгота Ω определяют положение плоскости орбиты в пространстве. Наклонение i – это угол между плоскостью орбиты и плоскостью экватора. Долгота восходящего узла Ω – угол между направлением на точку весеннего равноденствия и линией узлов со стороны восходящего узла. Восходящий узел – точка, лежащая в плоскости экватора, через которую проходит КА при его движении из южного полушария в северное. Линия, соединяющая нисходящий и восходящий узлы, называется линией узлов. Она является линией пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора.

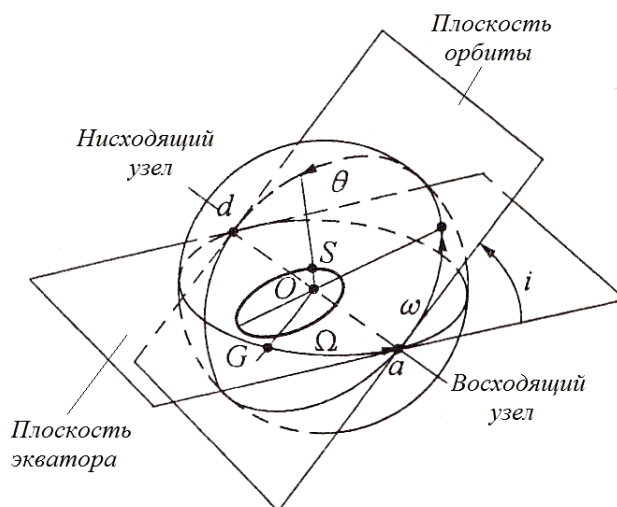


Рис. 4.7. Положение плоскости орбиты

Аргумент перицентра ω определяет ориентацию орбиты в ее плоскости. Это угол между линией узлов со стороны восходящего узла и линией асид со стороны перицентра.

Остальные три элемента орбиты определяют положение космического аппарата на орбите θ и форму орбиты через элементы a, e .

Элементы a, e определяются параметрами r_0, β_0, v_0 в точке выведения КА на орбиту, а элементы Ω, i, ω зависят от широты и долготы точки запуска, а также от направления запуска.

На рис. 4.8 показана небесная сфера. Точка C – точка выведения КА на орбиту. В этой точке КА имеет скорость v_0 и радиус-вектор r_0 . Проведем касательную cb к меридиану через точку C в направлении север-юг. Затем построим касательную плоскость к небесной сфере в точке C . Она пересекается с плоскостью экватора по линии ab , которая лежит в направлении восток-запад. Видно, что $ab \perp cb$ и $ab \perp Ob$. Вертикальная компонента v_v скорости v_0 и радиус Oc лежат в меридиональной плоскости. Угол ν – угол между горизонтальной компонентой скорости v_H и направлением на восток E . Если точка a лежит на продолжении v_H , то Oca лежит в плоскости орбиты. Oa – линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора. Oa – линия узлов. Точка k лежит на линии пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора и называется восходящим узлом. Долгота восходящего узла Ω отсчитывается от нулевого меридиана вдоль экватора до точки k . Угол между радиусами Ok и Oc является суммой аргумента перицентра ω и угла θ_0 . Угол $\angle cOb$ – широта φ в точке C . Угол $\angle bOG$ – долгота точки C . Построим плоскость cdf перпендикулярно плоскости экватора и линии Oa .

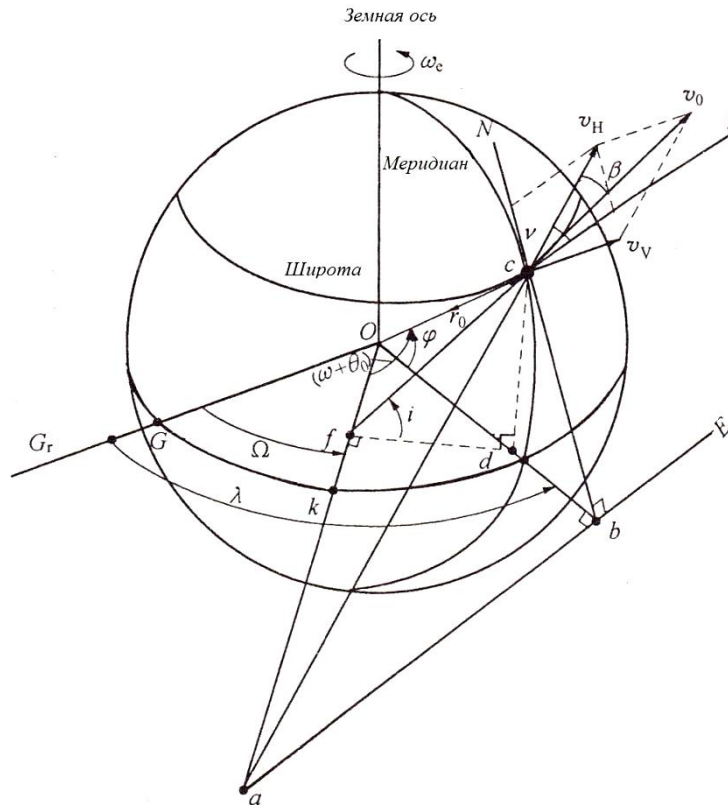


Рис. 4.8. Элементы орбиты в пространстве

Пусть $\Delta\lambda = \lambda - \Omega$. Для ΔabO , Δabc и ΔOcb можно записать

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta\lambda &= \frac{Ab}{Ob}, \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \nu \right) &= \operatorname{ctg} \nu = \frac{ab}{cb}, \\ \sin \varphi &= \frac{cb}{Ob}. \end{aligned}$$

Из трех формул, приведенных выше, получим:

$$\operatorname{tg} \Delta\lambda = \operatorname{ctg} \nu \sin \varphi. \quad (4.10)$$

Долгота восходящего узла может быть найдена следующим образом (рис. 4.8):

$$\Omega = \begin{cases} \lambda - \Delta\lambda, \\ (\text{запуск на северо} - \text{восток или северо} - \text{запад}, \nu > 0); \\ \lambda - \Delta\lambda + \pi \\ (\text{запуск на юго} - \text{восток или юго} - \text{запад}, \nu < 0). \end{cases} \quad (4.11)$$

Следует отметить, что в формуле (4.10) φ положительно в северном полушарии и отрицательно в южном. Угол ν положителен в направлении на север и отрицателен в направлении на юг.

Для треугольников ΔcdO , Δcdf , ΔOdf можно записать

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{cd}{Od}, \operatorname{tgi} = \frac{cd}{fd} \text{ и } \sin \lambda = \frac{fd}{Od}.$$

Таким образом:

$$\operatorname{tgi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \Delta\lambda}. \quad (4.12)$$

По формуле (4.10) получим

$$\sin \Delta\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \Delta\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu / \sin^2 \varphi}}.$$

Подставим последнее выражение в (4.12):

$$\operatorname{tgi} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{\operatorname{tg}^2 \nu}{\cos^2 \varphi}}. \quad (4.13)$$

Наклонение и долготу восходящего узла можно получить с помощью формул (4.11) и (4.13), зная широту и долготу.

В формуле (4.13) следует отметить, что значения наклона могут быть как положительными, так и отрицательными. Если КА в точке C движется на восток, то знак «плюс», если на запад, то «минус».

В формуле (4.13) второе слагаемое всегда положительно, независимо от значения угла ν , поэтому абсолютная величина наклона орбиты i всегда не меньше местной широты φ . Когда $\nu = 0$ (при движении на восток) или π (при движении на запад), то $i = \varphi$ или $i = \pi - \varphi$. Когда $0 \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}$ (при движении на север) или $-\frac{\pi}{2} \leq \nu \leq 0$ (при движении на юг), наклонение орбиты увеличивается от φ или уменьшается от $(\pi - \varphi)$ до $i = \frac{\pi}{2}$. Орбиты с наклоном $i = \frac{\pi}{2}$ называются полярными орбитами. Орбиты с наклоном $i = 0$ называются экваториальными.

Теперь получим выражение для угла ω . Из треугольников ΔOcf , ΔOcd , Δcdf видно:

$$\sin(\omega + \theta_0) = \frac{cf}{Oc} \sin \varphi = \frac{cd}{Oc} \sin i = \frac{cd}{cf},$$

$$\sin(\omega + \theta_0) = \frac{\sin \varphi}{\sin i}, \quad (4.14a)$$

$$\omega = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi}{\sin i}\right) - \theta_0. \quad (4.14b)$$

Формула (4.14a) выражает угол между линией узлов и положением КА на орбите. А формула (4.14b) выражает угол между линией узлов и линией аписид со стороны перицентра.

4.3 Трасса подспутниковой точки

Подспутниковая точка – это проекция положения спутника на поверхность Земли. Трасса подспутниковой точки – это непрерывная кривая, которая состоит из подспутниковых точек, через которые проходит КА.

Если не учитывать вращение Земли, то КА будет всегда двигаться в плоскости орбиты, которая не меняет своего положения относительно Земли. В этом случае трасса подспутниковой точки представляет собой окружность, по которой поверхность Земли пересекается с плоскостью орбиты. Но в действительности Земля непрерывно вращается с запада на восток и орбиты КА различны, в каждой точке орбиты скорости КА разные, что приводит к тому, что трассы КА могут иметь различны.

Пусть на рис. 4.8 точка C – положение КА в произвольный момент времени, тогда этот рисунок можно использовать для расчета трассы подспутниковой точки. Пусть известны значения трех параметров v, r, θ в начальный момент времени v_0, r_0, θ_0 . Широта и долгота (λ, φ) определяют положение подспутниковой точки. Считаем, что в заданный момент времени вращение Земли отсутствует, тогда по формуле (4.14а) можно получить:

$$\varphi = \arcsin(\sin i \sin(\omega + \theta)). \quad (4.15)$$

Здесь:

- при $0 < \omega + \theta < \pi$: $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$,
- при $\pi < \omega + \theta < 2\pi$: $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$.

Из ΔOcf , Δcfd , ΔOfd можно получить

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\omega + \theta) &= \frac{cf}{Of}, \quad \cos i = \frac{fd}{cf}, \quad \cos i = \frac{fd}{cf}, \\ \operatorname{tg} \Delta \lambda &= \cos i \operatorname{tg}(\omega + \theta), \end{aligned} \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\sin \Delta \lambda) &= \operatorname{sign}(\sin(\omega + \theta)), \\ \lambda &= \Omega + \Delta \lambda. \end{aligned} \quad (4.16b)$$

Если известны i, Ω, ω , то для текущего угла θ из формул (4.15), (4.16a), (4.16б) можно получить широту и долготу подспутниковой точки в тот же момент времени.

Но так как i, ω постоянны для орбиты, то вращение Земли повлияет только на значение Ω . Это связано с тем, что плоскость орбиты не меняет своего положения в инерциальном пространстве, а Земля вращается вокруг своей оси. Для некоторого момента времени t_p^* получим значение долготы восходящего узла Ω^* :

$$\Omega = \Omega^* - \omega_e(t_p - t_p^*) \quad (4.17)$$

где ω_e – угловая скорость вращения Земли (один оборот в сутки или $15^\circ/\text{час}$). Поэтому

$$\lambda = \Delta \lambda + \Omega^* - \omega_e(t_p - t_p^*). \quad (4.18)$$

Время прохождения через перицентр орбиты t_p можно найти из формул (3.37) и (3.41) в виде

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right), \quad t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (\psi - e \sin \psi).$$

На рис. 4.9 показана трасса подспутниковой точки КА, который движется по круговой орбите с наклоном 60° и перио-

дом обращения 3 часа. Пунктиром показана трасса без учета вращения Земли. Действительно, Земля за час поворачивается с запада на восток на угол 15° . Когда спутник сделает один оборот по своей орбите, Земля повернется на 45° на восток. Это эквивалентно тому, что спутник сдвинется на то же расстояние на запад. Таким образом, пунктирная линия станет сплошной. Спутник будет уходить на 45° на запад после каждого оборота (линии 2, 3, 4 на рис. 4.9). После восьмого оборота Земля возвращается на $45^\circ \cdot 8 = 360^\circ$. Трасса подспутниковой точки повторится снова с линии 1. Предельные значения широты в северном и южном полушариях соответствуют $\varphi = i$ (в этом примере северная и южная широты равны 60°). Спутник может двигаться как с юго-запада (кривая 2), так и с северо-запада (кривая 4). Если периоды обращения спутника и Земли не являются кратными, то трасса подспутниковой точки никогда не будет повторяться.

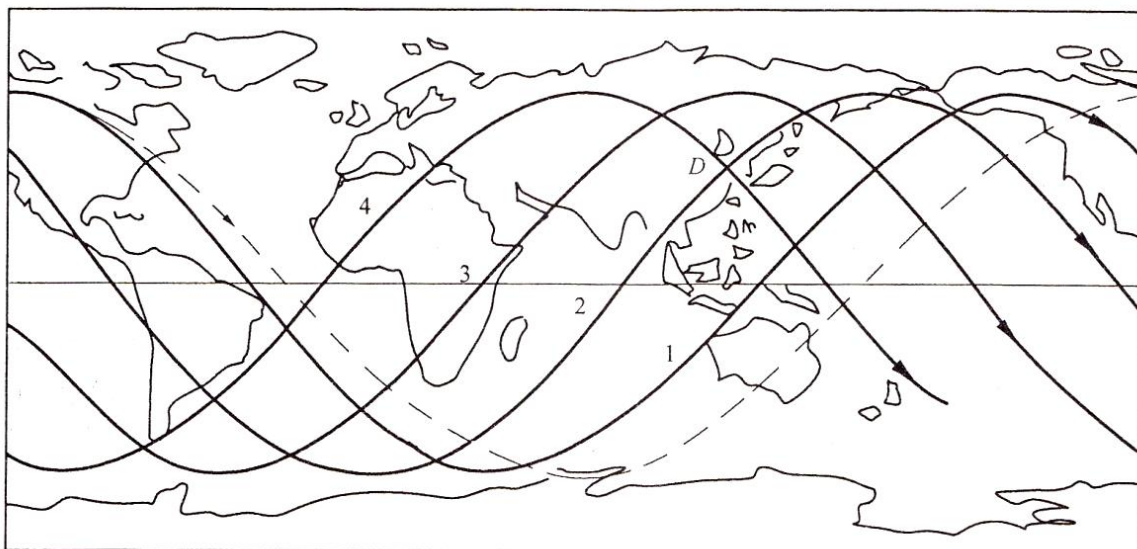


Рис. 4.9. Трасса подспутниковой точки для круговой орбиты

На рис. 4.10 показана трасса эллиптической орбиты КА с наклоном $i = 63.4^\circ$, высотой апоцентра в северном полушарии 40000 км, высотой перигея в южном полушарии 500 км,

периодом обращения 12 часов. Трасса подспутниковой точки на рис. 4.10 состоит из двух одинаковых кривых линий. Это связано с тем, что Земля делает один оборот, в то время как спутник делает два. Метки на трассе – это шкала времени. Между любой парой соседних точек спутник движется один час. Видно, что большую часть времени спутник находится в северном полушарии.

Если наклонение орбиты равно нулю, то орбита называется экваториальной и лежит в плоскости экватора, спутник движется с запада на восток с периодом 24 часа и подспутниковая точка всегда находится на экваторе и ее положение не меняется со временем. Такая орбита называется геостационарной. Спектр ее использования очень широк. Но если существуют какие-то погрешности в наклонении, то наклонение станет ненулевым и трасса подспутниковой точки будет иметь вид на рис. 4.11.

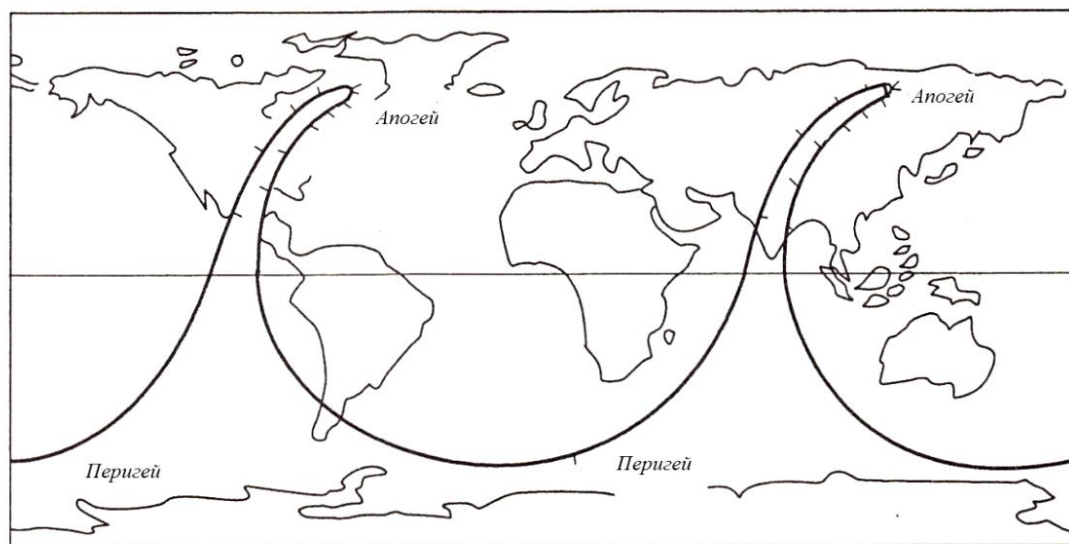


Рис. 4.10. Трасса подспутниковой точки на эллиптической орбите

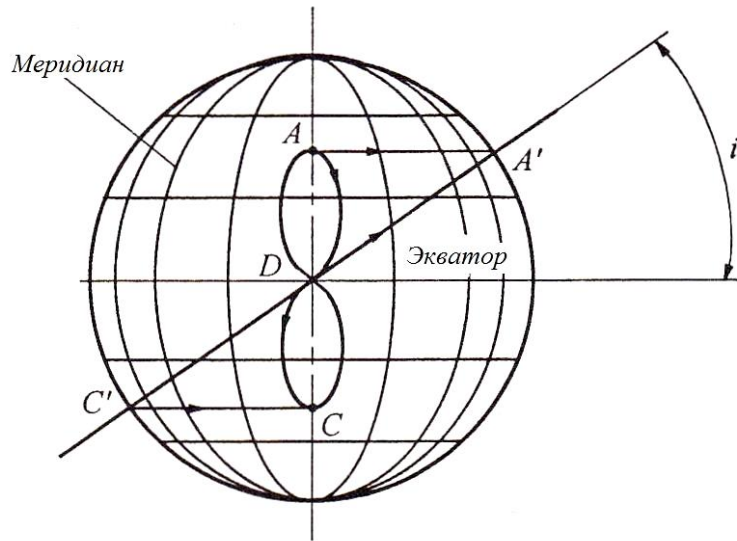


Рис. 4.11. Трасса геостационарного спутника

4.4 Дальность полета баллистических ракет

Полет баллистических ракет большой дальности происходит в атмосфере малую часть времени. В первом приближении можно пренебречь сопротивлением атмосферы. Поэтому для расчета траектории можно использовать формулы (4.7) и (4.8). Через точку старта и точку цели можно провести плоскость, проходящую через центр Земли, и определить центральный угол φ и угол истинной аномалии θ_0 в точке старта (рис. 4.12). По формулам (4.7) и (4.8) получим θ_0 , v_0 . Точка старта и точка цели симметричны, следовательно, $\frac{\varphi}{2} = 180^\circ - \theta_0$ или $\operatorname{tg} \theta_0 = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. По формуле (4.7):

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = -\frac{(R_{\oplus} v_0^2 / \mu) \sin \beta_0 \cos \beta_0}{(R_{\oplus} v_0^2 / \mu) \cos^2 \beta_0 - 1}. \quad (4.19)$$

Формула (4.8) примет вид:

$$e^2 = \left[(R_{\oplus} v_0^2 / \mu) - 1 \right]^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0. \quad (4.20)$$

Зная φ и e можно получить β_0 и v_0 (или $(R_{\oplus} v_0^2/\mu)$).

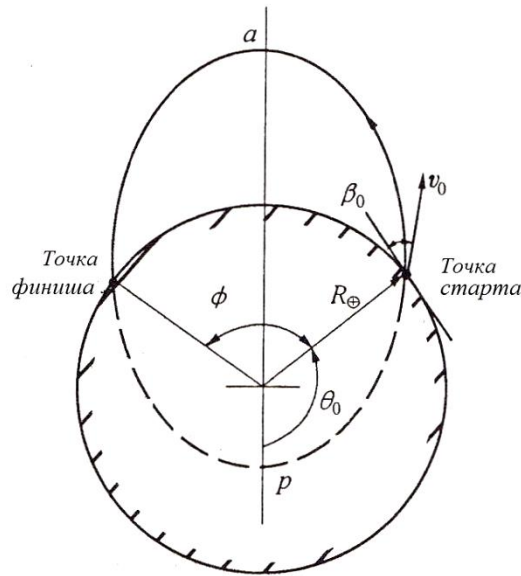


Рис. 4.12. Траектория полета баллистической ракеты

Таким образом, получим максимальную дальность с некоторой начальной скоростью v_0 (или $(R_{\oplus} v_0^2/\mu)$). Из формулы (4.19) следует:

$$\cos \beta_0 = \sqrt{\frac{1}{2 - (R_{\oplus} v_0^2/\mu)}}. \quad (4.21)$$

На рис. 4.13 показаны кривые, рассчитанные по уравнению (4.19), отражающие зависимость φ от β_0 ($(R_{\oplus} v_0^2/\mu)$ – параметр). Линия β_0 соответствует оптимальному решению уравнению (4.21).

С учетом $\theta_0 = 180^\circ - \frac{\varphi}{2}$, $r = R_{\oplus}$ и формулы (3.24) можно получить

$$p = R_{\oplus} \left(1 + e \cos(180^\circ - \varphi/2) \right).$$

По формуле (3.33), определяющей зависимость большой полуоси от фокального параметра, получим:

$$\frac{a}{R_{\oplus}} = \frac{1 - e \cos \frac{\varphi}{2}}{1 - e^2}. \quad (4.22)$$

Время полета ракеты от точки старта до цели можно определить как время одного оборота по эллипсу минус удвоенное время полета от перицентра p до точки старта. По формулам (3.44) и (3.43):

$$T = 2 \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[\pi - 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta_0}{1 + e \cos \theta_0} \right]. \quad (4.23)$$

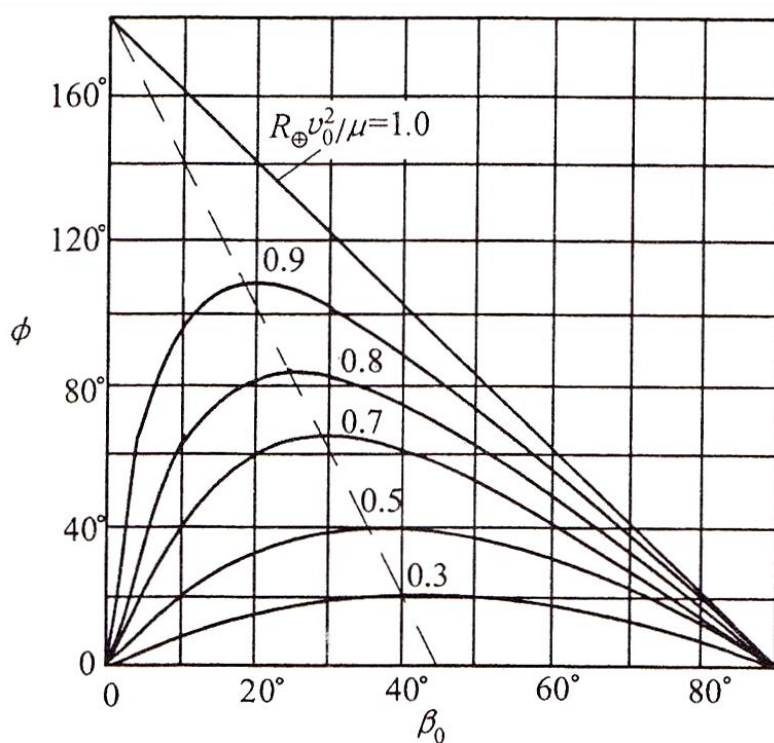


Рис. 4.13. Зависимость между φ и β_0

5 МАНЕВРИРОВАНИЕ НА ОРБИТЕ

Маневрирование на орбите включает в себя: (1) маневр межорбитального перехода – это управляемое движение, в результате которого КА переходит с начальной орбиты на конечную; (2) коррекция орбиты – это управляемое движение КА для компенсации ошибок орбитальных параметров (КА не переходит на другую орбиту); (3) сближение КА – это маневр, в результате которого активный управляемый аппарат приближается к другому на заданное расстояние с требуемой космической скоростью. В этой главе мы будем рассматривать маневры межорбитальных переходов.

5.1 Классификация маневров межорбитальных переходов

Маневры межорбитальных переходов могут быть компланарными и некомпланарными. В зависимости от формы орбит переходы могут происходить между аналогичными и различными орбитами. По характеру работы двигателя – на активные и пассивные маневры. По длине участка с работающим двигателем активные маневры можно разделить на импульсные и непрерывные. Импульсные маневры – это маневры на орбитах с короткими участками включения двигателя. Так как время работы двигателя существенно меньше времени орбитального полета, то маневры с двигателем большой тяги можно считать импульсными. При полете с электроракетными двигателями малой тяги или солнечным парусом время непрерывной работы двигателя значительно больше. В таких случаях тяга составляет порядка от нескольких тысячных ньютона до нескольких ньютонов. Время работы двигателя может достигать до нескольких лет. Существуют также непрерывные маневры с ограниченной тягой, создаваемой химическими ракетными двигателями малой тяги. Продолжительность

таких маневров превышает время импульсных маневров, но меньше времени маневров с электроракетными двигателями. Энергия пассивных маневров обусловлена внешними силами окружающей среды. Например, аэродинамической силой, гравитационной силой звезд и т.д.

По количеству импульсов импульсные маневры можно разделить на одноимпульсные и многоимпульсные маневры.

5.2 Одноимпульсные маневры (компланарные переходы между пересекающимися орбитами)

5.2.1 Одноимпульсные маневры в плоскости орбиты

Если время работы двигателя значительно меньше времени выполнения маневра, то принимается импульсная аппроксимация активных участков.

Ниже рассмотрим движение КА по эллиптическим и гиперболическим орбитам.

Под действием импульса мгновенно изменяются скорость КА и параметры его орбиты. Рассмотрим случай, когда начальная и конечная орбиты компланарны.

В разделе 4.1 мы рассмотрели метод расчета орбитальных параметров по известным r_0 , v_0 , β_0 . Эти параметры могут быть использованы для расчета орбитальных маневров. По формулам (4.7) и (4.8) можно рассчитать эксцентриситет e и угол θ_0 по известным $r_0 v_0^2 / \mu$ и β_0 :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(rv^2/\mu) \sin \beta \cos \beta}{(rv^2/\mu) \cos^2 \beta - 1}, \quad (5.1)$$

$$e^2 = \left[(rv^2/\mu) - 1 \right]^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta. \quad (5.2)$$

С помощью этих выражений можно рассчитать параметры орбиты, если известны r , μ , β . Также данные формулы могут быть использованы для расчета параметров e и θ новой орбиты, сформированной после маневра.

Если же угол θ остается постоянным по окончании маневра, то из (5.1) можно получить:

$$rv^2/\mu = \frac{1}{\cos^2 \beta - \sin \beta \cos \beta \operatorname{ctg} \theta}. \quad (5.3)$$

График для θ приведен на рис. 4.4. Если требуется, чтобы эксцентриситет e орбиты был постоянным, нужно найти взаимосвязь между β и v в выражении (5.2).

$$rv^2/\mu = \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{\cos^2 \beta}} \right). \quad (5.4)$$

Из графиков на рис. 4.3 и 4.4 видно, что e имеет два значения. Выбор конкретного значения зависит от типа орбиты.

Приведенные выше четыре формулы справедливы для всех типов конических орбит. После определения e и θ можно вычислить остальные параметры орбиты. Формула для большой полуоси может быть получена из (3.38в) и (3.61б):

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2 - (rv^2/\mu)} \text{ для эллиптической орбиты,} \quad (5.5)$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{(rv^2/\mu) - 2} \text{ для гиперболической орбиты.} \quad (5.6)$$

Пример 1. Заданы параметры начальной орбиты КА (рис. 5.1): $e_1 = 0.39$, $r = 8600 \text{ км}$, $\theta = 81.2^\circ$. КА переходит на орбиту

с $\theta = 120^\circ$, в результате чего линия апсид поворачивается на 20° и эксцентриситет становится $e = 0.6$. Необходимо найти приращение скорости, форму и параметры орбиты после маневра.

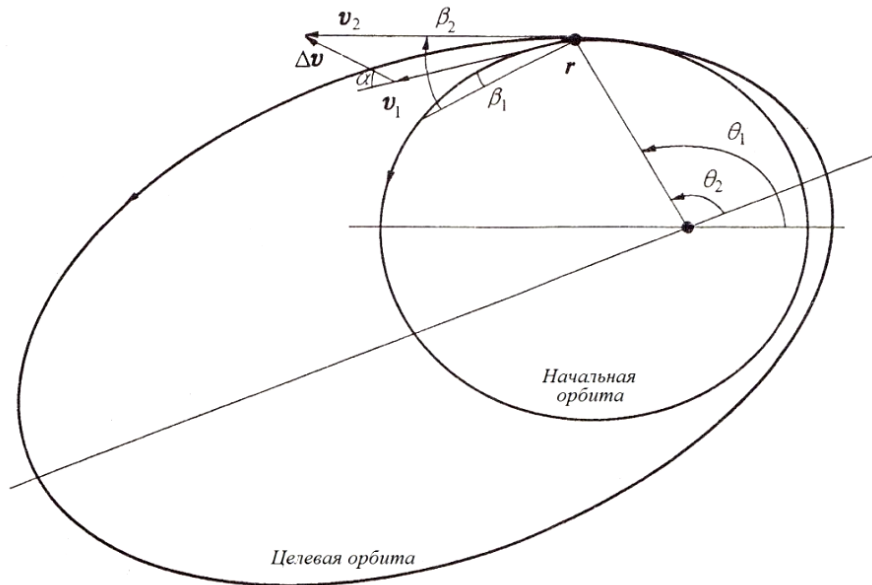


Рис. 5.1. Переход КА между орбитами

Решение.

Перед маневром межорбитального перехода: $\theta = 81.2^\circ$, $r = 8600 \text{ км}$, $e = 0.39$ фокальный параметр равен:

$$p = r(1 + e \cos \theta) = 9113.1 \text{ км}.$$

Получим r при $\theta = 120^\circ$:

$$r_1 = \frac{p}{(1 + e \cos \theta_1)} = 11322 \text{ км}.$$

Из рис. 4.3 и 4.4 получим $\beta_1 = 21.3^\circ$ и $r_1 v_1^2 / \mu = 0.95$, а затем по формулам (5.1) и (5.2) $\theta = \theta_1 = 120^\circ$, $e_1 = 0.39$.

Вычислим скорость в точке, соответствующей углу θ_1 :

$$v_1 = \sqrt{0.95 \frac{\mu}{r_1}} = 5.78 \text{ км/с}.$$

После маневра линия апсид новой орбиты повернулась на 20° в направлении движения КА. Поэтому для новой орбиты в момент маневра КА $\theta_2 = \theta - 20^\circ = 100^\circ$ (рис. 5.1), $e_2 = 0.6$. Из рис. 4.3 и формул (5.1) и (5.2) получим:

$$r_1 v_2^2 / \mu = 1.286, \quad \beta_2 = 33.4^\circ.$$

Поэтому $v_2 = \sqrt{1.286 \frac{\mu}{r_1}} = 6.73 \text{ км/с}.$

Из формулы (5.5) найдем большую полуось орбиты

$$\frac{a}{r_1} = 1.4.$$

Из рис. 5.1 получим приращение скорости:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)} = 1.55 \text{ км/с}.$$

По теореме косинусов:

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{v_1^2 + \Delta v^2 - v_2^2}{2v_1 \Delta v}.$$

Получим $\alpha = 57.7^\circ$. На рис. 5.1 показаны начальная и конечная орбиты.

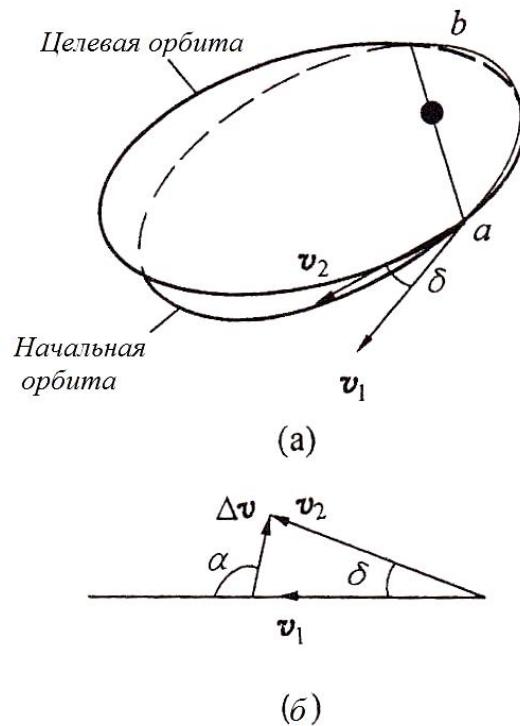


Рис. 5.2. Поворот плоскости орбиты

Если начальная и конечная орбиты некомпланарны, необходимо выполнить маневр поворота плоскости и формы орбиты. Рассмотрим маневр изменения плоскости орбиты одним импульсом. Если орбиты некомпланарны, то они должны пересекаться (рис. 5.2). Одноимпульсный переход с начальной орбиты на конечную может выполняться в двух точках на линии пересечения плоскостей. Рассмотрим точку a . Величина скорости в точке на новой орбите v_2 и на начальной орбите должны быть равны, поэтому требуется приращение скорости

$$\Delta v = v_2 - v_1,$$

$$\Delta v = 2v_1 \sin \frac{\delta}{2} = 2v_1 \cos \beta \sin \frac{\Delta i}{2}, \quad (5.7)$$

$$\alpha = 90^\circ + \frac{\delta}{2}. \quad (5.8)$$

Здесь δ – угол между векторами скорости; соотношение между δ и изменением наклона Δi : $\sin \frac{\delta}{2} = \cos \beta \sin \frac{\Delta i}{2}$. Из формулы (5.7) следует, что для экономии энергетики необходимо для маневра выбрать точку, в которой горизонтальная скорость $v_1 \cos \beta$ минимальна. Эта точка должна лежать между точками a и b на максимальном удалении от притягивающего центра.

5.2.2 Потребная энергетика одноимпульсного маневра

Запишем формулу Циолковского, устанавливающую связь между импульсом скорости Δv и массой потребного топлива (см. Приложение 2):

$$\Delta v = w \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \Delta m} \right),$$

откуда

$$\Delta m = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{w}} \right). \quad (5.9)$$

Из выражения (5.9) видно, что потребная масса топлива и импульс скорости пропорциональны. Для уменьшения расхода топлива необходимо, чтобы импульс скорости при выполнении маневра был минимальным, а скорость истечения w максимальной.

В случае если требуется изменение не плоскости орбиты, а ее формы, импульс скорости прикладывается в той же плоскости. Вектор импульса скорости можно разложить на тангенциальную и нормальную составляющую. Вектор импульса скорости для изменения плоскости орбиты должен быть перпендикулярен плоскости орбиты.

Для начала проанализируем влияние импульса скорости на форму орбиты. Считая, что r не изменяется, по формуле (5.1) получим:

$$d\theta = -\frac{\sin \beta \cos \beta \cos^2 \theta}{\left(\frac{rv^2}{\mu} \cos^2 \beta - 1\right)^2} d\left(\frac{rv^2}{\mu}\right) +$$

$$+ \frac{\left[\left(\frac{rv^2}{\mu}\right)^2 \cos^2 \beta - \frac{rv^2}{\mu} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)\right] \cos^2 \theta}{\left(\frac{rv^2}{\mu} \cos^2 \beta - 1\right)^2} d\beta.$$

По формулам (5.1) и (4.6):

$$d\theta = -\frac{2\sin \theta}{e} \frac{dv}{v} + \left(\frac{\cos \theta}{e} + \frac{2\sin^2 \beta}{e^2}\right) \frac{rv}{\mu} (vd\beta). \quad (5.10)$$

Здесь $vd\beta$ – нормальная составляющая скорости. Выразим v из формул (3.38в) и (3.61б), подставим в формулу (5.10):

$$d\theta = -\frac{2\sin \theta}{e\sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2(1+e\cos \theta)}{p} \pm \frac{1}{a}}} dv. \quad (5.11)$$

Знак «минус» используется для эллипса, «плюс» – для гиперболы. Переменными являются только v и θ . Если дан тангенциальный импульс скорости в точке $\theta=0$ и $\theta=\pi$, большая полуось орбиты не меняется (т.к. $\sin \theta=0$).

Таким образом, для значений косинуса угла θ получим:

$$\cos \theta = -e \text{ (эллиптическая орбита),} \quad (5.12a)$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{e} \text{ (гиперболическая орбита).} \quad (5.12b)$$

Из этих формул видно, что когда удовлетворяются уравнения (5.12a) и (5.12b), тангенциальный импульс скорости приведет к изменению большой полуоси. Это возможно в двух точках, расположенных на малой полуоси эллипса и в бесконечности гиперболы (формула (3.58)). Получим формулу связи между импульсом скорости и изменением большой полуоси с помощью выражений (3.38в) и (3.61a) (знак «плюс» для эллиптической орбиты; «минус» для гиперболической):

$$da = \pm \frac{2a^2 v}{\mu} dv. \quad (5.13)$$

Можно получить зависимость изменения эксцентриситета от приращения скорости в тангенциальном направлении. Для эллиптической орбиты:

$$p = \frac{h^2}{\mu} = \frac{r^2 v^2 \cos^2 \beta}{\mu} = a(1 - e^2). \quad (5.14)$$

Если скорость меняется только в тангенциальном направлении, то β не меняется.

$$\frac{2r^2 v \cos^2 \beta}{\mu} dv = (1 - e^2) da - a e d e .$$

Подставим в формулу (5.13) и избавимся от da . Из формулы (5.14) получим:

$$de = \frac{p}{e} \left(\frac{v}{\mu} - \frac{1}{av} \right) dv. \quad (5.15)$$

Из формул (5.13) и (5.15) видно, что для эллиптической орбиты, когда тангенциальный импульс скорости приложен в точке с максимальной скоростью (в перигеуме), изменение большой полуоси и эксцентриситета максимальное.

Для гиперболической орбиты по формулам (3.23), (4.1) и (3.57) можно записать:

$$de = \frac{p}{e} \left(\frac{v}{\mu} + \frac{1}{av} \right) dv. \quad (5.16)$$

Сумма $\frac{v}{\mu} + \frac{1}{av}$ имеет максимальное значение на бесконечности, когда $v = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ (формула (3.62)). Из формулы (5.13) видно, что изменение большой полуоси гиперболической орбиты будет максимальным в случае, когда тангенциальный импульс скорости приложен в перигеуме. А изменение эксцентриситета максимально, когда тангенциальный импульс скорости приложен на бесконечности. Из формулы (5.10) видно, что влияние нормального импульса скорости значительно меньше влияния тангенциального приращения. Поэтому необходимо выбирать наиболее оптимальную точку для изменения формы орбиты только в соответствии с величиной тангенциального импульса скорости.

Импульс скорости, приложенный перпендикулярно плоскости орбиты, в основном используется для изменения положения плоскости орбиты. Если нужно изменить наклонение орбиты, то импульс скорости должен быть в восходящем или нисходящем узле орбиты (рис. 4.7). Наиболее предпочтительной является

точка, где скорость КА минимальна. Если требуется изменить долготу восходящего узла, то импульс скорости должен быть приложен в точках, где $\omega + \theta = 90^\circ$ или 270° (рис. 4.7). На практике часто требуется одновременное изменение нескольких элементов орбиты, что не дает возможности для оптимизации выбора точек приложения импульса.

5.3 Компланарный переход между непересекающимися орбитами

Переходы между непересекающимися круговыми орбитами, расположенными в одной плоскости (переходы Гомана), являются самыми простыми. Гоман доказал, что когда разница между r_a и r_p не очень велика, наиболее энергетически выгодной для орбита между двумя круговыми орбитами будет переходная орбита в форме эллипса, касающегося двух орбит одновременно (рис. 5.3).

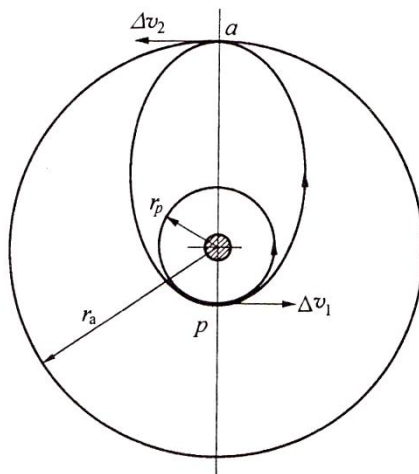


Рис. 5.3. Переход Гомана

Пусть КА движется по круговой орбите с радиусом r_p . Необходимо перевести его на компланарную орбиту с радиусом r_a . Видно, что эксцентриситет переходного эллипса можно вычислить по формуле

$$e = \frac{\left(\frac{r_\alpha}{r_p}\right) - 1}{\left(\frac{r_\alpha}{r_p}\right) + 1}. \quad (5.17)$$

Из формулы (3.47) можно получить требуемую скорость в перицентре

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \cdot \frac{2r_\alpha/r_p}{1 + (r_\alpha/r_p)}}. \quad (5.18)$$

При движении по круговой орбите с радиусом r_p КА имеет скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}. \quad (5.19)$$

Тангенциальный импульс скорости в точке p:

$$\Delta v_1 = v_p - v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left(\sqrt{\frac{2r_\alpha/r_p}{1 + (r_\alpha/r_p)}} - 1 \right). \quad (5.20)$$

Скорость КА при движении по орбите Гомана в апоцентре a определяется формулой:

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a} \cdot \frac{2}{1 + (r_\alpha/r_p)}}. \quad (5.21)$$

Требуемая скорость на конечной орбите $v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}}$. Разница между скоростями:

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_\alpha/r_p)}} - 1 \right). \quad (5.22)$$

Это тангенциальный импульс скорости в точке a . Полный импульс скорости:

$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left(\sqrt{\frac{2r_\alpha/r_p}{1 + (r_\alpha/r_p)}} \left(1 - \frac{r_p}{r_\alpha} \right) + \sqrt{\frac{r_p}{r_\alpha}} - 1 \right). \quad (5.23)$$

Для сравнения рассчитаем скорость ухода КА с круговой орбиты радиусом r_p

$$\Delta v_e = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}.$$

Если приравнять формулы (5.23) и (5.24), получим $\frac{r_\alpha}{r_p} = 3.4$.

Следовательно, когда отношение радиусов на двух орбитах равно 3.4, энергетика для перехода по Гоману и энергетика ухода с малой круговой орбиты равны.

Покажем, почему переход по схеме Гомана требует наименьших энергетических затрат. На рис. 5.4 показан межорбитальный переход по схеме Гомана. Эллипс касается большой круговой орбиты в точке a , а в точке b эллипс касается малой круговой орбиты. Импульс скорости Δv_1^* направлен по касательной к эллипсу; v_r и v_θ – радиальная и трансверсальная составляющие скорости v_b в точке b на переходном эллипсе; v_p – скорость на круговой орбите в точке b .

Из геометрических соображений получим Δv_1^* :

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + (v_\theta - v_r)^2,$$

где $v_\theta = h/r_p$, $v_r = \sqrt{\mu/r_p}$, ПОЭТОМУ

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + \left(\frac{h}{r_p} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \right)^2. \quad (5.25)$$

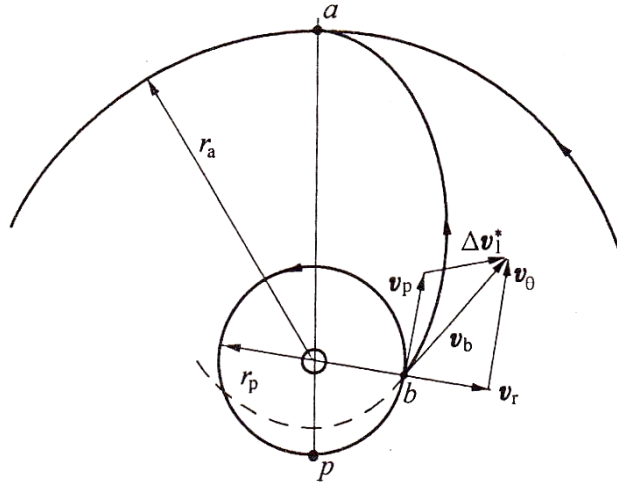


Рис. 5.4. Схема компланарного перехода между круговыми орбитами

С учетом закона сохранения энергии и использования формул (3.38б) в двух точках a, b , получим:

$$\frac{1}{2} \left(v_r^2 + \frac{h^2}{r_p^2} \right) - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2}{2r_a^2} - \frac{\mu}{r_a}. \quad (5.26)$$

Из (5.26) выразим

$$h^2 = \frac{r_a^2 r_p^2}{r_a^2 - r_p^2} \left[2\mu \frac{r_a - r_p}{r_a r_p} - v_r^2 \right]. \quad (5.27)$$

Т. к. $h^2 \geq 0$, то $v_r \leq \sqrt{2\mu \frac{r_a - r_p}{r_a r_p}} = v_{\max}$.

Подставим (5.27) в (5.25), получим

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + \left[\frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 - r_p^2}} \sqrt{2\mu \frac{r_a - r_p}{r_a r_p}} - v_r^2 - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \right]^2. \quad (5.28)$$

Продифференцируем (5.28) по v_r :

$$\frac{d(\Delta v_1^{*2})}{dv_r} = 2v_r - 2v_r \left[\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_p^2} - \frac{\sqrt{\frac{\mu}{r_p} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_p^2}}}{\sqrt{2\mu \cdot \frac{r_a - r_p}{r_a r_p}} - v_r^2} \right]. \quad (5.29)$$

Пусть $\frac{d(\Delta v_1^{*2})}{dv_r} = 0$ при $v_r \leq v_{\max}$ или при $v_r = 0$.

Найдем минимум Δv_1^{*2} : при $\left. \frac{d^2(\Delta^{*2})}{dv_r^2} \right|_{v_r=0} > 0$

$$(\Delta v_1^{*2})_{\min} = \left[\sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_a}{r_a + r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \right]^2. \quad (5.30)$$

Выражение для $(\Delta v_1^{*2})_{\min}$ совпадает с результатом минимизации выражения (5.20), откуда видно, что v_b и v_p одинаково направлены, а точка b – точка касания эллипса с малой круговой орбитой.

Таким же образом можно доказать, что, когда эллипс касается большой круговой орбиты в апогее, требуемый импульс

орбитальной скорости будет минимальным. Это указывает на то, что переходы по эллипсу Гомана являются наиболее экономичными. Однако при переходе по схеме Гомана возможно приложение только двух импульсов, в случае же приложения трех импульсов результат будет иным.

Введем понятие относительного радиуса $\bar{r} = r_a/r_p$ и рассчитаем энергетику, потребную для перехода по эллипсу Гомана

$$v_{cp} = \sqrt{\mu/r_p}.$$

Из (5.23) выразим:

$$\Delta\bar{v}_T = \frac{\Delta v_T}{v_{cp}} = \sqrt{\frac{2\bar{r}}{1+\bar{r}}} \left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} - 1. \quad (5.31)$$

Получим $d\Delta\bar{v}_T/d\bar{r}$ и приравняем к нулю:

$$3\sqrt{2\bar{r}} + \sqrt{2} - (1+\bar{r})^{3/2} = 0. \quad (5.32)$$

Положительный корень уравнения равен $\bar{r} = r_a/r_p = 15.58$. Вторая производная, вычисленная в той же точке, отрицательна, что говорит о достижении величиной $\Delta\bar{v}_T$ максимального значения. Ее значение составляет $(\Delta\bar{v}_T)_{\max} = 0.536$ (рис. 5.5). Из рис. 5.5 видно, что $\Delta\bar{v}_T$ монотонно возрастает вместе с \bar{r} . Ее максимум близок к 0.414, что говорит об ограниченности энергетики для выполнения маневра перехода с малой круговой орбиты на эллиптическую орбиту. Даже если большая полуось достигает бесконечности, импульс скорости составляет $0.414v_{cp}$. При $\bar{r} = 5.88$ $(\Delta\bar{v}_2)_{\max} = 0.190$, далее $\Delta\bar{v}_2$ постепенно уменьшается.

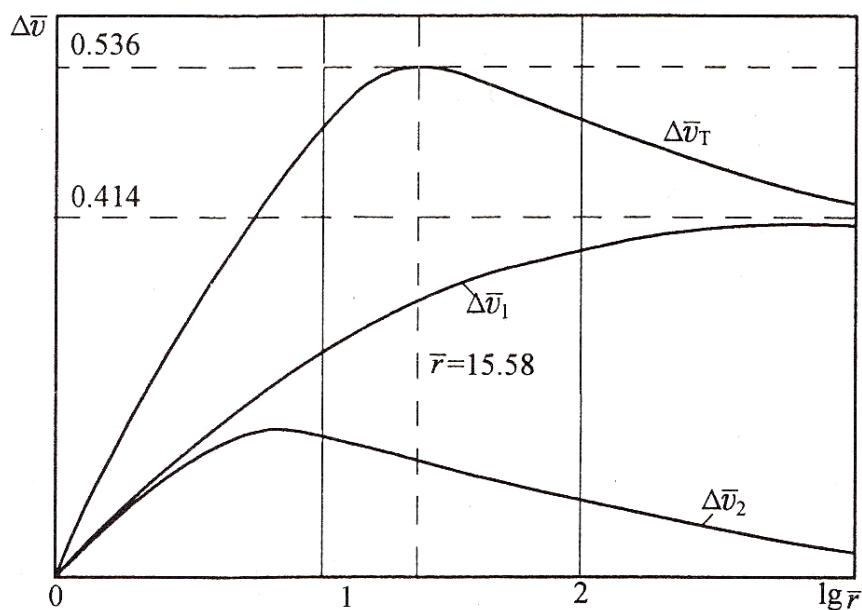


Рис. 5.5. Зависимость скорости перехода между круговыми компланарными орбитами от относительного радиуса для схемы двухимпульсного перехода

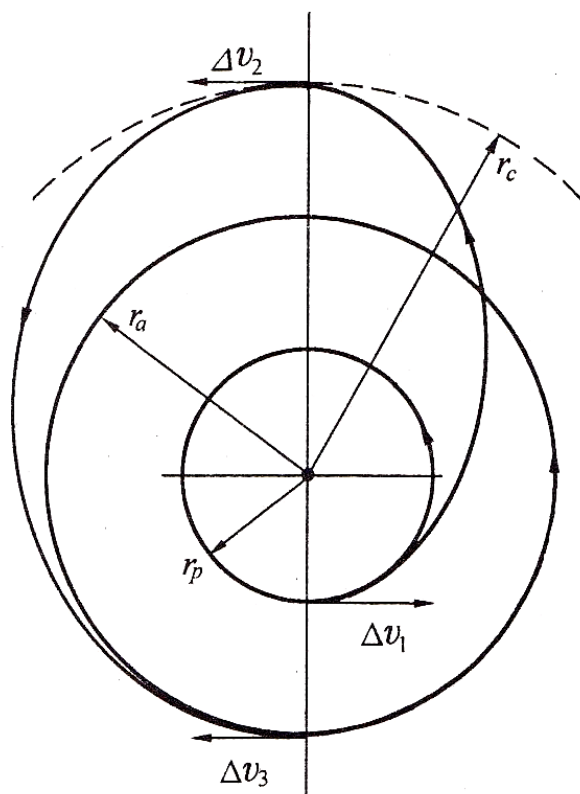


Рис. 5.6. Схема трехимпульсного перехода

Также можно доказать, что при отношении $r_a/r_p = 15.58$ схема трехимпульсного перехода является энергетически более

выгодной (рис. 5.6). На рисунке также показана промежуточная орбита с апоцентром r_c и $r_c > r_a$. А когда $r_a/r_p < 11.94$ стандартный переход по схеме Гомана сохраняет свою эффективность. При $11.94 < r_a/r_p < 15.58$ можно выбрать такую величину радиуса промежуточной орбиты, при которой трехимпульсный переход оказывается экономичнее двухимпульсного перехода по схеме Гомана.

На рис. 5.7 показаны области оптимальности межорбитальных переходов для лучшей иллюстрации полученных выше результатов. В области I наиболее оптимальным является трехимпульсный переход. В области II – двухимпульсный переход. Из рисунка видно, что область ниже линии $r_c = r_a$ соответствует области II. При $r_c < r_a$, независимо от значения r_c , двухимпульсный переход предпочтительнее трехимпульсного. При $r_a/r_p < 11.94$ экономичнее становится двухимпульсный переход. При $r_a/r_p > 15.58$ трехимпульсный переход является более предпочтительным только при $r_c > r_a$. При $11.94 < r_a/r_p < 15.58$ кривая C делит диапазоны оптимальности переходов на двух- и трехимпульсные. Кривая C является кривой трансцендентной функции, некоторые значения которой представлены в таблице 5.1.

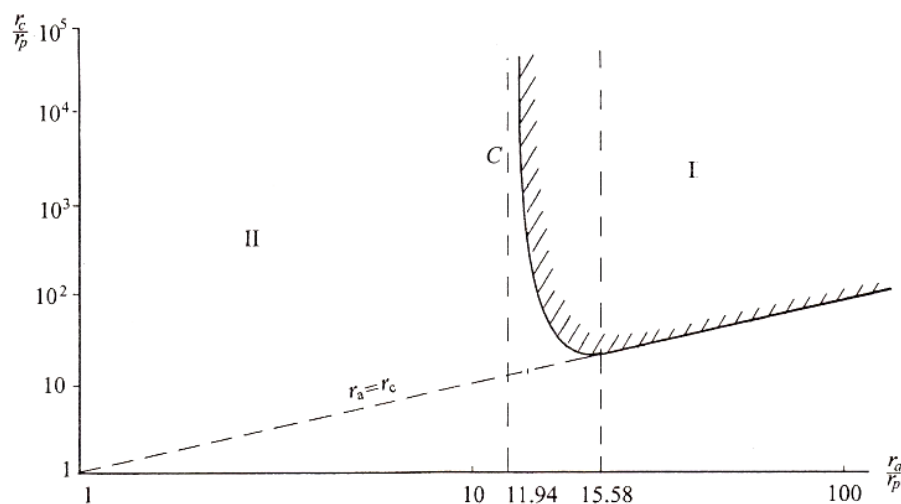


Рис. 5.7. Области оптимальности двух- и трехимпульсных переходов

Таблица 5.1. Значения функции, описывающей кривую C на рис. 5.7

r_a/r_p	11.94	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	15.58
r_c/r_p	39812.0	816.0	91.6	49.1	34.1	26.4	21.6	18.4	16.1	15.58

При переходе с большой круговой орбиты на малую круговую энергетически выгодно применять схему Гомана, как было рассмотрено выше. Разница состоит лишь в направлении приращения скорости.

Рассмотрим переход между двумя соосными эллиптическими орбитами. На рис. 5.8 показаны эллипс 1 и эллипс 2. Необходимо перевести КА с орбиты 1 на орбиту 2. В данном случае первый импульс скорости Δv_1 прикладывается в перицентре внутренней орбиты. Вторым импульс Δv_2 прикладывается в апоцентре внешней орбиты. Такой переход является наиболее выгодным с энергетической точки зрения.

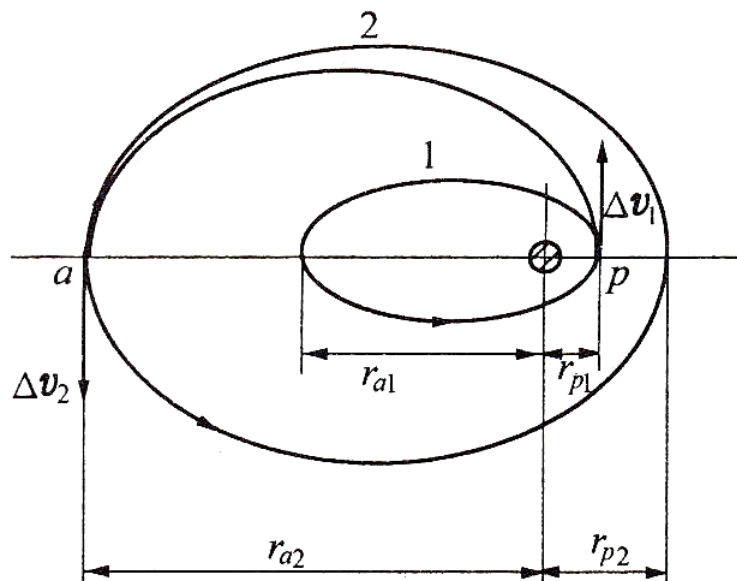


Рис. 5.8. Переход между соосными эллиптическими орбитами

Скорости в перицентрах эллипса 1 и промежуточной орбит соответственно:

$$v_{p1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}} \cdot \frac{2r_{\alpha1}}{r_{\alpha1} + r_{p1}}}, \quad (5.33a)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}} \cdot \frac{2r_{\alpha2}}{r_{\alpha2} + r_{p1}}}. \quad (5.33b)$$

Скорости в апоцентрах конечной и промежуточной орбит соответственно:

$$v_{\alpha2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\alpha2}} \cdot \frac{2r_{p2}}{r_{\alpha2} + r_{p2}}}, \quad (5.34a)$$

$$v_{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\alpha2}} \cdot \frac{2r_{p1}}{r_{\alpha2} + r_{p1}}}. \quad (5.34b)$$

Приращение скорости в точках p и a :

$$\Delta v_1 = v_p - v_{p1}, \quad \Delta v_2 = v_{\alpha2} - v_{\alpha}.$$

Общее приращение скорости:

$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2. \quad (5.35)$$

5.4 Орбитальные маневры с малой тягой

Обычно тяга непрерывно работающих двигателей очень мала и составляет от нескольких тысячных ньютонов до нескольких ньютонов. При действии такой малой тяги продолжительность орбитальных маневров очень велика, поэтому подобные маневры требуют оптимизации.

Пусть движение КА описывается уравнением состояния:

$$\underline{X} = \underline{f}[\underline{X}(t), \underline{u}(t), t]; \quad \underline{X}(t_0) \text{ задано, } t_0 \leq t \leq t_f. \quad (5.36)$$

Здесь $\underline{X}(t) \in R^{n \times 1}$, $\underline{u}(t) \in R^{m \times 1}$ – векторы состояния и управления, представляющие собой матрицы-столбцы размерностью n и m соответственно; $t = t_f$ – момент завершения орбитального маневра; $\underline{X}(t_f)$ – вектор состояния в момент завершения маневра.

$$\underline{\psi}[\underline{X}(t_f), t_f] = 0. \quad (5.37)$$

Пусть целевая функция достигает своего предельного значения (максимального или минимального) в конечный момент времени $t = t_f$:

$$J = \underline{\Phi}[\underline{X}(t_f), t_f]. \quad (5.38)$$

Для получения условий оптимизации перепишем выражение для целевой функции (5.38) в виде:

$$J = \underline{\Phi}[\underline{X}(t_f), t_f] + \underline{\nu}^T \underline{\psi}[\underline{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \underline{\lambda}^T (\underline{f} - \underline{X}) dt. \quad (5.39)$$

Поскольку все добавленные функции равны нулю, целевая функция не изменится. Здесь $\underline{\nu} = \underline{\nu}(t) \in R^{q \times 1}$, $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}(t) \in R^{n \times 1}$ – неопределенные множители ограничений (5.37) и уравнения состояния (5.36). После дифференцирования необходимым условием экстремума целевой функции будут:

$$\dot{\underline{\lambda}} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{X}} \right)^T \underline{\lambda} \quad \lambda_k(t_0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (5.40)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right)^T \underline{\lambda} = 0, \quad (5.41)$$

$$\underline{\lambda}^T(t_f) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{X}} + \nu^T \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{X}} \right)_{t=t_f}. \quad (5.42)$$

После пересчета (5.36) и (5.37) может быть решена задача оптимизации. Выражения (5.36) и (5.40) представляют собой систему из $2n$ дифференциальных уравнений. Выражение (5.42) и $\underline{\lambda}_k(t_0)$, $\underline{X}(t_0)$ – граничные условия (заданные значения) для решения системы из $2n$ дифференциальных уравнений. Выражение (5.41) используется для получения m -мерного вектора управления $\underline{u}(t)$.

Используя приведенный выше принцип перехода между двумя круговыми орбитами, лежащими в одной плоскости (рис. 5.9), получим следующий результат: если требуется перевести КА с орбиты $\bar{r}(0)$ на орбиту $\bar{r}(t_f)$ с тягой двигателя \bar{P} и углом между вектором тяги и местной горизонталью ϕ . Здесь v_r – радиальная компонента вектора скорости, v_θ – трансверсальная компонента вектора скорости. Если масса КА в текущий момент времени равна $m(t)$, а расход топлива $\dot{m} = const$, то уравнение движения КА (3.16) можно записать

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{\mu}{r^3} \bar{r} = \bar{P} / (m(t_0) - \dot{m}(t)). \quad (a)$$

Тяга \bar{P} может быть разложена следующим образом:

$$\bar{P} = P \sin \phi \bar{r}_0 + P \cos \phi \bar{\theta}_0, \quad (б)$$

где \bar{r}_0 и $\bar{\theta}_0$ – единичные векторы в радиальном и трансверсальном направлениях в плоскости движения. Если добавить единичный вектор, перпендикулярный плоскости орбиты, то получим три базисных вектора подвижной системы координат, построенной на радиальном направлении траектории КА. Радиус-вектор и вектор скорости можно записать в виде:

$$\bar{r} = r\bar{r}_0, \quad \bar{v} = v_r\bar{r}_0 + v_\theta\bar{\theta}_0. \quad (\text{В})$$

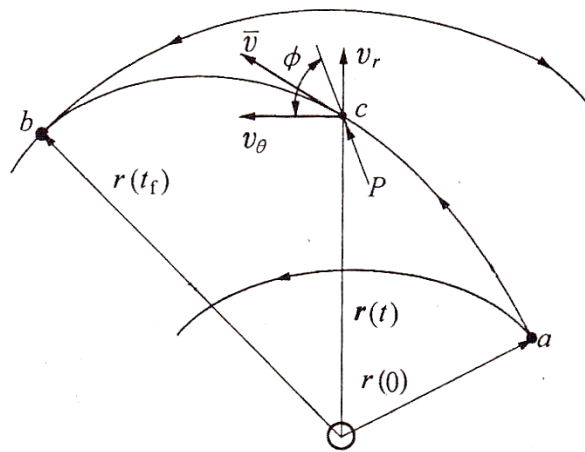


Рис. 5.9. Орбитальный маневр КА с непрерывной тягой

Используя свойство единичного вектора в подвижной системе координат (см. Приложение 5), запишем:

$$\ddot{\bar{r}} = \dot{\bar{v}} = \dot{v}_r\bar{r}_0 + \dot{v}_\theta\bar{\theta}_0 + \dot{v}_r\bar{\omega} \times \bar{r}_0 + \dot{v}_\theta\bar{\omega} \times \bar{\theta}_0.$$

Здесь $\bar{\omega} = \omega \times \bar{k}_0$ или $\bar{\omega} = \frac{v_0}{r}\bar{k}_0$. Подставляя приведенную выше формулу и учитывая правило произведения единичных векторов, получим:

$$\ddot{\bar{r}} = \left(\dot{v}_r - \frac{v_0^2}{r} \right) \bar{r}_0 + \left(\dot{v}_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \bar{\theta}_0. \quad (\text{Г})$$

Запишем уравнения движения КА

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = v_r, \quad (5.43a)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\mu}{r} + \frac{P \sin \phi}{m(t_0) - \dot{m}t}, \quad (5.43b)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{P \sin \phi}{m(t_0) - \dot{m}t}. \quad (5.43b)$$

Очевидно, что r, v_r, v_θ являются переменными состояния x_1, x_2, x_3 соответственно с начальными условиями:

$$r(t_0) = r_0, \quad (5.44a)$$

$$v_r(t_0) = 0, \quad (5.44b)$$

$$v_\theta(t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{t_0}}. \quad (5.44b)$$

Граничные условия при $t = t_f$

$$\psi_1 = v_r(t_f) = 0, \quad (5.45a)$$

$$\psi_2 = v_\theta(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}} = 0. \quad (5.45b)$$

Если требуется перевести КА на максимально удаленную круговую орбиту с радиусом $r(t_f)$ за фиксированное время $(t_f - t_0)$, то целевая функция будет иметь вид

$$J = r(t_f).$$

Так как $\dot{m} = \text{const}$, то и тяга P будет постоянна, тогда переменная управления будет только $\phi = \phi(t)$.

Используя (5.40), (5.41) и (5.42), получим:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_r &= -\lambda_{v_r} \left(-\frac{v_\theta^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3} \right) - \lambda_{v_\theta} \frac{v_r v_\theta}{r^2}, \\ \dot{\lambda}_{v_r} &= -\lambda_r + \lambda_{v_\theta} \frac{v_\theta}{r}, \\ \dot{\lambda}_{v_\theta} &= -\lambda_{v_r} \frac{2v_\theta}{r} + \lambda_{v_\theta} \frac{v_r}{r}, \\ (\lambda_{v_r} \cos \phi - \lambda_{v_\theta} \sin \phi) \frac{P}{m(t_0) - \dot{m}t} &= 0.\end{aligned}\tag{5.47}$$

Последнее выражение может быть также записано в виде:

$$\text{tg} \theta = \frac{\lambda_{v_r}}{\lambda_{v_\theta}}.\tag{5.48}$$

Из (5.42) можно получить:

$$\lambda_r(t_f) = 1 + v_2 \frac{\sqrt{\mu}}{2[r(t_f)]^{3/2}},\tag{5.49a}$$

$$\lambda_{v_r}(t_f) = v_1,\tag{5.49б}$$

$$\lambda_{v_\theta}(t_f) = v_2.\tag{5.49в}$$

Для вывода дифференциального уравнения (5.43) и формулы (5.47) используются шесть граничных условий уравнений (5.44) и (5.49). Первые три являются начальными условиями, а последнее – конечным условием. Имеем двухточечную краевую

задачу. Полученное решение также должно удовлетворять уравнениям (5.45а) и (5.45б), а переменные управления определяются

с помощью уравнения (5.48). Для случая $\frac{P/m(t_0)}{\mu/r^2(0)} = 0.1405$,

$\frac{\dot{m}\sqrt{\mu/r(0)}}{P} = 0.533$, $\frac{t_f}{\sqrt{r^3(0)/\mu}} = 3.32$ был рассчитан полет от Земли к

Марсу. Если тяга $P = 3.782 \text{ Н}$ и расход рабочего тела $\dot{m} = 5.851 \text{ кг/сут}$, то время полета составит порядка 193 суток. На рис. 5.10 показано, как меняется направление вектора тяги, т.е. на первой половине траектории происходит ускорение, а на второй – торможение. Следует отметить, что если рассматривается переход от Земли к Марсу с использованием импульсных переходов, то потребуется 258.9 суток (см. таблицу 6.1). Это дольше, чем при использовании непрерывной тяги.

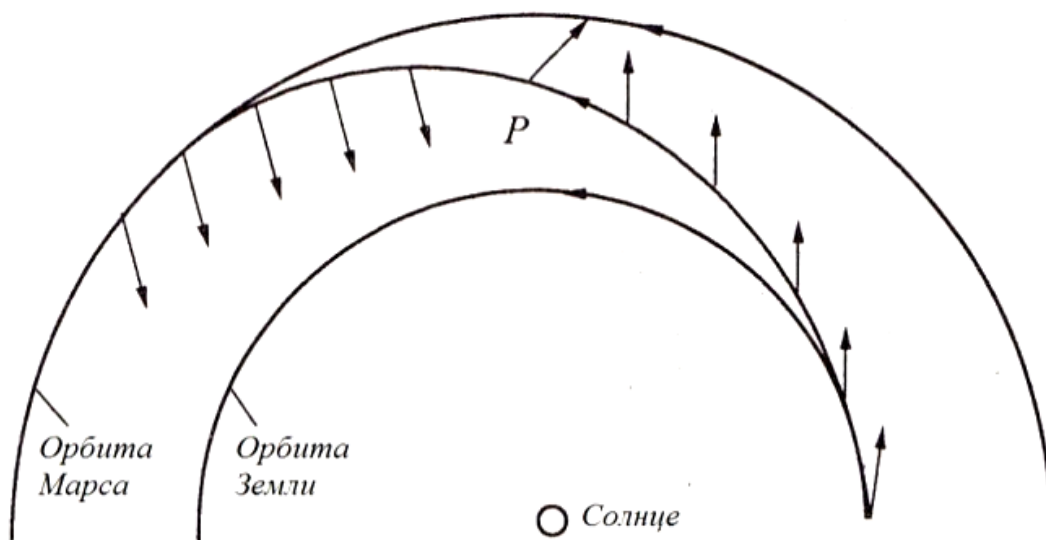


Рис. 5.10. Изменение направления вектора тяги

5.5 Сближение и встреча космических аппаратов

Пусть два космических аппарата находятся на одной или разных орбитах. Для встречи этих КА в заданной точке необходимо, чтобы они имели одинаковые скорости.

5.5.1 Задача встречи КА на круговой орбите

Пусть два КА движутся по одной круговой орбите (рис. 5.11). Аппарат, находящийся в точке B , называется пассивным аппаратом или целью. Аппарат, находящийся в точке A , называется активным аппаратом или перехватчиком.

ϕ_{AB} – угловое расстояние между аппаратами A и B в начальный момент времени.

Необходимо определить, какое угловое расстояние должен пройти аппарат A по орбите, чтобы встретиться с аппаратом B в точке C .

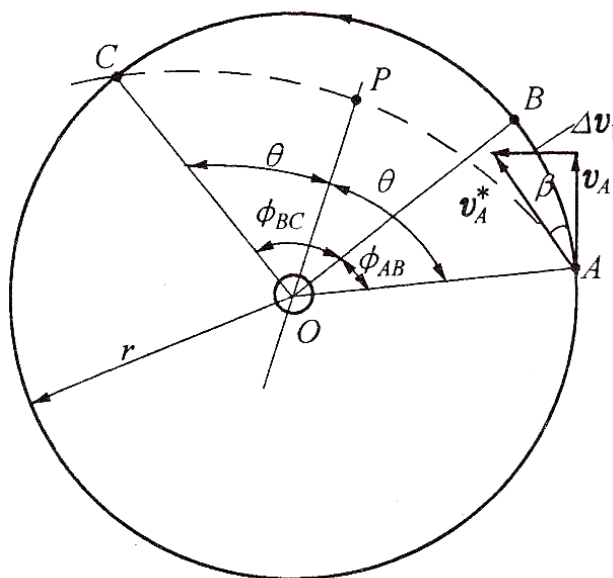


Рис. 5.11. Встреча космических аппаратов на круговой орбите

Так как скорости движения аппаратов A и B по одной и той же круговой орбите равны, определим только время движения аппарата B до точки C .

$$t_{BC} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \frac{\phi_{BC}}{2\pi} = \phi_{BC} \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}. \quad (5.50)$$

Видно, что только в том случае, если аппарат A перейдет за то же самое время в точку C , оба КА встретятся в точке C . Однако расстояние между точками A и C больше, чем расстояние между B и C . Следовательно, аппарат A должен перемещаться в точку C не по круговой орбите, а по какой-то другой, чтобы прибыть в точку C в требуемое время. Независимо от того, по какой орбите будет двигаться аппарат A , точка пересечения его новой орбиты с биссектрисой OP будет являться перицентром этой орбиты. Это является следствием того, что КА имеет максимальную скорость в окрестности перицентра и $OA = OC$. Видно, что время движения КА из точки A до точки C в два раза больше времени его движения из точки A до точки P . Время движения КА из точки A до точки P (или от точки P до точки C) можно получить из уравнений (3.37) и (3.43) (для эллиптической орбиты) или из уравнения (3.68) (для гиперболической орбиты). В приведенном выше расчете должен быть известен эксцентриситет e эллиптической или гиперболической орбиты, а большая полуось должна быть рассчитана по известному e . Это итерационный процесс, который выполняется до тех пор, пока t_{BC} не превысит в два раза время движения от точки A до точки P (или от P до C). Используя описанную выше методику определения e и θ орбиты активного аппарата, можно найти безразмерные параметры β и rv^2/μ с помощью уравнений (4.7) и (4.8), а затем определить Δv_1 .

Пример 1. Пусть два КА находятся на одной круговой орбите радиусом $r = 20000$ км. Начальное угловое расстояние между аппаратами A и B составляет 40° . Аппарату A потребовалось переместиться на 120° , чтобы встретиться с аппаратом B .

Необходимо найти орбиту, по которой двигался аппарат A для достижения цели B , и приращение скорости аппарата A .

Решение.

$$\phi_{BC} = 120^\circ = 2.094 \text{ 4}, \quad \phi_{AB} = 40^\circ = 0.698 \text{ 13},$$

$$\theta = \frac{\phi_{AB} + \phi_{BC}}{2} = 80^\circ.$$

Время движения аппарата B до точки C :

$$t_{BC} = \phi_{BC} \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 9 \text{ 382.5 } c,$$

$$a = r(1 + e \cos \theta) / (1 - e^2).$$

Пусть $e = 0.6$, тогда $a = 34505.9 \text{ км}$,

$$t_{AP} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right] =$$

$$= 3719.73 \text{ c} < \frac{t_{BC}}{2} = 4692.92 \text{ c},$$

$$a = 25463.3 \text{ км}.$$

Пусть $e = 0.4$, тогда $t_{AP} = 4293.03 \text{ c} < \frac{t_{BC}}{2}$, $a = 23028.58 \text{ км}$.

Пусть $e = 0.295$, тогда $t_{AP} = 4675.32 \text{ c} \approx \frac{t_{BC}}{2} = 4692.92 \text{ c}$.

Соответственно, для значений $e = 0.295$ и $\theta = 80^\circ$ с помощью формул (4.7), (4.8) (рис. 4.3) получим $rv_A^{*2} / \mu = 1.2$, $\beta = 20^\circ$, тогда (см. рис. 5.11 и 5.12) скорость активного аппарата:

$$v_A^* = \sqrt{\frac{1.2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{1.2 \cdot 3.986 \cdot 10^5}{20000}} = 4.89 \text{ км/с}.$$

Скорость аппарата A на исходной круговой орбите равна:

$$v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{3.986 \cdot 10^5}{2000}} = 4.46 \text{ км/с}.$$

Тогда

$$\Delta v_1 = \sqrt{v_A^2 \sin^2 \beta + (v_A^* - v_A \cos \beta)^2} = 1.68 \text{ км/с}.$$

И угол между Δv_1 и v_A равен:

$$\sin \alpha = v_A^* \frac{\sin \beta}{\Delta v_1} \Delta v_1 = 0.9955,$$

$$\alpha = 84.57^\circ.$$

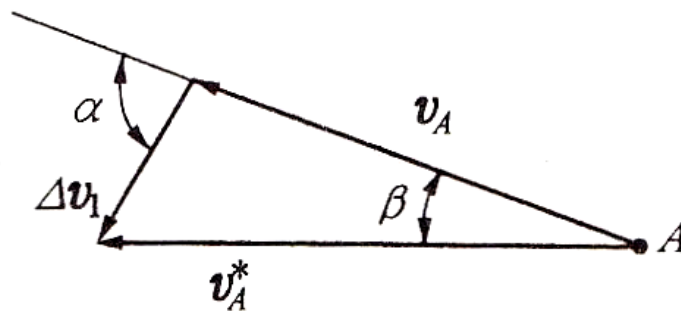


Рис. 5.12. Схема разложения вектора скорости

5.5.2 Задача встречи КА на эллиптической орбите

Пусть два космических аппарата находятся на одной эллиптической орбите (орбита 1). Для того чтобы аппарат A встретился с аппаратом B в точке C , он должен совершить переход

в точку C через эллиптическую или гиперболическую переходную орбиту за то же самое время, что будет двигаться аппарат B (рис. 5.13).

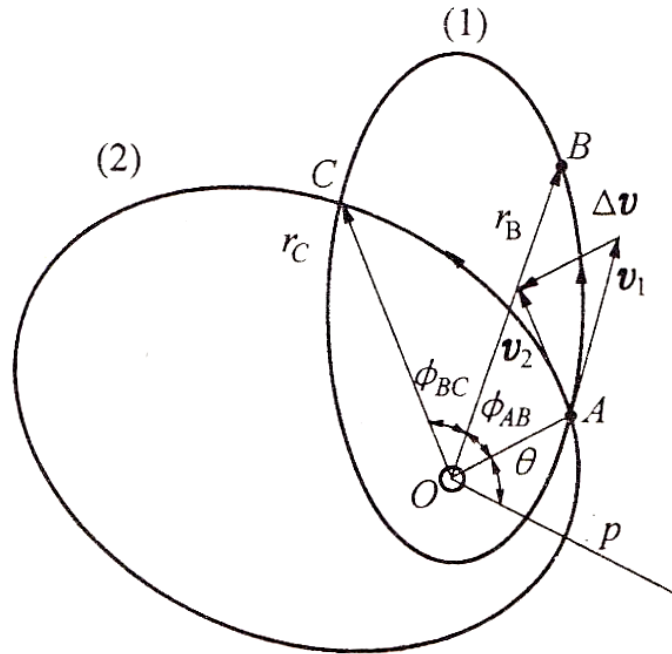


Рис. 5.13. Встреча на эллиптической орбите

Отличие данной задачи от рассмотренной выше заключается в том, что $r_A \neq r_C$. Поэтому перицентр переходной орбиты не будет располагаться на биссектрисе угла $\angle AOC$. Если он находится в точке P , то угол θ между точками A и P неизвестен. Процесс встречи аппаратов рассчитывается следующим образом. Сначала по формулам (3.37) и (3.41) (или выражения (3.43) определим время t_{BC} движения аппарата B до точки C . Допустим, что аппарат A движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e' , тогда по формуле (3.24) можно найти:

$$r_A = \frac{p}{1 + e' \cos \theta}, \quad r_C = \frac{p}{1 + e' \cos \theta (\phi_{BC} + \phi_{AB} + \theta)},$$

откуда

$$e' = \frac{r_C/r_A}{\cos \theta - (r_C/r_A) \cos(\phi_{BC} + \phi_{AB} + \theta)}. \quad (5.51)$$

Зная угол θ , можно получить e' , а p можно получить из исходного уравнения. Уравнение (3.33) можно использовать для нахождения a .

Кроме того, время движения t_{AC} из точки A в точку C вычисляется в соответствии с e' , θ и a , используя уравнения (3.37) и (3.41) (или уравнения (3.43)). Если $t_{AC} \neq t_{BC}$, следовательно, нужно скорректировать значения e' и θ и повторить расчет t_{AC} до тех пор, пока не будет выполнено условие $t_{AC} = t_{BC}$.

Если не удастся найти решение, которое удовлетворяет требованию встречи с помощью эллиптической орбиты, то следует использовать гиперболическую орбиту. Алгоритм расчета тот же, что и представленный выше, но время t_{AC} нужно заменить на выражение (3.68).

5.5.3 Задача встречи КА на некомпланарных орбитах

Пусть аппарат B находится на орбите (1) в плоскости T_1 , а аппарат A – на орбите 2 в плоскости T_2 (рис. 5.14). Если плоскость орбиты аппарата A не изменяется при встрече, то точками встречи могут быть только C и C' . Эта задача аналогична задаче встречи на эллиптической или круговой орбитах. Приращение скорости Δv придается в плоскости T_2 , в результате чего времена движения от точки A до C (C') и от B до C (C') будут одинаковы.

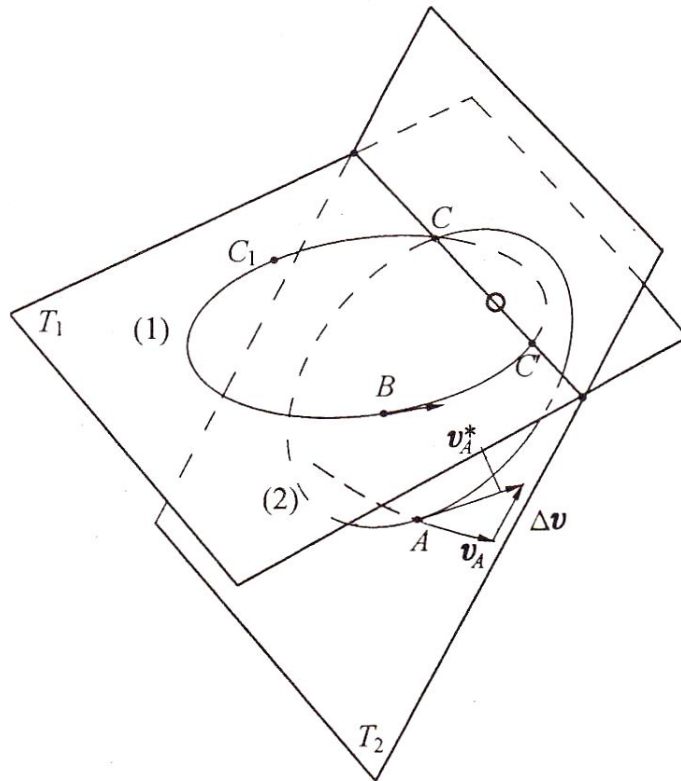


Рис. 5.14. Задача встречи на некомпланарных орбитах
в точках C и C'

В случае, представленном на рис. 5.14, требуется, чтобы аппарат A подошел к аппарату C или C' на линии пересечения плоскостей T_1 и T_2 , например, в точке C_1 , то активный аппарат A должен двигаться не в плоскости начальной орбиты, а в новой плоскости. На рис. 5.15 показана схема получения плоскости орбиты встречи аппаратов. Построим линии ae и bd . Они лежат в плоскости орбиты встречи. Поэтому плоскость $aebd$ будет являться плоскостью встречи. Орбитой встречи в этой плоскости могут быть эллипс или гипербола (3), проходящие через точки A и C_1 .

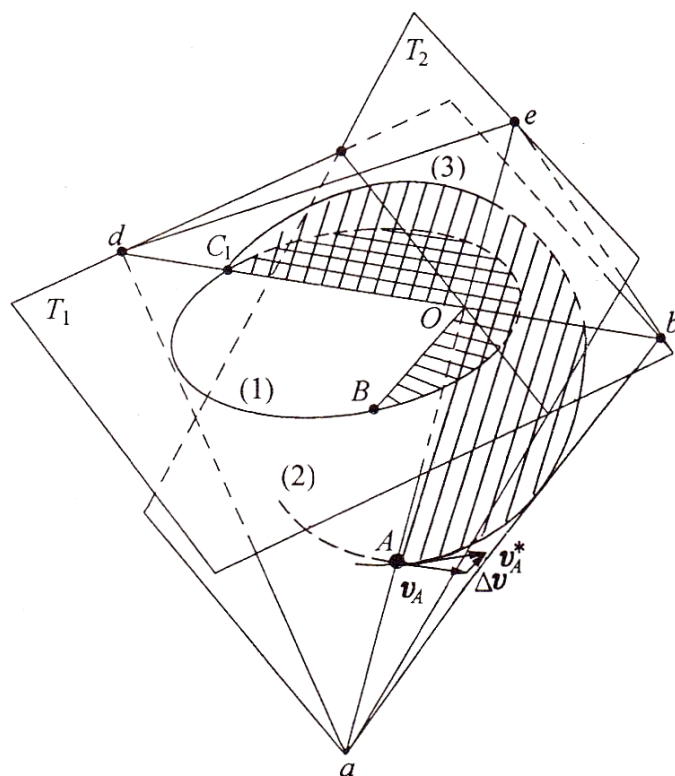


Рис. 5.15. Задача встречи на некомпланарных орбитах в произвольной точке

5.6 Межорбитальные переходы с помощью аэродинамического маневра

Земля обладает достаточно плотной атмосферой, поэтому ряд маневров целесообразно выполнять с использованием аэродинамической силы.

С появлением аэродинамически совершенных космических аппаратов с высоким аэродинамическим качеством F_y/F_x становится рациональным использование аэродинамической силы для выполнения широкого круга орбитальных маневров.

Для описания аэродинамических маневров КА необходимо получить уравнения движения КА в атмосфере. В разделе 2 мы рассматривали движение ракеты-носителя в атмосфере и при этом пренебрегали действием центробежной силы, т. к. эта сила много меньше тяги РН P . Однако в данном разделе мы будем рассматривать случай, когда аэродинамическая и центробежная

сила имеют один порядок. Поэтому их необходимо учитывать при расчете маневров КА. На рис. 5.16 показано гравитирующее тело с центром в точке O . При движении КА по эллиптической орбите в точке A вектор его скорости направлен по касательной к траектории, т.е. вдоль линии τ . Сила лобового сопротивления F_x имеет противоположное направление. Подъемная сила F_y направлена вдоль нормали \bar{n}_0 . Вектор скорости \bar{v} имеет вид:

$$\bar{v} = v\bar{\tau}_0,$$

где $\bar{\tau}_0$ – единичный вектор вдоль касательной линии τ , который необходим для получения производной по времени от указанного выше выражения (см. Приложение 5):

$$\dot{\bar{v}} = \dot{v}\bar{\tau}_0 + v\bar{\omega} \times \bar{\tau}_0. \quad (5.52)$$

Здесь $\bar{\omega}$ – угловая скорость вращения $\bar{\tau}_0$ или вектора \bar{r} в инерциальном пространстве. Из рис. 5.16 видно, что он перпендикулярен плоскости орбиты и направлен вверх, поэтому:

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k}_0. \quad (5.53)$$

Здесь \bar{k}_0 – единичный вектор, направленный вверх перпендикулярно плоскости орбиты. Величину ω можно получить из геометрических соотношений на рис. 5.17. Когда КА находится в точке A и имеет скорость \bar{v} , вектор которой расположен под углом β к местной горизонтальной плоскости. По истечении времени Δt он перейдет в положение A' , угол между вектором скорости и местной горизонтальной плоскостью станет $\beta + \Delta\beta$, а горизонтальная линия повернется на угол $\Delta\theta$, а угол δ – угол

между вектором скорости в начальный момент времени и вектором скорости спустя время Δt .

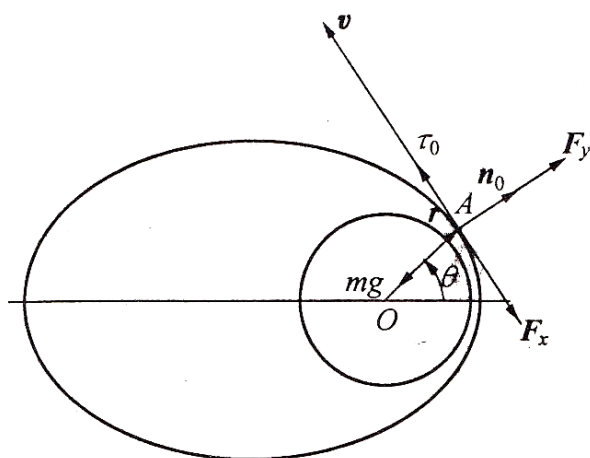


Рис. 5.16. Схема сил

$$\Delta\delta = \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \Delta\beta \right) - \left[\left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \Delta\theta \right] = -\Delta\beta + \Delta\theta.$$

Следовательно, угловая скорость равна:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta t} = -\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\theta}{dt}. \quad (5.54)$$

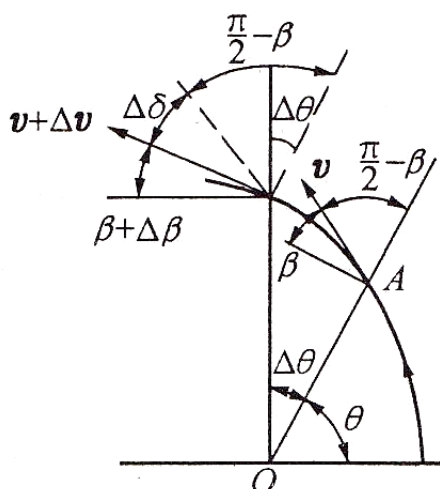


Рис. 5.17. Схема изменения углов и вектора скорости КА

Подставляя (5.54) в (5.52) и применяя правило перемножения единичных векторов и учитывая выражение

$$\dot{\theta} = r\dot{\theta}/r = v/r \cos \beta,$$

получим:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau}_0 + \left(v \frac{d\beta}{dt} - \frac{v^2 \cos \beta}{r} \right) \bar{n}_0. \quad (5.55)$$

Компоненты ускорения в направлениях $\bar{\tau}_0$ и \bar{n}_0 получаются из уравнения (5.55), а из рис. 5.16 можно получить выражения для аэродинамической и гравитационной составляющих в направлении $\bar{\tau}_0$ $\left(-F_x - \frac{\mu}{r^2} m \sin \beta \right)$ и \bar{n}_0 $\left(-F_y - \frac{\mu}{r^2} m \cos \beta \right)$. Пусть масса КА равна m , применим второй закон Ньютона, чтобы получить скалярную форму уравнений движения в тангенциальном и нормальном направлениях при движении КА в атмосфере:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F_x}{m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \beta, \quad (5.56a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{F_y}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\mu}{r^2 v} \right) \cos \beta. \quad (5.56b)$$

И кинематическое соотношение:

$$\frac{dr}{dt} = v \sin \beta. \quad (5.56b)$$

Выражения (5.56a) – (5.56b) – три уравнения движения космического аппарата в атмосфере. Независимых переменных

также три (v, r, β) , следовательно, система уравнений замкнута и разрешима.

Выражения (5.56а), (5.56б) и (2.2) одинаковы, за исключением того, что g заменено на μ/r^2 , опущена тяга \bar{P} и введена центробежная сила mv^2/r . Они также согласуются с уравнением (5.43б) и уравнением (5.43в), за исключением того, что последние два уравнения представляют собой условия баланса сил в радиальном \bar{r} и в бинормальном направлениях, т. к. для удобства не учитывалась аэродинамика.

Рассмотрим особенности и преимущества межорбитального перехода с использованием аэродинамической силы на примере перехода с высокой круговой орбиты на низкую круговую. Пусть КА находится на высокой круговой орбите радиусом r_α . Требуется перевести его на низкую круговую орбиту радиусом r_p (рис. 5.18). При движении КА по эллиптической орбите из точки a до точки b , лежащей на границе атмосферы, импульс скорости Δv_1 должен быть приложен в направлении, противоположном движению, поэтому знак будет «минус». Обычно считается, что граница земной атмосферы находится на высоте 150 – 200 км. Управление движением КА в атмосфере заключается в регулировании величины подъемной силы F_y , так, чтобы КА вышел из атмосферы в точке c . Придадим КА второй импульс скорости Δv_2 в точке c , чтобы перевести его на другую эллиптическую орбиту радиусом r_p . Третий импульс скорости Δv_3 переведет КА на требуемую низкую круговую орбиту. Во время всего межорбитального перехода важными параметрами являются скорость и значение угла β при входе в точку b . Если эти параметры выбраны неверно, то КА не сможет снова выйти из атмосферы. Следовательно, в процессе полета в атмосфере от точки b до точки c

необходимо выбрать схему управления подъемной силой для более экономного расходования кинетической энергии и минимизации потребления топлива. Это основная проблема при использовании аэродинамического маневра, которая требует оптимизации.

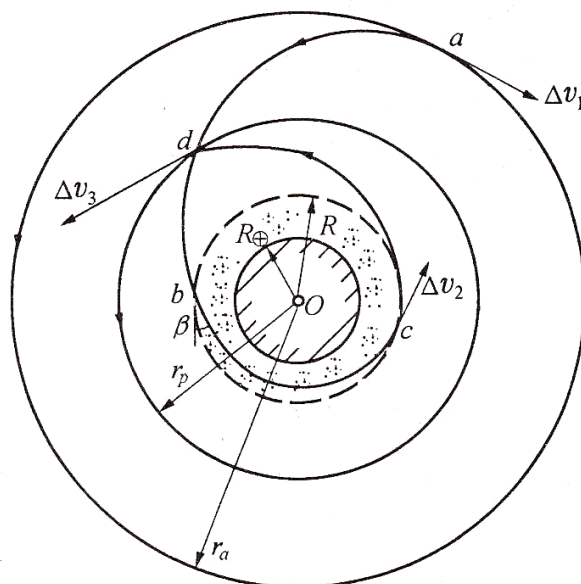


Рис. 5.18. Схема межорбитального перехода с использованием аэродинамического маневра

Сравним затраты топлива, необходимого для межорбитального перехода с использованием аэродинамического маневра и перехода по схеме Гомана. Рассмотрим движение КА в «идеальных» условиях: граница атмосферы находится четко внутри круга радиусом R (рис. 5.19). При попадании КА в границы круга радиусом R он имеет скорость v_b , $\beta=0$. Затем КА выходит из атмосферы в точке c с $\beta=0$. Его скорость v_c достаточна для перехода с эллиптической орбиты на круговую орбиту с радиусом r_p . В случае такой «идеальной» постановки задачи нужно только два импульса скорости. Это импульс Δv_1 в точке a и Δv_2 в точке d . Аппарат входит в атмосферу в точке b при $\beta=0$.

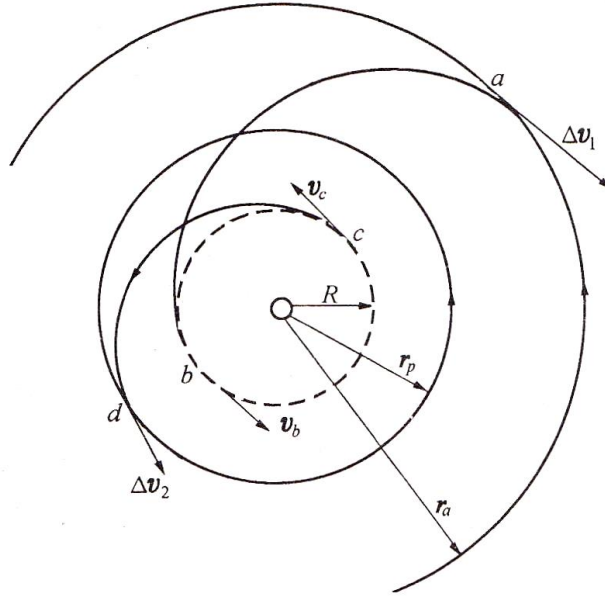


Рис. 5.19. Пример межорбитального перехода с использованием аэродинамического маневра

Согласно методике, приведенной в разделе 5.3, необходимо, чтобы КА входил в атмосферу в точке b под углом $\beta=0$ и скоростью Δv_1 :

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha} \frac{2}{1 + (r_\alpha/R)}}.$$

Второй импульс в точке d :

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2}{1 + (r_p/R)}}.$$

Тогда суммарный импульс составит:

$$\begin{aligned} \Delta v_T &= \Delta v_1 + \Delta v_2 = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha} \frac{2}{1 + (r_\alpha/R)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2}{1 + (r_p/R)}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

При межорбитальном переходе по схеме Гомана импульсы скорости, прикладываемые в точках a и d (рис. 5.20):

$$\Delta v_{1H} = \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha} \frac{2}{1+(r_\alpha/r_p)}},$$

$$\Delta v_{2H} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_\alpha/r_p}{1+(r_\alpha/r_p)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}.$$

Суммарное приращение скорости:

$$\begin{aligned} \Delta v_{TH} &= \Delta v_{1H} + \Delta v_{2H} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_\alpha/r_p}{1+(r_\alpha/r_p)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha} \frac{2}{1+(r_\alpha/r_p)}}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

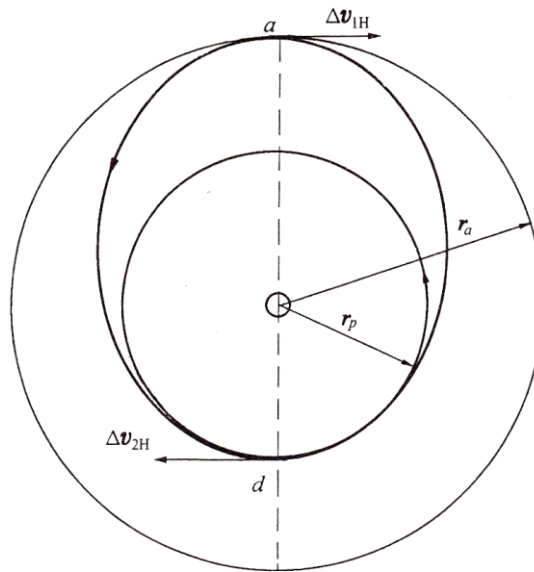


Рис. 5.20. Пример межорбитального перехода по схеме Гомана

Введем относительные радиусы:

$$\bar{r}_\alpha = r_\alpha/R, \quad \bar{r}_p = r_p/R. \quad (5.59)$$

Сравним выражения (5.57) и (5.58):

$$\Delta v_T = \sqrt{\frac{\mu}{R}} \left[\sqrt{\frac{1}{\bar{r}_\alpha}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \bar{r}_\alpha}} \right) + \sqrt{\frac{1}{\bar{r}_p}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \bar{r}_p}} \right) \right], \quad (5.60)$$

$$\Delta v_{TH} = \sqrt{\frac{\mu}{R}} \left[\sqrt{\frac{1}{\bar{r}_\alpha}} \left(1 - \sqrt{\frac{2\bar{r}_p}{\bar{r}_\alpha + \bar{r}_p}} \right) + \sqrt{\frac{1}{\bar{r}_p}} \left(\sqrt{\frac{2\bar{r}_\alpha}{\bar{r}_\alpha + \bar{r}_p}} - 1 \right) \right]. \quad (5.61)$$

Если приравнять выражения (5.60) и (5.61), можно построить график функции с переменными \bar{r}_α и \bar{r}_p (рис. 5.21). Видно, что на этой кривой оба межорбитальных перехода имеют одинаковые затраты топлива. В области над кривой $\Delta v_T < \Delta v_{TH}$. Следовательно, переход с использованием аэродинамического маневра выгоднее. Согласно расчетам, Δv_T перехода КА с геостационарной орбиты до орбиты $r_p = 6728$ км меньше, чем для перехода по схеме Гомана на 59.86%. Чем больше радиус большей орбиты, тем выгоднее межорбитальный переход с использованием аэродинамического маневра.

Однако приведенный выше расчет является идеальным случаем. В реальности же трудно получить требуемое замедление КА из-за разреженного воздуха в верхних слоях атмосферы, и возникает необходимость глубокого погружения в атмосферу. Это требует больших затрат энергии, поэтому идеальный случай – это верхняя граница энергосбережения.

Что касается реальной ситуации, скорость КА на высокой круговой орбите равна $v_a = \sqrt{\mu/r_a}$. Если скорость и угол входа КА в атмосферу равны v_b и β_b соответственно, то согласно закону сохранения момента импульса, можно записать $r_a(v_a - \Delta v_1) = Rv_b \cos \beta_b$, где Δv_1 – импульс скорости, приложенный в точке a высокой орбиты, поэтому:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \frac{R}{r_a} v_b \cos \beta_b.$$

Аналогичным образом можно получить скорость КА v_c и угол β_c в момент его выхода из атмосферы и скорость, которая необходима для достижения низкой круговой орбиты:

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \frac{R}{r_p} v_c \cos \beta_c.$$

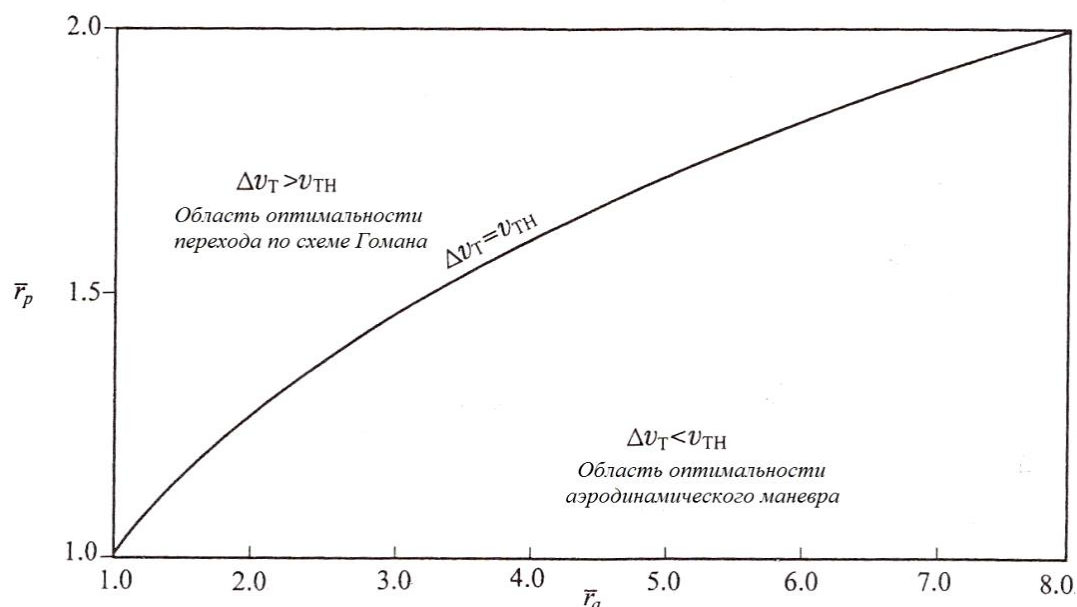


Рис. 5.21. Сравнение затрат топлива для двух межорбитальных переходов

Цель задачи – обеспечить минимальный расход топлива, поэтому целевая функция будет иметь вид:

$$J = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \frac{R}{r_a} v_b \cos \beta_b - \frac{R}{r_p} v_c \cos \beta_c. \quad (5.62)$$

В (5.56а) – (5.56в) нужно найти такие функции времени $F_y = F_y(t)$, чтобы получить $v_b, v_c, \beta_b, \beta_c$, при которых J достигает своего минимума. Для достижения этой цели необходимо добавить два условия: законы сохранения энергии при входе КА в атмосферу и выходе его из атмосферы:

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \Delta v_1 \right)^2 - \frac{\mu}{r_a} = \frac{v_b^2}{2} - \frac{\mu}{R}, \quad (5.63)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \Delta v_2 \right)^2 - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} = \frac{v_c^2}{2} - \frac{\mu}{R}. \quad (5.64)$$

Оптимизация проводится в соответствии с алгоритмом, приведенным в разделе 5.4.

Используя указанное выше соотношение, можно рассчитать переход с геостационарной орбиты на круговую высотой $r_p = 6558 \text{ км}$. Из результатов расчета следует, что полное приращение скорости будет $\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2$, необходимое для аэродинамического маневра, составляет 38.48% от приращения скорости при переходе по схеме Гомана. Энергетика, использованная для изменения F_y , в расчете не учитывалась.

6 МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ

В настоящее время возможна реализация межпланетных полетов только внутри Солнечной системы, так как радиус Солнечной системы составляет около 6 млрд. км и свету нужно более 5 часов, чтобы пройти от центра до края системы. До самого близкого к нам созвездия Альфа Центавра нужно около 4,5 световых лет. Также нужно помнить о том, что скорость движения КА вокруг Земли составляет около 7,8 км/с; скорость движения КА в межпланетном пространстве – около 30 – 50 км/с (это 1/6000 скорости света), за год КА может преодолеть около 1.5 млрд. км. Этой скорости недостаточно, чтобы выйти за пределы Солнечной системы, и тем более недостаточно, чтобы совершить полет в другие галактики. Даже если КА будет иметь скорость, равную хотя бы половине скорости света, то до созвездия Альфа Центавра ему придется лететь 8.6 лет.

6.1 Синодический период обращения и стартовые окна

Расстояние от Земли до любой планеты Солнечной системы очень велико. При полете к Меркурию, ближайшей к Солнцу планете, КА придется преодолеть более чем 0.2 млрд. км, поэтому на первый план выходит проблема экономии топлива. Очевидно, что переход по схеме Гомана является наиболее предпочтительным вариантом. Однако нужно учитывать, что планета прибытия совершает движение, и важно выбрать момент старта, когда Земля и другие планеты имеют фиксированное относительное положение. Интервалы времени, когда планеты занимают требуемое относительное положение, называются окнами старта. Целесообразные даты старта повторяются через промежуток времени, который называют синодическим периодом.

Скорости движения планет по их орбитам отличаются: чем ближе планета к Солнцу, тем короче период ее обращения (таблица 1.1). С течением времени появление стартовых окон будет меняться. Две планеты обращаются вокруг Солнца с угловой скоростью $(\omega_1 - \omega_2)$, а угловое расстояние будет $\left| \int_0^t (\omega_1 - \omega_2) dt \right|$.

Пусть ω_1, ω_2 – константы, тогда можно получить формулу для расчета синодического периода:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}. \quad (6.1)$$

Здесь ω_1, ω_2 – средние угловые скорости движения планет вокруг Солнца.

Если вместо угловых скоростей ω_1, ω_2 использовать периоды обращения планет T_1, T_2 , то можно записать:

$$T = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}. \quad (6.2)$$

Рассчитанные по формуле (6.2) синодические периоды также указаны в таблице 1.1.

Из формулы (6.2) видно, что чем меньше относительная скорость $(\omega_1 - \omega_2)$, тем дольше синодический период, что также отражено в таблице 1.1. Самыми длинными являются синодические периоды Земли относительно Венеры (583.92 суток) и Марса (779.94 суток). Синодический период Земли относительно дальних планет составляет чуть больше одного года, т.к. периоды обращения этих планет гораздо больше периода обращения Земли. Таким образом, можно условно принять, что эти планеты не движутся и время до встречи с Землей составляет около одного года.

6.2 Гравитационные сферы действия планет. Метод кусочно-конической аппроксимации

Для точного решения задачи n тел, которая возникает при проектировании межпланетных траекторий, нужно учитывать гравитацию планет, их совместное действие. До настоящего времени нет аналитического решения задачи n тел ($n \geq 3$), поэтому решение этой задачи возможно только с использованием численных методов.

При решении задачи в первом приближении, если не требуется высокая точность, можно использовать метод разделения пространства на области, в каждой из которых учитывается притяжение только одного небесного тела. Область пространства, в которой гравитационное влияние одного небесного тела преобладает над другими, называется сферой действия этого тела. Поскольку мы приняли, что гравитационные поля тел являются центральными, то можно считать область пространства планеты, к которой движется КА, стянутой в точку и решать задачу двух тел.

Чтобы рассчитать радиус сферы действия, рассмотрим систему, состоящую из тел P_1, P_2, P_3 (P_2 – космический аппарат) массами m_1, m_2, m_3 (рис. 6.1).

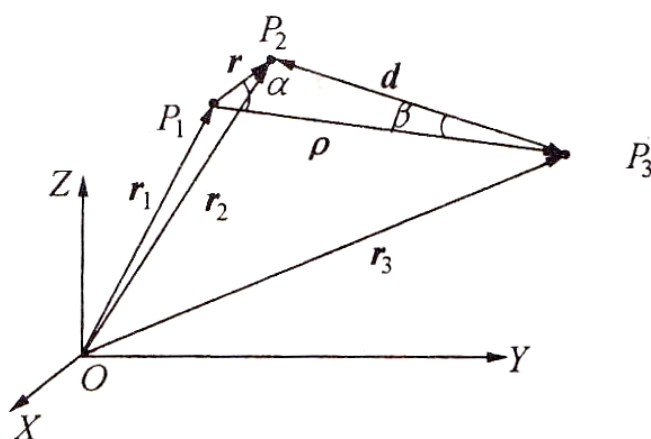


Рис. 6.1. Система трех тел

Уравнение движения КА P_2 под действием сил от тел P_1, P_3 имеет вид:

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G \left(\frac{m_1}{r^3} \vec{r} + \frac{m_3}{d^3} \vec{d} \right).$$

Тело P_1 движется под действием сил со стороны тел P_2, P_3 , но так как $m_2 \ll m_3$, влиянием тела P_2 можно пренебречь, поэтому получим:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_3}{\rho^3} \vec{\rho}.$$

Таким образом, движение КА P_2 относительно небесных тел P_i может быть описано уравнением:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -G \left(m_1 \frac{\vec{r}}{r^3} + m_3 \left(\frac{\vec{d}}{d^3} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right) \right). \quad (6.3)$$

Здесь $Gm_1 \frac{\vec{r}}{r^3}$ – гравитационная сила со стороны центрального гравитирующего тела, или по модулю $Gm_1 \frac{1}{r^2}$; $Gm_3 \left(\frac{\vec{d}}{d^3} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right)$ – возмущающая сила, действующая со стороны тела P_3

$$\begin{aligned} \text{Возмущающая сила} &= Gm_3 \left[\left(\frac{\vec{d}}{d^3} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right) \cdot \left(\frac{\vec{d}}{d^3} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right) \right]^{1/2} = \\ &= Gm_3 \left[\frac{1}{d^4} + \frac{1}{\rho^4} + 2 \frac{\vec{d}\vec{\rho}}{d^3\rho^3} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из рис. 6.1 видно:

$$\bar{d} \cdot \bar{\rho} = -d\rho \cos \beta.$$

Так как P_2 – это КА, который движется вокруг тел P_1 , а тело P_3 сильно удалено, то должно выполняться $d \approx \rho$ (см. рис. 6.1):

$$\cos \beta = \frac{\rho}{d} - \frac{r}{d} \cos \alpha \cong 1 - \frac{r}{\rho} \cos \alpha.$$

По теореме косинусов $d^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \alpha$, откуда

$$\cos \alpha = \frac{\rho^2 + r^2 - d^2}{2r\rho} \cong \frac{r}{2\rho}.$$

Поэтому возмущающая сила может быть записана в виде

$$\text{Возмущающая сила} = Gm_3 \frac{r}{\rho^3}.$$

Соотношение между гравитационной и возмущающей силами:

$$\frac{\text{Гравитационная сила}}{\text{Возмущающая сила}} = \frac{m_1}{m_3} \left(\frac{\rho}{r} \right)^3. \quad (6.5)$$

Аналогично можно получить уравнения относительного движения КА, когда P_3 рассматривается как центральное гравитирующее тело, а P_1 – источник возмущения:

$$\ddot{\bar{d}} = -G \left(m_3 \frac{\bar{d}}{d^3} + m_1 \left(\frac{r}{r^3} - \frac{\bar{\rho}}{\rho^3} \right) \right). \quad (6.6)$$

После аналогичных преобразований и пренебрегая малой r/ρ по сравнению с единицей, получим:

$$\frac{\text{Гравитационная сила}}{\text{Возмущающая сила}} = \frac{m_3}{m_1} \left(\frac{r}{d} \right)^2 \cong \frac{m_3}{m_1} \left(\frac{r}{\rho} \right)^2. \quad (6.7)$$

Приравняем выражения (6.5) и (6.7), получим:

$$r = \rho \left(\frac{m_1}{m_3} \right)^{2/5}. \quad (6.8)$$

Здесь r – граница сферы, внутри которой тела P_1, P_3 оказывают друг на друга влияние. Область, где r меньше значения приведенной выше формулы, является сферой действия тела P_1 ; а если r больше указанного значения, то это сфера действия тела P_3 . Следовательно, выражение (6.8) задает радиус сферы действия. Из формулы (6.8) можно получить радиус сферы действия планеты в Солнечной системе (см. результаты в таблице 1.1).

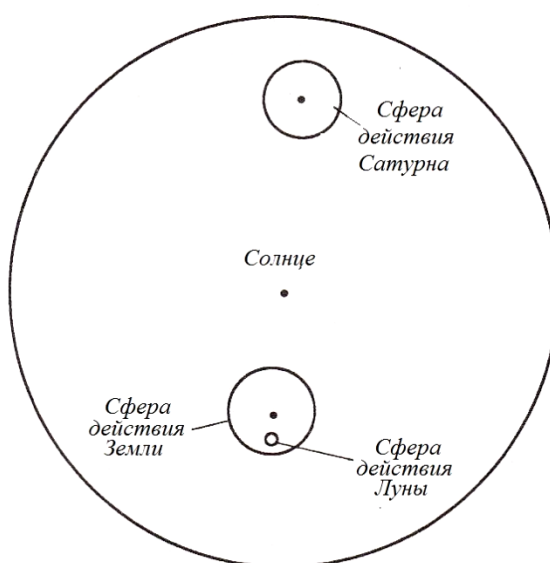


Рис. 6.2. Сферы действия планет

Например, из рис. 6.2 видно, что сфера действия Луны самая маленькая. Если КА находится в этой области, то считаем, что Луна – центральное гравитирующее тело, а воздействия других планет не будет. Если КА выйдет из сферы действия Луны, то попадет в сферу действия Земли и центральным гравитирующим телом будет уже Земля. Аналогично, если КА при своем движении выйдет за пределы сферы действия Земли, то он попадет в сферу действия Солнца и будет двигаться под действием центрального гравитирующего тела – Солнца.

Применим понятия сфер действия для анализа полета КА с Земли до Сатурна. Когда КА движется в сфере действия Земли, то имеем задачу двух тел, где Земля – центральное тело. Если КА набирает скорость, превышающую вторую космическую, то он может выйти из сферы действия Земли. Тогда КА может осуществить полет к Сатурну по заданной орбите. Снова имеем задачу двух тел, в которой центральным телом является Солнце. При подлете к Сатурну скорость КА должна быть снижена, чтобы войти в его сферу действия. Таким образом, всю траекторию движения КА до Сатурна можно разделить на три участка. На каждом участке полета будет свое центральное тело – Земля, Солнце, Сатурн. Для расчета всей траектории движения необходимо состыковать участки по граничным условиям. Необходимо также помнить о том, что Земля и Сатурн двигаются вокруг Солнца, но при выполнении расчетов можно считать, что центральное тело статично. В данном примере в любой области пространства орбита КА представляет собой сечение конической поверхности, поэтому такой расчетный метод называется методом кусочно-конической аппроксимации.

6.3 Пертурбационный маневр

Пертурбационный маневр – это маневр изменения скорости КА под действием гравитационных полей небесных тел.

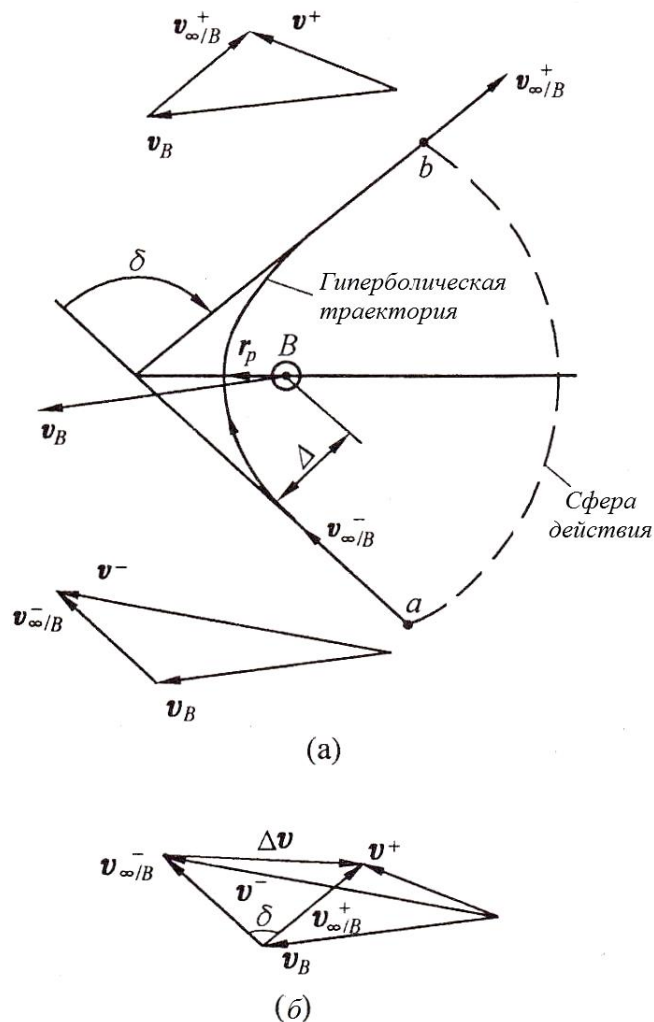


Рис. 6.3. Облет перед планетой

Траектория КА, совершающего полет в межпланетном пространстве, представляет собой гиперболу. Пусть B – планета, оказывающая возмущающее влияние на КА, когда он входит в ее сферу действия. Используя уравнение сохранения энергии (3.17), запишем выражение для скорости КА в сфере действия тела B :

$$v = \sqrt{\frac{2\mu_B}{r} - \frac{2\mu_B}{R_B}}. \quad (6.9)$$

Здесь r и R_B – расстояние от КА до небесного тела B и радиус сферы действия тела B соответственно; μ_B – гравитационный параметр небесного тела B . Так как R_B – большая величина, то второе слагаемое в приведенной выше формуле можно опустить. Из выражения (6.9) видно, что КА движется по параболической орбите (в соответствии с уравнением (3.50)). Если скорость КА, движущегося к сфере действия тела B , не равна нулю (как это обычно и бывает), он, видимо, будет двигаться в сфере действия тела B по гиперболической орбите.

Разделим пертурбационные маневры на два типа: облет перед планетой (рис. 6.3) или за планетой (рис. 6.4).

На этих двух рисунках тело B – источник возмущения, его скорость относительно системы отсчета равна \bar{v}_B , и КА входит в сферу действия тела B в точке a . Перед входом в сферу действия тела B КА имеет скорость относительно системы отсчета \bar{v}^- . Как только КА подвергается возмущающему действию со стороны тела B , он совершает облет тела B . Согласно вышеизложенному, скорость КА в точке a при движении вокруг тела B (рис. 6.3):

$$\bar{v}_{\infty/B}^- = \bar{v}^- - \bar{v}_B. \quad (6.10)$$

Здесь знаки в верхнем индексе «+/-» указывают на вход/выход КА из сферы действия небесного тела. Нижний индекс указывает на границу сферы действия. Когда КА входит в сферу действия тела B , на него действует только притяжение со стороны тела B . В момент выхода из сферы действия планеты КА имеет скорость

$$\bar{v}_{\infty/B}^+ = \bar{v}^+ + \bar{v}_B. \quad (6.11)$$

Таким образом, в результате выполнения пертурбационного маневра скорость КА изменилась от \bar{v}^- до \bar{v}^+ . Приращение скорости составляет $\Delta\bar{v} = \bar{v}_{\infty/B}^+ - \bar{v}_{\infty/B}^-$.

Определим параметры требуемой гиперболической орбиты. По формуле (3.60) можно найти δ , зная e . Формула (3.65) устанавливает связь между δ и Δ . Если известна точка входа КА на гиперболическую траекторию, можно вычислить Δ и δ .

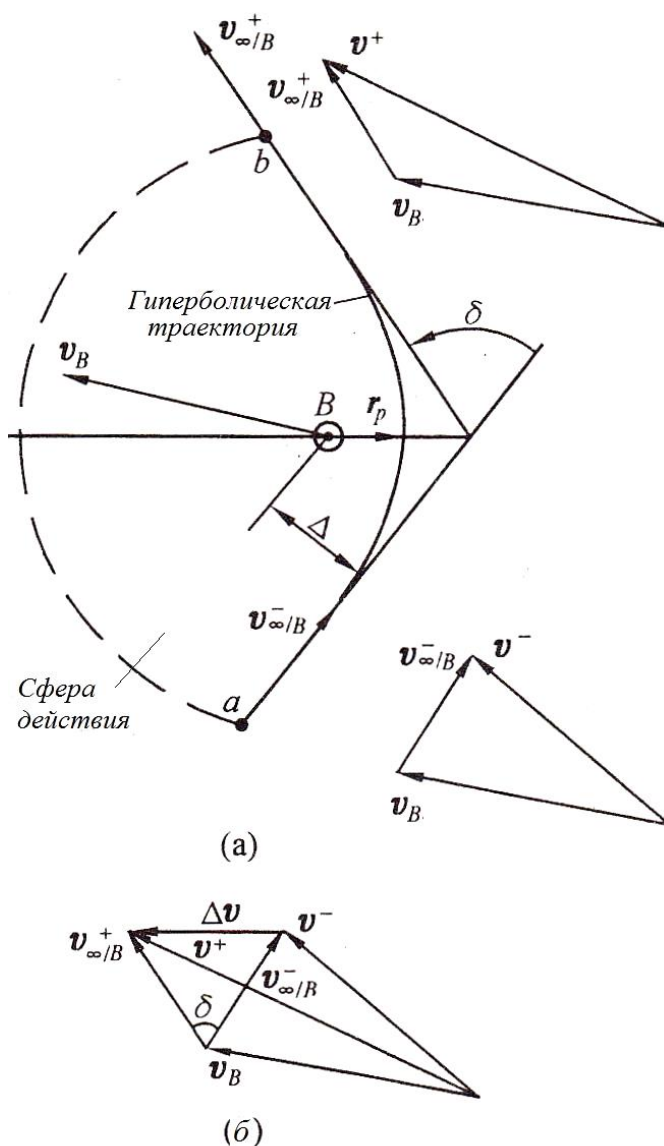


Рис. 6.4. Облет за планетой

Из рисунков 6.3 и 6.4 видно:

$$\Delta v = |\bar{v}^+ - \bar{v}^-| = |\bar{v}_{\infty/B}^+ - \bar{v}_{\infty/B}^-| = 2v_{\infty/B} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (6.12)$$

С помощью формул (3.60) и (3.55) можно получить:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + (r_p/a)}. \quad (6.13)$$

Здесь r_p – радиус гиперболической орбиты; a – большая полуось.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{v_{\infty/B}^2}{2} - \frac{\mu_B}{R_B} = \frac{\mu_B}{2a}.$$

Величина R_B очень велика, следовательно, $\frac{\mu_B}{R_B} \rightarrow 0$, тогда

$$a = \frac{\mu_B}{v_{\infty/B}^2}. \quad (6.14)$$

Подставим (6.14) в (6.13) и (6.12):

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + (r_p v_{\infty/B}^2 / \mu_B)}. \quad (6.15)$$

$$\Delta v = \frac{2v_{\infty/B}}{1 + (r_p v_{\infty/B}^2 / \mu_B)}. \quad (6.16)$$

Можно видеть, что величина изменения скорости Δv связана с радиусом r_p , и когда он равен радиусу r_B (или радиуса

границы его атмосферы), величина Δv достигнет максимального значения, т. е.

$$\Delta v_{\max} = \frac{2v_{\infty/B}}{1 + \left(r_B v_{\infty/B}^2 / \mu_B \right)}. \quad (6.17)$$

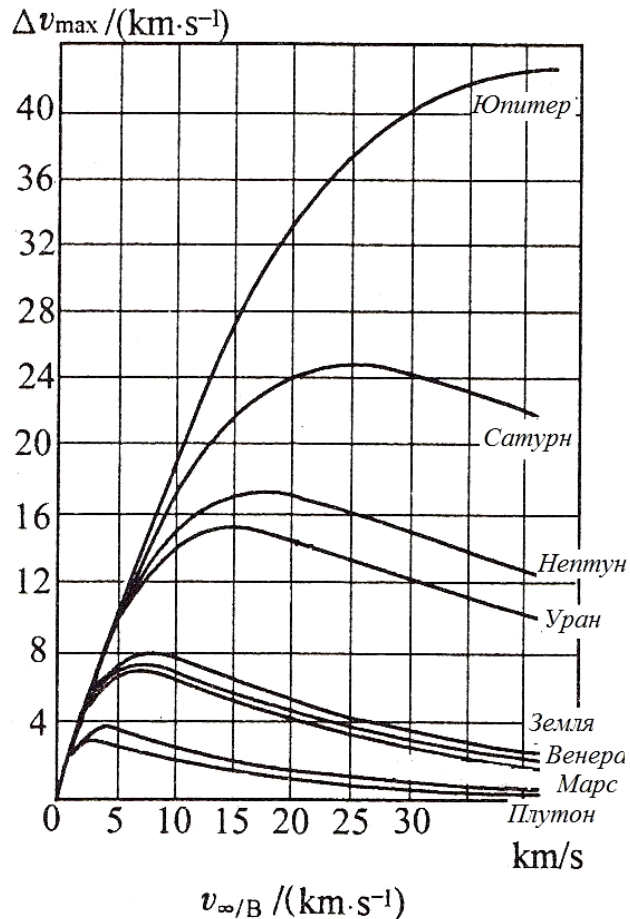


Рис. 6.5. Приращения скорости в результате выполнения пертурбационных маневров в окрестности различных планет

Однако Δv_{\max} зависит от $v_{\infty/B}$. Если взять производную $d\Delta v_{\max} / dv_{\infty/B} = 0$, можно получить

$$v_{\infty/B} = \sqrt{\frac{\mu_B}{r_B}} = v_{CB}. \quad (6.18)$$

То есть, когда скорость $v_{\infty/B}$ равна первой космической скорости небесного тела B , величина Δv_{\max} достигает своего максимального значения $(\Delta v_{\max})_{\max}$. Если подставить (6.18) в (6.17), получим:

$$(\Delta v_{\max})_{\max} = v_{CB}. \quad (6.19)$$

На рис. 6.5 показаны графики, построенные с помощью уравнения (6.17).

В действительности при пролете в окрестности небесного тела скорость КА может как получить приращение, так и потерять его. Если время движения КА в сфере действия небесного тела B равна Δt , то среднее ускорение $\Delta v / \Delta t$. Если за период Δt скорость КА под действием небесного тела стала $\Delta s / \Delta t$, то энергия, которую КА приобретет или потеряет, составит $\frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta s$, а ее максимальное значение:

$$\Delta \mathcal{E}_{\max} = v_B \Delta v_{\max}. \quad (6.20)$$

Использование пертурбационного маневра позволяет изменить направление движения и величину скорости КА, что дает возможность экономить топливо. Кроме того, дополнительное использование двигателей во время выполнения пертурбационного маневра позволяет формировать более разнообразные орбиты.

6.4 Полет к Луне

Расстояние от Земли до Луны составляет 384400 км. Форма орбиты близка к круговой ($e = 0.0549$), продолжительность одного полного оборота вокруг оси равно времени ее оборота вокруг

Земли и составляет 27.322 суток. Именно поэтому Луна повернута к Земле всегда одной стороной.

Средний радиус Луны – 1738 км (1/3.67 радиуса Земли). Масса Луны – $7.35 \cdot 10^{22}$ кг (1/81.5 массы Земли). Радиус сферы действия Луны относительно Земли равен $66.1 \cdot 10^3$ км. Плоскость орбиты Луны наклонена к плоскости эклиптики (плоскости гелиоцентрической орбиты барицентра Земля-Луна) на угол $5^{\circ}8'$. Линия узлов лунной орбиты вращается в плоскости эклиптики навстречу движению Луны с периодом 18.6 года. Поскольку средний угол между плоскостями земного экватора и эклиптики составляет $23^{\circ}27'$, то угол между плоскостями земного экватора и лунной орбитой меняется в диапазоне между $18^{\circ}19' = 23^{\circ}27' - 5^{\circ}8'$ и $28^{\circ}35' = 23^{\circ}27' + 5^{\circ}8'$ за период 18.6 года. На рис. 6.6 показано изменение наклона по времени. В 1997 году наклонение было минимальным, а в 2006 году – максимальным.

Перелеты от Земли к Луне можно разделить на компланарные и некомпланарные. При компланарных перелетах орбитальная плоскость КА совпадает с плоскостью движения Луны вокруг Земли. При некомпланарных перелетах эти плоскости не совпадают. В разделе 4.2 мы говорили о том, что абсолютная величина наклона орбиты i всегда не меньше величины местной широты φ . Таким образом, если запуск осуществляется с самого южного космодрома Китая Сичан ($\varphi = 28^{\circ}$), то наклонение орбиты будет не менее 28° ($i \geq 28^{\circ}$). Из рис. 6.6 видно, что компланарный перелет на Луну с Сичана возможен только в небольшие временные интервалы (каждый длится 3 года с периодичностью 18.6 лет). В остальное время компланарные перелеты невозможны, и требуется изменять наклонение орбиты, а, значит, затрачивать больше топлива. Для решения этой задачи необходимо, чтобы плоскость лунной орбиты пересекалась с плоскостью орбиты КА.

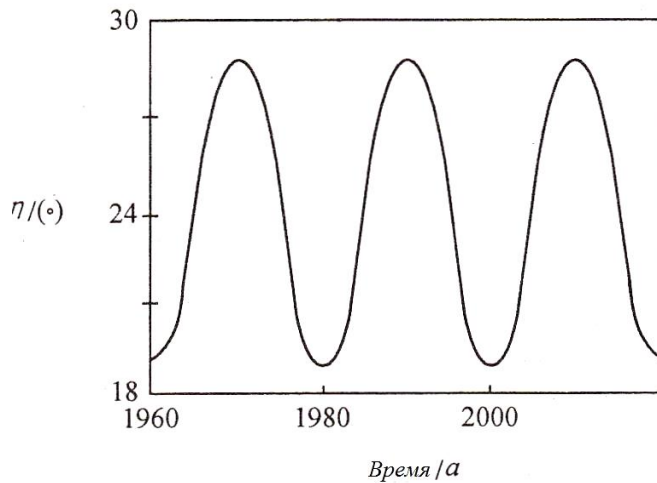


Рис. 6.6. Изменение среднего угла между плоскостями земного экватора и плоскостью орбиты Луны

В данном разделе мы рассмотрим только компланарные полеты к Луне.

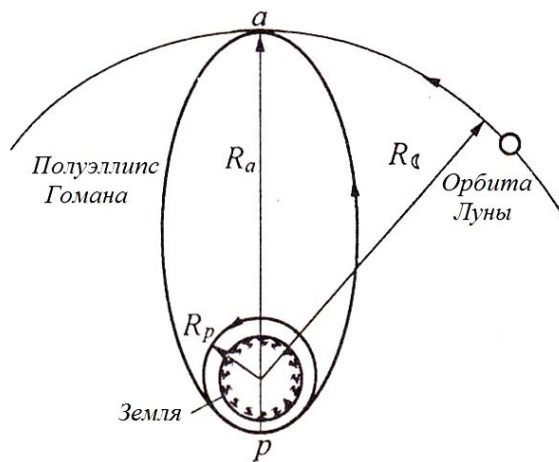


Рис. 6.7. Перелет к Луне с использованием перехода Гомана

Сначала КА выводится в перигей орбиты для выполнения контрольных измерений параметров движения, а затем по полуэллипсу движется к Луне. Если переход осуществляется по схеме Гомана, то переходная орбита касается начальной и целевой орбиты в точках перицентра и апоцентра (рис. 6.7). Радиус апогея эллипса R_a равен радиусу Лунной орбиты R_L . Ра-

диус перигея соответствует высоте начальной орбиты КА 220 км и равен $R_p = 6600$ км.

Таким образом, можно вычислить эксцентриситет и большую полуось переходной орбиты:

$$e = \frac{R_\alpha - R_p}{R_\alpha + R_p} = \frac{R_L - R_p}{R_L + R_p} = 0.966, \quad (6.21)$$

$$a = \frac{1}{2}(R_L + R_p) = 1.95 \cdot 10^5 \text{ км}. \quad (6.22)$$

Если μ_\oplus – гравитационный параметр Земли, можно вычислить скорость КА в перицентре:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{R_p}} \sqrt{\frac{R_L}{R_L + R_p}} = 10.90 \text{ км/с}. \quad (6.23)$$

Постоянная интеграла площадей КА:

$$h = v_p R_p = 7.19 \cdot 10^4 \text{ км}^2/\text{с}. \quad (6.24)$$

Время движется по переходной орбите:

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_\oplus}} = 5 \text{ сут.}$$

Это максимальная продолжительность перелета к Луне. Если требуется уменьшить время перелета, то нужно увеличить большую полуось эллипса. Для реализации перелета к Луне, необходимо, чтобы скорость КА касалась Лунной орбиты, а не пересекала ее (рис. 6.8).

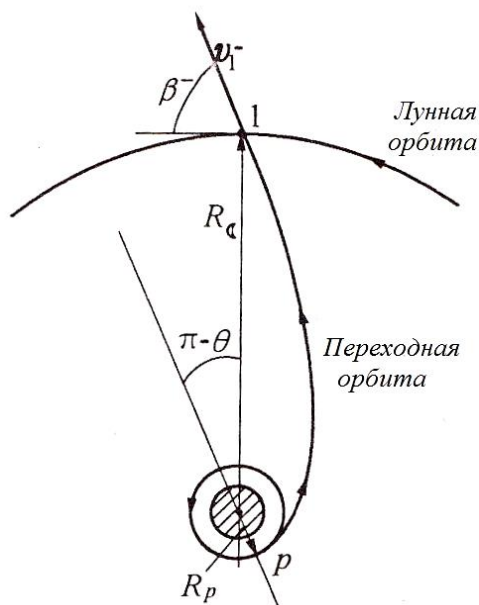


Рис. 6.8. Эллиптическая орбита сближения с Луной

Применение такого перелета позволяет незначительно увеличить затраты топлива, но при этом существенно уменьшить время перелета. Из выражения (6.23) видно, что при увеличении R_α до бесконечности можно получить параболическую орбиту,

т.е. $v_p = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{R_p}} = 10.99 \text{ км/с}$. Видно, что скорость увеличилась всего

лишь на 0.008, что приведет к незначительному увеличению требуемой массы топлива, но время перелета при этом сильно уменьшится. Чтобы вычислить время перелета к Луне, примем $R_\alpha = 2R_L$ и с помощью формул (6.21) – (6.24) получим:

$$e = 0.983, \quad a = 38.77 \cdot 10^4 \text{ км},$$

$$v_p = 10.94 \text{ км/с}, \quad h = 7.22 \text{ км}^2/\text{с}.$$

Пусть $r = R_L$, тогда:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (6.25)$$

Получим $\theta = 169.32^\circ$ для полета КА к Луне. Из (3.36) и (3.41) можно найти время полета до Луны, оно составит 2.56 сут. Скорость КА при этом увеличилась незначительно, а время уменьшилась в два раза.

Из закона сохранения кинетического момента следует:

$$h = v_p R_p = R_{\text{Л}} v_\theta. \quad (6.26)$$

Подставим полученные значения в (6.26) и выразим скорость $v_\theta = 0.19 \text{ км/с}$. Так как величина v_p небольшая, то можно считать v_θ константой.

Из уравнения энергии получим скорость полета КА к Луне:

$$\frac{(v_1^-)^2}{2} - \frac{\mu_\oplus}{R_{\text{Л}}} = -\frac{\mu_\oplus}{2a}$$

или

$$v_1^- = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{R_{\text{Л}}}} \sqrt{\frac{R_\alpha + R_p - R_{\text{Л}}}{R_\alpha + R_p}} = 1.023 \text{ км/с}. \quad (6.27)$$

Угол β^- – угол между вектором скорости и касательной к Лунной орбите. С помощью (3.47) и (6.27), а также $h = R_{\text{Л}} v_1^- \cos \beta^- = v_p R_p$ получим:

$$\cos \beta^- = \frac{R_p v_p}{R_{\text{Л}} v_1^-} = \sqrt{\frac{R_p}{R_{\text{Л}}}} \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\alpha + R_p - R_{\text{Л}}}}, \quad \beta^- = 79.4^\circ. \quad (6.28)$$

Также мы знаем, что, зная v_1^- и β^- , по методике, описанной в разделе 4.1, можно определить форму орбиты и рассчитать кинематические параметры КА в точке p .

Когда КА войдет в сферу действия Луны, скорость Луны относительно Земли будет

$$v_{\text{Л}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R_{\text{Л}}}} = 1.02 \text{ км/с} . \quad (6.29)$$

Вектор скорости перпендикулярен радиусу, поэтому с помощью рис. 6.9 можно определить скорость КА относительно Луны. На рис. 6.9 точка 1 – положение КА в момент его входа в сферу действия Луны. Так как скорость КА относительно Земли v_1^- (рис. 6.8), то скорость КА относительно Луны:

$$\bar{v}_{\infty/\text{Л}}^- = \bar{v}_1^- - \bar{v}_{\text{Л}} , \quad (6.30)$$

$$v_{\infty/\text{Л}}^- = \sqrt{(v_1^- \cos \beta^- - v_{\text{Л}})^2 + (v_1^-)^2 \sin^2 \beta^-} = 1.31 \text{ км/с} , \quad (6.31)$$

$$\varphi^- = \arctg \left[v_1^- \sin \beta^- / (v_1^- \cos \beta^- - v_{\text{Л}}) \right] + \pi . \quad (6.32)$$

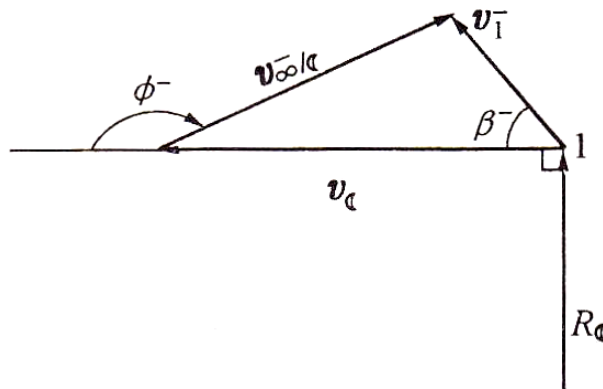


Рис. 6.9. Взаимосвязь между векторами скорости

На рис. 6.9 $v_1^- \cos \beta^- = v_{\theta}$ – компонента скорости v_1^- , перпендикулярная к радиусу. Как известно, v_{θ} – константа, равная 0.19 км/с. Поэтому минимальное значение величины $v_{\infty/\text{Л}}^-$ будет равно $1.02 - 0.19 = 0.83$ км/с. Вторая космическая скорость в сфере

действия Луны $v_{Л} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{Л}}}$, где $\mu = 4887 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – гравитационный параметр Луны; радиус сферы действия Луны $r_{Л} = 66100 \text{ км}$. Вторая космическая скорость у Луны будет равна 0.385 км/с , которая меньше минимального значения величины $v_{\infty/Л}^-$, следовательно, в сфере действия Луны КА будет двигаться по гиперболической орбите.

Пример 1.

КА двигался сначала по круговой геоцентрической орбите с радиусом перигея $r_p = 6600 \text{ км}$, затем по эллиптической орбите, перигея которой касался геоцентрической орбиты, а радиус апоцентра был равен $R_a = 2R_{Л}$, совершил переход к Луне. Когда он вошел в сферу действия Луны, расстояние между продолжением вектора скорости $v_{\infty/Л}^-$ и Луной составило $\Delta = 4000 \text{ км}$. Определите орбиту, по которой КА мог подлететь к Луне.

Решение.

Чтобы упростить решение задачи при движении КА в сфере действия Земли, будем считать, что сфера действия Земли стянута в точку.

В данной задаче нам известно:

$$e = 0.983, \quad a = 38.77 \cdot 10^4 \text{ км}, \quad v_p = 10.94 \text{ км/с}.$$

Когда КА подлетел к Луне:

$$v_1^- = 1.023 \text{ км/с}, \quad \beta_1^- = 79.4^\circ.$$

С помощью (6.30) можем рассчитать $v_{\infty/Л}^-$ и определить ее положение φ^- . Из (6.31), (6.32), и с помощью рисунка 6.10в:

$$v_{\infty/Л}^- = 1.305 \text{ км/с}, \quad \varphi^- = 129.6^\circ.$$

После входа КА в сферу действия Луны можно считать, что Луна статична. КА облетел Луну по гиперболической траектории со скоростью $v_{\infty/L}^-$ (рис. 6.10а, 6.10б).

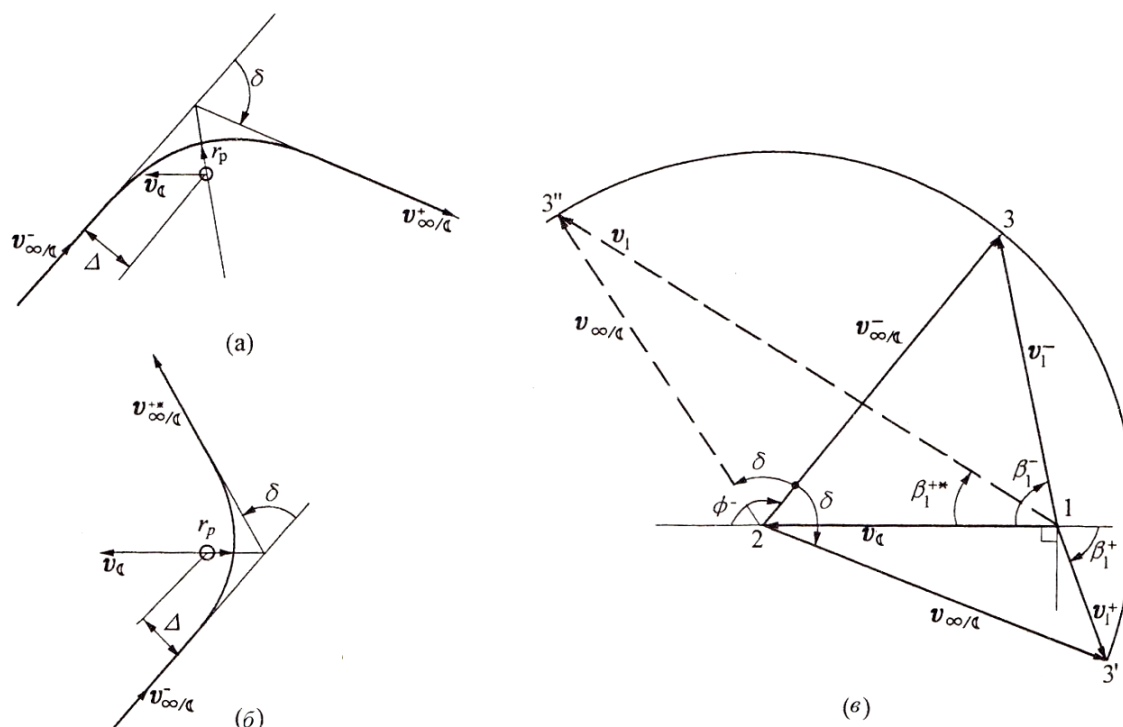


Рис. 6.10. Полет КА к Луне

Рассчитаем параметры орбиты. С помощью формул (3.65) и (3.60) вычислим эксцентриситет и угол δ :

$$e = \left[1 + \frac{(v_{\infty/L}^-)^4 \Delta^2}{\mu_L^2} \right]^{1/2} = 1.716, \quad (6.33)$$

$$\delta = 2 \arcsin \left(\frac{1}{e} \right) = 71.3^\circ. \quad (6.34)$$

При облете Луны спереди движение КА происходит по часовой стрелке (рис. 6.10а), а при облете сзади – против часовой

стрелки (рис. 6.10б). С помощью формул (3.64) и (3.55) можно определить большую полуось и радиус перицентра гиперболы:

$$a = \Delta / \sqrt{e^2 - 1} = 2870 \text{ км}, \quad (6.35)$$

$$r_p = a(e - 1) = 2054 \text{ км}. \quad (6.36)$$

Когда КА выходит из сферы действия Луны, он попадает в сферу действия Земли.

На рис. 6.10в показано, как изменяется скорость КА. В точке 1 КА входит в сферу действия Луны.

Введем обозначения:

$\bar{v}_{Л}$ – скорость движения Луны по ее орбите;

β_1^- – угол между векторами скорости $\bar{v}_{Л}$ и \bar{v}_1^- .

Из векторного треугольника $\Delta 123$ видно, что скорость движения КА относительно Луны ($\bar{v}_1^- - \bar{v}_{Л}$) равна $\bar{v}_{\infty/Л}^-$.

После выхода КА из сферы действия Луны его геоцентрическая скорость составила:

$$\bar{v}_1^+ = \bar{v}_{\infty/Л}^+ + \bar{v}_{Л} \quad \text{или} \quad \bar{v}_1^{+*} = \bar{v}_{\infty/Л}^{+*} + \bar{v}_{Л}. \quad (6.37)$$

Из $\Delta 123'$ или $\Delta 123''$ можно рассчитать скорость и угол:

$$v_1^+ = \left\{ \left[v_{Л} + v_{\infty/Л}^+ \cos(\varphi^- + \delta) \right]^2 + \left(v_{\infty/Л}^+ \right)^2 \sin^2(\varphi^- + \delta) \right\}^{1/2} = \quad (6.38)$$

$$= 0.508 \text{ км/с}$$

$$\beta_1^+ = \arctg \left\{ v_{\infty/Л}^+ \sin(\varphi^- + \delta) / \left[v_{Л} + v_{\infty/Л}^+ \cos(\varphi^- + \delta) \right] \right\} = -66.8^\circ \quad (6.39)$$

$$v_1^{+*} = \left\{ \left[v_{Л} + v_{\infty/Л}^{+*} \cos(\varphi^- - \delta) \right]^2 + \left(v_{\infty/Л}^{+*} \right)^2 \sin^2(\varphi^- - \delta) \right\}^{1/2} = \quad (6.40)$$

$$= 2.03 \text{ км/с}$$

$$\beta_1^{+*} = \arctg \left\{ v_{\infty/Л}^{+*} \sin(\varphi^- - \delta) / \left[v_{Л} + v_{\infty/Л}^{+*} \cos(\varphi^- - \delta) \right] \right\} = 33.1^\circ. \quad (6.41)$$

Можно заметить, что после возвращения КА на геоцентрическую орбиту $v_1^+ < v_{Л}$. А при $v_1^+ > \sqrt{2}v_{Л}$ КА выйдет из поля тяготения Земли и станет искусственным спутником в Солнечной системе.

Если в (4.7) и (4.8) подставить $r_0 = R_{Л}$ и $\mu = \mu_{\oplus}$, можно рассчитать параметры траектории облета Луны спереди:

$$e = 0.966, \quad \theta_1^+ = 185.4^\circ.$$

Эти параметры показаны на рис. 4.3. Орбита для возвращения КА на Землю также эллиптическая (рис. 6.11).

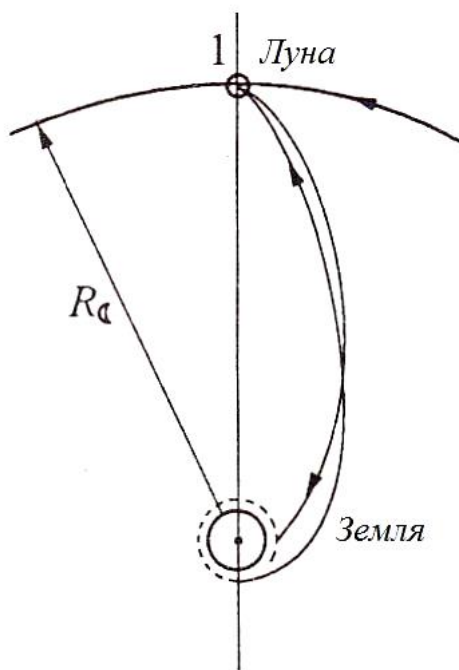


Рис. 6.11. Траектории полета к Луне с возвращением к Земле

После облета Луны из формул (4.7) и (4.8) получим:

$$e^* = 2.55, \quad \theta_1^{+*} = 45.5^\circ.$$

Видно, что если после облета Луны КА снова возвращается в сферу действия Земли, его орбита будет уже не эллиптической, а гиперболической.

Если $r = p/(1 + e \cos \theta)$ при $r = R_{\text{Л}}$, $\theta = \theta_1^{+*}$ и $r = r_p^*$, $\theta = 0$, то:

$$r_p^* = R_{\text{Л}} \frac{1 + e^* \cos \theta_1^{+*}}{1 + e^*} = 30.18 \cdot 10^4 \text{ км}.$$

Из (3.55) следует:

$$a^* = \frac{r_p^*}{e^* - 1} = 19.47 \cdot 10^4 \text{ км},$$

$$a^* e^* = 49.65 \cdot 10^4 \text{ км}.$$

Из (3.60) получим:

$$\delta^* = 2 \arcsin \left(\frac{1}{e^*} \right) = 46.2^\circ.$$

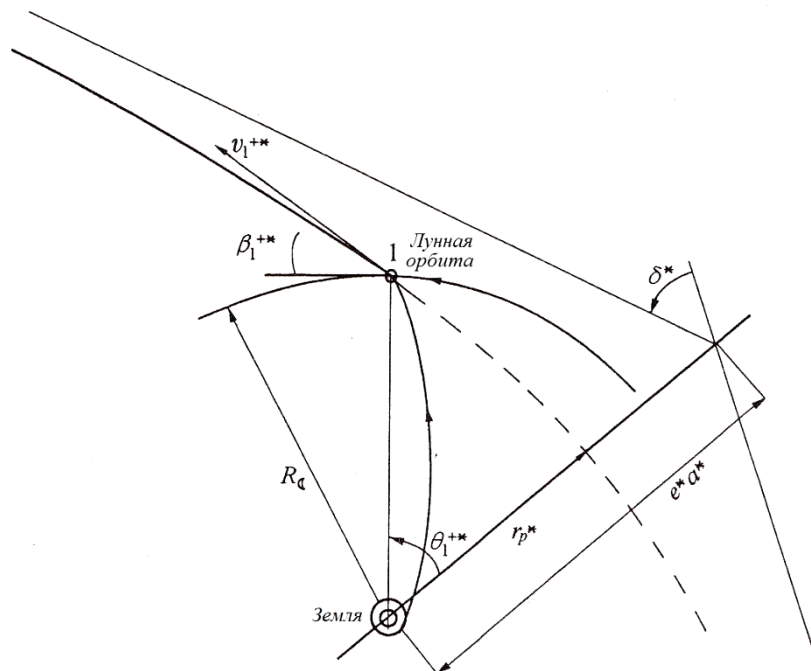


Рис. 6.12. Траектория отлета от Луны

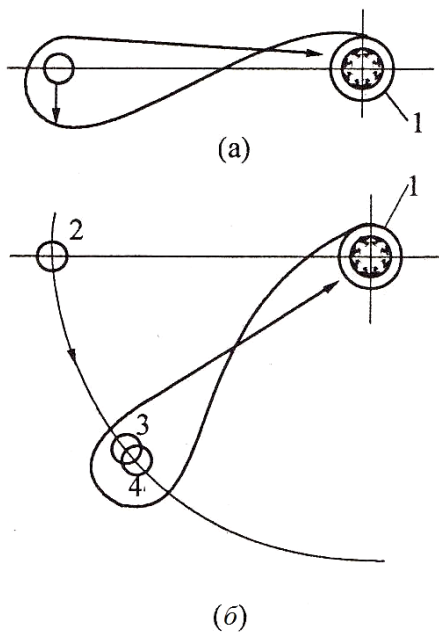


Рис. 6.13. Схема траектории
близкого облета Луны

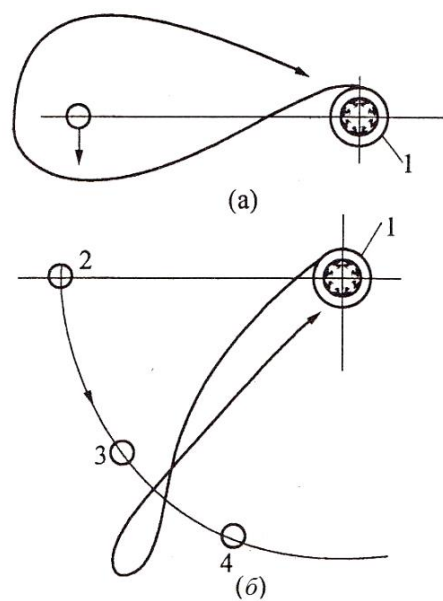


Рис. 6.14. Схема траектории
дальнего облета Луны

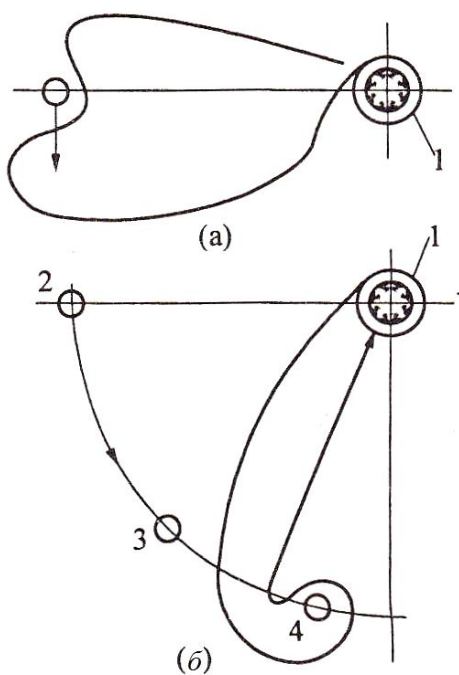


Рис. 6.15. Траектория
геоцентрического движения

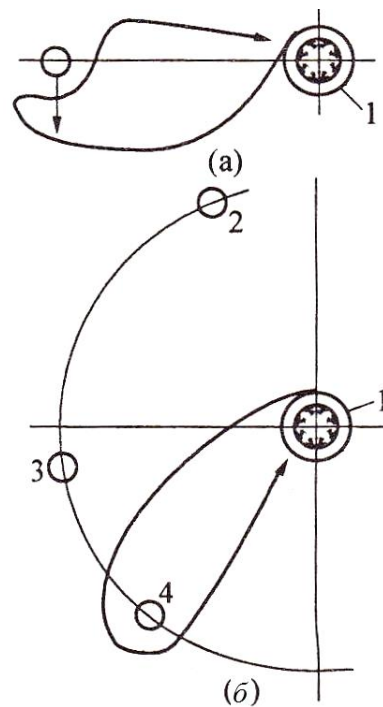


Рис. 6.16. Траектория
геоцентрического движения

На рис. 6.12 показана орбита КА с рассчитанными выше параметрами.

Из этого примера видно, что существует два вида траекторий: полет к Луне – возвращение к Земле и вылет из гравитационного поля Земли. В действительности существует и третий тип траектории, когда r_p меньше радиуса Луны, тогда возможна посадка КА на Луну.

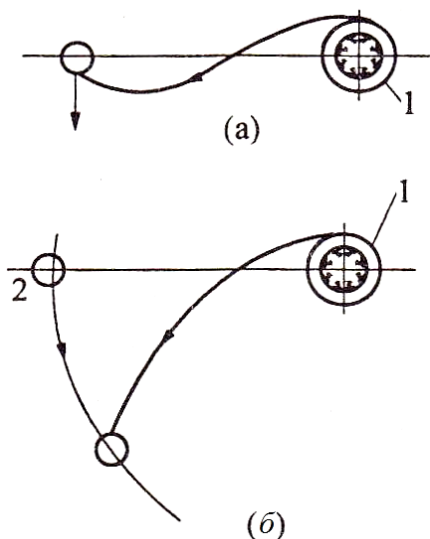


Рис. 6.17. Схема попадающе
на восходящей ветви траектории КА

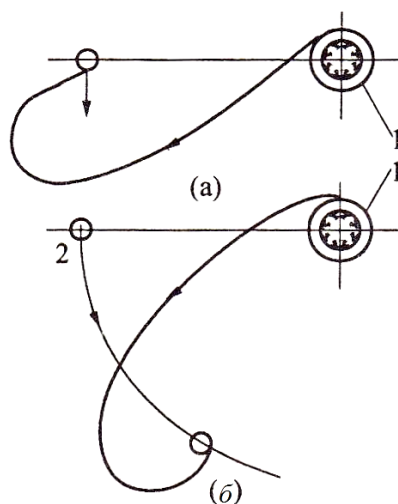


Рис. 6.18. Схема попадающей
на нисходящей ветви траектории КА

Траекторию полета к Луне с возвращением можно разделить на два участка: селеноцентрическое движение и геоцентрическое движение. Схема селеноцентрического движения показана на рис. 6.13 и 6.14. Здесь под (а) на рис. 6.13 – 6.18 показана линия Земля-Луна в текущих координатах; под (б) – в статичном состоянии Земли. На рисунках введены обозначения: 1 – орбита КА; 2 – положение Луны в момент старта КА с Земли; 3 – положение Луны в момент движения КА по восходящей ветви траектории; 4 – положение Луны в момент движения КА по нисходящей ветви траектории. На рис. 6.15 и 6.16 показаны примеры геоцентрического движения. Общим во всех этих рисунках является то, что

КА подлетает к Луне спереди. Различие заключается в том, что при селеноцентрическом движении КА возвращается к Земле из области сзади Луны, а при геоцентрическом движении – КА разворачивается и летит к Земле по траектории перед Луной.

На рис. 6.17, 6.18 показаны две возможные траектории посадки на Луну. Первая траектория – это траектория полета КА на Луну, которая может быть параболой, гиперболой или эллипсом. Вторая может быть только эллипсом.

Также возможен орбитальный переход, в результате которого КА станет спутником Луны.

В мае 1961 года президент США Джон Ф. Кеннеди поставил перед страной небывалую задачу – осуществить к концу десятилетия высадку человека на Луне. 16 июля 1969 года этот дерзкий план был воплощён в жизнь.

Утром 16 июля 1969 года с космодрома на мысе Канаверал, штат Флорида стартовала трёхступенчатая ракета-носитель «Сатурн-V», которая вывела на околоземную орбиту космический корабль «Аполлон-11» с тремя астронавтами на борту. Сначала КА был выведен на круговую орбиту Земли высотой 200 км, затем с помощью импульсного маневра он был переведен на траекторию полета к Луне (рис. 6.19). После достижения второй космической скорости был произведен маневр перестроения отсеков и стыковки с лунным модулем. При приближении к Луне аппарат попал в гравитационное поле Луны и стал ее спутником. После чего лунный модуль был отделен от командного и совершил мягкую посадку на лунную поверхность. Командный же модуль при этом остался на орбите вокруг Луны. Миссия завершилась стартом с Луны и возвращением астронавтов на Землю.

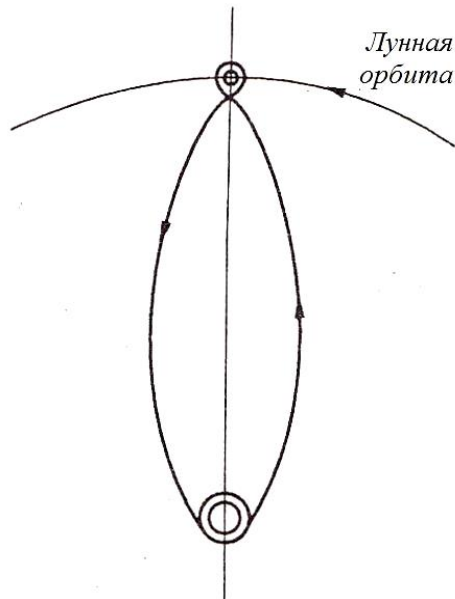


Рис. 6.19. Миссия «Аполлон-11» к Луне с возвращением к Земле

6.5 Межпланетные перелеты

Все межпланетные перелеты можно разделить на два типа: тип I – схемы полета к планете назначения без возвращения КА к Земле; тип II – схемы полета к планете назначения с возвращением КА к Земле. В свою очередь каждый тип делится на два класса: класс схем прямых полетов к планете назначения и класс схем полетов с учетом маневра при облете промежуточной планеты. Для большей определенности конкретной схемы полета классы разбиваются на группы.

Пример. Схема полета к Марсу без использования пертурбационного маневра.

Сначала мы рассмотрим схему прямого полета к Марсу (рис. 6.20). Вся траектория полета будет разделена на движение КА в сфере действия Земли, движение КА в сфере действия Солнца, движение КА в сфере действия Марса. Для упрощения задачи будем считать, что при движении КА в сфере действия

Солнца сферы действия Земли и Марса стянуты в точки, которые совпадают с центрами масс соответствующих планет, а движение КА происходит в плоскости эклиптики.

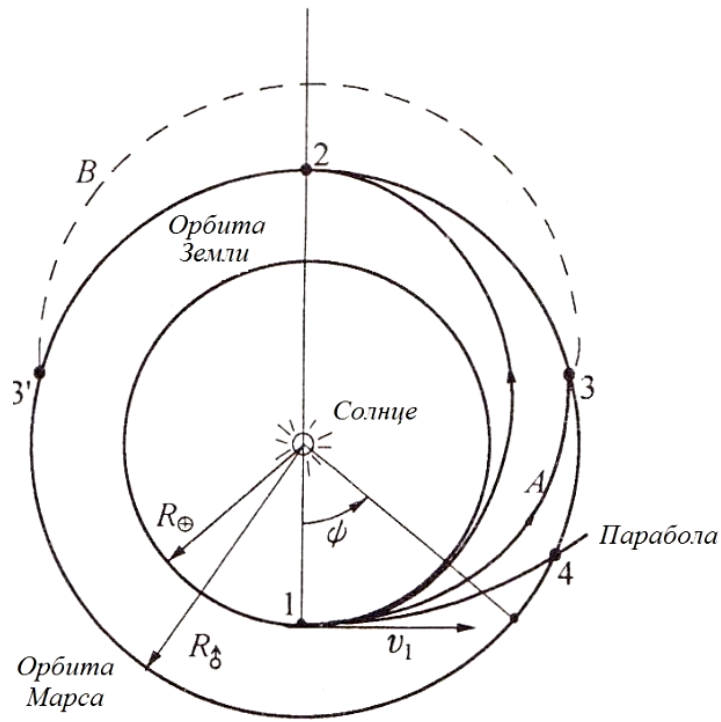


Рис. 6.20. Схема полета к Марсу

Из рис. 6.20 видно, что в точке 1 КА движется по касательной к земной орбите. На орбиту Марса он может выйти в точке 2 по полуэллипсу Гомана, в точке 3(3') через эллиптическую орбиту или в точке 4 по параболической траектории.

Рассмотрим эти траектории более подробно и сравним их.

Обозначим R_{\oplus} – радиус орбиты Земли; R_M – радиус орбиты Марса; v_{\oplus} – скорость движения Земли по ее орбите; v_M – скорость движения Марса по орбите; μ_{\oplus} – гравитационный параметр Земли; μ_M – гравитационный параметр Марса; μ_{\odot} – гравитационный параметр Солнца; r_{\oplus} – радиус сферы действия Земли; r_M – радиус сферы действия Марса.

$$\begin{aligned}
R_{\oplus} &= 1.496 \cdot 10^8 \text{ км}, & R_M &= 1.496 \cdot 10^8 \text{ км}, \\
v_{\oplus} &= 29.76 \cdot 10^8 \text{ км/с}, & v_M &= 24.11 \text{ км/с}, \\
\mu_{\oplus} &= 3.986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2, & \mu_M &= 4.29 \cdot 10^4 \text{ км}^3/\text{с}^2, \\
r_{\oplus} &= 9.929 \cdot 10^5 \text{ км}, & r_M &= 5.78 \cdot 10^5 \text{ км}, \\
\mu_{\ominus} &= 1.327 \cdot 10^{11} \text{ км}^3/\text{с}^2.
\end{aligned}$$

Скорость КА при движении по схеме Гомана в точках 1 и 2:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_{\ominus}}{R_{\oplus}}} \sqrt{\frac{2R_M}{R_{\oplus} + R_M}} = 32.73 \text{ км/с}, \quad (6.42)$$

$$v_2 = v_1 \frac{R_{\oplus}}{R_M} = 21.48 \text{ км/с}. \quad (6.43)$$

В сфере действия Земли скорость КА равна 26.76 км/с, после выхода из нее скорость $v_1 - v_{\oplus} = 2.968 \text{ км/с}$ будет достаточной для осуществления перелета. Обозначим ее $v_{\infty/\oplus}^+$.

Процесс отлета КА с околоземной орбиты ($r_p = 6600 \text{ км}$) высотой 222 км показан на рис. 6.21.

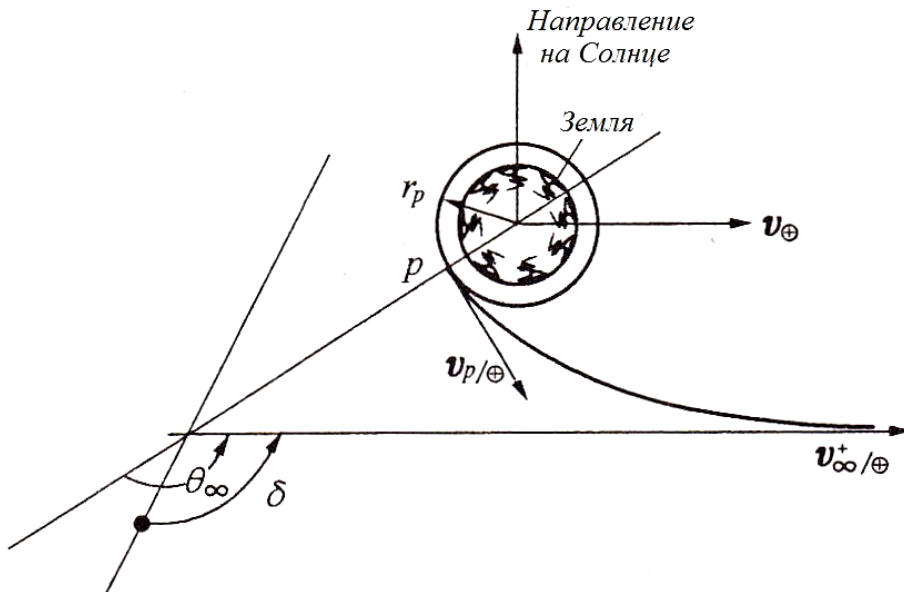


Рис. 6.21. Движение КА относительно Земли

Чтобы КА вышел из сферы действия Земли, его скорость $v_{p/\oplus}$ должна достичь значения $v_{\infty/\oplus}^+$. Запишем выражение для константы интеграла энергии:

$$\frac{v_{p/\oplus}^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_p} = \frac{(v_{\infty/\oplus}^+)^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}}.$$

Выразим:

$$v_{p/\oplus} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_p} + (v_{\infty/\oplus}^+)^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}}} = 11.346 \text{ км/с}. \quad (6.44)$$

Эта скорость больше скорости КА, движущегося по круговой орбите радиуса r_p :

$$\Delta v_1 = v_{p/\oplus} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_p}} = 3.57 \text{ км/с}.$$

Таким образом, космическому аппарату нужно придать приращение скорости 3.57 км/с (если $r_p = 6378 \text{ км}$, то скорость КА будет 11.567 км/с).

Можно заметить, что при отлете с круговой орбиты $r_p = 6600 \text{ км}$ с приращением скорости Δv_1 , КА может выйти из сферы действия Земли. Тогда в сфере действия Земли будет гиперболическая орбита. С помощью формул (3.66) и (3.60) рассчитаем параметры околоземной орбиты:

$$e = 1 + \frac{r_p (v_{\infty/\oplus}^+)^2}{\mu_{\oplus}} = 1.146, \quad (6.45)$$

$$\delta = 2 \arcsin\left(\frac{1}{e}\right) = 121.5^\circ. \quad (6.46)$$

Видно, что КА отлетел от Земли по гиперболической орбите (рис. 6.21), следовательно:

$$\theta_{\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} = 150.8^{\circ} .$$

Период обращения:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_{\oplus} + R_M)^3}{2}} / \mu_{\odot} = 518 \text{ сут} .$$

Таким образом, КА отлетел от Земли к Марсу с углом $\theta_{\infty} = 150.8^{\circ}$, время полета равно половине периода обращения, т.е. 259 сут. За это время Марс по своей орбите пройдет угловое расстояние:

$$\theta_M = 360^{\circ} \cdot \frac{259}{T_M} = 135.7^{\circ} .$$

За эти 259 суток угловое рассогласование между КА и Марсом составит:

$$\psi = \theta - \theta_M = 44.3^{\circ} .$$

Из рис. 6.20 можно аналогично получить параметры двух других орбит. Результаты представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Параметры орбит

Параметры	Орбиты			
	Переход по орбите Гомана	Переход по эллипсу А	Переход по эллипсу В	Переход по параболе
Скорость отлета $v_{p/\oplus}^*$, км/с	11.567	13.0	13.0	16.67
Гиперболический избыток скорости у Земли, $v_{\infty/\oplus}^*$, км/с	2.968	6.62	6.62	12.33
Период обращения по орбите, T , сут	518	1015	1015	-
Продолжительность перелета, сут.	259	105	910	70
Угловое расстояние КА, θ , град.	180	92.6	267.4	71.8
Угловое расстояние, покрытое Землей, θ_{\oplus} , град.	255.3	103.5	897.0	69.0
Угловое расстояние, покрытое Марсом, θ_M , град.	135.7	55	476.9	36.7
Угловое рассогласование между Землей и Марсом, ψ , град.	44.3	37.6	-209.5	35.1

Пример. Рассматривается миссия КА к Марсу с использованием гравитационного поля Венеры. Сначала КА движется к Венере по эллиптической траектории (рис. 6.22): 1 – точка начала движения, 2 – точка встречи с Венерой. В точке 2 КА за счет использования гравитационного поля Венеры увеличивает свою скорость и изменяет направление движения, после чего летит к Марсу по другой эллиптической орбите. Таким образом, КА последовательно движется в сферах действия Земли, Солнца, Венеры и Марса.

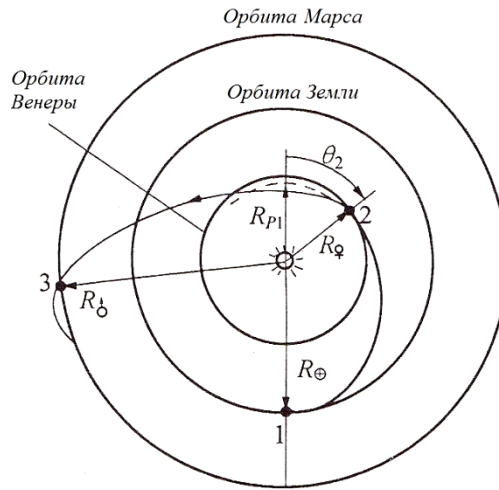


Рис. 6.22. Перелет с Земли на Марс с использованием гравитационного поля Венеры

Сначала рассмотрим движение КА от Земли до Венеры под действием гравитации со стороны Солнца. Из рис. 6.22 видно, что траектория движения представляет собой эллипс из точки 1 до точки 2 с радиусом апоцентра R_{\oplus} и радиусом перицентра $R_{p1} = 95 \cdot 10^6 \text{ км}$. Можно вычислить эксцентриситет эллипса:

$$e = \frac{R_{\oplus} - R_{p1}}{R_{\oplus} + R_{p1}} = 0.223.$$

Зная радиус орбиты Венеры $R_{Вен} = 108.21 \cdot 10^6 \text{ км}$ и R_{p1} , с помощью (3.24) получим:

$$\theta_2 = \arccos \left\{ \left[\frac{R_{p1}}{R_{Вен}} (1 + e) - 1 \right] \frac{1}{e} \right\} = 70.7^\circ. \quad (6.47)$$

Аналогично по формулам (6.27) и (6.28) получим значение гелиоцентрической скорости v_2 в точке 2 и направление вектора скорости β_2 :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{R_{Вен}}} \sqrt{\frac{R_{\oplus} + R_{p1} - R_{Вен}}{R_{\oplus} + R_{p1}}} = 36.98 \text{ км/с}, \quad (6.48)$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\sqrt{\frac{R_{p1}}{R_{Вен}}} \sqrt{\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + R_{p1} - R_{Вен}}}\right) = -11.1^\circ. \quad (6.49)$$

Время движения от точки 1 до точки 2 равно половине периода обращения по эллиптической орбите. С помощью (3.37) рассчитаем угол истинной аномалии θ_2 и угол эксцентрической аномалии $\psi_2 = 59^\circ$, а затем с помощью (3.41) получим продолжительность перелета из точки 1 в точку 2:

$$T_1 = (\pi - \psi_2 + e \sin \psi_2) \sqrt{\frac{(R_{p1} + R_{\oplus})^3}{2}} / \mu_{\oplus} = 98.9 \text{ сут}. \quad (6.50)$$

За это время Венера переместится по своей орбите на угол $\theta_{Вен} = 158.7^\circ$, а КА пройдет угловое расстояние $\theta_1 = 180^\circ - \theta_2 = 109.3^\circ$. Поэтому в момент отлета КА от Земли, угловое рассогласование между Венерой и Землей будет:

$$\psi_{Вен} = \theta_{Вен} - \theta_1 = 49.4^\circ. \quad (6.51)$$

На участке движения к Венере КА попадает в ее сферу действия сзади, облетает ее, и выходит с увеличенной скоростью и измененным направлением движения. В сфере действия Венеры КА движется по гиперболической траектории. Радиус перицентра равен диаметру Венеры $R_{pВен} \approx 12000 \text{ км}$. На рис. 6.23а показана эта гиперболическая орбита, а на рис. 6.23б показана схема скоростей.

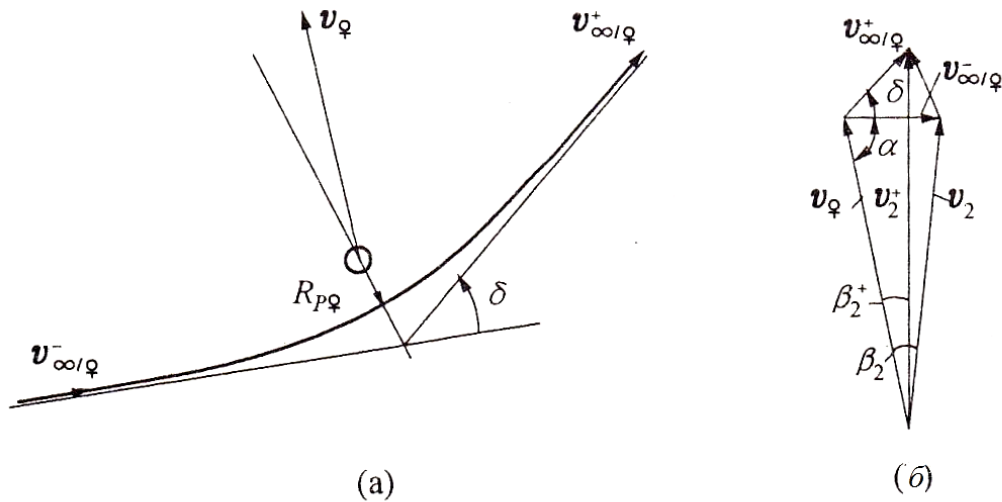


Рис. 6.23. Схема скоростей на гиперболической орбите

$$v_{\infty/Ven}^- = \left[(v_2 - v_{Ven} \cos \beta_2)^2 + v_{Ven}^2 \sin^2 \beta_2 \right]^{1/2} = 7.237 \text{ км / с}, \quad (6.52)$$

$$\sin \alpha = \frac{v_2 \sin \beta_2}{v_{\infty/Ven}^-} = 0.983, \quad \alpha = 100.3^\circ. \quad (6.53)$$

С помощью формул (3.66) и (3.60) вычислим эксцентриситет и угол наклона асимптот гиперболы:

$$e_2 = 1 + \frac{R_{p\ Ven} (v_{\infty/Ven}^-)^2}{\mu_{Ven}} = 2.932, \quad (6.54)$$

$$\delta = 2 \arcsin \left(\frac{1}{e_2} \right) = 39.88^\circ. \quad (6.55)$$

Определим величину и направление вектора скорости КА в момент его выхода из сферы действия Венеры:

$$v_2^+ = \left[(v_{\infty/Ven}^+)^2 + v_{Ven}^2 - 2v_{\infty/Ven}^+ v_{Ven} \cos(\alpha + \delta) \right]^{1/2} = 40.80 \text{ км / с}, \quad (6.56)$$

$$\beta_2^+ = \arcsin \left[\frac{\sin(\delta + \alpha)}{v_2^+} v_{\infty/Ven}^+ \right] = 6.52^\circ. \quad (6.57)$$

Найдем параметры орбиты КА при движении под действием гравитации Солнца после его отлета от Венеры:

$$\theta_3 = \arctg \frac{\left[R_{Вен} (v_\infty^+)^2 / \mu_\odot \right] \sin \beta_2^+ \cos \beta_2^+}{\left[R_{Вен} (v_\infty^+)^2 / \mu_\odot \right] \cos^2 \beta_2^+ - 1} = 24.3^\circ, \quad (6.58)$$

$$e_3 = \left\{ \left[R_{Вен} (v_\infty^+)^2 / \mu_\odot - 1 \right]^2 \cos^2 \beta_2^+ + \sin^2 \beta_2^+ \right\}^{1/2} = 0.373. \quad (6.59)$$

Видно, что орбита имеет форму эллипса, проходящего через точку 2, с фокусом в Солнце. С помощью (3.24) можно вычислить радиус апоцентра:

$$R_{\alpha 3} = \frac{R_{Вен} (1 + e_3 \cos \theta_3)}{1 - e_3} = 231.28 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

Этот радиус оказывается больше среднего радиуса орбиты Марса ($R_M = 227.9 \cdot 10^6 \text{ км}$), следовательно, по этой эллиптической орбите возможен полет к Марсу.

Рассмотрим подробнее полет КА от точки 1 до точки 2 в поле тяготения Земли. Скорость КА в точке 1 составит:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{R_\oplus}} \sqrt{\frac{R_{p1}}{R_\oplus + R_{p1}}} = 26.24 \text{ км/с}. \quad (6.60)$$

Скорость движения Земли по ее орбите $v_\oplus = 29.76 \text{ км/с}$, поэтому скорость КА в момент его выхода из сферы действия Земли $v_{\infty/\oplus}^+ = v_1 - v_\oplus = -3.52 \text{ км/с}$. Вектор этой скорости направлен противоположно вектору гелиоцентрической скорости. После ухода КА с земной орбиты с радиусом перицентра $r_{p/\oplus} = 6600 \text{ км}$, он выходит на гиперболическую орбиту с параметрами:

$$e_0 = 1 + \frac{r_{p/\oplus} (v_{\infty/\oplus}^+)^2}{\mu_{\oplus}} = 1.21. \quad (6.61)$$

Угол наклона асимптот гиперболы:

$$\delta_0 = 2 \arcsin\left(\frac{1}{e_0}\right) = 122.1^\circ.$$

Гиперболическая орбита показана на рис. 6.24.

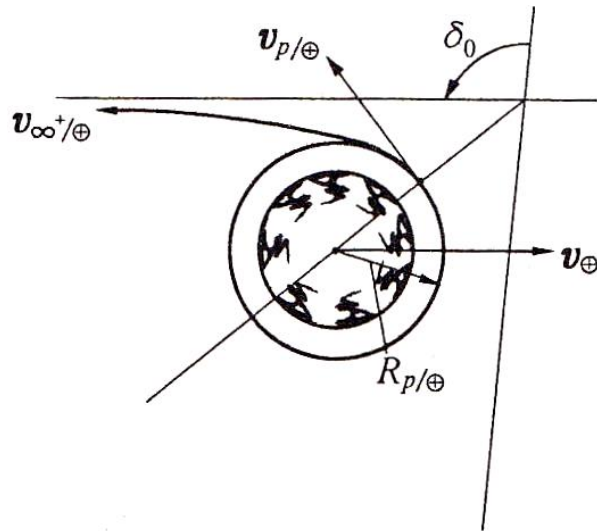


Рис. 6.24. Движение КА от Земли по гиперболической орбите

Из уравнения интеграла энергии получим скорость движения КА в перигеуме:

$$v_{p/\oplus} = \left[(v_{\infty/\oplus}^+)^2 + \frac{2\mu_{\oplus}}{r_{p/\oplus}} \right]^{1/2} = 11.54 \text{ км/с}.$$

Эта скорость больше скорости движения КА по орбите вокруг Земли с радиусом перигеума $r_{p/\oplus}$:

$$\Delta v_0 = v_{p/\oplus} - \left(\frac{\mu_{\oplus}}{r_{p/\oplus}} \right)^{1/2} = 3.77 \text{ км / с}. \quad (6.62)$$

Это и есть необходимое приращение скорости.

6.6 Ограниченная задача трех тел

Межпланетный перелет является задачей n тел, поскольку необходимо одновременно учитывать гравитационное воздействие нескольких планет на КА. Однако решение задачи n тел очень сложное и требует использования численных методов. Достоинство численных методов заключается в том, что можно одновременно учитывать действие множества планет и получать высокоточные результаты. Из недостатков можно отметить трудность нахождения внутренних связей между параметрами. В предыдущих разделах этой книги мы ограничивались рассмотрением только КА и гравитационным центральным телом, т.е. рассматривали задачу двух тел. В такой постановке можно получить аналитические результаты, физическое представление задачи, установить внутреннюю связь между параметрами. Кроме того, данная задача была довольно простой и понятной для изучения. Однако точность решения в данном случае не очень высока. Ограниченная задача трех тел предполагает, что:

1) одно из тел (КА) имеет бесконечно малую массу по сравнению с массами двух других тел и не влияет на их движение;

2) два тела с конечными массами движутся по круговым орбитам относительно их общего центра масс.

Сначала определим угловую скорость в ограниченной задаче трех тел. В инерциальной системе отсчета период обращения рассчитывается по формуле (3.29):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}.$$

Здесь $\mu = G(M_1 + M_2)$, где M_1, M_2 – массы планет, которые движутся вокруг центра масс системы, r – расстояние между центрами масс тел этих планет (рис. 6.25).

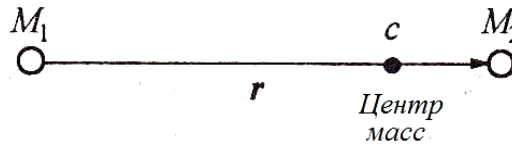


Рис. 6.25. Ограниченная задача трех тел

Запишем формулу для расчета угловой скорости планет, движущихся по круговым орбитам:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}. \quad (6.63)$$

Далее в систему тел добавляем космический аппарат массой m (рис. 6.26). Введем систему координат $SXYZ$, ось s которой проходит через центры масс тел M_1, M_2 ; $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ – радиус-векторы, проведенные из центров масс тел M_1, M_2 до КА; $\bar{\rho}$ – радиус-вектор, проведенный из центра масс системы к КА.

Найдем расстояния от центра масс S до тел M_1, M_2 :

$$a_1 = r \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad (6.64)$$

$$a_2 = r \frac{M_1}{M_1 + M_2}. \quad (6.65)$$

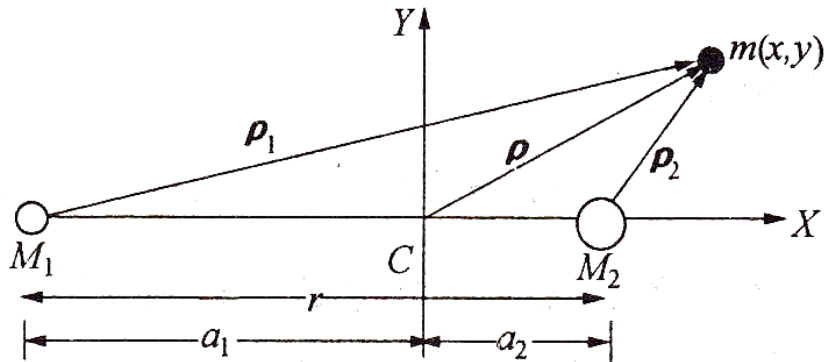


Рис. 6.26. Модель ограниченной задачи трех тел

Так как координаты КА задаются в виде (x, y) , то радиус-векторы тел можно записать:

$$\bar{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad (6.66)$$

$$\bar{\rho}_1 = (x + a_1)\bar{i} + y\bar{j}, \quad (6.67)$$

$$\bar{\rho}_2 = (x - a_2)\bar{i} + y\bar{j}. \quad (6.68)$$

Равнодействующая гравитационных сил, действующих со стороны тел M_1, M_2 на m :

$$\bar{f} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} \bar{\rho}_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \bar{\rho}_2.$$

Здесь $\mu_1 = GM_1$, $\mu_2 = GM_2$ – гравитационные параметры планет M_1, M_2 . Подставим сюда (6.67) и (6.68):

$$\bar{f} = -\left[\frac{\mu_1}{\rho_1^3} (x + a_1) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3} (x - a_2) \right] \bar{i} - \left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} y + \frac{\mu_2}{\rho_2^3} y \right) \bar{j}. \quad (6.69)$$

Функция потенциала полей тяготения тел M_1, M_2 имеет вид

$$U = -\frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2}. \quad (6.70)$$

Здесь

$$\rho_1 = \sqrt{(x+a_1)^2 + y^2}, \quad (6.71)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x-a_2)^2 + y^2}. \quad (6.72)$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x+a_1) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x-a_2), \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\rho_1^3}y + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}y. \quad (6.74)$$

Выражение (6.69) можно переписать в виде:

$$\bar{f} = -\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}. \quad (6.75)$$

Из (6.75) видно, что $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ – компоненты равнодействующей сил притяжения в проекции на отрицательные направления осей SX, SY . Можно получить скорость КА, движущегося под действием этих сил, как вторую производную от $\bar{\rho}$ (см. Приложение 5):

$$\dot{\bar{\rho}} = \overset{\circ}{\bar{\rho}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \quad (6.76)$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = \overset{\circ\circ}{\bar{\rho}} + 2\bar{\omega} \times \overset{\circ}{\bar{\rho}} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \overset{\circ}{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}. \quad (6.77)$$

Здесь $(\dot{}), (\dot{})$ – производные в неподвижной и вращающейся системах координат соответственно.

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k}. \quad (6.78)$$

Здесь \bar{k} – единичный вектор, перпендикулярный осям CX, CY ; ω – модуль вектора $\bar{\omega}$.

Подставим (6.78) и (6.66) в (6.77), считая $\omega = const$, получим:

$$\ddot{\rho} = (\ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\bar{i} + (\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\bar{j}. \quad (6.79)$$

Согласно второму закону Ньютона:

$$\bar{f} = \ddot{\rho}.$$

Соотнесем (6.75) и (6.79):

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (6.80)$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (6.81)$$

Умножим (6.80) на \dot{x} , а (6.81) на \dot{y} , и сложим полученные выражения:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\delta}{\delta t} (x^2 + y^2) = -\frac{\delta U}{\delta t}.$$

Если обозначить $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$ и проинтегрировать это уравнение, получим:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + U = C. \quad (6.82)$$

Здесь C – постоянная интегрирования, которую можно найти из начальных условий:

$$C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}(x_0^2 + y_0^2) + U_0. \quad (6.83)$$

Выражение (6.82) – соотношение между скоростью КА и его координатами. Это основное уравнение, которое мы будем использовать для последующего анализа. Из (6.82) можно получить:

$$v^2 = \omega^2(x^2 + y^2) - 2U + 2C.$$

Очевидно, что $v^2 \geq 0$, следовательно:

$$\omega^2(x^2 + y^2) - 2U + 2C \geq 0. \quad (6.84)$$

Это выражение задает возможную плоскость движения.

$$\omega^2(x^2 + y^2) - 2U + 2C = 0. \quad (6.85)$$

Выражение (6.85) задает границу возможной плоскости движения. Если подставить (6.70) в (6.84) и одновременно рассмотреть (6.71) и (6.72), то получим:

$$\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{2\mu}{\sqrt{(x+a_1)^2 + y^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x-a_2)^2 + y^2}} \geq -2C. \quad (6.86)$$

Возьмем некоторую начальную точку (x_0, y_0) , определим в ней начальную скорость КА v_0 и из (6.70) получим значение потенциала U_0 в этой точке. Тогда с помощью (6.83) можно вычислить постоянную интегрирования C и подставить ее в (6.86). Если в (6.86) знак неравенства заменить знаком равенства, то получим уравнение граничной кривой возможной области движения КА в начальный момент времени. По обе стороны от границы расположены возможные области движения КА, но выбрать нужно ту, которая соответствует неравенству. Если рассматривать ограниченную задачу трех тел для Земли, Луны и КА, то необходимо знать восемь значений постоянных интегрирования C_1, C_2, \dots, C_8 , затем с помощью (6.86) можно построить возможную границу области движения КА. Это показано на рисунках 6.27 – 6.34.

Из выражения (6.86) можно видеть, что возможная область движения КА будет симметрична оси X . Это связано с тем, что $U(x, y) = U(x, -y)$.

Если величина C_1 велика, а КА находится далеко от тел M_1, M_2 , т.е. координаты x и y достаточно велики, то из (6.86) можно получить:

$$x^2 + y^2 \cong -2C_1/\omega^2. \quad (6.87)$$

Если КА находится рядом с телом M_1 , то, т.к. $x + a_1$ и y малы, то из (6.86) получим:

$$(x + a_1)^2 + y^2 \approx \left(\frac{\mu_1}{C_1}\right)^2. \quad (6.88)$$

Если КА находится рядом с телом M_2 , то аналогично получим:

$$(x - a_2)^2 + y^2 \approx \left(\frac{\mu_2}{C_1} \right)^2. \quad (6.89)$$

Все три уравнения описывают часть окружности с центром в начале координат (точки M_1 или M_2).

На рис. 6.27 заштрихована область, в которой КА не может двигаться. Это значит, что КА может двигаться только вблизи тел M_1, M_2 или в дальней области.

Если $C < C_1$, то на рис. 6.27 большой круг уменьшится, а маленькие круги вокруг тел M_1, M_2 увеличатся. Когда C достигнет величины C_2 , возле областей вокруг тел M_1, M_2 возникнет точка L_1 (рис. 6.28). Через точку L_1 траектория КА, начавшаяся вблизи тела M_1 , может перейти в область вокруг тела M_2 . КА, который движется за пределами большого круга, не может войти во внутренний круг. Если M_1, M_2 – это Земля и Луна, то для прохождения через точку L_1 КА должен иметь скорость 10.849 км/с на околоземной орбите высотой 200 км.

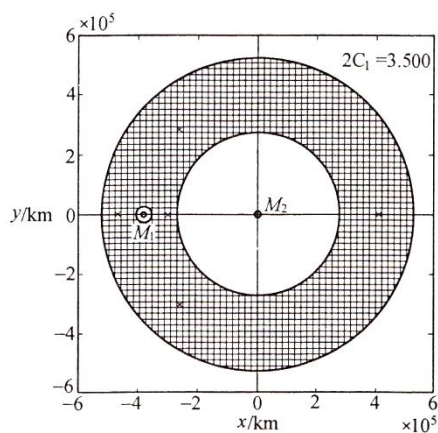


Рис. 6.27. Области движения КА при $C = C_1$

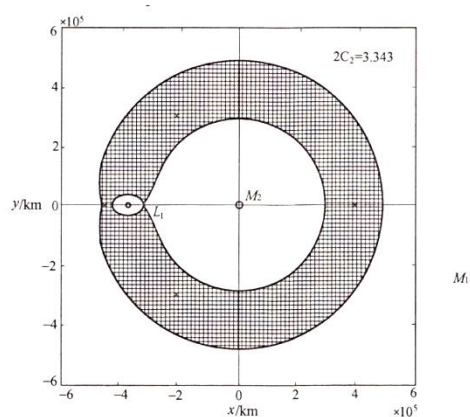


Рис. 6.28. Области движения КА при $C = C_2$

При дальнейшем уменьшении величины C до C_3 , переходный коридор от Земли к Луне расширяется, а большой круг уменьшается. Тогда возможная область движения КА будет иметь вид, представленный на рис. 6.29. При уменьшении C области движения КА вокруг M_1 и M_2 продолжает увеличиваться, а большой круг уменьшаться. Когда C достигает значения C_4 , появляется точка L_2 , соединяющая внешнюю область и область движения в окрестности тела M_1 (рис. 6.30).

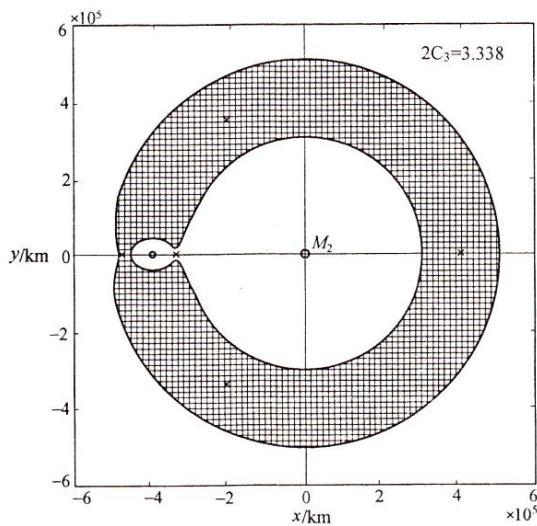


Рис. 6.29. Области движения КА при $C = C_3$

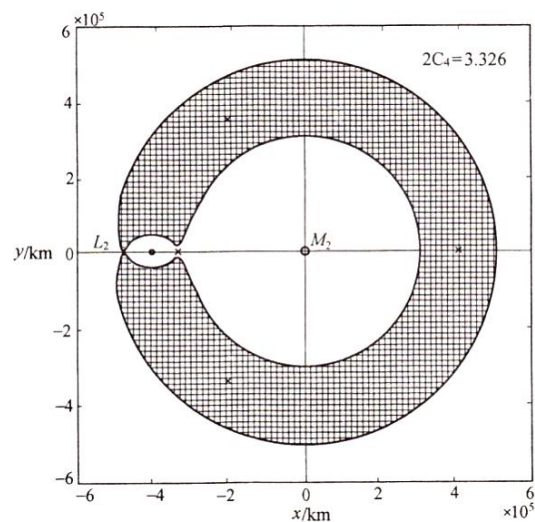


Рис. 6.30. Области движения КА при $C = C_4$

При последующем уменьшении C до C_5 внутренняя и внешняя области движения соединяются через коридор определенной ширины (рис. 6.31).

Когда C уменьшается до C_6 , с обратной стороны появляется третий узел L_3 . Через эту точку КА может перемещаться между внутренней и внешней областями (рис. 6.32).

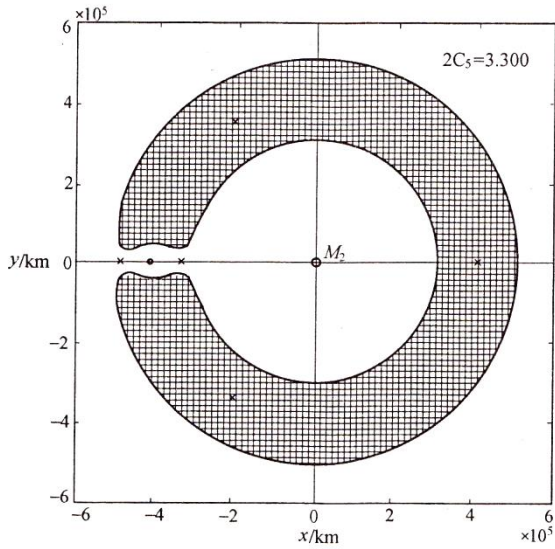


Рис. 6.31. Области движения КА при $C = C_5$

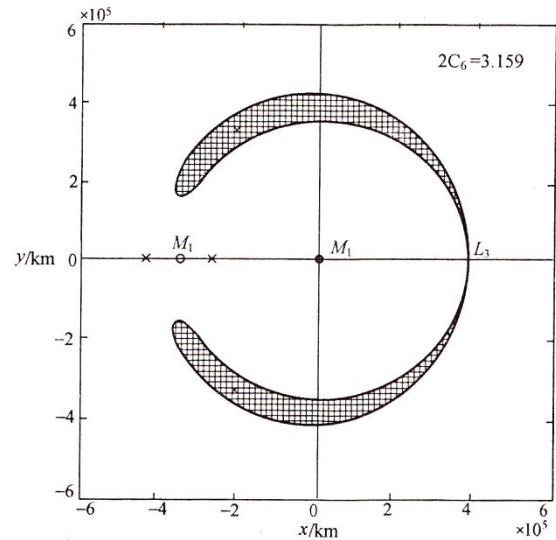


Рис. 6.32. Области движения КА при $C = C_6$

При уменьшении C до C_7 в точке L_3 появится коридор. Область, не доступная для движения КА, уменьшится (рис. 6.33).

Наконец, при уменьшении C до C_8 невозможной для движения КА областью станут точки L_4 и L_5 (рис. 6.34). На рис. 6.35 показаны все схемы одновременно.

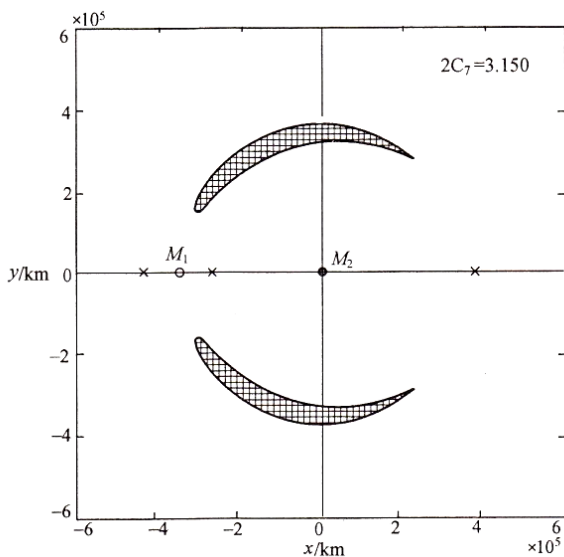


Рис. 6.33. Области движения КА при $C = C_7$

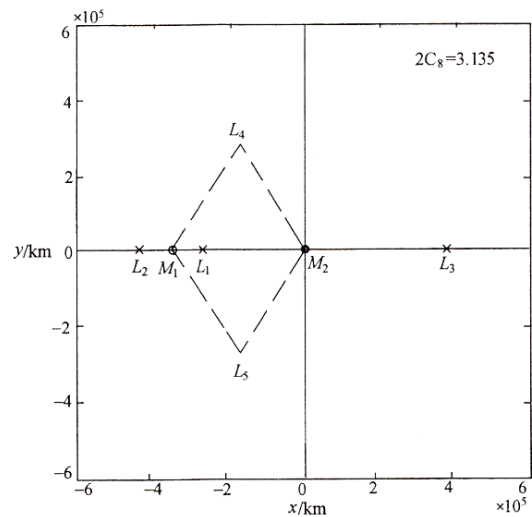


Рис. 6.34. Области движения КА при $C = C_8$

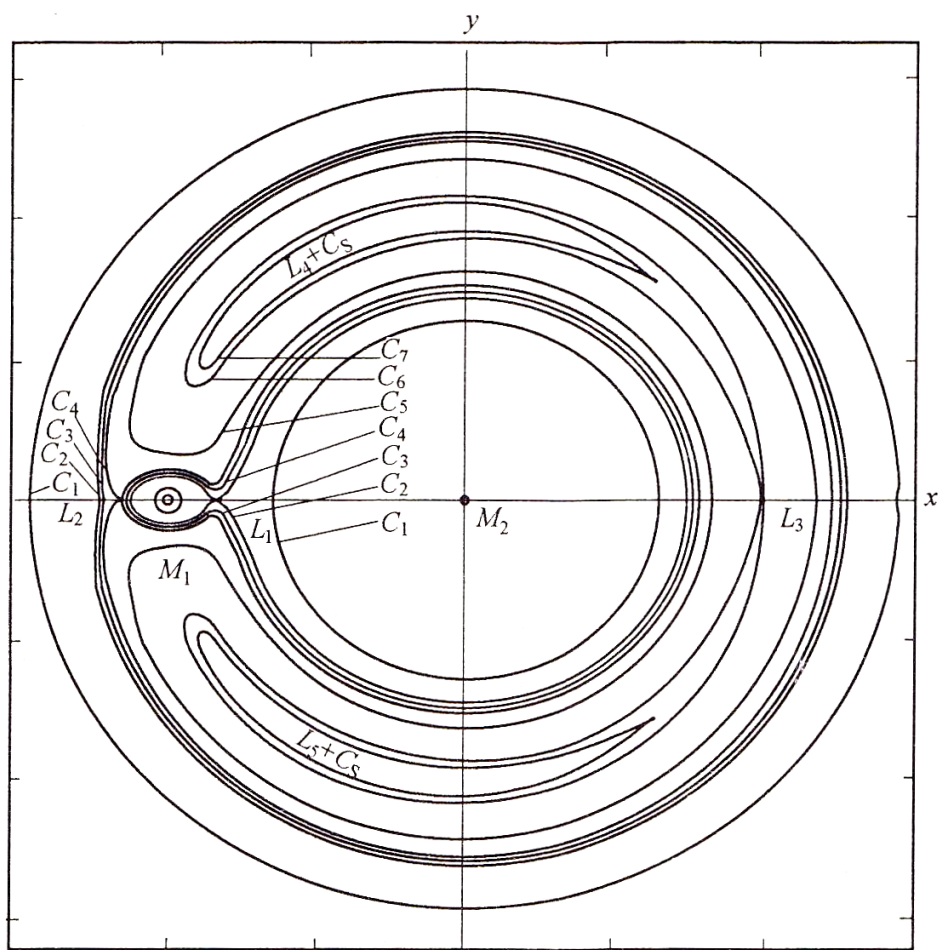


Рис. 6.35. Области движения КА в системе Земля-Луна

На рис. 6.34 точки $L_1 \dots L_5$ называются точками либрации. В этих пяти точках КА находится в состоянии равновесия по отношению к двум другим притягивающим телам. Из (6.80) и (6.81) при условии, что компоненты скорости и ускорения равны нулю, можно получить условия статического равновесия КА:

$$\omega^2 x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (6.90)$$

$$\omega^2 y = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (6.91)$$

Подставим (6.73) и (6.74) в (6.90) и (6.91), получим:

$$\omega^2 x - \frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x + a_1) - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x - a_2) = 0, \quad (6.92)$$

$$\omega^2 y - \frac{\mu_1}{\rho_1^3}y - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}y = 0. \quad (6.93)$$

Решив уравнения (6.92) и (6.93), получим координаты точек статического равновесия КА x, y . Из (6.93) видно, что

$$y = 0. \quad (6.94)$$

Подставим (6.94) в (6.93) с учетом (6.71) и (6.72), получим:

$$\omega^2 x - \frac{(x + a_1)\mu_1}{|(x + a_1)^3|} - \frac{(x + a_2)\mu_2}{|(x + a_2)^3|} = F(x) = 0. \quad (6.95)$$

Если $x = -\infty, -a_1^+, -a_1^-, -a_2^+, -a_2^-$ равны $+\infty$; здесь a_i^- и a_i^+ ($i=1,2$) равны $a_i - \Delta$ и $a_i + \Delta$, где Δ — бесконечно малая, большая нуля, то из (6.95) следует:

$$F(-\infty) = -\infty, \quad F(-a_1^+) = \infty, \quad F(-a_1^-) = -\infty, \quad F(-a_2^+) = \infty, \quad F(-a_2^-) = -\infty, \\ F(\infty) = \infty.$$

На рис. 6.36 показано изменение функции $F(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$. Видно, что кривая $F(x)$ имеет три ветви, которые пересекают ось X в точках, соответствующих статическому равновесию, т.е. $y = 0$. Эти точки соответствуют координатам на горизонтальной оси $L_1(x_1, 0), L_2(x_2, 0), L_3(x_3, 0)$ на рис. 6.35.

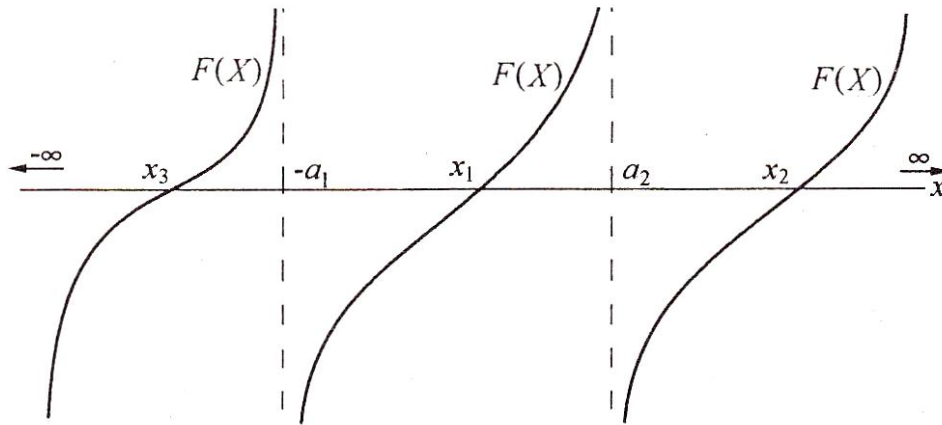


Рис. 6.36. График функции $F(x)$

Из (6.93) можно получить:

$$\omega^2 - \frac{\mu_1}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} = 0. \quad (6.96)$$

Умножим (6.96) на x и вычтем (6.92):

$$\frac{a_1 \mu_1}{\rho_1^3} - \frac{a_2 \mu_2}{\rho_2^3} = 0. \quad (6.97)$$

Согласно определению центра масс, $a_1 M_1 = a_2 M_2$. Умножим это выражение на G , получим $a_1 \mu_1 = a_2 \mu_2$. Тогда из (6.97) видно:

$$\rho_1 = \rho_2. \quad (6.98)$$

Подставим в (6.96), получим $\omega^2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\rho_1^3}$. Сравним с (6.63) и учтем, что $\mu = \mu_1 + \mu_2$, получим

$$\rho_1 = r = a_1 + a_2. \quad (6.99)$$

Здесь r – расстояние между M_1 и M_2 . Отсюда можно найти четвертую и пятую точки либрации L_4 и L_5 , которые с точками M_1 и M_2 составляют равносторонние треугольники в системе Земля-Луна (рис. 6.35):

$$M_1L_1 = 58000 \text{ км}, M_2L_2 = 65000 \text{ км}, M_3L_3 = 380000 \text{ км},$$

$$M_1L_4 = M_2L_4 = M_2L_5 = M_5L_5 = R_3 = 384400 \text{ км}.$$

Необходимо отметить, что точки L_1, L_2, L_3 нестабильные. Это значит, что в случае отклонения от этих точек тело не вернется обратно, а будет продолжать двигаться. Точки L_4, L_5 – стабильные точки либрации. В случае отклонения тела от положения равновесия, оно снова вернется в это состояние. Поэтому считается, что в этих точках может скапливаться большое количество космического мусора.

7 ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ, СБЛИЖЕНИЕ И СТЫКОВКА КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В ряде задач, например, в задачах сближения, перехвата, осмотра и текущего ремонта, стыковки и монтажа крупногабаритных конструкций, создания спутниковых систем и т. д. нужно исследовать относительное движение космических аппаратов.

7.1 Уравнения относительного движения

7.1.1 Уравнения относительного движения в орбитальной системе координат

Рассмотрим движение двух космических аппаратов: активного и пассивного (его иногда называют «целью») в орбитальной системе координат $OXYZ$, которая движется вместе с пассивным космическим аппаратом. Начало системы координат находится в центре масс этого КА, ось OY направлена вдоль радиус-вектора от центра Земли к центру масс КА, ось OX направлена в сторону движения КА, а ось OZ дополняет систему до правой (рис. 7.1).

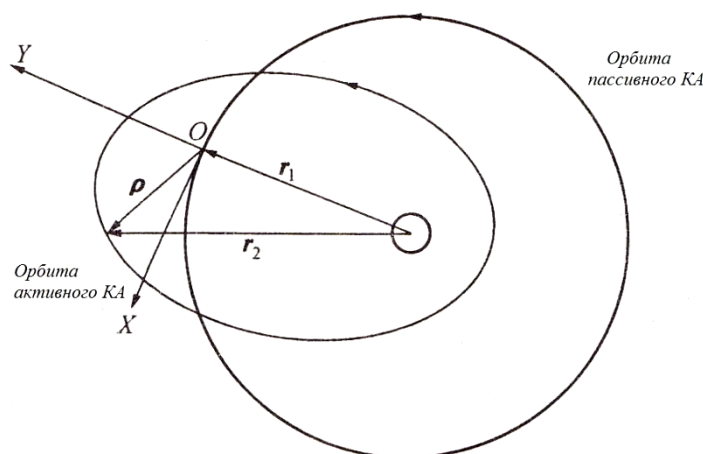


Рис. 7.1. Орбитальная система координат

Запишем уравнение движения пассивного КА (см. выражение (3.8)):

$$\ddot{\bar{r}}_1 + \frac{\mu}{r_1^3} \bar{r}_1 = 0. \quad (7.1)$$

Уравнение движения активного КА:

$$\ddot{\bar{r}}_2 + \frac{\mu}{r_2^3} \bar{r}_2 = \bar{f}. \quad (7.2)$$

Здесь \bar{f} – сила, действующая на активный КА, необходимая для того, чтобы он догнал цель. Из рис. 7.1 видно:

$$\bar{\rho} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1. \quad (7.3)$$

Здесь $\bar{\rho}$ – относительная дальность между двумя КА. Так как $\ddot{\bar{\rho}} = \ddot{\bar{r}}_2 - \ddot{\bar{r}}_1$, то, подставив сюда выражения (7.1) и (7.2), получим:

$$\ddot{\bar{\rho}} = \frac{\mu}{r_2^3} \bar{r}_2 - \frac{\mu}{r_1^3} \bar{r}_1 + \bar{f}. \quad (7.4)$$

Это уравнение движения активного КА относительно цели. Для удобства перепишем это уравнение через единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ вдоль осей OX, OY, OZ :

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= -\omega \bar{k}, \\ \bar{\rho} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь x, y, z – координаты КА в системе координат, связанной с активным КА; $\bar{\omega}$ – угловая скорость движения КА по орбите.

Из рис. 7.1 видно, что вектор $\bar{\rho}$ находится в подвижной системе координат. В формуле (7.5) вектор $\bar{\rho}$ изменяется со временем при движении КА по орбите и может быть продифференцирован в неподвижной или вращающейся системе координат. Его вторая производная может быть найдена аналогично (6.77). Выражение (7.5) с учетом (6.77), считая ω переменной величиной, можно записать в виде:

$$\ddot{\bar{\rho}} = (\ddot{x} - \omega^2 x + 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y)\bar{i} + (\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x)\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}. \quad (7.6)$$

Упростив первые два члена в правой части уравнения (7.4), получим:

$$\bar{r}_2 = x\bar{i} + (r_1 + y)\bar{j} + z\bar{k}, \quad (7.7)$$

$$\bar{r}_1 = r_1\bar{j}. \quad (7.8)$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r_1^3}\bar{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3}\bar{r}_2 &= \mu r_1^{-3}\bar{r}_1 - \mu \left[x^2 + (r_1 + y)^2 + z^2 \right]^{-\frac{3}{2}} (\bar{\rho} + \bar{r}_1) = \\ &= \mu r_1^{-3}\bar{r}_1 - \mu \left[r_1^2 + 2r_1y + \rho^2 \right]^{-\frac{3}{2}} (\bar{\rho} + \bar{r}_1) = \\ &= \mu r_1^{-3}\bar{r}_1 \left[\bar{r}_1 - \left(1 + \frac{2y}{r_1} + \frac{\rho^2}{r_1^2} \right)^{-\frac{3}{2}} (\bar{\rho} + \bar{r}_1) \right]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Если относительное расстояние между двумя КА мало $\rho \ll r_1$, $x \ll r_1$, $y \ll r_1$, $z \ll r_1$, то членами второго порядка малости можно пренебречь. После разложения в ряд выражения в круглых скобках получим:

$$(1+a)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}a + \frac{15}{8}a^2 + \dots \quad (a < 1).$$

Для упрощения выражения (7.9) оставим только малые первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r_1^3} \bar{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \bar{r}_2 &\cong \mu r_1^{-3} \left[\bar{r}_1 - \left(1 - 3 \frac{y}{r_1} \right) (\bar{\rho} + \bar{r}_1) \right] = \\ &= \mu r_1^{-3} \left[3 \frac{y}{r_1} \bar{r}_1 - \left(1 - 3 \frac{y}{r_1} \right) \bar{\rho} \right] = \mu r_1^{-3} (-x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}) \end{aligned} \quad (7.10)$$

(без малых второго порядка).

Сила \bar{f} является управляющей силой и может быть выражена через проекции на оси системы координат:

$$\bar{f} = f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}. \quad (7.11)$$

Используя выражения (7.6), (7.10), (7.11), преобразуем (7.4) в компонентную форму:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y - \omega^2x = -\frac{\mu}{r_1^3}x + f_x, \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x - \omega^2y = 2\frac{\mu}{r_1^3}y + f_y, \\ \ddot{z} = -\frac{\mu}{r_1^3}z + f_z. \end{cases} \quad (7.12)$$

Если цель движется по круговой орбите, ее угловая скорость постоянна $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1^3}}$, поэтому (7.12) можно записать в виде:

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} = f_x, \quad (7.13)$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = f_y, \quad (7.14)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = f_z. \quad (7.15)$$

Это уравнения относительного движения, которые будут исследоваться в данном разделе. Их также называют уравнениями Хилла. Уравнения (7.12) – (7.15) могут применяться только в случае, если относительное расстояние между космическими аппаратами меньше 50 км. Если правые части f_x, f_y, f_z – функции времени, то уравнения (7.12) – (7.15) не имеют аналитических решений.

Для простоты изучения относительного движения двух КА сначала решим уравнения (7.13) – (7.15) и рассмотрим относительное движение двух КА без учета внешних сил. Тогда выражения (7.13) – (7.15) примут вид:

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} = 0, \quad (7.16)$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = 0, \quad (7.17)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0. \quad (7.18)$$

Уравнение (7.16) проинтегрируем по времени:

$$\dot{x} + 2\omega y = c. \quad (7.19)$$

Здесь c – постоянная интегрирования, которую можно найти из начальных условий $\dot{x}(0), y(0)$:

$$c = \dot{x}(0) + 2\omega y(0). \quad (7.20)$$

Подставим (7.19) и (7.20) в (7.17):

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 2\omega[\dot{x}(0) + 2\omega y(0)].$$

Решением этого дифференциального уравнения будет $y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{2}{\omega}[\dot{x}(0) + 2\omega y(0)]$. Определим постоянные интегрирования A и B из начальных условий и получим:

$$y(t) = \left[\frac{\dot{y}(0)}{\omega} \right] \sin \omega t - \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0) \right] \cos \omega t + \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 4y(0) \right]. \quad (7.21)$$

Подставим полученное решение в (7.19) и проинтегрируем полученное с учетом (7.20):

$$x(t) = \frac{2\dot{y}(0)}{\omega} \cos \omega t + 2 \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0) \right] \sin \omega t - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)]t + \left[x(0) - \frac{2\dot{y}(0)}{\omega} \right]. \quad (7.22)$$

Решение уравнения для z получим из (7.18):

$$z(t) = \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \sin \omega t + z(0) \cos \omega t. \quad (7.23)$$

Решения (7.21) – (7.23) применимы для описания относительного движения двух КА на близком расстоянии. Когда пассивный КА находится на круговой орбите, положение КА в относительном движении определяется путем определения начальной скорости активного КА. Если продифференцировать эти уравнения по времени, то можно найти относительную скорость:

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0)\cos \omega t + [2\dot{x}(0) + 3\omega y(0)]\sin \omega t, \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -2\dot{y}(0)\sin \omega t + 2[2\dot{x}(0) + 3\omega y(0)]\cos \omega t - \\ & - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)], \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\dot{z}(t) = \dot{z}(0)\cos \omega t - \omega z(0)\sin \omega t. \quad (7.26)$$

Анализируя уравнения (7.21) – (7.23) и (7.24) – (7.26), можно заметить, что составляющие амплитуды и скорости движения в направлении оси x в два раза превышают составляющие вдоль оси y . Скорость смещения пропорциональна времени, а ее направление зависит от величины $x(0), y(0)$; фаза движения в направлении y опережает на $\pi/2$. Движение в направлении оси z перпендикулярно плоскости орбиты целевого аппарата и не связано с движениями в двух других направлениях. Из уравнений (7.23) и (7.26) можно видеть, что движение в направлении z является простым гармоническим колебанием с частотой, равной угловой скорости целевого КА.

7.1.2 Уравнения относительного движения в полярной системе координат

Иногда требуется использовать уравнения относительного движения в полярной системе координат. Для простоты получим уравнения движения для случая, когда активный и пассивный аппараты движутся в плоскости орбиты (рис. 7.2). На рис. 7.2 точки P и T – активный и пассивный КА. Пассивный КА движется по круговой орбите радиусом \bar{r}_1 ; расстояние между активным КА и центром Земли равно \bar{r}_2 ; относительное расстояние между аппаратами $\bar{\rho}$; q – угол между $\bar{\rho}$ и осью OX орбитальной системы координат TXY , которая движется вместе с пассивным КА; φ – центральная угловая дальность между двумя КА.

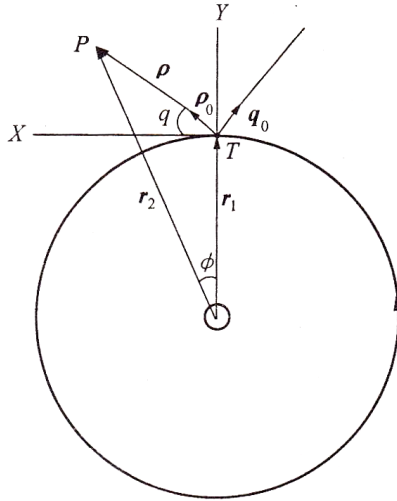


Рис. 7.2. Полярная система координат

Векторная форма уравнений относительного движения имеет вид (7.4), но из-за изменения угла q вектор $\bar{\rho}$ будет иметь угловую скорость $\bar{\Omega} = \dot{q}\bar{k}$ относительно системы координат TXY . Здесь \bar{k} – единичный вектор вдоль оси TZ (ось, перпендикулярная рис. 7.2); $\bar{\rho}_0$ и \bar{q}_0 – единичные векторы, перпендикулярные первому. Орты \bar{k} , $\bar{\rho}_0$, \bar{q}_0 задают полярную систему координат. Запишем в этой системе координат производную от $\bar{\rho}$ по времени:

$$\dot{\bar{\rho}} = \overset{\circ}{\bar{\rho}} + (\bar{\omega} + \bar{\Omega}) \times \bar{\rho}, \quad (7.27)$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = \overset{\circ\circ}{\bar{\rho}} + 2(\bar{\omega} + \bar{\Omega}) \times \overset{\circ}{\bar{\rho}} + \overset{\circ}{\bar{\Omega}} \times \bar{\rho} + (\bar{\omega} + \bar{\Omega}) \times [(\bar{\omega} + \bar{\Omega}) \times \bar{\rho}]. \quad (7.28)$$

Здесь $\bar{\omega}$ – угловая орбитальная скорость цели. В лучевой системе координат:

$$\bar{\rho} = \rho \bar{\rho}_0, \quad (7.29)$$

$$\bar{\omega} = -\omega \bar{k}, \quad \bar{\Omega} = -\dot{q} \bar{k}. \quad (7.30)$$

Тогда

$$\ddot{\vec{\rho}} = \left[\ddot{\rho} - \rho(\dot{q} - \omega)^2 \right] \vec{\rho}_0 + \left[2\dot{\rho}(\dot{q} - \omega) + \rho\ddot{q} \right] \vec{q}_0. \quad (7.31)$$

Запишем геометрические соотношения из рис. 7.2:

$$\sin \varphi = \frac{\rho}{r_2} \cos q, \quad (7.32)$$

$$\cos \varphi = \frac{\rho \sin q + r_1}{r_2}. \quad (7.33)$$

Векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 в полярной системе координат можно разложить в виде:

$$\vec{r}_1 = r_1 \sin q \cdot \vec{\rho}_0 + r_1 \cos q \cdot \vec{q}_0, \quad (7.34)$$

$$\vec{r}_2 = r_2 \sin(q + \varphi) \cdot \vec{\rho}_0 + r_2 \cos(q + \varphi) \cdot \vec{q}_0. \quad (7.35)$$

Используя эти две формулы, первое и второе слагаемые в правой части уравнения (7.4) можно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) &= \mu \left[\frac{1}{r_1^2} \sin q - \frac{1}{r_2^2} \sin(\varphi + q) \right] \vec{\rho}_0 + \\ &+ \mu \left[\frac{1}{r_1^2} \cos q - \frac{1}{r_2^2} \cos(\varphi + q) \right] \vec{q}_0. \end{aligned}$$

Раскроем синус и косинус суммы углов, подставим (7.32) и (7.33), получим:

$$\mu \left[r_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \sin q - \frac{\rho}{r_2^3} \right] \bar{\rho}_0 + \mu r_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \cos q \cdot \bar{q}_0. \quad (7.36)$$

Если $\rho \ll r_1$, $\rho \ll r_2$, то членом $\frac{\rho^2}{r_1^2}$ можно пренебречь.

Используя приближенную формулу

$$(1 + \Delta x)^{-m} \cong 1 - m\Delta x, \quad (|\Delta x| < 1, m > 0),$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} &= \frac{1}{r_1^3} \left(1 - \frac{r_1^3}{r_2^3} \right) = \frac{1}{r_1^3} \left[1 - \frac{r_1^3}{(r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \sin q)^{\frac{3}{2}}} \right] = \\ &= \frac{1}{r_1^3} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho^2}{r_1^2} + 2r_1 \frac{\rho}{r_1^2} \sin q \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \approx \frac{1}{r_1^3} \left[1 - \left(1 + 2\frac{\rho}{r_1} \sin q \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \approx \frac{3\rho}{r_1^4} \sin q. \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в (7.36) и считая $r_1 \approx r_2$, получим:

$$\mu \left(\frac{\bar{r}_1}{r_1^3} - \frac{\bar{r}_2}{r_2^3} \right) = \frac{\mu}{r_1^3} (3\rho \sin^2 q - \rho) \bar{\rho}_0 + \frac{\mu}{r_1^3} \frac{3}{2} \rho \sin 2q \cdot \bar{q}_0. \quad (7.37)$$

Так как $\frac{\mu}{r^3} = \omega^2$, уравнения относительного движения получаются с использованием выражений (7.37), (7.31) и

$$\bar{f} = f_\rho \bar{\rho}_0 + f_q \bar{q}_0 \quad (7.38)$$

подстановки их в (7.4):

$$\ddot{\rho} - \rho(\dot{q} - \omega)^2 = 3\rho\omega^2 \sin^2 q - \rho\omega^2 + f_\rho,$$

$$\rho\ddot{q} + 2\dot{\rho}(\dot{q} - \omega) = \frac{3}{2}\rho\omega^2 \sin 2q + f_q.$$

Упростим, получим:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{q} + 2\omega\rho\dot{q} - 3\rho\omega^2 \sin^2 q = f_\rho, \quad (7.39)$$

$$\rho\ddot{q} + 2\dot{\rho}\dot{q} - 2\omega\dot{\rho} - \frac{3}{2}\rho\omega^2 \sin 2q = f_q. \quad (7.40)$$

Угловая скорость является малой величиной, поэтому при движении КА в однородном гравитационном поле можем пренебречь членами с ω :

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{q}^2 = f_\rho, \quad (7.41)$$

$$\rho\ddot{q} + 2\dot{\rho}\dot{q} = f_q. \quad (7.42)$$

7.2 Сближение и стыковка КА

Под сближением космических аппаратов будем понимать такое управляемое движение, при котором осуществляется встреча КА с другим аппаратом или выход в некоторую его окрестность с заданными характеристиками относительного движения. Для обеспечения стыковки космических аппаратов их относительные скорости после сближения должны быть равны нулю.

Сближение и стыковка являются очень важными операциями и используются при решении целого ряда практических задач, таких как: перевозка грузов между транспортным КА и орбитальной станцией, смена экипажей

орбитальных станций, обслуживание и ремонт орбитальных станций и космических систем и т. д.

При выполнении операции сближения пассивно движущийся КА называют целью, активный аппарат, движущийся за целью по определенной схеме, – преследователем.

Для упрощения изучения процессов сближения и стыковки часто предполагается, что цель движется по круговой или околокруговой орбите, а преследователь запускается заранее и движется по круговой или эллиптической орбите в одной плоскости с целью. Эта орбита называется переходной и может быть как выше, так и ниже орбиты цели.

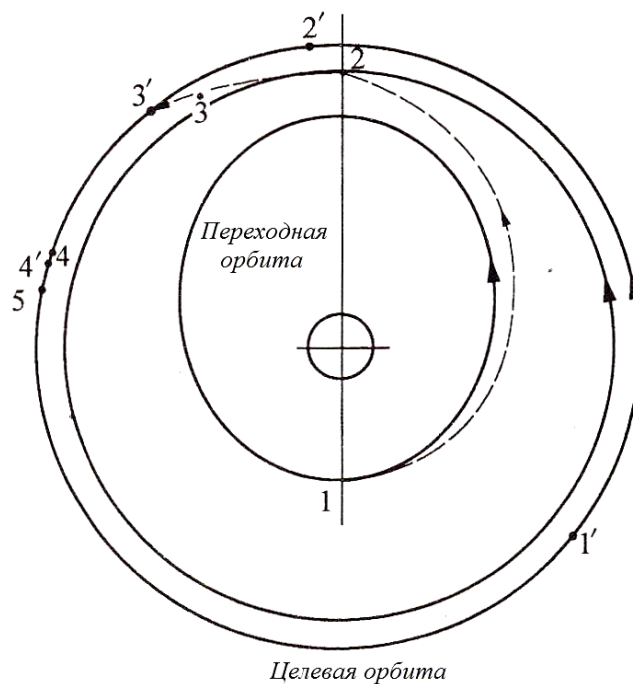


Рис. 7.3. Сближение и стыковка космических аппаратов

Процесс сближения и стыковки можно разделить на четыре этапа.

1. Этап управления сближением с Земли. Пассивный КА находится в точке 1', а активный – в точке 1. В этот момент времени с наземной станции подается команда активному аппарату на включение двигателя и выход на промежуточную эллиптическую орбиту, чтобы затем перейти на круговую орбиту, которая должна быть выше или ниже орбиты пассивного КА на 30 – 50 км. В конце этого этапа космические аппараты оказываются в точках 2' и 2.

2. Этап автономного поиска начинается, когда расстояние между активным и пассивным КА не превышает 100 км. В результате активный КА подводится к пассивному аппарату. На рис. 7.3 это траектории 2'-3' и 2-3.

3. Когда расстояние между КА составляет около 5 км (точки 3' и 3), это расстояние держат постоянным до подходящего момента, когда можно начинать уменьшать эту величину. Скорость сближения меньше, чем на предыдущих этапах, точность выше. Активный КА должен попасть в коридор стыковки с пассивным КА, после чего маневр останавливают (точки 4' и 4 на рис. 7.3) и включают камеры, чтобы зафиксировать цель.

4. Этап стыковки. Когда камера обнаружит цель, приборы точно измерят относительное расстояние и определяют данные пространственного положения, а также ось стыковки. После этого можно производить непосредственно стыковку. На данном этапе скорость сближения сначала сохраняется постоянной, а затем уменьшается. Активный КА должен быть подведен к активному на расстояние около 1.5 км, затем с более точным управлением подойти ближе, и уже после полной остановки с помощью стыковочного устройства выполнить механическую стыковку.

(А) *многоимпульсное сближение*

Метод основан на использовании уравнений относительного движения по круговой орбите (7.16) – (7.18) или уравнения Хилла:

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} = 0, \quad (7.16)$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = 0, \quad (7.17)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0. \quad (7.18)$$

Решениями этих уравнений являются выражения, аналогичные (7.21) – (7.26). Если к активному КА приложен импульс скорости в начальный момент времени, то через время $t = T$ он должен достичь окрестности пассивного КА. В момент встречи аппаратов $x(T) = y(T) = z(T) = 0$. Подставим эти условия в выражения (7.21) – (7.23), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}(0)}{\omega} \sin \omega T - \left[2 \frac{\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0) \right] \cos \omega T + \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 4y(0) \right] &= 0, \\ \frac{2\dot{y}(0)}{\omega} \cos \omega T + 2 \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0) \right] \sin \omega T - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)]T + \\ + \left[\dot{x}(0) - \frac{2\dot{y}(0)}{\omega} \right] &= 0, \\ \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \sin \omega T + z(0) \cos \omega T &= 0. \end{aligned}$$

В приведенных выше трех уравнениях, если расстояние $x(0) = y(0) = z(0)$ между аппаратами в начальный момент времени известно, а T – допустимое известное значение, то можно рассчитать необходимый начальный импульс скорости КА $\dot{x}, \dot{y}(0), \dot{z}(0)$, чтобы обеспечить встречу через время T . Для этого решим три указанных выше уравнения:

$$\dot{x}(0) = \omega \frac{a_{11}}{b} x(0) + \omega \frac{a_{12}}{b} y(0), \quad (7.43)$$

$$\dot{y}(0) = \omega \frac{a_{21}}{b} x(0) + \omega \frac{a_{22}}{b} y(0), \quad (7.44)$$

$$\dot{z}(0) = \omega a_{33} z(0). \quad (7.45)$$

Здесь использованы обозначения:

$$a_{11} = \sin \omega T, \quad a_{12} = 14(1 - \cos \omega T) - 6\omega T \sin \omega T, \quad (7.46)$$

$$a_{21} = -2(1 - \cos \omega T), \quad a_{22} = 4 \sin \omega T - 3\omega T \cos \omega T, \quad (7.47)$$

$$a_{33} = -\operatorname{ctg} \omega T, \quad b = 3\omega T \sin \omega T - 8(1 - \cos \omega T). \quad (7.48)$$

Если активный КА в момент времени $t=0$ имеет компоненты начальной скорости $\dot{x}_\rho(0), \dot{y}_\rho(0), \dot{z}_\rho(0)$, то это требуемое приращение скорости будет

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= \dot{x}(0) - \dot{x}_\rho(0), \\ \dot{y}_1(0) &= \dot{y}(0) - \dot{y}_\rho(0), \\ \dot{z}_1(0) &= \dot{z}(0) - \dot{z}_\rho(0). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Запишем координаты и компоненты скорости КА в виде матрицы:

$$\begin{aligned} \underline{v}_1(0) &= [\dot{x}_1(0) \quad \dot{y}_1(0) \quad \dot{z}_1(0)]^T, \\ \underline{v}_\rho(0) &= [\dot{x}_\rho(0) \quad \dot{y}_\rho(0) \quad \dot{z}_\rho(0)]^T, \\ \underline{\rho}(0) &= [x(0) \quad y(0) \quad z(0)]^T. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Из выражений (7.43) – (7.45) можно найти необходимое приращение скорости, чтобы активный КА достиг цели, двигаясь из начальной точки $x(0), y(0), z(0)$ до точки встречи с пассивным КА в течение времени T :

$$\underline{v}_1(0) = \begin{bmatrix} a_{11}/b & a_{12}/b & 0 \\ a_{21}/b & a_{22}/b & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \underline{\rho}(0) - \underline{v}_v(0). \quad (7.51)$$

В момент встречи двух КА $t=T$ скорость активного КА может быть определена из (7.24) – (7.26), при условии, что при $t=T$ величины $x(0), y(0), z(0)$ и $\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)$ по-прежнему принимают указанные выше значения. Если относительная скорость цели равна нулю, то тот же импульс скорости должен быть приложен в противоположном направлении:

$$\begin{aligned} \underline{v}_2(T) &= [\dot{x}_2(T) \quad \dot{y}_2(T) \quad \dot{z}_2(T)]^T, \\ \underline{v}_2(T) &= - \left\{ \omega \begin{bmatrix} 4\cos\omega T - 3 & -2\sin\omega T & 0 \\ 2\sin\omega T & \cos\omega T & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega T \end{bmatrix} \times \right. \\ &\quad \left. \times \begin{bmatrix} a_{11}/b & a_{12}/b & 0 \\ a_{21}/b & a_{22}/b & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6\omega(1 - \cos\omega T) & 0 \\ 0 & 3\omega\sin\omega T & 0 \\ 0 & 0 & -\omega\sin\omega T \end{bmatrix} \right\} \underline{\rho}(0). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Ключевым моментом при использовании этого метода является выбор времени начала t_0 и времени завершения t_f ($T = t_f - t_0$) встречи. Возможно три варианта: (1) t_0 и T произвольные; (2) t_0 задан, а T произвольный; (3) t_0 и T заданы.

При использовании первого варианта есть возможность обеспечения сближения и стыковки с минимальными затратами энергии, но на практике такую схему реализовать трудно.

Третий вариант предполагает фиксированные значения t_0 и T . Однако когда эти значения выбраны нерационально, то скорости $v_1(0)$ и $v_2(T)$ могут оказаться слишком большими, что приведет к большим энергетическим затратам. В этом случае можно добавить некоторые промежуточные точки между моментами времени начала и завершения маневра, а также добавить импульсы скорости для движения между этими промежуточными точками, чтобы шаг за шагом дойти до конечной точки. Это многоимпульсные программы управления при сближении.

Второй вариант более рационален, так как можно выбирать начальный момент времени t_0 и максимальное время выполнения маневра T . И по этим значениям рассчитывать начальный и конечный импульсы.

Пример 1. Два КА движутся по круговым компланарным орбитам. Радиус орбиты пассивного КА $r_T = 6850 \text{ км}$, радиус орбиты активного КА $r_P = 6600 \text{ км}$ (рис. 7.4). В момент времени $t = 0$ активный КА P отстает от пассивного T на угол $\phi = 4.904^\circ$. Необходимо рассчитать импульс скорости, выдаваемый через время $T = 2744 \text{ с}$ для того, чтобы активный КА догнал пассивного КА. Постройте траекторию движения и рассчитайте скорость относительно движущейся системы координат.

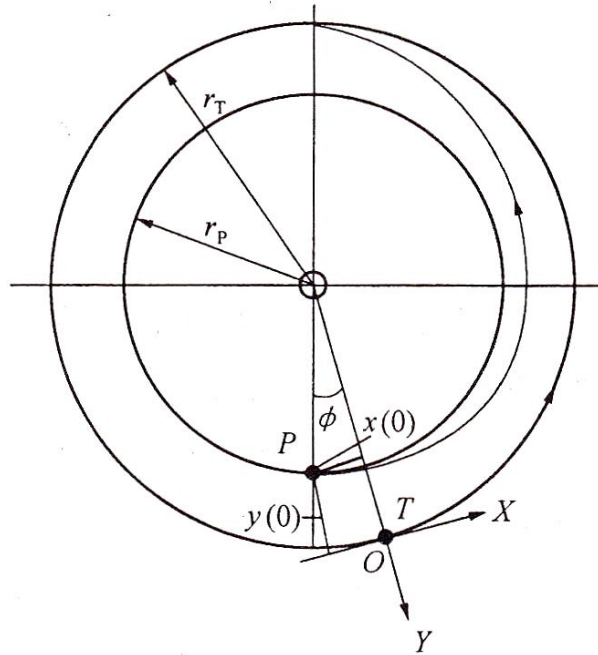


Рис. 7.4. К примеру 1

Решение.

В момент времени $t=0$ координаты активного КА P :

$$\begin{aligned} x(0) &= -r_p \sin \phi = -564.264 \text{ км} , \\ y(0) &= -(r_T - r_p \cos \phi) = -274.165 \text{ км} . \end{aligned}$$

При $T = 2744 \text{ с}$, используя (7.46) – (7.48), получим:

$$a_{11} = 0.08577, \quad a_{12} = 26.38, \quad a_{21} = -3.993, \quad a_{22} = 9.476, \quad b = -15.18 .$$

Из (7.43) и (7.44) можно найти:

$$\dot{x}(0) = 0.5339 \text{ км/с}, \quad \dot{y}(0) = 0.02531 \text{ км/с} . \quad (7.53)$$

Таким образом, имея компоненты скорости (7.53), активный КА может встретиться с пассивным в момент времени $t=T$. В интервале времени $0 < t < T$ можно рассчитать координаты активного

КА с помощью выражений (7.21) и (7.22). Результаты расчетов приведены в таблице 7.1 и на рис. 7.5а, траектория движения в инерциальной системе координат показана на рис. 7.4. Относительная скорость была рассчитана с помощью формул (7.24) и (7.25), результаты приведены в таблице 7.1 и на рис. 7.5б.

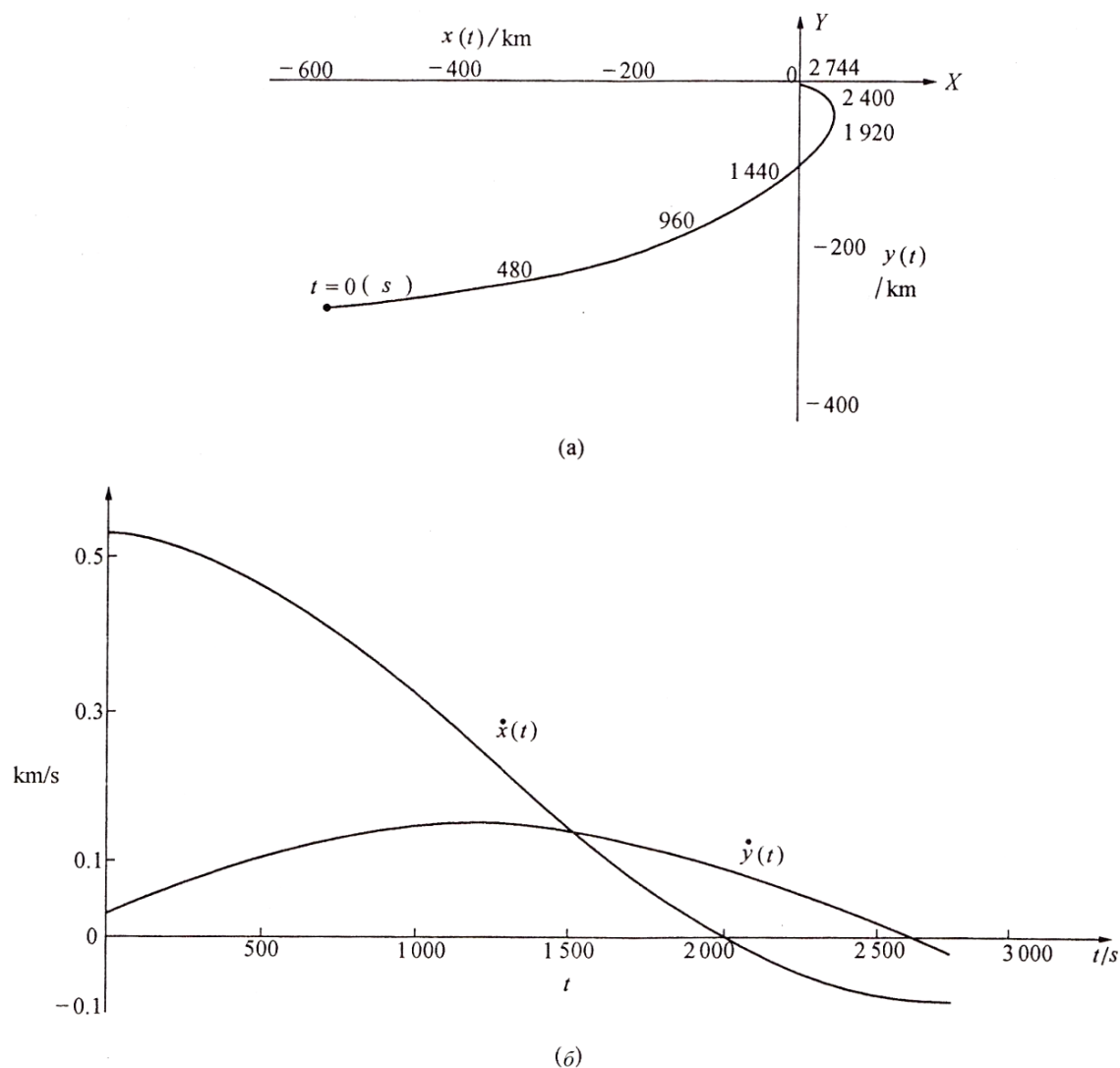


Рис. 7.5. К решению задачи в примере 1

Таблица 7.1. Результаты расчетов в примере 1

t, c	0	480	960	1440	1920	2400	2744
$x(t), км$	-564.264	-321.178	-127.77	-7.16	37.81	25.43	0
$y(t), км$	-274.165	-243.56	-183.48	-110.62	-45.36	-5.89	0
$\dot{x}(t), км/с$	0.534	0.446	0.333	0.170	0.024 3	-0.063 6	-0.076 8
$\dot{y}(t), км/с$	0.025 3	0.099 1	0.145	0.151	0.114	0.046 1	-0.012 2

Для того чтобы в момент встречи КА относительная скорость была равна нулю (т. е. для стыковки), необходимо рассчитать импульс скорости. Поэтому из таблицы нужно брать скорость в момент времени $t = T$:

$$\dot{x}(t) = -0.0768 \text{ км/с},$$

$$\dot{y}(t) = -0.0122 \text{ км/с}.$$

(Б) метод параллельного сближения

Если вектор относительной скорости активного КА $\bar{v}(t)$ в любой момент времени направлен на пассивный КА, то активный КА в конечном итоге догонит пассивного. Если оба КА движутся равномерно и прямолинейно, то линия визирования не изменит своего направления (рис. 7.6а). Такое сближение КА называется параллельным. На рис. 7.6а точки T_1, T_2, \dots – промежуточные точки траектории движения через одинаковые временные интервалы движения пассивного КА. P_1, P_2, \dots – соответствующие точки активного КА. $\bar{v}_T, \bar{v}_P, \bar{v}$ – скорости пассивного КА, активного КА и относительная скорость между ними. Видно, что оба КА встретятся в точке n . Аналогично можно объяснить движение двух КА, работающих на нелинейных орбитах (рис. 7.6б), за исключением того, что в разное время скорости и направления движения этих КА должны иметь определенную зависимость для поддержания относительной скорости $\bar{v}_i(t)$ (направление должно быть постоянным, а значение переменным), что и называется в данном разделе параллельным сближением.

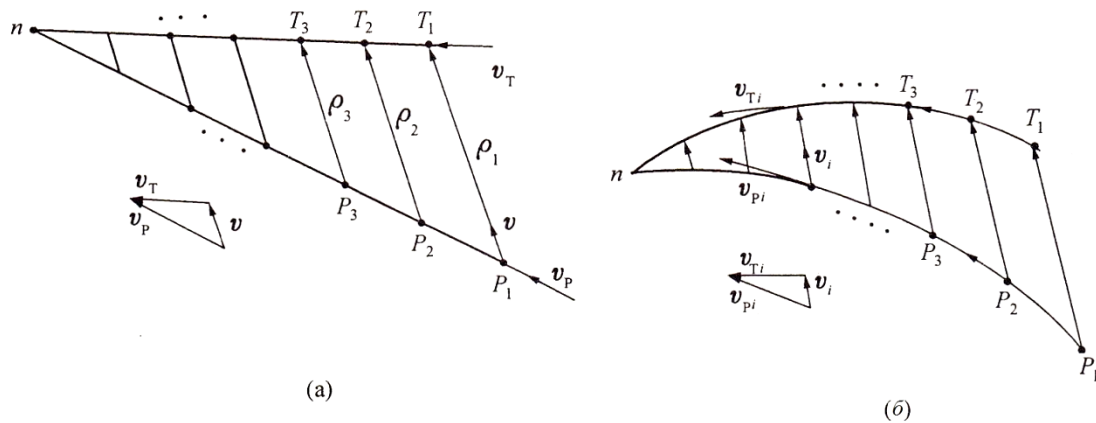


Рис. 7.6. Параллельное сближение КА

Параллельное сближение двух КА в инерциальной системе отсчета можно разделить на два вида: когда твердые тела движутся параллельно друг другу в системе координат, связанной с центральным гравитирующим телом, или когда они движутся параллельно друг другу в подвижной системе координат ($TXYZ$ на рис. 7.2). Чаще рассматривается второй случай.

Для простоты будем рассматривать систему уравнений (7.41) и (7.42), в которой пренебрегается влиянием угловой орбитальной скорости:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{q}^2 = f_\rho, \quad (7.54)$$

$$\rho q + 2\dot{\rho}\dot{q} = f_q. \quad (7.55)$$

С точки зрения экономии энергии, разность скоростей между активным и пассивным КА может использоваться для их сближения друг с другом. В этом случае управляющая сила f_ρ в направлении линии визирования не требуется, а сила, действующая в вертикальном направлении f_q , остается постоянной. Для реализации метода параллельного сближения угловая скорость линии визирования должна быть равна нулю под действием

силы f_q , поэтому приведенные выше два уравнения приобретают вид:

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{q}^2 = 0, \quad (7.56)$$

$$\rho q + 2\dot{\rho}\dot{q} = f_q. \quad (7.57)$$

Решение этих двух уравнений в общем виде очень трудоемко, поэтому далее будем их рассматривать с некоторыми упрощениями.

В идеальном состоянии система управления будет поддерживать $\dot{q} = 0$, тогда выражение (7.56) станет равным $\ddot{\rho} = 0$, поэтому

$$\rho = \rho(0) + \dot{\rho}(0)t. \quad (7.58)$$

Здесь $\rho(0), \dot{\rho}(0)$ – расстояние между двумя КА и относительная скорость в момент времени $t = 0$. Однако условие $\dot{q} = 0$ не всегда выполняется. Поэтому чтобы вывести закон изменения q , подставим (7.58) в (7.57):

$$\ddot{q} + \frac{2\dot{\rho}\dot{q}}{\rho(0) + \dot{\rho}(0)t} = \frac{f_q}{\rho(0) + \dot{\rho}(0)t}.$$

В случае если в приведенной выше формуле f_q является константой, решение будет иметь вид:

$$\dot{q} = \frac{1}{\rho^2} \left\{ f_q \left[\rho(0)t + \dot{\rho}(0)\frac{t^2}{2} \right] + \dot{q}(0)\rho^2(0) \right\}. \quad (7.59)$$

Здесь $\dot{q}(0)$ – угловая скорость на линии визирования в момент времени $t=0$. Если f_q задано, то \dot{q} можно рассчитать по указанной выше формуле. Если время t мало, можно считать, что f_q не изменяется, т. е. движение равноускоренное. Подставим в (7.59) выражение $\dot{q}\rho = f_q t$, получим:

$$f_q t = \frac{1}{\rho} \left\{ f_q \left[\rho(0)t + \dot{\rho}(0)\frac{t^2}{2} \right] + \dot{q}(0)\rho^2(0) \right\}.$$

Подставим (7.58):

$$f_q = \frac{\rho^2(0)\dot{q}(0)}{0.5\dot{\rho}(0)t^2}.$$

Подставим полученное выражение в (7.59) и получим угловую скорость:

$$\dot{q} = \frac{2\rho^2(0)\dot{q}(0)}{\rho^2} \left(\frac{\rho(0)}{\dot{\rho}(0)t} + 1 \right). \quad (7.60)$$

Другим частным случаем является $\dot{q} = const$, тогда выражения (7.54) и (7.55) примут вид:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{q}^2 = 0, \quad (7.61)$$

$$2\dot{\rho}\dot{q} = f_q. \quad (7.62)$$

Умножим (7.61) на $\dot{\rho}$ и проинтегрируем по времени:

$$\dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{q}^2 = c, \quad (7.63)$$

где c – постоянная интегрирования, которая может быть найдена из начальных условий:

$$c = \dot{\rho}^2(0) - \rho^2(0)\dot{q}^2(0). \quad (7.64)$$

Для дальнейших преобразований выражения (7.63) рассмотрим рис. 7.7: здесь T и P – пассивный и активный КА соответственно, относительная скорость между ними \bar{v} не совпадает с линией визирования $\bar{\rho}(0)$. Расстояние между аппаратами равно h_0 . Обозначим:

$$k = \frac{\rho(0)}{h_0}. \quad (7.65)$$

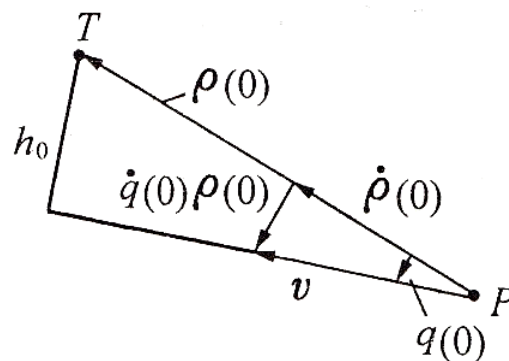


Рис. 7.7. Соотношения скоростей

Из рис. 7.7 видно:

$$\dot{\rho}^2(0) + \rho^2(0)\dot{q}^2(0) = v^2.$$

Применим метод параллельного переноса и рассмотрим два подобных треугольника на рисунке и преобразуем (7.65):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}^2(0)}{\dot{q}^2(0)} &= \rho^2(0) \left(\frac{v^2}{\rho^2(0)\dot{q}^2(0)} - 1 \right) = \rho^2(0) \left(\frac{\rho^2(0)}{h^2(0)} - 1 \right) = \\ &= \rho^2(0)(k^2 - 1). \end{aligned} \quad (7.66)$$

Составим отношение c/\dot{q}^2 . С учетом выражения (7.64) и условия $\dot{q} = const = \dot{q}(0)$ получим:

$$\frac{c}{\dot{q}^2} = \frac{\dot{\rho}^2(0)}{\dot{q}^2(0)} - \rho^2(0) = \rho^2(0)(k^2 - 2). \quad (7.67)$$

Чтобы избавиться от времени, разделим (7.63) на \dot{q}^2 и приравняем к (7.67):

$$\left(\frac{d\rho}{dq} \right)^2 - \rho^2 = \rho^2(0)(k^2 - 2). \quad (7.68)$$

Введем безразмерную линию визирования:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho(0)}. \quad (7.69)$$

Выражение (7.68) можно переписать в виде:

$$\left(\frac{d\bar{\rho}}{dq} \right)^2 - \bar{\rho}^2 = k^2 - 2. \quad (7.70)$$

Решение этого уравнения:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \sqrt{k^2 - 1} \right) \exp \left[\mp (q - q(0)) \right] - \left(\sqrt{k^2 - 1} - 1 \right) \exp \left[\pm (q - q(0)) \right] \right\}. \quad (7.71)$$

В этом выражении верхний знак означает состояние сближения КА, а нижний знак – состояние удаления КА. Продифференцируем (7.71) по времени, подставим в (7.62) и получим f_q . Из (7.70) получим:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dq} = \sqrt{\bar{\rho}^2 + k^2 - 2}. \quad (7.72)$$

Здесь должно выполняться условие $\bar{\rho} \geq \sqrt{2 - k^2}$, а из (7.65) и рис. 7.7 видно, что $k \geq 1$. Если $k = 1$, то вектор \bar{v} перпендикулярен $\bar{\rho}(0)$ или $q(0) = \frac{\pi}{2}$, тогда (7.71) примет вид:

$$\bar{\rho}(0) = \frac{1}{2} \left[\exp(q - q(0)) + \exp(q(0) - q) \right]. \quad (7.73)$$

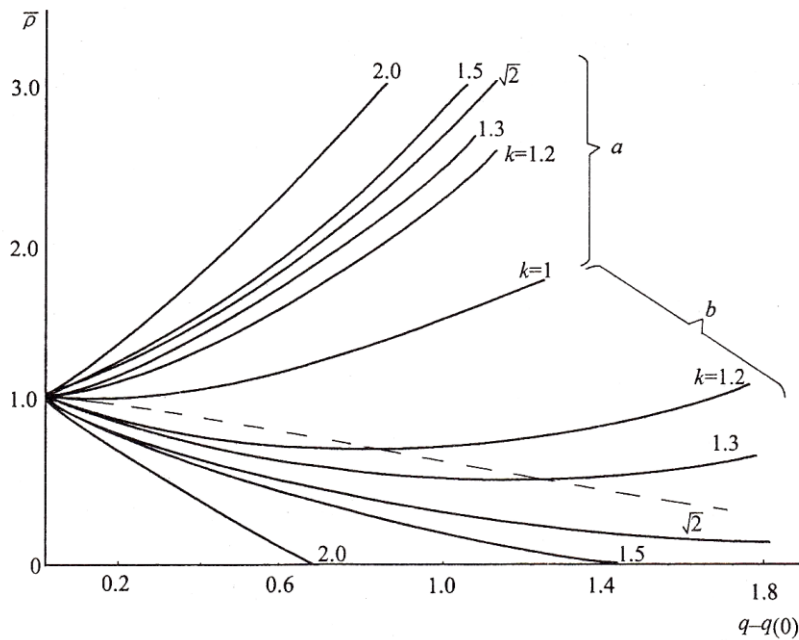


Рис. 7.8. Зависимость $\bar{\rho}((q(0) - q))$ при варьировании параметра k

По мере возрастания $(q - q(0))$ величина $\bar{\rho}$ будет также возрастать, что видно из рис. 7.8. Графики на рисунке построены с использованием формулы (7.71). Здесь изображены два вида графиков, где k - параметр: в группе (а) используется нижний знак в формуле (7.71), а в группе (б) – верхний. На границе этих двух групп лежит кривая с $k = 1$.

При $1 < k < \sqrt{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} > q(0) > \frac{\pi}{4}\right)$ используем верхний знак (процесс сближения) в (7.71). При этом при малых значениях $(q - q(0))$ производная $\frac{d\bar{\rho}}{dq}$ отрицательна. То есть если $\bar{\rho}$ уменьшается по мере увеличения $(q - q(0))$, то это соответствует кривым под пунктирной линией на рис. 7.8. Затем $\frac{d\bar{\rho}}{dq}$ обращается в ноль, выражение $(q - q(0))$ увеличивается и производная $\frac{d\bar{\rho}}{dq}$ становится положительной, и $\bar{\rho}$ будет постепенно возрастать по мере возрастания $(q - q(0))$.

При $k = \sqrt{2}$ $\left(q(0) = \frac{\pi}{4}\right)$ выражение (7.71) примет вид:

$$\bar{\rho} = \exp[\mp(q - q(0))]. \quad (7.74)$$

Верхний знак указывает на сближение КА, нижний индекс – на удаление.

При $k = \sqrt{2}$ $\left(q(0) < \frac{\pi}{4}\right)$ на кривой точка $\frac{d\bar{\rho}}{dq} = 0$ исчезнет, производная будет меняться монотонно, активный КА то постепенно отдаляется от пассивного КА, то приближается к нему.

Из графика на рис. 7.8 можно сделать следующие выводы.

(1) При $k \geq \sqrt{2}$ $\left(q(0) \leq \frac{\pi}{4} \right)$ для случая $\frac{d\bar{\rho}}{dq} < 0$ активный КА будет постепенно приближаться к целевому. Только при $k = \sqrt{2}$ относительная скорость будет равна нулю, в других случаях КА столкнутся.

(2) При $1 < k < \sqrt{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} > q(0) > \frac{\pi}{4} \right)$, где $(q - q(0))$ мало, по мере увеличения $(q - q(0))$ активный КА будет приближаться к пассивному. При $\bar{\rho} = \sqrt{2 - k^2}$ расстояние между КА будет минимально. А по мере увеличения $(q - q(0))$ активный КА будет удаляться от пассивного.

(В) *метод асимптотического сближения*

Используя формулы (7.41) и (7.42), получим:

$$f_{\rho} = -2b_1\dot{\rho} - \rho\dot{q}^2 - b_2\rho, \quad (7.75)$$

$$f_q = -2b_3\rho\dot{q} + 2\dot{\rho}\dot{q}^2 - b_4q\rho. \quad (7.76)$$

Тогда:

$$\ddot{\rho} + 2b_1\dot{\rho} + b_2\rho = 0, \quad (7.77)$$

$$\ddot{q} + 2b_3\dot{q} + b_4q = 0. \quad (7.78)$$

Будем считать, что:

$$b_1^2 > b_2 > 0, \quad b_3^2 < b_4. \quad (7.79)$$

Тогда решения уравнений (7.77) и (7.78) будут иметь вид:

$$\rho(t) = \frac{\lambda_2\rho(0) + \dot{\rho}(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1\rho(0) + \dot{\rho}(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}, \quad (7.80)$$

$$q(t) = e^{-b_3 t} \left\{ \left[\frac{\dot{q}(0)}{\Omega} + \frac{b_3}{\Omega} q(0) \right] \sin \Omega t + q(0) \cos \Omega t \right\}, \quad (7.81)$$

где $\rho(0), \dot{\rho}(0), q(0), \dot{q}(0)$ – значения соответствующих величин в начальный момент времени.

$$\lambda_1 = b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2}, \quad \lambda_2 = b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2}, \quad (7.82)$$

$$\Omega = \sqrt{b_4 - b_3^2}. \quad (7.83)$$

Следовательно, после введения закона управления с обратной связью (7.75) и (7.76) исходные взаимосвязанные уравнения относительного движения (7.41) и (7.42) становятся независимыми, а линии визирования $\rho(t)$ и $q(t)$ асимптотически стремятся к нулю, т.е. происходит мягкое сближение двух КА.

Так как функции (7.80) и (7.81) изменяются по экспоненциальному закону, этот метод сближения называют также экспоненциальным. Метод асимптотического сближения может также использовать выражения (7.13) и (7.14), если взять

$$f_x = -2c_1 \dot{x} - c_2 x + 2\omega \dot{y}, \quad (7.84)$$

$$f_y = -2c_3 \dot{y} - c_4 y - 2\omega \dot{x}. \quad (7.85)$$

Тогда (7.13) и (7.14) примут вид:

$$\ddot{x} + 2c_1 \dot{x} + c_2 x = 0, \quad (7.86)$$

$$\ddot{y} + 2c_3 \dot{y} + (c_4 - 3\omega^2) y = 0. \quad (7.87)$$

Примем, что:

$$c_1^2 < c_2, \quad c_3^2 < (c_4 - 3\omega^2), \quad (7.88)$$

$$\Omega_x = \sqrt{c_2 - c_1^2}, \quad \Omega_y = \sqrt{c_4 - 3\omega^2 - c_3^2}. \quad (7.89)$$

Тогда решения уравнений (7.86) и (7.87) будут иметь вид:

$$x(t) = e^{-c_1 t} \left\{ \left[\frac{\dot{x}(0)}{\Omega_x} + \frac{c_1}{\Omega_x} x(0) \right] \sin \Omega_x t + x(0) \cos \Omega_x t \right\}, \quad (7.90)$$

$$y(t) = e^{-c_3 t} \left\{ \left[\frac{\dot{y}(0)}{\Omega_y} + \frac{c_3}{\Omega_y} y(0) \right] \sin \Omega_y t + y(0) \cos \Omega_y t \right\}. \quad (7.91)$$

Видно, что процесс сближения также носит асимптотический характер и производится по экспоненциальному закону.

Если в двух приведенных выше системах координат выбрать соответствующие значения b_1, b_2, \dots или c_1, c_2, \dots , можно получить различные варианты сближения и стыковки КА.

(Г) *метод сближения по оптимальному закону управления*

Для упрощения задачи будем считать, что член с ω является малой величиной, поэтому, пренебрегая им, получим:

$$\ddot{x} = f_x, \quad (7.92)$$

$$\ddot{y} = f_y. \quad (7.93)$$

Это эквивалентно движению в двумерном пространстве без учета гравитации. Пусть f_x, f_y – значения функции переключения:

$$f_i = \begin{cases} f_i, \\ 0, \quad i = x, y, \\ -f_i. \end{cases} \quad (7.94)$$

Эта функция может принимать три возможных значения, т. е. $f_i, -f_i, 0, f_i = const$.

Сначала проанализируем закон управления движением в фазовой плоскости. Для примера выберем направление x и, проинтегрировав два раза, получим:

$$\dot{x}(t) = f_x t + \dot{x}(0), \quad (7.95)$$

$$x(t) = \frac{f_x t^2}{2} + \dot{x}(0)t + x(0). \quad (7.96)$$

Исключая t из двух последних формул, получим:

$$x(t) - \frac{\dot{x}^2(t)}{2f_x} = x(0) - \frac{\dot{x}^2(0)}{2f_x}. \quad (7.97)$$

Здесь $x(0), \dot{x}(0)$ – начальное положение и скорость КА вдоль направления X .

Выражение (7.97) задает семейство кривых. Если правая часть – параметр c , то (7.97) переписется в виде:

$$x(t) - \frac{\dot{x}^2(t)}{2f_x} = c, \quad (7.98)$$

$$c = x(0) - \frac{\dot{x}^2(0)}{2f_x}. \quad (7.99)$$

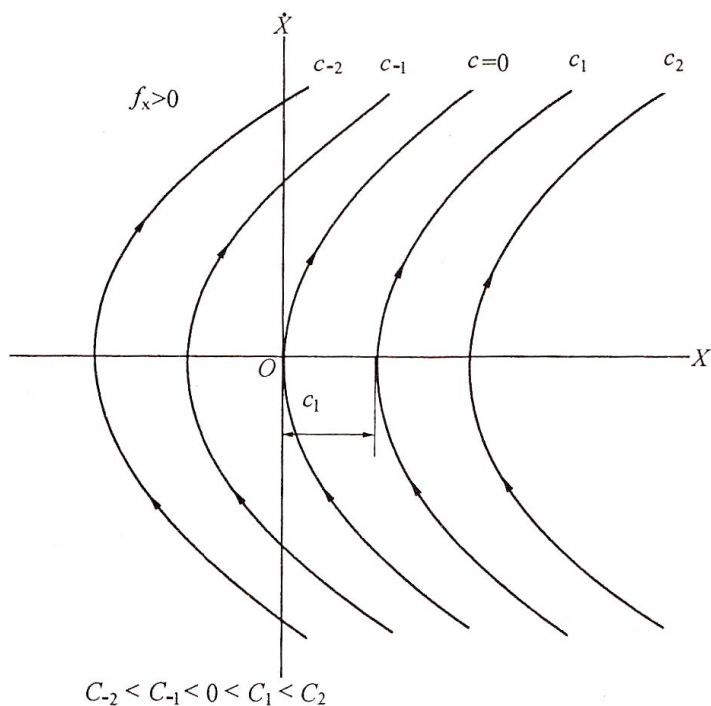


Рис. 7.9. Движение КА в фазовой плоскости

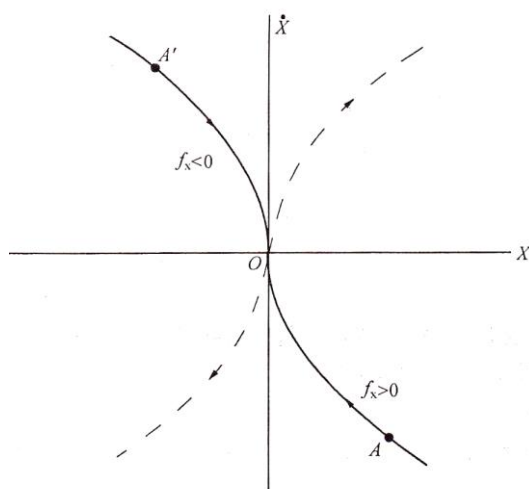


Рис. 7.10. Движение КА в фазовой плоскости при $c = 0$

На рис. 7.9 показано семейство кривых в фазовой плоскости. Это семейство парабол с осью симметрии на оси x . При $c = 0$ парабола пересекает ось \dot{X} в начале координат. При $c = c_1$ парабола перемещается параллельно вправо (при $c_1 > 0$) или влево (при $c_1 < 0$) на расстояние $x = c_1$. Каждая кривая соответствует состоянию движения активного КА при определенных значениях c

и f_x , т.е. его положению и скорости в каждый момент времени. На кривой $c=0$ возможна встреча двух КА. Семейство парабол построено для случая $f_x > 0$. Если же $f_x < 0$, кривые будут повернуты на 180° вокруг оси $O\dot{X}$. На рис. 7.10 показаны параболические кривые при $c=0$ и положительном или отрицательном значении f_x . При $f_x > 0$ скорость будет постепенно увеличиваться (при $f_x < 0$ уменьшаться), а расстояние от линии визирования будет постепенно уменьшаться (вблизи пассивного КА). После встречи два КА остановятся, поэтому на параболе с $f_x > 0$ только кривая из четвертого квадранта имеет практическое значение и показана сплошной линией, а направление движения показано стрелкой. Аналогично, при $f_x < 0$ имеет смысл кривая из второго квадранта, направление движения также показано стрелкой. Видно, что если в начальном состоянии $x(0), \dot{x}(0)$ кривая соответствует $c=0$ в уравнении (7.99) (на рис. 7.10 это точка A или A'), то при положительном f_x (для точки A) или при отрицательном f_x (для точки A') кинематические параметры КА будут постепенно перемещаться из точки A (или A') вдоль сплошной линии на рис. 7.10 до начала координат, где и произойдет встреча с пассивным КА.

Если начальные условия движения активного КА не удовлетворяют условию $c=0$, точка начального состояния будет располагаться не на сплошной линии на рис. 7.10, а в точках 1, 2 или 3 на рис. 7.11. Чтобы два КА встретились, f_x нужно выбрать положительной или отрицательной. Возьмем для примера точку 2 и рассмотрим отрицательную управляющую силу f_x , чтобы довести скорость до нуля. При движении по пунктирной кривой можно дойти до пересечения со сплошной кривой в точке 2', а затем переключить управляющую силу f_x на положительную и таким образом дойти до начала координат по кривой. Если начать

движение из точки 1 с отрицательной f_x , то нужно прийти до точки 1' и переключить f_x на положительную. Точно так же двинемся из точки 3 до точки 3' с $f_x > 0$, а затем переключаем на $f_x < 0$ и доходим до начала координат.

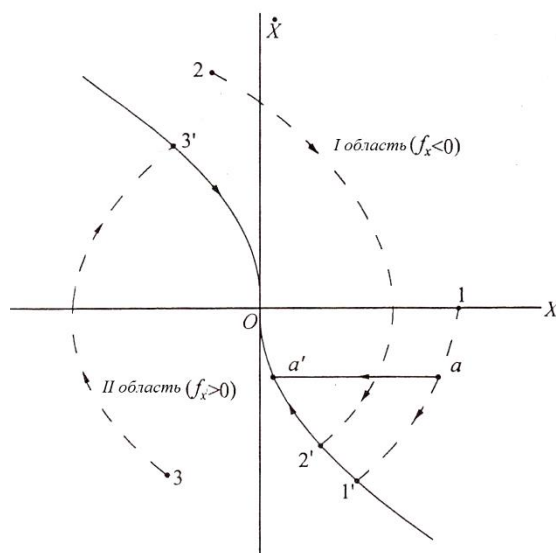


Рис. 7.11. Движение КА в фазовой плоскости при $c \neq 0$

Таким образом, фазовая плоскость делится на две области кривой, которая состоит из двух фазовых траекторий из второго и четвертого квадрантов при $c = 0$. Справа от этой кривой располагается область I, а слева – область II. Если точка начального состояния находится в области I, необходимо сначала выбрать отрицательную управляющую силу (в области II, наоборот, положительную), чтобы прийти до кривой $c = 0$, а затем переключить управление на положительное (или отрицательное), чтобы попасть в начало координат O .

Рассмотрим также другой метод – состояние $f_x = 0$. Считаем, что начальное состояние соответствует точке 1 (рис. 7.11). Так же как и в предыдущем примере, сначала выберем отрицательное управление f_x , чтобы прийти из точки 1 в точку 1' по пунктирной параболе. При этом, когда дойдем до точки a ,

внезапно уменьшим до нуля управление. В этот момент скорость активного КА будет отрицательной относительно точки a , и с этой скоростью КА будет двигаться равномерно в направлении уменьшения x , т.е. движение будет происходить по линии, параллельной оси X , из точки a до точки a' (точка пересечения со сплошной кривой). Если в этой точке оказать положительное управление f_x , то движение будет идти по сплошной параболе к началу координат.

Энергетические затраты во втором методе, несомненно, меньше, чем в первом. С точки зрения экономии энергетики, нужно начать движение из точки 1. По мере приближения точки a к точке 1, энергетика будет уменьшаться, но из-за малой скорости увеличится требуемое время. Наоборот, если выбрать правильное положение точки a , то можно найти компромиссное решение, в котором и время и энергетика имеют приемлемые значения. В этом и состоит смысл оптимального управления при сближении двух КА.

Для получения закона оптимального управления необходимо сначала задать целевую функцию J . Она равна сумме полного времени и потребной энергетики, где K – весовой коэффициент:

$$J = KT + \int_0^T |f_x| dt. \quad (7.100)$$

В общем случае в начале сближения и стыковки $\dot{x}(0)=0$ и $x(0) \neq 0$. В этом случае общую продолжительность маневра можно разбить на три составляющих: время движения из точки 1 до точки «а» (рис. 7.11), время движения из точки a до a' , время движения из точки a' до точки O . Так как f_x положительно, а при отрицательных значениях кривые зеркально отображаются, то можно заметить, что время равнозамедленного движения из

точки a' до точки O будет равно времени равноускоренного движения в обратном направлении из точки O до точки a' .

$$T_1 = \frac{\dot{x}^*}{f_x}. \quad (7.101)$$

Здесь \dot{x}^* – скорость в точке a или a' . Для случая равноускоренного движения можно рассчитать расстояние между O и a' и между точкой 1 и a , они будут равны:

$$x_a = \frac{(\dot{x}^*)^2}{2f_x}. \quad (7.102)$$

Так как расстояние между точками a и a' равно $x_0 - x_a$, то время прохождения этого пути будет равно:

$$T_2 = \frac{x(0) - 2x_a}{\dot{x}^*}. \quad (7.103)$$

Поэтому подставим в суммарное время движения $T = 2T_1 + T_2$ выражения (7.101) – (7.103):

$$T = \frac{\dot{x}^*}{f_x} + \frac{x(0)}{\dot{x}^*}. \quad (7.104)$$

Пусть $f_x = const$ в интервале времени от 1 до a и от a' до O , т. е. за время $2T_1$ интеграл в целевой функции будет равен:

$$2 \int_0^T f_x dt = 2f_x \left(\frac{\dot{x}^*}{f_x} - 0 \right) = 2\dot{x}^*.$$

Поэтому выражение (7.100) примет вид:

$$J = K \left(\frac{\dot{x}^*}{f_x} + \frac{x(0)}{\dot{x}^*} \right) + 2\dot{x}^*. \quad (7.105)$$

Задача состоит в выборе такого \dot{x}^* , чтобы J приняло свое минимальное значение. Для этого приравняем производную $\frac{dJ}{d\dot{x}^*}$ к нулю, получим:

$$(\dot{x}^*)^2 = \frac{Kf_x}{K + 2f_x} x(0).$$

Абсцисса точки a :

$$x^* = x(0) - \frac{(\dot{x}^*)^2}{2f_x}.$$

Из последней формулы выразим $x(0)$ и подставим в предыдущее равенство. Получим кривую на фазовой плоскости, где находится точка a для разных $x(0)$:

$$x^* = \frac{K + 4f_x}{2Kf_x} (\dot{x}^*)^2.$$

Это парабола в правой части фазовой плоскости. Нам нужна ее часть в четвертом квадранте. Опишем кривую через точку a при отрицательном f_x :

$$x^* = -\frac{K + 4f_x}{2Kf_x} |\dot{x}^*| \dot{x}^*. \quad (7.106)$$

Эта кривая проходит через точку a (рис. 7.12). На этой линии необходимо переключить управление на $f_x=0$, которое до этого было положительным или отрицательным. Это закрытая линия.

Когда происходит движение от точки a до точки a' (рис. 7.12), необходимо переключить управление на положительное или отрицательное. Это открытая линия.

Можно записать:

$$x = -\frac{1}{2f_x} |\dot{x}^*| \dot{x}^*. \quad (7.107)$$

На открытых линиях f_x – параметр, а на закрытой линии она зависит от f_x и весового коэффициента K .

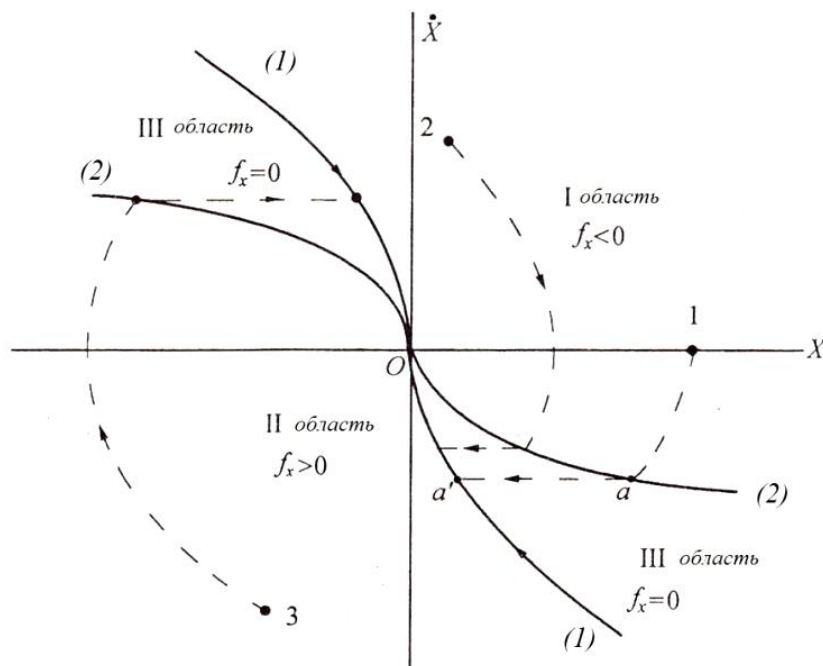


Рис. 7.12. Закрытые (1) и открытые (2) линии переключения

На рис. 7.12 область между открытой и закрытой линиями – область III. В этой области применяется нулевое управление $f_x=0$. Справа от области III находится область I, где применяется

отрицательное управление $-f_x$. Слева – область II, где применяется положительное управление f_x . На рисунке также показано, как из точек 1, 2, 3 привести процесс к началу координат, т. е. к встрече двух КА. Программа управления может быть записана так:

$$f_x = \begin{cases} f_x \begin{cases} x < -\frac{K + 4f_x}{2Kf_x} |\dot{x}^*| \dot{x}^* & \text{при } x < 0, \\ x < -\frac{1}{2f_x} |\dot{x}^*| \dot{x}^* & \text{при } x > 0, \end{cases} \\ -f_x \begin{cases} x > -\frac{K + 4f_x}{2Kf_x} |\dot{x}^*| \dot{x}^* & \text{при } x > 0, \\ x > -\frac{1}{2f_x} |\dot{x}^*| \dot{x}^* & \text{при } x < 0, \end{cases} \\ 0, \text{ при всех остальных } x, \dot{x}. \end{cases} \quad (7.108)$$

Если рассматривается направление вдоль оси Y , то задача решается аналогично, во всех выражениях x меняется на y .

При выводе закона управления были использованы упрощенные уравнения (7.92) и (7.93). Однако если вывести закон управления для уравнений (7.13) – (7.15), то так как в этих уравнениях учтено больше второстепенных членов, то и закон управления будет точнее.

Чтобы выбрать определенный закон управления, нужно снять показания с измерительных устройств. Например, чтобы составить выражения (7.75) и (7.76), необходимо измерить (или рассчитать) $\rho, \dot{\rho}, q, \dot{q}$ и т. д. А чтобы составить закон управления, необходимо еще измерить (или рассчитать) x, \dot{x} и т. д.

Кроме того, при исследовании различных законов управления мы считали КА материальной точкой, не учитывали его размеры. При использовании законов управления на практике необходимо учитывать размер и форму КА, связь орбитального движения с угловым, необходимость предотвращения столкновения КА, особенное внимание нужно уделять относительному расстоянию между двумя КА (x, y или ρ), в частности, когда оно принимает отрицательные значения (такие случаи лучше исключить).

8 ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КА

В рассмотренных ранее разделах была принята общая гипотеза о том, что притягивающее тело является материальной точкой, у которой весь вес сосредоточен в центре масс. Однако эта гипотеза дает большие погрешности в расчетах. Кроме того, в упрощенной модели двух тел кроме взаимной силы притяжения никаких других внешних сил не рассматривалось. В настоящем разделе мы рассмотрим различные виды возмущений, действующих на КА. Учет возмущений – это процесс уточнения первоначальной упрощенной модели. Источниками возмущений являются нецентральность гравитационного поля Земли, действие атмосферы, солнечного ветра и притяжения других планет и т. д. Здесь мы рассмотрим только первые два вида возмущений.

8.1 Потенциал поля тяготения Земли

Для большого числа задач теории движения можно считать, что Земля (или другое гравитирующее тело) есть шар со сферическим распределением плотности, т.е. плотность в любой точке является функцией только расстояния этой точки от центра Земли. Сила тяготения от гравитирующего тела такой структуры равна силе тяготения материальной точки с массой, помещенной в ее центре. Тогда на тело единичной массы, расположенное на расстоянии r от гравитирующего тела, будет действовать сила μ/r .

Однако в реальности гравитационное поле не является однородным и часто для его описания используют гравитационный потенциал. В каждой точке окрестности гравитирующего тела есть свой вектор гравитационного ускорения. Можно доказать, что подобное векторное поле гравитационного ускорения является потенциальным, а значит, имеет потенциальную функцию

(гравитационный потенциал). В физическом смысле гравитационный потенциал (или потенциал поля тяготения) в некоторой точке равен работе, которую необходимо совершить при перемещении точечной единичной массы из данной точки в бесконечность относительно гравитирующего тела. Гравитационный потенциал, взятый с обратным знаком, есть потенциальная энергия единичной массы, помещенной в рассматриваемую точку.

Потенциальная функция гравитирующего тела любой конфигурации может быть получена следующим образом. Разделим это тело на элементарные массы dm (рис. 8.1) и запишем выражение для потенциальной энергии KA , представляющего собой материальную точку A , расположенную на расстоянии r от элементарной массы dm гравитирующего тела B :

$$dU = -\frac{dm}{r}G.$$

Здесь G – гравитационная постоянная.

Просуммируем по всем элементарным массам тела B :

$$U = -\int_B \frac{dm}{r}G = -\int_B \frac{G\sigma}{r} dV. \quad (8.1)$$

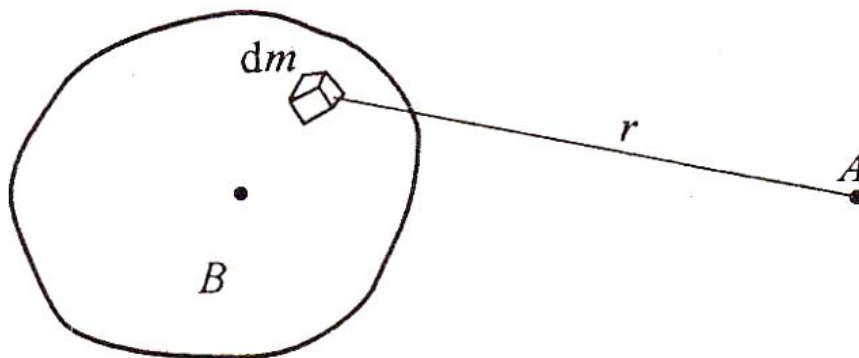


Рис. 8.1. Элементарная гравитационная сила

В формуле (8.1) интегрирование по V означает, что интеграл берется по всему объему тела B ; σ – плотность тела B ; dV – объем, занимаемый элементарной массой dm .

Видно, что потенциал при бесконечном удалении от притягивающего тела обращается в ноль.

8.1.1 Потенциал шара со сферическим распределением плотности

На рис. 8.2 показан шар с плотностью σ , радиусом R_B . Расстояние между точкой A и центром шара равно R ($R > R_B$). Рассмотрим тонкий однородный сферический слой тела B , ограниченный радиусами r и $r + dr$, с поверхностной плотностью σ и определим потенциал слоя в точке, вынесенной от центра на расстояние R (рис. 8.2).

Потенциал массы тонкого кругового кольца шириной dr в рассматриваемой точке определяется формулой:

$$dU = -\frac{Gdm}{r} = -\frac{G\sigma}{r}dV.$$

Чтобы определить объем dV , необходимо рассмотреть два конуса с вершиной в точке A , осью OA , половинными углами при вершине θ и $\theta + d\theta$. Длина окружности на пересечении шара с конусом радиуса r равна $2\pi r \sin\theta$. Тогда приведенное выше выражение после интегрирования приобретет вид:

$$U = -2\pi\sigma G \iint r \sin\theta d\theta dr.$$

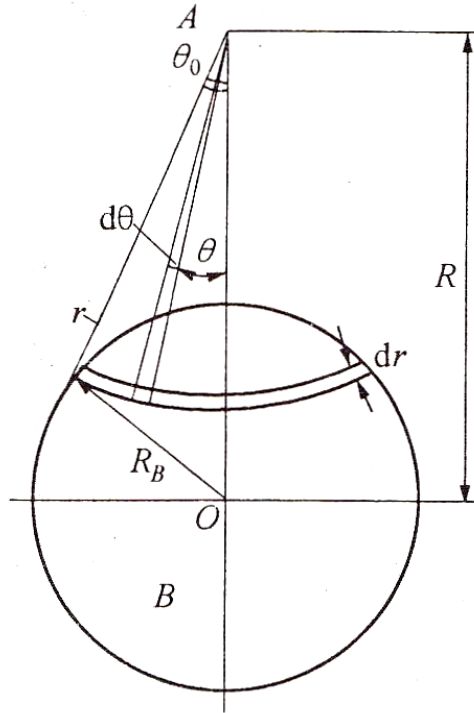


Рис. 8.2. К выводу формулы потенциала шара со сферическим распределением плотности

Из рис. 8.2 видно, что пределы интегрирования по углу θ : от 0 до θ_0 ; по радиусу: от $R - R_B$ до $R + R_B$. Угол θ_0 можно получить из теоремы косинусов:

$$\theta_0 = \arccos \frac{R^2 + r^2 - R_B^2}{2rR}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} U &= -2\pi\sigma G \int_{R-R_B}^{R+R_B} r \int_0^{\arccos \frac{R^2 + r^2 - R_B^2}{2rR}} \sin \theta d\theta dr = \\ &= -2\pi\sigma G \int_{R-R_B}^{R+R_B} r \left(1 - \frac{R^2 + r^2 - R_B^2}{2rR} \right) dr = -\frac{4\pi\sigma}{3} R_B^3 \frac{G}{R}. \end{aligned}$$

Так как масса тела B равна $\frac{4\pi R_B^3}{3}\sigma = M$, то перепишем последнее выражение:

$$U = -\frac{M}{R}G = -\frac{\mu}{R}. \quad (8.2)$$

Это означает, что для шара со сферическим распределением плотности потенциал гравитационного поля равен потенциалу, полученному в предположении концентрации всей массы этого тела в центре масс, и полностью совпадает с выражением (3.18).

Продифференцируем (8.2) по R , получим $\frac{dU}{dR} = \frac{\mu}{R^2}$. Это и есть гравитационная сила, действующая со стороны тела $\frac{dU}{dR} = \frac{\mu}{R^2}$ на единичную массу A .

Используя свойство потенциала векторного поля (производная от потенциала векторного поля равна проекции гравитационного ускорения на это направление), получим:

$$\vec{f} = -gradU = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \quad (8.3)$$

Здесь $grad$ – знак оператора градиента; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы вдоль осей X, Y, Z в системе координат $OXYZ$ с началом в центре тела B (рис. 8.3).

Из рис. 8.3 видно:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.4)$$

Подставим (8.4) в (8.3), получим:

$$\vec{f} = -\frac{\mu}{R^3} x\vec{i} - \frac{\mu}{R^3} y\vec{j} - \frac{\mu}{R^3} z\vec{k}. \quad (8.5)$$

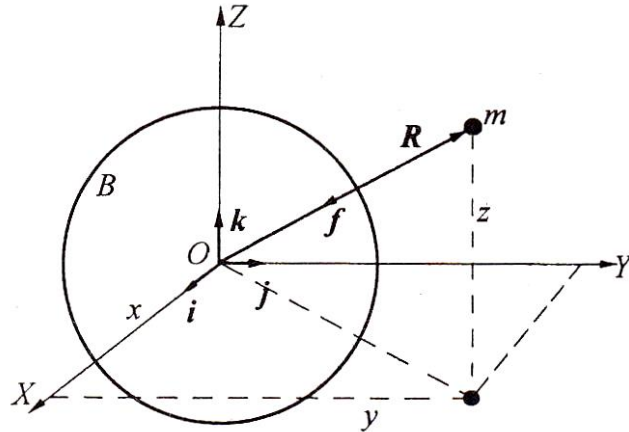


Рис. 8.3. К определению компонент вектора \vec{f}

Можно определить компоненты вектора \vec{f} :

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{\mu}{R^3} x, \\ f_y &= -\frac{\mu}{R^3} y, \\ f_z &= -\frac{\mu}{R^3} z. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Если подставить эти три равенства в формулу $f = (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{1/2}$, получим $f = \frac{\mu}{R^2}$. А это и есть гравитационная сила, с которой тело B действует на тело единичной массы в точке A .

Рассматривая Землю как шар со сферическим распределением плотности, во многих случаях можно получить достаточно точные результаты решения задач. Но в действительности Земля имеет не сферическую форму, а представляет собой сжатый у полюсов эллипсоид вращения. Учет этого факта позволяет значительно повысить точность расчетов.

8.1.2 Потенциал эллипсоида вращения с однородным распределением плотности

Если рассматривать Землю как эллипсоид вращения с центральными осями, то в любых плоскостях, проходящих через эти оси, можно получить одинаковые эллипсы. Большая полуось этих эллипсов a проходит через экватор, а малая полуось b перпендикулярна плоскости экватора (рис. 8.4).

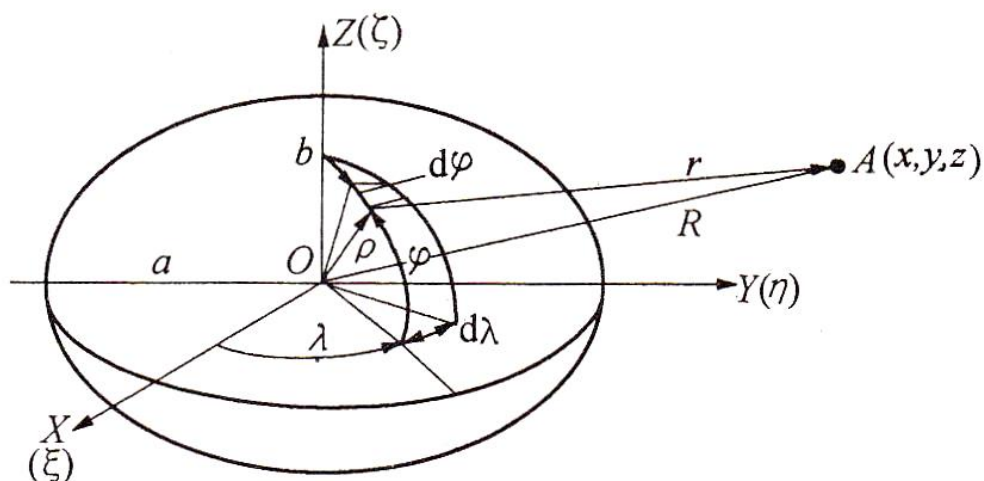


Рис. 8.4. К выводу формулы для потенциала эллипсоида вращения с однородным распределением плотности

Введем систему координат $OXYZ$, где ось OZ проходит вдоль земной оси, OX направлена из центра Земли к Гринвичскому меридиану, OY дополняет систему до правой. Выделим элементарную массу на расстоянии ρ от центра Земли с долготой λ и широтой φ . Тогда геометрические параметры элементарной массы будут $\rho d\varphi$, $\rho \cos \varphi d\lambda$, $d\rho$ ($d\rho$ не показано на рисунке). Элементарная масса будет равна $dm = \sigma \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda d\rho$, где σ – плотность Земли. Потенциальная энергия точки A (на расстоянии r от центра Земли, с координатами x, y, z) $\partial U = -G \frac{dm}{r}$, а потенциальная энергия всей Земли:

$$U = - \int_B G \frac{dm}{r} = - \sigma G \int_B \frac{\rho^2}{r} \cos \varphi d\varphi d\lambda d\rho. \quad (8.7)$$

Интеграл берется по всему объему тела B .

Перед тем как взять интеграл, упростим дробь $\frac{1}{r}$. Вектор $\bar{\rho}$ разложим на компоненты в системе координат $OXYZ$, чтобы не перепутать их с координатами точки A . Обозначим через ξ, η, ζ компоненты вектора $\bar{\rho}$ вдоль осей X, Y, Z . Видно, что $\bar{r} = \bar{R} - \bar{\rho}$ (\bar{R} – радиус-вектор, проведенный из центра Земли к точке A).

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \right]^{-1/2} = \left[R^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{R} \left[1 + \frac{\rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}{R^2} \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой разложения в ряд:

$$(1 + a)^{-n} = 1 - na + \frac{n(n+1)}{2!} a^2 - \dots \quad (a < 1, n > 0).$$

Перепишем приведенное выше равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} \left[1 - \frac{\rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}{R^2} + \right. \\ &\left. + \frac{3\rho^4 - 4\rho^2(x\xi + y\eta + z\zeta) + 4(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{8R^4} \right]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Подставим (8.8) в (8.7), пренебрегая членами 3-й степени и выше. Также считаем, что O – центр масс эллипсоида, а OX, OY, OZ – оси симметрии. Получим:

$$\int_B \xi dm = \int_B \eta dm = \int_B \zeta dm = 0, \quad \int_B \xi \eta dm = \int_B \eta \zeta dm = \int_B \zeta \xi dm = 0.$$

Тогда потенциальная функция запишется в виде:

$$U = -\frac{G}{R} \int_B \left[1 - \frac{\rho^2}{2R^2} + \frac{3}{2} \frac{x^2 \xi^2 + y^2 \eta^2 + z^2 \zeta^2}{R^4} \right] dm =$$

$$= -\frac{G}{R} M + \frac{G}{2R^2} \int_B \rho^2 dm - \frac{3}{2} \frac{G}{R^5} \left[x^2 \int_B \xi^2 dm + y^2 \int_B \eta^2 dm + z^2 \int_B \zeta^2 dm \right].$$

Здесь M – полная масса Земли. Подставим $dm = \sigma \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda d\rho$ и учтем

$$\xi = \rho \cos \varphi \cos \lambda, \quad (8.9)$$

$$\eta = \rho \cos \varphi \sin \lambda, \quad (8.10)$$

$$\zeta = \rho \sin \varphi. \quad (8.11)$$

Потенциальная функция примет вид:

$$U = -\frac{G}{R} M + \frac{G}{2R^2} \int_B \sigma \rho^4 \cos \varphi d\varphi d\lambda d\rho -$$

$$-\frac{3G\sigma}{2R^5} \left[x^2 \int_B \rho^4 \cos^3 \varphi \cos^2 \lambda d\varphi d\lambda d\rho + \right. \quad (8.12)$$

$$\left. + y^2 \int_B \rho^4 \cos^3 \varphi \sin^2 \lambda d\varphi d\lambda d\rho + z^2 \int_B \rho^4 \cos \varphi \sin^2 \lambda d\varphi d\lambda d\rho \right].$$

Пределы интегрирования: λ от 0 до 2π ; φ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; ρ от 0 до ρ_s . Если эллипс располагается в меридиональной плоскости, то его уравнение имеет вид:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1.$$

Подставим (8.9), (8.10), (8.11), считая $\rho = \rho_s$ и $a^2 + b^2 = e^2 c^2$:

$$\rho_s = \frac{b}{(1 - e^2 \cos \varphi)^{1/2}}. \quad (8.13)$$

Проинтегрируем, получим:

$$U = -\frac{GM}{R} - \frac{2G\pi b^5}{15R^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) e^2 \sigma.$$

Масса эллипсоида:

$$M = \frac{4\pi a^2 b}{3} \sigma,$$

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = R^2 - 3z^2 = R^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi).$$

Обозначим $GM = \mu$, получим выражение для потенциальной энергии:

$$U = -\frac{\mu}{R} \left[1 + \frac{b^2 e^2}{10a^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right].$$

Пусть $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$,

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} e^2 &= (1 - \alpha)^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} = (1 - \alpha)^2 \frac{a+b}{a^2} \frac{a-b}{a^2} = (1 - \alpha)^2 \alpha (2 - \alpha) = \\ &= (1 - 2\alpha + \alpha^2) \alpha (2 - \alpha) = 2\alpha + 0(\alpha^2). \end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка малости α^2 и выше, получим:

$$U = -\frac{\mu}{R} \left[1 + \frac{\alpha}{5} \left(\frac{b}{R} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \right]. \quad (8.14)$$

Здесь α – сжатие земного эллипсоида, $\alpha = 1/298.25$.

На данный момент нет точной модели земного эллипсоида. На основе наблюдений и обратного пересчета можно получить более точное выражение для потенциала:

$$U = -\frac{\mu}{R} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) + \frac{J_3}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^3 (5 \sin^2 \varphi - 3) \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{J_4}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^5 (3 - 30 \sin^2 \varphi + 35 \sin^4 \varphi) + \dots \right]. \quad (8.15)$$

Здесь R_{\oplus} – экваториальный радиус Земли.

$$J_2 = -1.082\,64 \cdot 10^{-3}, \quad J_3 = 2.55 \cdot 10^{-6}, \quad J_4 = 1.65 \cdot 10^{-6}, \dots$$

J_2, J_3, J_4 – вторая, третья и т. д. зональные гармоники. Если их не учитывать, то получим потенциальную функцию шара со сферическим распределением плотности. Если учтем только вторую зональную гармонику, получим потенциальную функцию эллипсоида вращения со сферическим распределением плотности (8.14) (потенциал нормального поля). Аналогично J_2, J_3, J_4 – коэффициенты, связанные только с широтой φ , называются гармоническими коэффициентами. Среди них выделяют коэффициенты по четной степени $\sin \varphi$ J_2, J_4, \dots и по нечетной степени J_3, J_5, \dots

Проанализируем влияние этих коэффициентов. Сначала рассмотрим коэффициент J_2 . Видно, что при $\varphi = \pm 35^\circ 15' 52''$ $3 \sin^2 \varphi - 1 = 0$. Так как $J_2 < 0$, то форма Земли будет иметь вид,

соответствующий выражению (8.15) и показанный на рис. 8.5а пунктирной линией.

Если рассмотреть первый и третий члены, то при $\varphi=0^\circ$ и $\varphi=\pm 50^\circ 46' 7''$ получим $(5\sin^2\varphi - 3)\sin^2\varphi = 0$ и Земля будет иметь форму, как на рис. 8.5б.

Если взять первый и четвертый члены в выражении (8.15), то при $\varphi=\pm 19^\circ 52' 33''$ и $\varphi=\pm 59^\circ 26' 40''$ получим $3 - 30\sin^2\varphi + 35\sin^4\varphi = 0$, то Земля будет иметь форму, как на рис. 8.5в.

В соответствии с полученными выше результатами, Землю можно разделить на полосы линиями, параллельными экватору. Часть полос будет лежать выше уровня теоретического шара, часть – ниже. Если описать модель Земли точнее, то появятся еще и полосы в меридиональных плоскостях и гармонические коэффициенты, связанные с долготой λ .

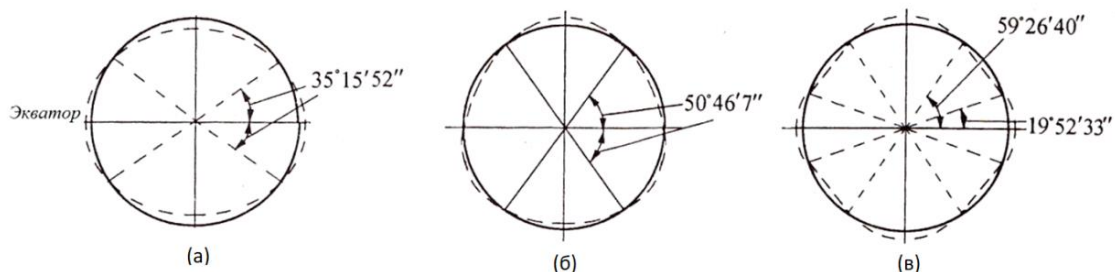


Рис. 8.5. Влияние гармонических коэффициентов разных порядков

Все вышеперечисленные эффекты накладываются друг на друга, и форма однородной Земли становится подобной груше. Это эллипсоид вращения со сжатием у полюсов $\alpha = 1/298.25$, с выступом высоты у Арктики на 10 м и втянутостью у Антарктики на 30 м (рис. 8.6). Обычно при расчетах берут экваториальный радиус и полярный радиус: $R_{\oplus} = 6378.144 \text{ км}$, $R_{\text{пол}} = 6356.759 \text{ км}$.

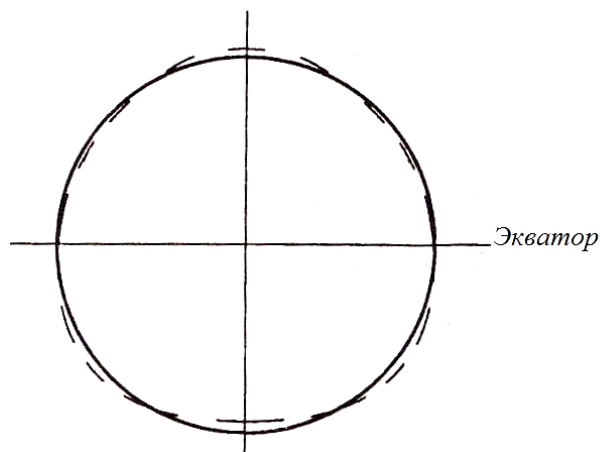


Рис. 8.6. Форма Земли с учетом всех эффектов

8.2 Влияние возмущений на движение КА

На КА действует ряд возмущающих сил: гравитационные возмущения, вызванные несферичностью Земли, аэродинамические возмущения, возмущения, вызванные притяжением Луны, Солнца и других планет, сила светового давления и т.д.

Таким образом, возмущенное движение КА может быть описано уравнением (3.8) с учетом возмущений:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{f}. \quad (8.16)$$

Здесь \vec{f} – возмущающее ускорение.

Это уравнение может быть решено либо численным интегрированием, либо методом оскулирующих элементов.

8.2.1 Метод оскулирующих элементов

Под действием возмущающей силы параметры орбиты КА изменяются. Пусть в какой-то момент времени КА находится в точке S и имеет скорость \vec{v} . Если предположить, что в этот момент КА начал двигаться в рамках задачи двух тел (возмущающие

ускорения перестали на него действовать), то его траектория будет кривой второго порядка, один из фокусов которой будет расположен в точке O . Элементы такой орбиты будут определяться начальными условиями. Если бы возмущений не существовало, траектория полностью определялась бы этими элементами. Такая траектория показана на рис. 8.7 и называется оскулирующей орбитой. Она касается реальной траектории в точке S .

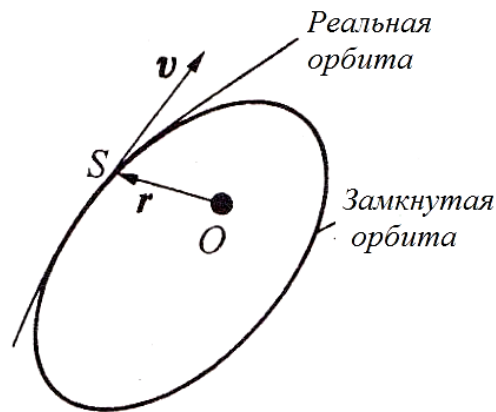


Рис. 8.7. Оскулирующая орбита

Под действием возмущающей силы элементы орбиты меняются. Возмущения могут быть периодическими (не накапливаются от витка к витку) и вековыми.

Для анализа влияния возмущающей силы на орбитальное движение КА введем орбитальную систему координат $OX_1Y_1Z_1$ и подвижную систему координат $a\xi\eta\zeta$ (рис. 8.8). Здесь O – центр Земли; ось OX_1 направлена вдоль линии узлов в сторону восходящего узла; ось OZ_1 направлена вдоль вектора площадей (перпендикулярно плоскости орбиты). $OX_1Y_1Z_1$ – правая прямоугольная система координат. В точке a находится центр масс КА, линии $a\xi$ и oa (радиус орбиты) совпадают; $a\xi$ лежит в плоскости орбиты, перпендикулярно радиус-вектору, и направлена вперед; $a\eta\zeta$ – нормаль к плоскости орбиты. Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы в направлениях осей OX_1 , OY_1 и OZ_1 ;

$\bar{\theta}_0, \bar{n}_0, \bar{r}_0$ – единичные векторы в направлениях $\xi\eta\zeta$, а \bar{l}_0 – единичный вектор, направленный вдоль оси вращения Земли.

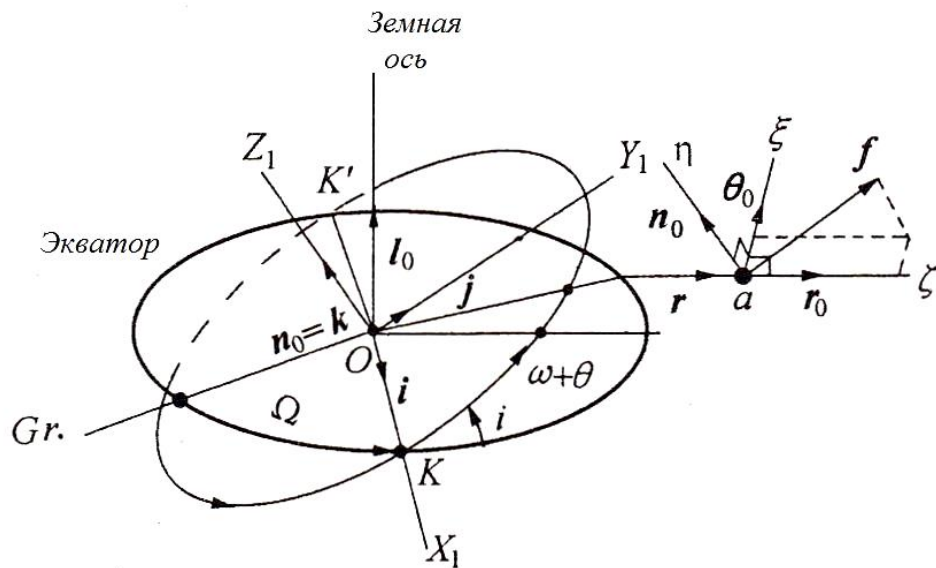


Рис. 8.8. К выводу уравнений в оскулирующих элементах

Возмущающая сила может быть записана через ее компоненты f_r, f_θ, f_n (рис. 8.8):

$$\bar{f} = f_r \bar{r}_0 + f_\theta \bar{\theta}_0 + f_n \bar{n}_0. \quad (8.17)$$

Ниже рассмотрим влияние возмущающего ускорения на элементы орбиты $(a, e, i, p, \Omega, \omega)$.

1. Возмущение большой полуоси a

Запишем выражение для интеграла энергии:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a},$$

отсюда

$$v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Когда на движение КА действует возмущающая сила, все его орбитальные параметры $(a, e, i, p, \Omega, \omega)$ изменяются, поэтому приведенная выше формула может быть переписана в виде:

$$2\dot{r} \cdot \ddot{r} = \mu \left(-\frac{2\dot{r}}{r^2} + \frac{\dot{a}}{a^2} \right).$$

Таким образом, получим:

$$\dot{a} = 2a^2 \left(\frac{\dot{r} \cdot \ddot{r}}{\mu} + \frac{\dot{r}}{r^2} \right).$$

Так как

$$\dot{r} = \dot{\bar{r}} \cdot \frac{\bar{r}}{r},$$

то, подставляя вышеприведенную формулу, получим:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\bar{r}} \cdot \left(\ddot{\bar{r}} + \mu \frac{\bar{r}}{r^3} \right).$$

После подстановки (8.16):

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\bar{r}} \cdot \bar{f}. \quad (8.18)$$

Так как

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{r}_0 + r\dot{\theta} \cdot \bar{\theta}_0,$$

то, используя приведенную выше формулу и формулу (8.17), можно получить:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} = \dot{r} f_r + r \dot{\theta} \cdot f_\theta. \quad (8.19)$$

Из уравнения орбиты:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta.$$

Продифференцируем обе части, считая фокальный параметр постоянным:

$$-\frac{p\dot{r}}{r^2} = -e \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

или

$$\dot{r} = \frac{e}{p} r^2 \dot{\theta} \sin \theta.$$

Так как постоянная интеграла площадей $h = r^2 \dot{\theta} = \sqrt{\mu p}$, то

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta, \quad (8.20)$$

$$r \dot{\theta} = \frac{1}{r} \sqrt{\mu p} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \theta).$$

Подставим \dot{r} и $r \dot{\theta}$ в (8.19) и в (8.18), получим:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [e \sin \theta \cdot f_r + (1 + e \cos \theta) \cdot f_\theta]. \quad (8.21)$$

2. Возмущение фокального параметра p , долготы восходящего узла Ω и наклона i

Из рис. 8.8 видно:

$$\bar{h} = \bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \sqrt{\mu p} \bar{n}_0. \quad (8.22)$$

Из-за возмущающей силы фокальный параметр и вектор нормали к плоскости орбиты не будут постоянными, поэтому можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{p} \bar{n}_0 + \sqrt{\mu p} \dot{\bar{n}}_0 &= \bar{r} \times \ddot{\bar{r}} + \dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}}, \\ \dot{\bar{n}}_0 + \frac{\dot{p}}{2p} \bar{n}_0 &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \bar{r} \times \left(\bar{f} - \frac{\mu}{r^3} \bar{r} \right), \\ \dot{\bar{n}}_0 + \frac{\dot{p}}{2p} \bar{n}_0 &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} (\bar{r} \times \bar{f}). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Используем параметры орбиты и производные для подстановки $\dot{\bar{n}}_0$ и $\bar{r} \times \bar{f}$.

Линия KK' вращается со скоростью $\frac{di}{dt}$ (см. рис. 8.8), поворот на угол Ω происходит вокруг \bar{l}_0 , поэтому угловая скорость вращения плоскости орбиты (и, следовательно, ее единичного вектора \bar{n}_0) равна:

$$\bar{w} = \frac{di}{dt} \bar{i} + \dot{\Omega} \bar{l}_0.$$

Производная от единичного вектора \bar{n}_0 :

$$\dot{\bar{n}}_0 = \bar{w} \times \bar{n}_0.$$

Подставим \bar{w} в приведенную выше формулу:

$$\dot{\bar{n}}_0 = \frac{di}{dt}(\bar{i} \times \bar{n}_0) + \dot{\Omega}(\bar{l}_0 \times \bar{n}_0).$$

Из рис. (8.8) видно:

$$\begin{aligned}\bar{l}_0 \times \bar{n}_0 &= \sin i \cdot \bar{i}, \\ \bar{i} \times \bar{n}_0 &= -\bar{j}.\end{aligned}$$

Поэтому последнее выражение переписется в виде:

$$\dot{\bar{n}}_0 = -\frac{di}{dt}\bar{j} + \dot{\Omega}\sin i \cdot \bar{i}. \quad (8.24)$$

Перепишем произведение $\bar{r} \times \bar{f}$ в виде:

$$\bar{r} \times \bar{f} = \bar{r} \times f_n + \bar{r} \times f_\theta + \bar{r} \times f_r.$$

$r f_n \bar{n}_0 \quad 0$

В системе координат $OX_1Y_1Z_1$:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= r \cos(\omega + \theta)\bar{i} + r \sin(\omega + \theta)\bar{j}, \\ \bar{f}_n &= f_n \bar{n}_0.\end{aligned}$$

Перемножим векторно два последних выражения:

$$\bar{r} \times \bar{f}_n = -r f_n \cos(\omega + \theta)\bar{j} + r f_n \sin(\omega + \theta)\bar{i}.$$

Подставим приведенную выше формулу обратно в выражение:

$$\bar{r} \times \bar{f} = -fr_n \cos(\omega + \theta) \bar{j} + rf_n \sin(\omega + \theta) \bar{i} + rf_\theta \bar{n}_0. \quad (8.25)$$

Подставим выражения (8.24) и (8.25) в (8.23):

$$\begin{aligned} -\frac{di}{dt} \bar{j} + \dot{\Omega} \sin i \cdot \bar{i} + \frac{\dot{p}}{2p} \bar{n}_0 = \\ = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left[-rf_n \cos(\omega + \theta) \bar{j} + rf_n \sin(\omega + \theta) \bar{i} + rf_\theta \bar{n}_0 \right]. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Компоненты в обеих частях приведенного выше уравнения должны оставаться равны, поэтому:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} rf_n \cos(\omega + \theta), \quad (8.27)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} rf_n \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i}, \quad (8.28)$$

$$\frac{dp}{dt} = 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} rf_\theta. \quad (8.29)$$

Из приведенных выше трех уравнений видно: $\frac{di}{dt}$ и $\frac{d\Omega}{dt}$ зависят от f_n , т. к. поворот плоскости орбиты происходит за счет силы, приложенной перпендикулярно к плоскости орбиты.

При $\omega + \theta = 0$ f_n оказывает наибольшее влияние на $\frac{d\Omega}{dt}$; тогда $\omega + \theta = \frac{\pi}{2}$ f_n оказывает наибольшее влияние на $\frac{di}{dt}$.

3. Возмущение эксцентриситета e

Для выражения

$$p = a(1 - e^2).$$

найдем производную:

$$\dot{p} = \dot{a}(1 - e^2) - 2ae\dot{e}.$$

Таким образом:

$$\frac{de}{dt} = \frac{\dot{a}(1 - e^2)}{2ae} - \frac{\dot{p}}{2ae} = \frac{\dot{a}p}{2a^2e} - \frac{\dot{p}}{2ae}.$$

Вместо \dot{p} и \dot{a} подставим (8.29) и (8.21):

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} [e \sin \theta \cdot f_r + (1 + e \cos \theta) f_\theta] - \frac{1}{ae} \sqrt{\frac{p}{\mu}} r f_\theta = \\ &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin \theta \cdot f_r + \left(\frac{1}{e} + \cos \theta - \frac{r}{ae} \right) f_\theta \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} + \cos \theta - \frac{r}{ae} &= \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r}{a} \right) + \cos \theta = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} \right) + \cos \theta = \\ &= \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} + \cos \theta = \frac{r}{p} (e + \cos \theta) + \cos \theta. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_\theta \right\}. \quad (8.30)$$

4. Возмущение аргумента перицентра ω

Угловая скорость КА под действием возмущающей силы (рис. 8.8) может быть записана следующим образом:

$$(\dot{\omega} + \dot{\theta})\bar{n}_0 + \dot{\Omega} \cos i \bar{n}_0.$$

Тогда постоянная интеграла площадей при возмущенном движении:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \sqrt{\mu p} \bar{n}_0 = r^2 (\dot{\omega} + \dot{\theta} + \dot{\Omega} \cos i) \bar{n}_0, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\theta} - \dot{\Omega} \cos i. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Следует отметить, что для невозмущенной орбиты $\dot{\omega} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\theta} = 0$. Тогда из уравнения орбиты $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, получим:

$$\cos \theta = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right).$$

Продифференцируем, получим:

$$-\sin \theta \cdot \dot{\theta} = \frac{1}{e} \left(\frac{r\dot{p} - \dot{r}p}{r^2} \right) - \frac{\dot{e}}{e^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right). \quad (8.32)$$

Значение \dot{r} в приведенном выше уравнении может быть аппроксимировано при использовании невозмущенного уравнения орбиты (8.20) и уравнения (8.29) и (8.30) для \dot{p} , \dot{e} :

$$\begin{aligned} -\dot{\theta} &= \frac{1}{e \sin \theta} \frac{2r^2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} f_\theta - \sqrt{\mu p} e \sin \theta}{r^2} - \frac{1}{e^2 \sin \theta} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \times \\ &\times \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_\theta \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\theta} = \frac{2\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{e \sin \theta} f_{\theta} - \frac{1}{e^2 \sin \theta} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \times \\ \times \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_{\theta} \right\}.$$

Подставим последнее выражение в (8.31), уравнение для $\dot{\Omega}$ в (8.28) в (8.31), получим:

$$\dot{\omega} = \frac{2\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{e \sin \theta} f_{\theta} - \frac{1}{e^2 \sin \theta} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \times \\ \times \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_{\theta} \right\} - \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i} \cos i \cdot f_n.$$

После преобразований получим:

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{\cos \theta}{e} f_r + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \theta}{e} f_{\theta} - \frac{r}{p} \sin(\omega + \theta) \operatorname{ctgi} \cdot f_n \right]. \quad (8.33)$$

Выводы:

- \dot{a}, \dot{e} описывают изменение формы и размера орбиты (в плоскости орбиты) и не зависят от f_n ;
- \dot{p} зависит от f_{θ} . Это связано с тем, что ни f_r , ни f_n не изменяют постоянной энергии h , где $h = \sqrt{\mu p}$;
- $\dot{\Omega}, \frac{di}{dt}$ описывают изменение ориентации плоскости орбиты и зависят только от f_n ;
- $\dot{\omega}$ зависит от всех трех компонент.

8.2.2 Переход к переменной $u = \omega + \theta$ в уравнениях в оскулирующих элементах

Удобнее использовать в качестве переменной в системе уравнений в оскулирующих элементах аргумент широты $u = \omega + \theta$.

$$\frac{d}{du} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du},$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\theta}{dt} = \dot{\omega} + \dot{\theta}.$$

Из (8.31):

$$\dot{\omega} + \dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\Omega} \cos i.$$

Тогда

$$\frac{d}{du} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\Omega} \cos i} \frac{d}{dt}.$$

Подставим вместо $\dot{\Omega}$ выражение (8.28):

$$\frac{d}{du} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \phi \frac{d}{dt}. \quad (8.34)$$

Здесь

$$\phi = \left(1 - \frac{r^3}{\mu p} \sin u \cdot \operatorname{ctgi} \cdot f_n \right)^{-1}.$$

Используя (8.34), можно перейти к другой переменной в выражениях (8.21), (8.27) – (8.30) и (8.33).

Результаты приведены в разделе 8.2.4 б.

8.2.3 Компоненты возмущающего ускорения:

касательное f_τ и нормальное f_σ

Возмущающее ускорение можно разложить на составляющие в плоскости орбиты: f_τ – касательное ускорение, направленное по касательной в данной точке (вдоль вектора скорости в направлении движения КА), и нормальное f_σ , перпендикулярное касательной компоненте.

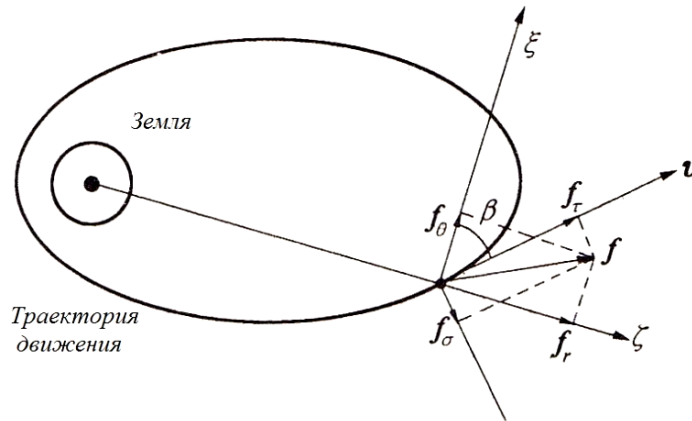


Рис. 8.9. Компоненты возмущающего ускорения

$$\begin{aligned} f_\theta &= f_\tau \cos \beta - f_\sigma \sin \beta, \\ f_r &= f_\tau \sin \beta + f_\sigma \cos \beta. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{r\dot{\theta}}{v} = \frac{1}{rv} r^2 \dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{rv}, \\ \sin \beta &= \frac{\dot{r}}{v}. \end{aligned}$$

Подставим (8.20), получим:

$$\sin \beta = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta .$$

Теперь подставим выражения для $\sin \beta$ и $\cos \beta$ в (8.35), получим:

$$\begin{aligned} f_{\theta} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{vr} f_{\tau} - \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta \cdot f_{\sigma}, \\ f_r &= \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta \cdot f_{\tau} + \frac{\sqrt{\mu p}}{vr} f_{\sigma}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Формулы (8.36), (8.21), (8.29), (8.30) и (8.33) приведены ниже.

8.2.4 Сводка уравнений в оскулирующих элементах

а. Возмущения элементов орбиты от компонент ускорения f_r, f_{θ}, f_n в зависимости от времени:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [e \sin \theta \cdot f_r + (1 + e \cos \theta) \cdot f_{\theta}], \quad (8.21)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r f_n \cos(\omega + \theta), \quad (8.27)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r f_n \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i}, \quad (8.28)$$

$$\frac{dp}{dt} = 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} r f_{\theta}, \quad (8.29)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_{\theta} \right\}, \quad (8.30)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{\cos \theta}{e} f_r + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \theta}{e} f_{\theta} - \frac{r}{p} \sin(\omega + \theta) \operatorname{ctgi} \cdot f_n \right]. \quad (8.33)$$

б. Возмущения элементов орбиты от компонент ускорения f_r, f_θ, f_n в зависимости от аргумента широты $u = \omega + \theta$:

$$\frac{da}{du} = \frac{2r^2 a^2 \phi}{\mu p} \left[e \sin(u - \omega) \cdot f_r + (1 + e \cos(u - \omega)) \cdot f_\theta \right], \quad (8.37)$$

$$\frac{di}{du} = \frac{r^3 \phi}{\mu p} \cos u f_n, \quad (8.38)$$

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3 \phi \sin u}{\mu p \sin i} f_n, \quad (8.39)$$

$$\frac{dp}{du} = \frac{2r^3 \phi}{\mu} f_\theta, \quad (8.40)$$

$$\frac{de}{du} = \frac{r^2 \phi}{\mu} \left\{ \sin(u - \omega) \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos(u - \omega) + \frac{re}{p} \right] f_\theta \right\}, \quad (8.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{du} = \frac{r^2 \phi}{\mu} \left[-\frac{\cos(u - \omega)}{e} f_r + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin(u - \omega)}{e} f_\theta - \right. \\ \left. - \frac{r}{p} \sin u \cdot \operatorname{ctgi} \cdot f_n \right]. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Здесь

$$\phi = \left(1 - \frac{r^3}{\mu p} \sin u \cdot \operatorname{ctgi} \cdot f_n \right)^{-1}. \quad (8.43)$$

в. Возмущения элементов орбиты от компонент ускорения f_τ, f_σ, f_η в зависимости от времени:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2 v}{\mu} f_\tau, \quad (8.44)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2p}{v} f_\tau - \frac{2re}{v} \sin \theta \cdot f_\sigma, \quad (8.45)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{v} \left[2(e + \cos \theta) f_\tau + \frac{r}{a} \sin \theta \cdot f_\sigma \right], \quad (8.46)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{ve} \sin \theta \cdot f_\tau - \frac{a(1+e^2) - r}{ave^2} f_\sigma - \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin(\omega + \theta) \operatorname{ctgi} \cdot f_\eta, \quad (8.47)$$

$$\frac{di}{dt} \text{ (как (8.27))},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} \text{ (как (8.28))}.$$

8.3 Возмущенное движение КА

Все возмущения, действующие на КА, могут либо накапливаться (вековые), либо не накапливаться (периодические). Это необходимо учитывать при баллистических расчетах. Далее рассмотрим возмущенное движение КА, описываемое уравнением в разделе 8.2.

8.3.1 Возмущения, вызванные нецентральностью гравитационного поля Земли

Если расстояние от центра Земли до центра масс космического аппарата равно r , то модель гравитационного поля можно записать в виде:

$$U = -\frac{\mu}{R} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_\oplus}{R} \right)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) \right], \quad (8.48)$$

$$J_2 = -1.08264 \cdot 10^{-3}.$$

Рассмотрим возмущения орбит, вызванные второй зональной гармоникой. Обозначим

$$U_p = -J_2 \frac{\mu R_\oplus^2}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi - 1).$$

Запишем выражение для географической широты КА с помощью (4.14а):

$$\sin \varphi = \sin i \sin(\omega + \theta) = \sin i \sin u .$$

Тогда

$$U_p = -J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{2r^3} (3 \sin^2 i \cdot \sin^2 u - 1) . \quad (8.49)$$

Компоненты возмущающего ускорения от нецентральности гравитационного поля Земли:

$$f_r = -\frac{\partial U_p}{\partial r} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4} (3 \sin^2 i \cdot \sin^2 u - 1) , \quad (8.50)$$

$$f_{\theta} = -\frac{\partial U_p}{r \partial \theta} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4} \sin^2 i \cdot \sin 2u , \quad (8.51)$$

$$f_{\eta} = -\frac{\partial U_p}{\partial \eta} = -\frac{\partial U_p}{r \sin u \partial i} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4} \sin 2i \cdot \sin u . \quad (8.52)$$

А. КА на геостационарной орбите с учетом нецентральности гравитационного поля

Движение КА происходит в плоскости экватора $i = 0$, следовательно, на КА действует только одна компонента возмущающего ускорения f_r (8.50):

$$G = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{r^2} \right) .$$

Обозначим через ω_{sid} угловую скорость вращения Земли (считаем, что сутки равны 23 ч 56 мин 4 с), тогда

$$\left| \frac{\mu}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{r^2} \right) \right| = \omega_{sid}^2 r .$$

Радиус геостационарной орбиты с учетом сжатия Земли у полюсов:

$$r_{GSO} = 42164.78 \text{ км} .$$

Без учета сжатия Земли у полюсов:

$$r_{GSO} = 42164.26 \text{ км} .$$

Б. *Возмущение долготы восходящего узла Ω от нецентральности гравитационного поля*

В (8.39) подставим вместо f_{η} выражение (8.52), получим:

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3 \phi \sin u}{\mu p \sin i} \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4} \sin 2i \cdot \sin u = 3 J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{rp} \phi \sin^2 u \cos i .$$

Здесь

$$\begin{aligned} \phi &= \left(1 - \frac{r^3}{\mu p} \sin u \cdot \text{ctgi} \cdot \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4} \sin 2i \cdot \sin u \right)^{-1} = \\ &= \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{rp} \sin^2 u \cdot 2 \cos^2 i \right)^{-1} \approx 1 . \end{aligned}$$

Подставим $r = p/(1 + e \cos \theta)$ в выражение для $\frac{d\Omega}{du}$, получим:

$$\frac{d\Omega}{du} = 3 J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{rp} \right)^2 \sin^2 u \cdot \cos i [1 + e \cos(u - \omega)] . \quad (8.53)$$

Проинтегрируем последнее выражение за один оборот КА:

$$(\Delta\Omega)_{2\pi} = 3J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{rp} \right)^2 \cos i \int_0^{2\pi} \sin^2 u \cdot [1 + e \cos(u - \omega)] du .$$

Здесь p, i, e, ω постоянные.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 u du &= -\frac{1}{4} \sin 2u \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} u \Big|_0^{2\pi} = \pi . \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 u \cdot \cos(u - \omega) du &= \frac{e}{3} \sin^3 u \Big|_0^{2\pi} \cos \omega + \\ &+ \left(\frac{e}{3} \cos^3 u \Big|_0^{2\pi} - e \cos u \Big|_0^{2\pi} \right) \sin \omega = 0, \\ (\Delta\Omega)_{2\pi} &= 3\pi J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 \cos i = 3\pi J_2 \frac{(R_{\oplus}/a)^2}{(1 - e^2)^2} \cos i . \end{aligned}$$

Подставим значение J_2 , получим:

$$(\Delta\Omega)_{2\pi} = -0.5846 \frac{(R_{\oplus}/a)^2}{(1 - e^2)^2} \cos i . \quad (8.54)$$

Определим, сколько оборотов сделает КА за сутки:

$$n = \frac{24 \cdot 3600}{2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}} = \frac{8.64 \cdot 10^4}{2\pi \sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{\mu}}} \sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{a^3}} .$$

Тогда за сутки:

$$(\Delta\Omega)_{day} = -\frac{8.64 \cdot 10^4}{2\pi \sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{\mu}}} \sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{a^3}} \cdot 0.584 \frac{(R_{\oplus}/a)^2}{(1-e^2)^2} \cos i,$$

$$(\Delta\Omega)_{day} = -9.964^\circ \frac{(R_{\oplus}/a)^{7/2}}{(1-e^2)^2} \cos i. \quad (8.55)$$

При $i < 90^\circ$ восходящий узел движется на запад, а при $i > 90^\circ$ - на восток. Это значит, что изменяется положение линии апсид, траектория вращается в своей плоскости вокруг гравитационного центра. Как видно, вековые уходы аргумента перицентра зависят только от наклона, большой полуоси и эксцентриситета орбиты. Поворот плоскости орбиты вокруг оси Земли называется прецессией орбиты (рис. 8.10).

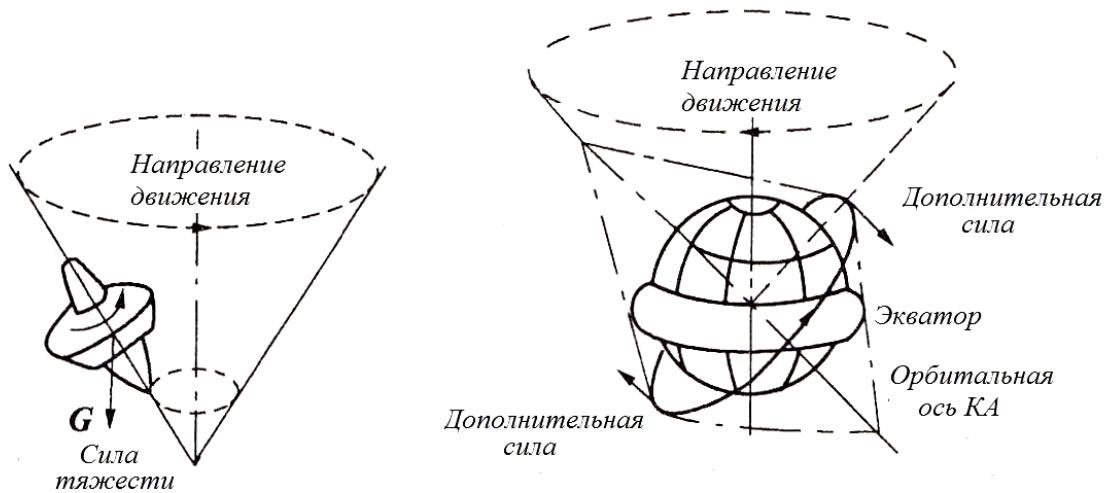


Рис. 8.10. Прецессия орбиты

Пример 1. Прецессия солнечно-синхронной орбиты

Орбита, плоскость которой имеет постоянную ориентацию относительно Солнца, называется солнечно-синхронной.

Для такой орбиты трасса спутника является стабильной и солнечное время прохождения спутника над точками трассы неизменно.

Земля за сутки поворачивается вокруг Солнца на угол (рис. 8.11):

$$\frac{360^\circ}{365.25 \text{сут}} = -0.9856^\circ / \text{сут} \text{ (на восток)}.$$

Следовательно, для того чтобы орбита имела постоянную ориентацию относительно Солнца, должно выполняться условие:

$$(\Delta\Omega)_{\text{day}} = -9.964^\circ \frac{(R_\oplus/a)^{7/2}}{(1-e^2)^2} \cos i = 0.9856^\circ.$$

Отсюда

$$i = \arccos \left[-0.09896 \left(\frac{a}{R_\oplus} \right)^{7/2} (1-e^2)^2 \right].$$

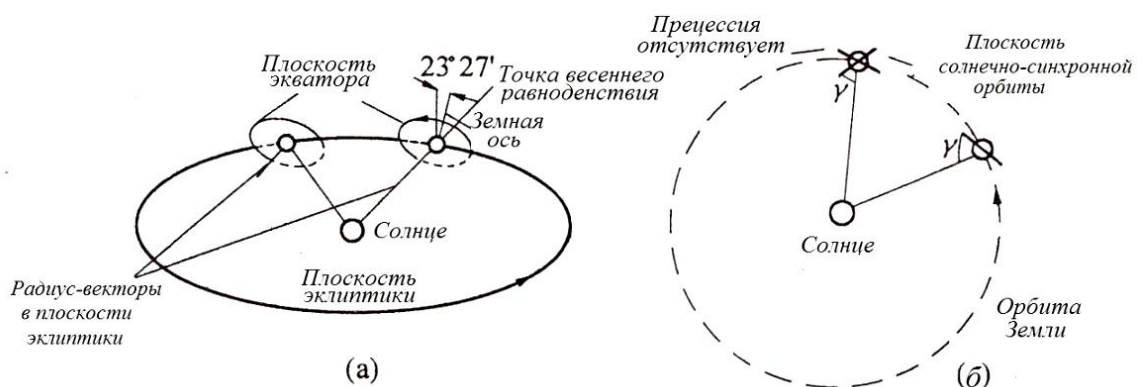


Рис. 8.11. Солнечно-синхронные орбиты

Видно, что максимальный вековой уход долготы восходящего узла соответствует орбитам, близким к экваториальным

($i \approx 0, i \approx \pi$). Для полярной орбиты долгота восходящего узла не имеет вековых возмущений. На рис. 8.12 показан график необходимого наклона орбиты КА, чтобы она была солнечно-синхронной.

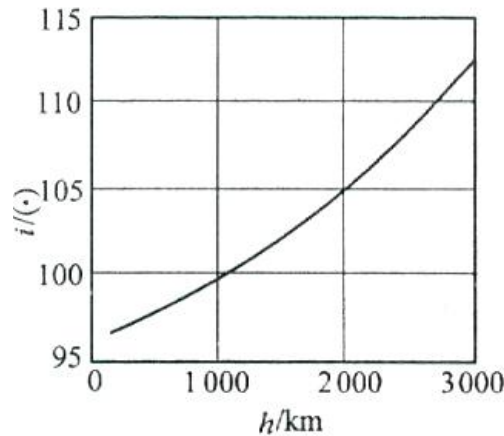


Рис. 8.12. Зависимость наклона солнечно-синхронной орбиты от высоты

В. Возмущения аргумента перигея ω от сжатия Земли

Подставим выражения в (8.42) значения f_r, f_θ, f_n из (8.50) – (8.52) и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π , получим:

$$(\Delta\omega)_{2\pi} = -\frac{3}{2}\pi J_2 \frac{(R_\oplus/a)^2}{(1-e^2)^2} (5\cos^2 i - 1).$$

Подставим J_2 и рассчитаем вековые уходы аргумента перигея за один виток КА и за сутки:

$$(\Delta\omega)_{2\pi} = 0.2923^\circ \frac{(R_\oplus/a)^2}{(1-e^2)^2} (5\cos^2 i - 1), \quad (8.56)$$

$$(\Delta\omega)_{day} = 5.00^\circ \frac{(R_\oplus/a)^{7/2}}{(1-e^2)^2} (5\cos^2 i - 1). \quad (8.57)$$

На экваториальной орбите при $i=0$ наблюдается максимальная скорость векового ухода аргумента перигея, которая составляет порядка $20^\circ / \text{сут}$.

$$5 \cos^2 i - 1 = 0 \rightarrow i = \arccos \sqrt{\frac{1}{5}} = 63.43^\circ .$$

При таком наклонении $(\Delta\omega)_{\text{day}} = 0$, т.е. вековой уход аргумента перигея, связанный со сжатием Земли, отсутствует. Этим обстоятельством активно пользуются проектанты космических систем. В частности, орбита спутников серии «Молния» имеет наклонение порядка 63° , что позволяет этим спутникам иметь апоцентр орбиты постоянно в Северном полушарии.

Знак приращения $\Delta\omega$ зависит от i . Действительно, если $i < 63.43^\circ$, то линия апсид вращается в ту же сторону, в которую вращается КА.

Если $i > 63.43^\circ$, то линия апсид вращается в сторону, противоположную вращению КА.

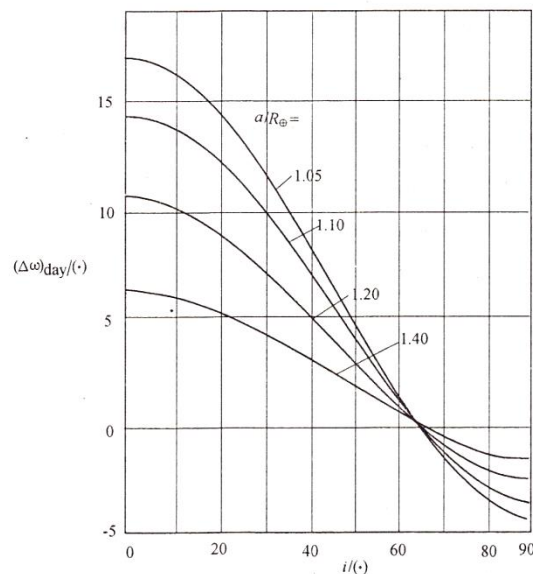


Рис. 8.13. Зависимость векового ухода аргумента перигея $(\Delta\omega)_{\text{day}}$ от наклона i

На рис. 8.13 показаны зависимости векового ухода аргумента перицентра $(\Delta\omega)_{day}$ от наклона при различных значениях большой полуоси орбиты.

Г. Возмущения других элементов орбиты от нецентрально-сти гравитационного поля

Остальные элементы орбиты могут иметь только периодические уходы (a, e) .

Возмущение времени прохождения через перицентр орбиты $\Delta\tau_p$ составляет порядка нескольких секунд: $\tau_p = \tau + \Delta\tau_p$.

8.3.2 Возмущения орбиты КА, вызываемые действием атмосферы. Определение времени существования КА на орбите

А. Аэродинамические возмущения

На низких околоземных орбитах на КА действуют значительные аэродинамические возмущающие силы. При расчетах обычно принимают следующие допущения:

- атмосфера сферически симметричная;
- плотность атмосферы зависит только от высоты:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(1 - \frac{h - h_0}{H}\right); \quad (8.58)$$

- атмосфера не вращается;
- площадь поперечного сечения КА постоянна.

На рис. 8.14 показаны компоненты аэродинамической возмущающей силы f_τ, f_σ, f_n :

f_τ – возмущающее ускорение от силы лобового сопротивления;

f_σ – возмущающее ускорение от подъемной силы;

f_n – возмущающее ускорение от боковой силы.

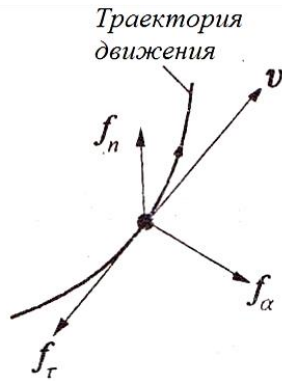


Рис. 8.14. Компоненты аэродинамической возмущающей силы

Из трех компонент наибольшее влияние оказывает f_τ :

$$f_\tau = -\frac{1}{m} C_D A \frac{\rho}{2} v^2 . \quad (8.59)$$

Здесь m – масса КА;

A – площадь миделевого сечения КА (площадь поперечного сечения КА, перпендикулярного вектору скорости);

C_D – коэффициент силы лобового сопротивления, который зависит от величины

$$K_n = \frac{\text{среднее расстояние свободного пробега молекул}}{\text{характерный размер КА}} \gg 1 ,$$

В большинстве случаев $C_D = 2.2$.

Б. *Аэродинамические возмущения при движении КА по круговой орбите*

На круговой орбите $a = r$, $da = dr$.

Используя выражения (8.44) и (8.59):

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2r^2 v C_D A \rho}{\mu m 2} v^2 . \quad (8.60)$$

Обозначим баллистический параметр:

$$B = \frac{m}{C_D A},$$

$$v^2 = \frac{\mu}{r}, \quad v dt = r d\theta.$$

Подставим все в (8.60):

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2r^2}{\mu} \frac{1}{B} \frac{\rho}{2} \frac{\mu}{r} r d\theta = -\frac{r^2 \rho}{B} d\theta.$$

Проинтегрировав, определим изменение радиуса орбиты за один виток ($\rho = const$):

$$(\Delta r)_{2\pi} = -\frac{2\pi r^2 \rho}{B + 2\pi r \rho}. \quad (8.61)$$

Перейдем к высоте орбиты $h = r - R_{\oplus}$, $\Delta r = \Delta h$ и найдем изменение высоты:

$$(\Delta h)_{2\pi} = -\frac{2\pi (R_{\oplus} + h)^2}{B + 2\pi r \rho} \rho(h). \quad (8.62)$$

Видно, что изменение высоты связано с плотностью атмосферы $\rho(h)$. Рассчитаем $\rho(h)$ в соответствии с методикой расчета плотности, основанной на использовании вышеприведенной формулы и Приложения 1. Результаты расчета высоты спутника показаны на рис. 8.15. Также на рисунке показана зависимость между $(\Delta r)_{2\pi}$ и B от высоты h .

Пример 2. Рассчитайте месячный и годовой расход топлива для космической станции на различных высотах круговых орбит.

Параметры космической станции следующие: общая масса $m = 10^6$ кг, из-за больших солнечных батарей значение B невелико и составляет 100 кг/м^2 , а топливо обладает наилучшими характеристиками $w = 3000 \text{ м/с}$.

Решение. Пусть космическая станция находится на орбите радиусом r_2 (рис. 8.16), и этот радиус постепенно уменьшается до радиуса круговой орбиты r_1 из-за сопротивления атмосферы. Наша задача – поднять орбиту с радиуса r_1 до орбиты радиуса r_2 . Если коррекция орбиты производится с использованием перехода Гомана между двумя круговыми орбитами, то требуемое приращение скорости каждый раз будет составлять:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1+r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_1+r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}},$$

$$r_1 = r, r_2 = r + \Delta r,$$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{\mu}{r} \cdot \frac{r + \Delta r}{2r + \Delta r}} - \sqrt{\frac{\mu}{r}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r + \Delta r} \cdot \frac{r}{2r + \Delta r}} + \sqrt{\frac{\mu}{r + \Delta r}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\mu}{r} \cdot \frac{1 + \Delta r/r}{2 + \Delta r/r}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r} \cdot \frac{1}{(1 + \Delta r/r)(2 + \Delta r/r)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r}} + \sqrt{\frac{\mu}{r} \cdot \frac{1}{1 + \Delta r/r}}.$$

Используем формулу разложения в ряд:

$$(1+x)^{\pm \frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x \mp \dots,$$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\Delta r}{r}\right) \right] - \sqrt{\frac{\mu}{r}} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\Delta r}{r}\right) \right] -$$

$$- \sqrt{\frac{\mu}{r}} + \sqrt{\frac{\mu}{r}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r}\right) \approx \sqrt{\frac{\mu}{r}} \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 \right],$$

$$\Delta v \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} (\Delta r). \quad (8.63)$$

Вычислим изменение скорости КА и период за один виток:

$$(\Delta v)_{2\pi} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} (\Delta h)_{2\pi},$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}.$$

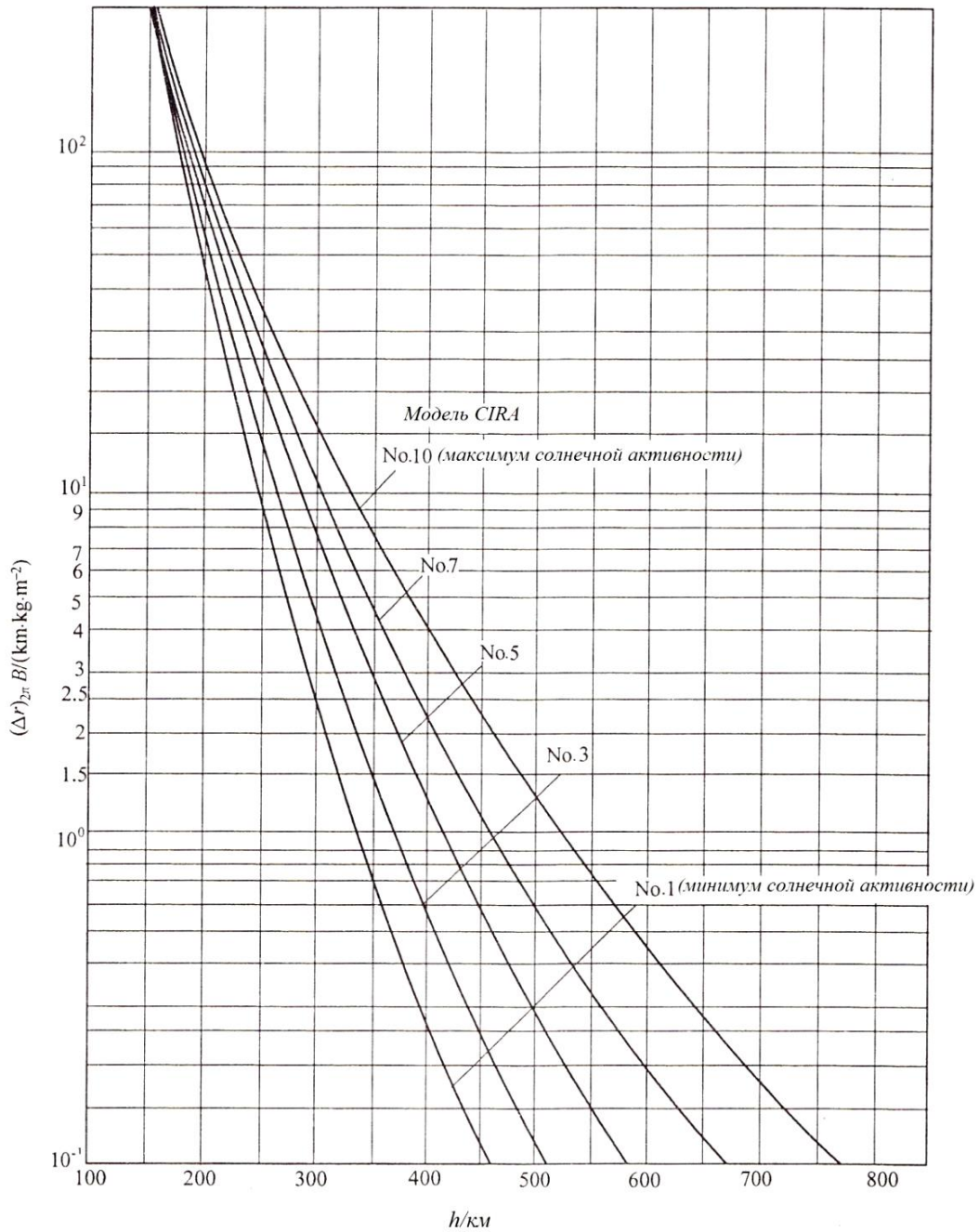


Рис. 8.15. Зависимость $(\Delta v)_{2\pi} B$ от высоты орбиты

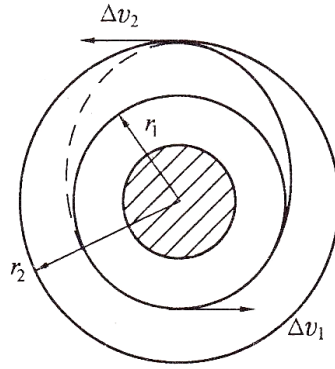


Рис. 8.16. Поддержание высоты космической станции

Тогда изменение скорости КА за месяц составит:

$$\begin{aligned}
 (\Delta v)_{month} &= \frac{30 \cdot 24 \cdot 3600}{\tau} (\Delta v)_{2\pi} = \frac{2.592 \cdot 10^6}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} (\Delta h)_{2\pi} = \\
 &= \frac{8.22 \cdot 10^{10}}{r^3} (\Delta h)_{2\pi}.
 \end{aligned}
 \tag{8.64}$$

Здесь радиус r измеряется в км, а $(\Delta h)_{2\pi}$ в м, а результат получается в м/с.

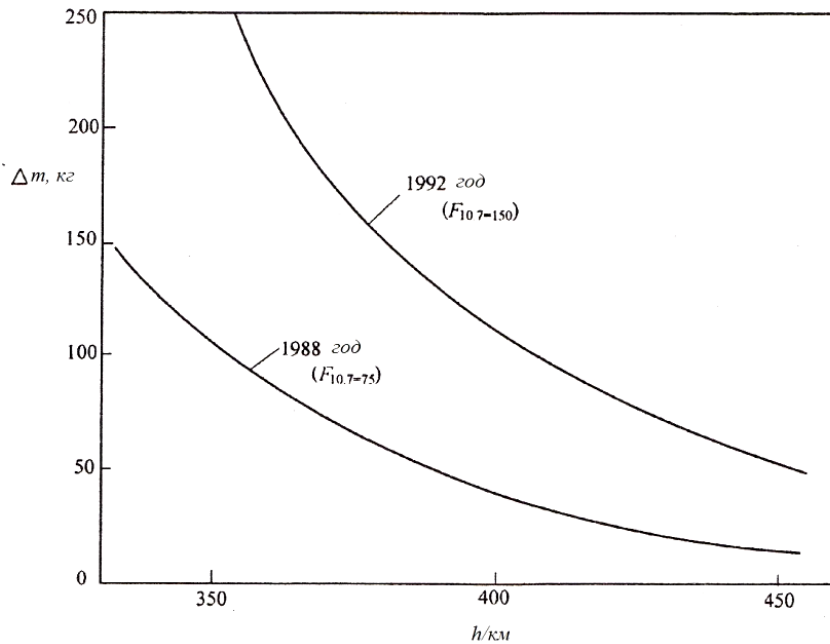


Рис. 8.17. Зависимость Δm от h для высокого и низкого уровней солнечной активности

Если рассчитать плотность атмосферы в соответствии с Приложением 1, то можно определить $(\Delta h)_{2\pi}$ по формуле (8.62), а $(\Delta h)_{month}$ по формуле (8.64), после чего применяется формула (П2.4) из Приложения 2 для расчета месячного расхода топлива $(\Delta m)_{month}$, необходимого для поддержания высоты орбиты. Результаты, полученные для 1988 и 1992 годов, приведены ниже в таблице, а кривая показана на рис. 8.17.

Таблица 8.1. Параметры движения КА на низких орбитах

Год	$F_{10.7}$	Модель CIRA	$h, км$	$(\Delta h)_{2\pi}, м$	$(\Delta v)_{month}, м/с$	$\Delta m, кг$
1988 Минимум солнечной активности	74	2	300	34	9.41	313
			350	11.5	3.11	103
			400	4.5	1.19	39.6
			450	1.8	0.466	15.5
			500	0.75	0.189	6.3
1992 Максимум солнечной активности	149	5	300	72	19.9	661
			350	29	7.85	261
			400	12.5	3.31	110
			450	6.0	1.55	51.6
			500	3.0	0.76	25.3

В. Аэродинамическое сопротивление и время существования спутника на орбите

Подставим выражение (8.58) в (8.61), получим:

$$(\Delta r)_{2\pi} = -\frac{2\pi r_0^2}{B} \rho_0 \exp\left(-\frac{r-r_0}{H}\right).$$

Это высота, на которую спутник снижается за один оборот на круговой орбите. Время одного оборота составляет $\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{\mu}}$,

где r_0 – радиус исходной орбиты. Если $\frac{\tau_0}{(\Delta r)_{2\pi}} = \frac{dt}{dr}$, то

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{\tau_0 B}{2\pi r_0^2 \rho_0} \exp\left(-\frac{r_0 - r}{H}\right). \quad (8.65)$$

Проинтегрировав вышеприведенную формулу, можно найти время, за которое происходит изменение радиуса от начального r_0 до конечного r_L , т. е. время существования спутника на орбите. Обычно берут $r_L = 133.8 + R_{\oplus}$, период обращения по круговой орбите радиусом r_L равен $\tau = 87$ мин. Считается, что по достижении этой высоты спутник упадет и сгорит в плотных слоях атмосферы. Время существования спутника на орбите в соответствии с приведенными выше формулами будет определяться:

$$T_L = t_L - t_0 = -\frac{\tau_0 B H}{2\pi r_0^2 \rho_0} \exp\left(-\frac{r_0 - r}{H}\right) \Bigg|_{r_0}^{r_L}$$

или

$$T_L = \frac{\tau_0 B H}{2\pi r_0^2 \rho_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{r_0 - r_L}{H}\right) \right]. \quad (8.66)$$

Это приближительная оценка с погрешностью около 10 – 15%. В приведенной выше формуле H должна принимать среднее значение, соответствующее r_0 и r_L , которое составляет порядка 50 км (см. пункт 1.3 в Приложении 1). Если это значение приближительное, то

$$r_0 - r_L > 4H,$$

тогда

$$1 - \exp\left(-\frac{r_0 - r_L}{H}\right) \approx 1 \quad (\text{погрешность} < 2\%)$$

$$T_L = \frac{\tau_0 B H}{2\pi r_0^2 \rho_0} = \frac{B H}{\sqrt{\mu r_0 \rho_0}}. \quad (8.67)$$

Из приведенной выше формулы:

$$\frac{T_L}{B} = \frac{H}{\sqrt{\mu r_0 \rho_0}}.$$

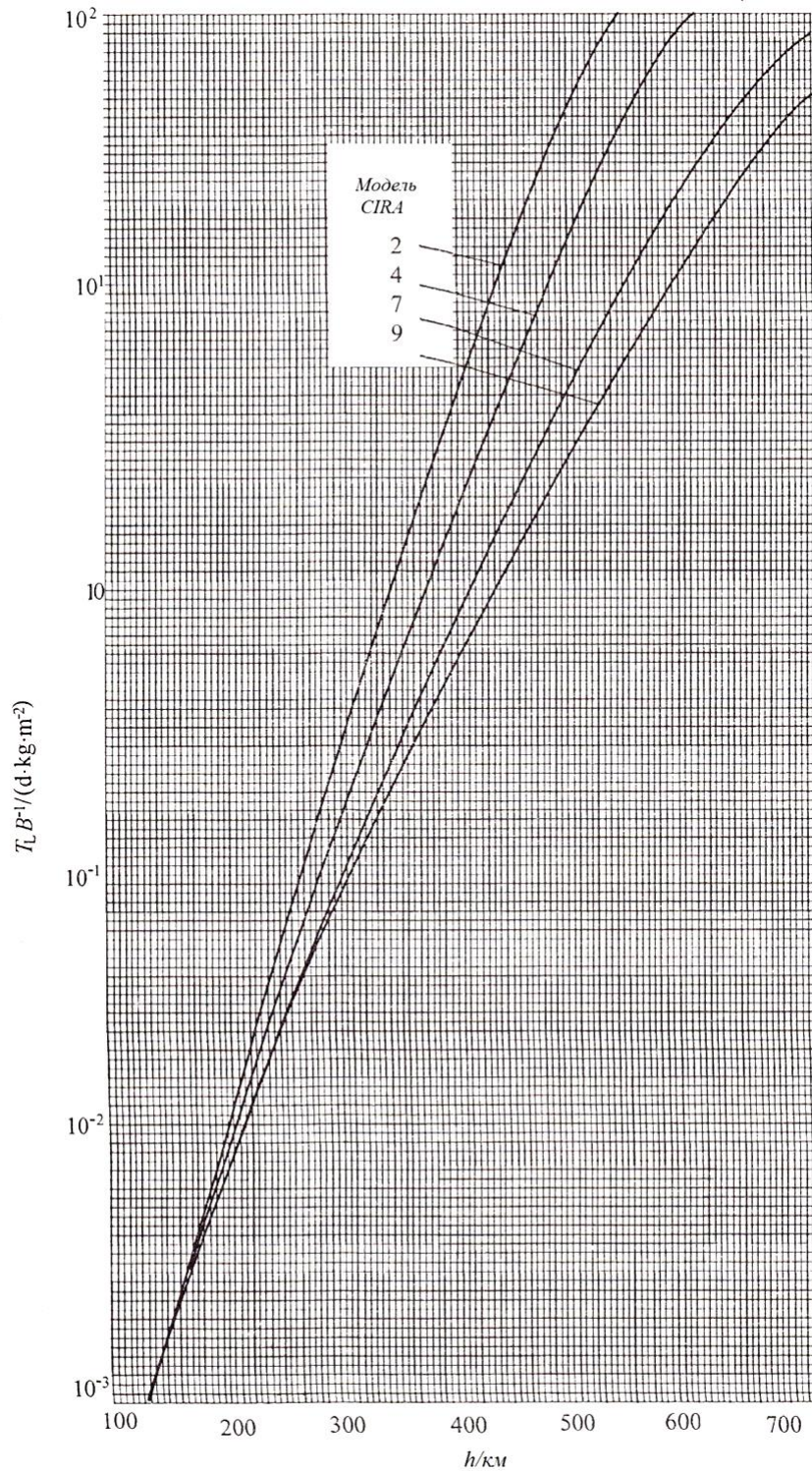


Рис. 8.18. Время существования спутника на круговой орбите

В зависимости от высоты спутника h , из рис. П1.2 и рис. П1.3 Приложения 1 получены ρ_0 и h . Соответственно время существования спутника, рассчитанное по выше приведенной формуле, показано на рис. 8.18.

Г. Падение высоты орбиты со временем

Проинтегрируем выражение (8.65) в пределах от начального радиуса орбиты r_0 до произвольного r при $t_0 = 0$:

$$r = r_0 + H \ln \left[1 - \frac{2\pi r_0^2 \rho_0 t}{\tau_0 B H} \right].$$

Тогда

$$h = h_0 + H \ln \left[1 - \frac{\sqrt{\mu r_0} \rho_0 t}{B H} \right]. \quad (8.68)$$

Взаимосвязь между высотой и временем движения спутника, определяемого выражением (8.68), показана на рис. 8.19. После снижения спутника до определенной высоты (например, h), далее он быстро падает до высоты $h_L \approx 130$ км.

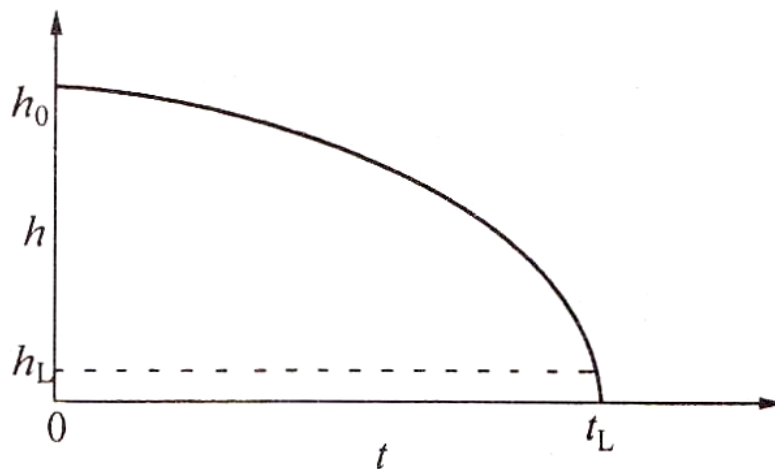


Рис. 8.19. Падение высоты спутника

Д. Влияние сопротивления атмосферы на движение КА по эллиптической орбите

Наибольшее влияние сопротивления атмосферы спутник испытывает в перигее орбиты, и оно зависит от широты и местного солнечного времени. Точный расчет можно выполнить только с помощью компьютера, ниже приведена качественная оценка.

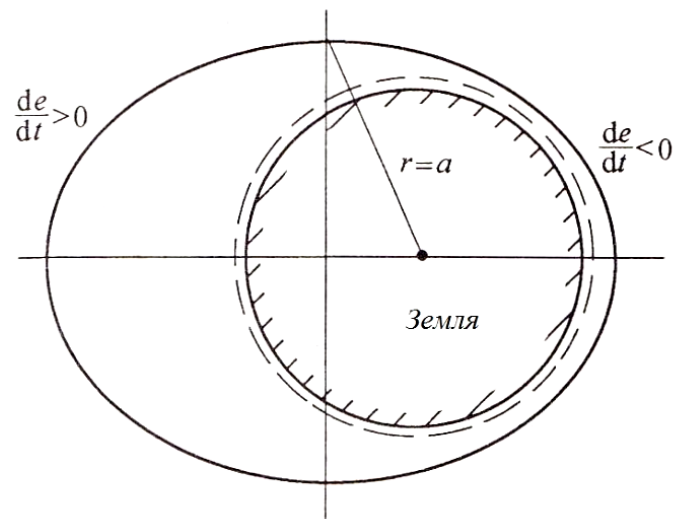


Рис. 8.20. Движение КА по эллиптической орбите под действием сил аэродинамического сопротивления

Подставляя баллистический параметр $B = \frac{m}{C_D A}$ в уравнение (8.59), получим возмущающее ускорения от сопротивления атмосферы:

$$f_r = -\frac{1}{B} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Подставим полученное выражение в (8.44):

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a^2 v^3}{\mu B} \rho(h) \quad (8.69)$$

и в (8.46):

$$\frac{de}{dt} = -\frac{v}{B}(e + \cos\theta)\rho(h). \quad (8.70)$$

Видно, что $\frac{da}{dt} < 0$ (всегда меньше нуля), $\frac{de}{dt}$ меняет знак с плюса на минус при $\cos\theta = -e$, где $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} = \frac{p}{1 - e^2} = a$ (как видно из рис. 8.20). В перигее $\frac{de}{dt} < 0$, в апогее $\frac{de}{dt} > 0$.

Так как влияние аэродинамического сопротивления в перигее выше, чем в апогее, то производная $\frac{de}{dt}$ со временем становится отрицательной, а эксцентриситет e уменьшается, следовательно, орбита скругляется. Если оценивать влияние сопротивления атмосферы в перигее, то можно считать, что в апогее сопротивление отсутствует. Когда КА проходит через перигей орбиты, он теряет энергию, что приводит к уменьшению апогея. Но в апогее из-за отсутствия сопротивления потерь энергии не будет. КА далее возвращается в перигей. Поэтому можно сделать вывод о том, что уменьшение высоты апогея происходит быстрее, чем уменьшение перигея. На рис. 8.21 показаны результаты расчета для спутника, откуда видно, что высота апогея и эксцентриситет быстро уменьшаются, а перигей изменяется при этом медленно.

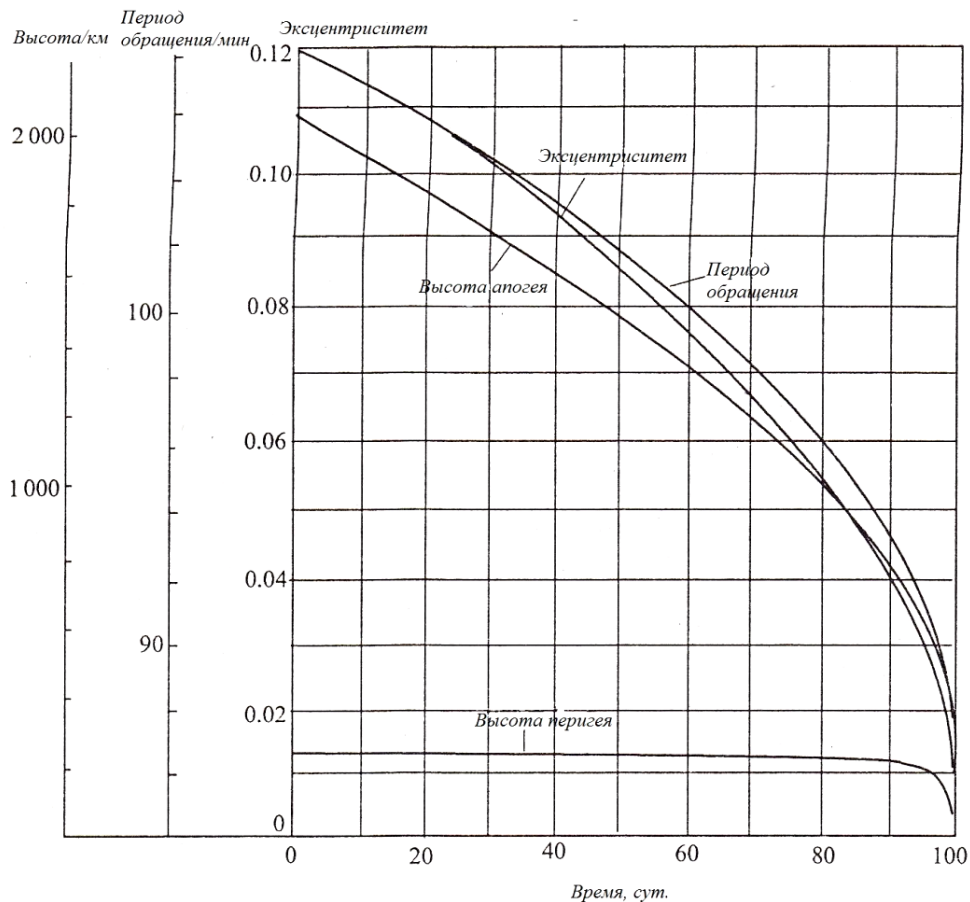


Рис. 8.21. Изменение параметров движения КА на эллиптической орбите под действием сил аэродинамического сопротивления

Пример 3. Высота апогея и высота перигея европейского спутника HEOS (спутник на высокой околоземной орбите) составляют $h_a = 200000 \text{ км}$ и $h_p = 400 \text{ км}$; масса КА $m = 104 \text{ кг}$, площадь поперечного сечения $A = 1.2 \text{ м}^2$. Рассчитайте уменьшение высоты апогея за один оборот $(\Delta a)_{2\pi}$.

Решение.

Рассчитаем: $e = 0.936$, $a = 106570 \text{ км}$, $B = 38.8 \text{ кг} / \text{м}^2$.

Из пунктов П1.2 и П1.3 Приложения 1 найдем $\rho_p = 2 \times 10^{-12} \text{ кг} / \text{м}^3$, $H = 70 \text{ км}$.

По формуле

$$(\Delta a)_{2\pi} = -\frac{\rho_p a^2}{B} \sqrt{\frac{2\pi H (1+e)^3}{ae(1-e)}}$$

ВЫЧИСЛИМ

$$(\Delta a)_{2\pi} = -415 \text{ м.}$$

8.3.3 Возмущенное движение КА на геостационарной орбите (ГСО)

Основные возмущающие силы, действующие на КА на ГСО:

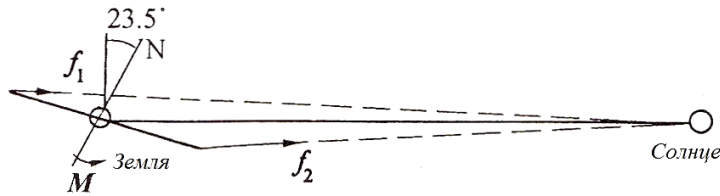
- (1) притяжение со стороны Солнца и Луны;
- (2) сжатие Земли у полюсов.

А. Возмущения в направлении север-юг

Это притяжение со стороны Солнца и Луны. На рис. 8.22 показано влияние притяжения Солнца на движение КА. Угол между плоскостью экватора и плоскостью эклиптики Земли равен $23^\circ 27'$. Зимой и летом значения величин f_{n1} и f_{n2} разные. Под действием возмущающего момента \bar{M} , вызванного гравитацией Солнца, происходит изменение орбиты. Орбита прецессирует перпендикулярно векторам \bar{h} и \bar{M} . Угловая скорость вращения оси равна: $\bar{M} = \bar{\omega} \times \bar{h}$. Вектор момента импульса \bar{h} спутника на геостационарной орбите совпадает с осью Земли, поэтому прецессия плоскости орбиты формирует движение спутника к югу от экватора и к северу от экватора. Величина отклонения увеличивается. Это движение в направлении север-юг. От этого возмущения наклонение орбиты i становится не нулевым (рис. 8.23).



(а) Зима



(б) Лето

Рис. 8.22. Возмущение ГСО от притяжения со стороны Солнца

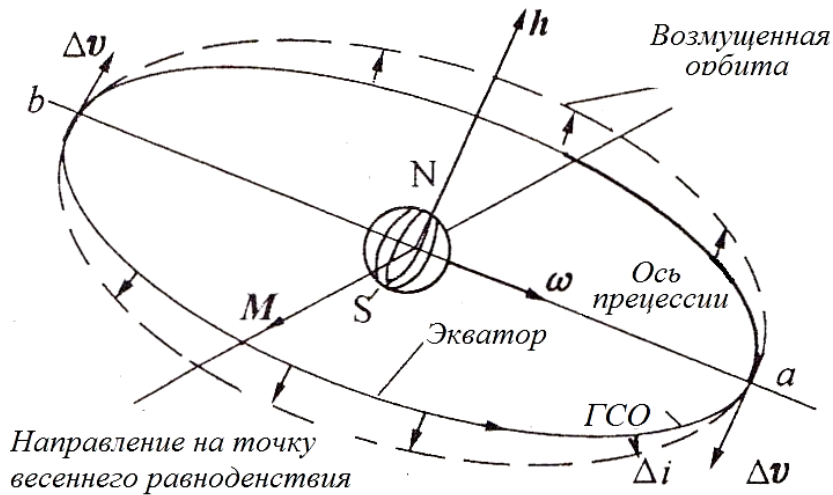


Рис. 8.23. Влияние притяжения Солнца на изменение наклона ГСО

В среднем за год наклонение ГСО от величины суммарных возмущений от Солнца и Луны изменяется на $\Delta i = 0.85^\circ$.

$$(\Delta v)_{год} = 2v_{ГСО} \sin \frac{\Delta i}{2}. \quad (8.71)$$

Здесь $v_{ГСО}$ – скорость движения КА по геостационарной орбите.

Следовательно, за год КА потребуется приращение скорости $(\Delta v)_{год} = 2 \cdot 3.075 \sin \frac{0.85}{2} = 45.6 \text{ м/с}$, а за десять лет (средний срок службы современных КА связи) приращение скорости составит:

$$\Delta v = 10 \Delta v_{год} = 456 \text{ м/с}.$$

Тогда расход топлива (при скорости истечения $w = 2000 \text{ м/с}$ для одного компонента) составит:

$$\Delta m/m_0 = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{w}} = 0.20.$$

Следовательно, потребуется порядка 20% топлива от начальной массы КА. Если же используются электроракетные двигатели с $w = 30000 \text{ м/с}$, то относительная масса рабочего тела может быть уменьшена до 1.5%.

Б. Возмущения в направлении восток-запад

Земля в экваториальной плоскости имеет форму эллипса с большой полуосью, совпадающей с диаметром, проведенным через точки географической долготы $\lambda = -15^\circ$ и $\lambda = 165^\circ$, и малой полуосью, проходящей через $\lambda = 75^\circ$ и $\lambda = 255^\circ$. Таким образом, Земля имеет два гравитационных центра, расположенных по обе стороны от большой полуоси (рис. 8.24). Гравитационная сила не всегда проходит через геометрический центр. Это приводит к тому, что геостационарный спутник будет совершать колебательное движение в направлении восток-запад относительно Земли.

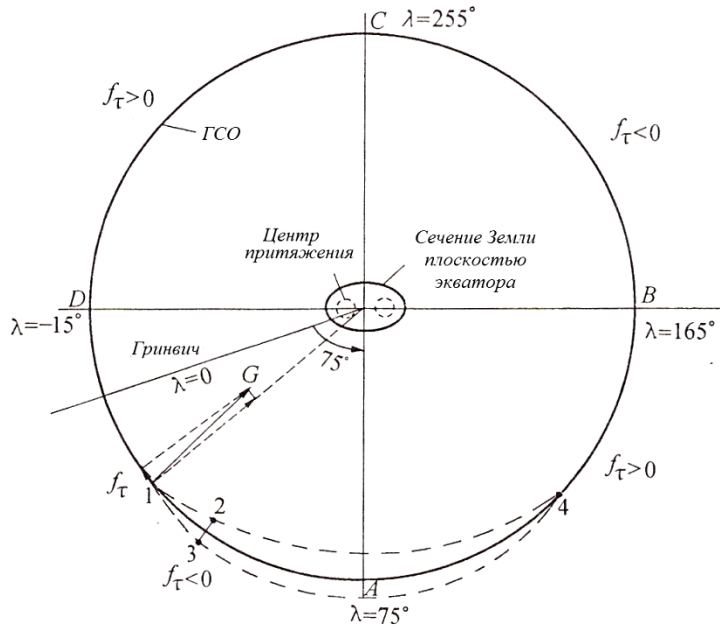


Рис. 8.24. Возмущения ГСО в направлении восток-запад

На рис. 8.24 показано поперечное сечение Земли по экватору, которое вместе с Землей вращается против часовой стрелки (с запада на восток). Эта картина просматривается на экваторе, поэтому спутники на экваториальных орбитах Земли и геостационарной орбите (ГСО) являются стационарными. Однако существование двойного гравитационного центра делает геостационарный спутник неспособным к поддержанию стабильности. Если в точке 1 гравитационная сила $\vec{K}A \vec{G}$ направлена не к центру масс, а смещена в сторону своего гравитационного центра, то появляется тангенциальная составляющая \vec{f}_τ . Под действием \vec{f}_τ происходит уменьшение центробежной силы. В результате этого скорость КА увеличивается, и он движется вперед (на восток) относительно Земли через точку 2. Когда КА проходит через малую полуось эллипса, тангенциальная составляющая меняет свое направление на противоположное, что приводит к уменьшению скорости движения спутника в восточном направлении относительно Земли до тех пор, пока он не достигнет четырех точек,

симметричных относительно 1 точки, которую можно считать статичной относительно Земли. В 4 точке появляется тангенциальная сила, как в точке 1, но ее действие направлено на увеличение высоты орбиты КА. Увеличение радиуса вызывает замедление спутника относительно Земли, КА постепенно возвращается к исходной точке 1, совершая возвратно-поступательное колебательное движение в направлении восток-запад, так называемый дрейф.

Фактически, после дифференцирования тангенциальная компонента может быть выражена следующим образом:

$$f_{\tau} = 0.58 \cdot 10^{-7} \sin \left[2(\lambda - 75^{\circ}) \right]. \quad (8.72)$$

Она равна нулю при $\lambda = -15^{\circ}, 75^{\circ}, 165^{\circ}, 255^{\circ}$, а при $\lambda = 30^{\circ}, 120^{\circ}, 210^{\circ}, 300^{\circ}$ достигает своего максимального значения.

Подставим f_{τ} в (8.44), получим:

$$\frac{da}{dt} = 1.16 \cdot 10^{-7} \frac{2a^2 v}{\mu} \sin \left[2(\lambda - 75^{\circ}) \right]. \quad (8.73)$$

В точке 1 на рис. 8.24 $\frac{da}{dt} < 0$, радиус орбиты спутника уменьшается, но скорость увеличивается. В точке 4 тенденция изменяется на противоположную. Экваториальное сечение Земли на рис. 8.24 разделено на четыре области:

$-15^{\circ} < \lambda < 75^{\circ}$ и $165^{\circ} < \lambda < 255^{\circ}$: $f_{\tau} < 0$, скорость увеличивается;

$75^{\circ} < \lambda < 165^{\circ}$ и $255^{\circ} < \lambda < 345^{\circ}$: $f_{\tau} > 0$, скорость уменьшается.

На пересечении этих четырех областей находятся точки равновесия. У стационарных спутников в этих точках отсутствует

тангенциальная сила. Однако если $\lambda = 75^\circ$ или 255° , то спутник находится в устойчивом равновесии. Спутники при $\lambda = -15^\circ$ и 165° находятся в состоянии неустойчивого равновесия. В этих четырех точках равновесия при отклонении спутника под действием возмущений в силу устойчивого равновесия он автоматически возвращается к началу координат. В то время как в точке неустойчивого равновесия он будет двигаться дальше и станет совершать колебательные движения в направлении восток-запад.

На разных спутниках долготы скорости дрейфа различаются, и возможные значения дрейфа приведены на рис. 8.25. Обычно они составляют порядка $\Delta\lambda = \pm 0.1^\circ$, поэтому необходимо выполнять коррекцию дрейфа с востока на запад через каждые две-три недели.

Процесс коррекции показан на рис. 8.24 в точках 1, 2, 3. На этом графике, вращающемся вместе с Землей, от 1 до 2 точки круговая орбита спутника смещена на восток; в точке 2 происходит коррекция орбиты спутника с целью ее поднятия до точки 3; в точках 3 и 1 происходит процесс обратного дрейфа. Это процесс показан на рис. 8.26. Когда КА опускается в точку 2, применяется ускоряющий импульс Δv_1 для движения КА по орбите Гомана на 3 точки выше синхронной орбиты, где добавляется второй ускоряющий импульс Δv_2 . Спутник переходит на круговую орбиту в точке 3. После этого под действием тангенциальной силы спутник возвращается в точку 2 кривой через точку 1. Однако для завершения перехода из точки 2 по переходу Гомана в точку 3 потребуется около половины суток. Процесс возврата из точки 3 через точку 1 в точку 2 является длительным. Он изменяется в зависимости от долготы спутника и может длиться до трех недель и составлять порядка 14 – 21 витков.

Приращение скорости, необходимое для коррекции дрейфа в направлении восток-запад, меньше, чем требуется для дрейфа север-юг.

$$(\Delta v)_{\text{восток-запад}} < \frac{1}{20} (\Delta v)_{\text{юг-север}} .$$

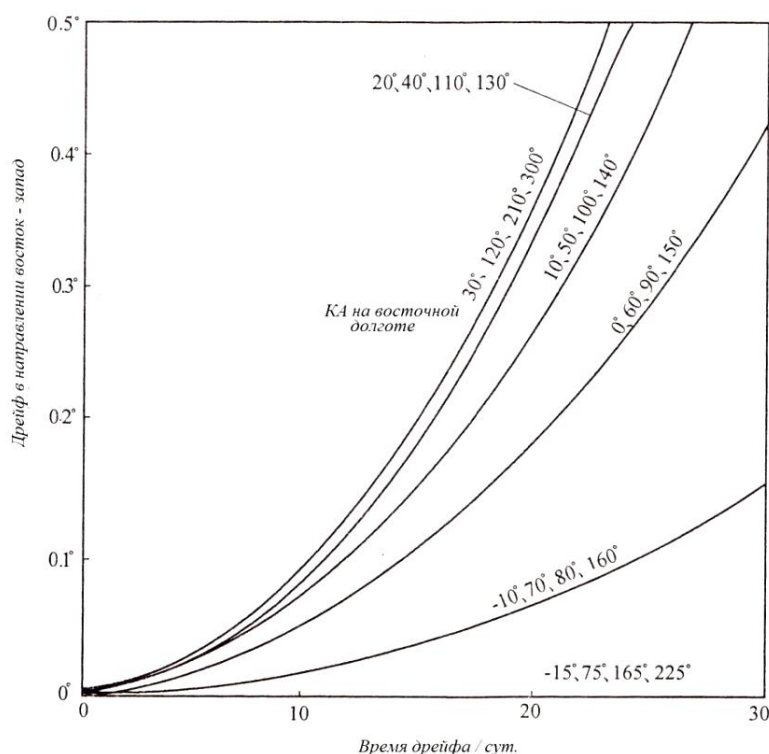


Рис. 8.25. Скорость дрейфа спутников на разных долготах

Коррекция дрейфа спутника в направлении север-юг и в направлении восток-запад, чтобы он смог выйти на заданную орбиту, и потребная масса топлива являются основным фактором, определяющим время существования спутника на орбите.

Из-за дрейфа спутников на геостационарной орбите, особенно в направлении восток-запад, появилась опасность столкновения спутников, что привлекло к себе внимание заинтересованных стран. После 1977 года Всемирная конференция радиосвязи

поручила Международному союзу электросвязи назначать соответствующие страны для определения долготы. Предотвращение столкновений становится очень важным направлением, особенно когда разным странам и организациям назначается одна и та же долгота.

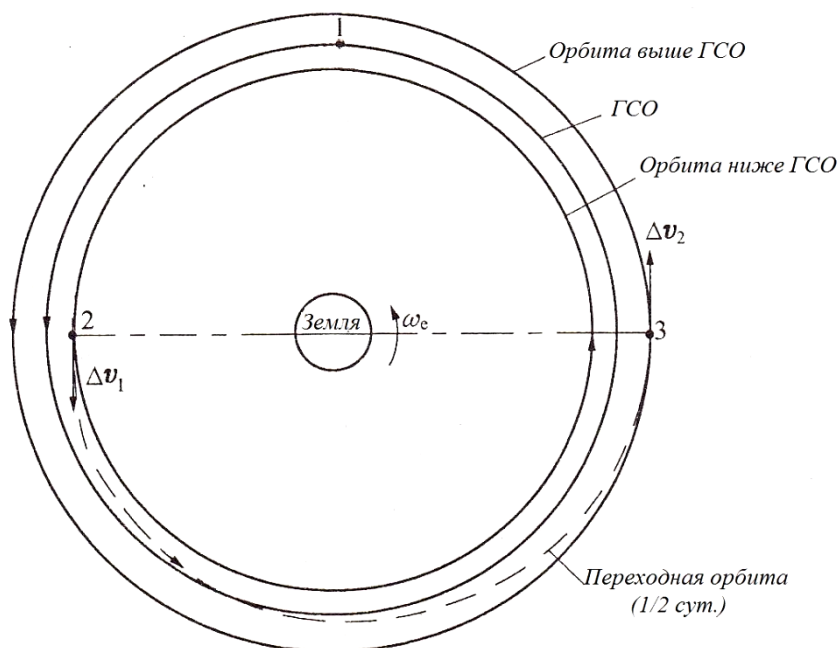


Рис. 8.26. Коррекция ГСО

9 СПУСК КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Большинство КА, запускаемых с Земли на околоземные орбиты или межпланетные траектории, в конце полета должны совершить посадку на поверхность планеты. Этап снижения и посадки КА на поверхность любого небесного тела называют спуском. Спуск можно рассматривать формально как обратный процесс по отношению к старту КА с поверхности планеты. Такой подход возможен только с математической точки зрения, но в действительности физические процессы настолько отличаются, что для изучения спуска разработали и используют специальные методы исследования. Основными отличительными особенностями спуска аппаратов являются: большой уровень кинетической энергии, которую необходимо погасить за конечный интервал времени; большие динамические и тепловые нагрузки на экипаж, бортовую аппаратуру и конструкцию спускаемого аппарата; быстротечность и необратимость процессов спуска, что повышает цену возможной ошибки и предъявляет высокие требования к системе управления спуском. Спуск космических аппаратов базируется на многих дисциплинах, таких как: динамика полета космических аппаратов, тепловые процессы, управление и навигация, теория ракетных двигателей и т.д.

В этой главе основное внимание будет уделяться изучению динамики движения КА на различных участках траектории за пределами атмосферы и участках аэродинамического полета в атмосфере при возвращении на поверхность Земли.

9.1 Процесс спуска КА

В процессе спуска с околоземной орбиты КА проходит четыре основных участка: участок торможения, участок

внеатмосферного полета, участок полета в атмосфере и участок посадки (рис. 9.1).

Точка O' – положение КА на орбите; O – точка начала торможения КА; 1 – точка окончания работы тормозной двигательной установки; 2 – точка входа в атмосферу; 3 – точка раскрытия парашюта; 4 – точка приземления.

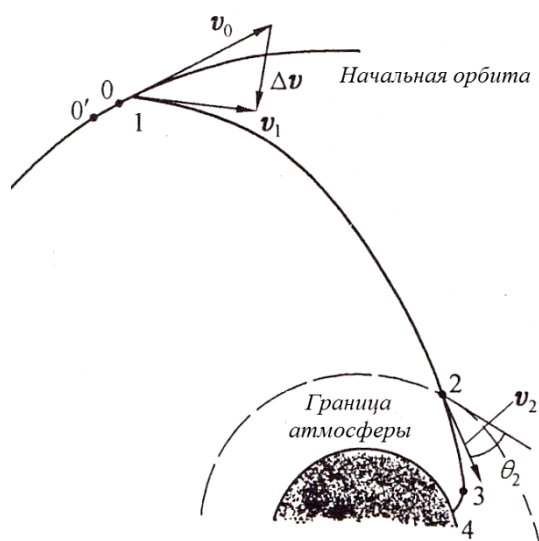


Рис. 9.1. Основные участки спуска ЛА

1. *Участок торможения (0-1)* также называют участком схода с орбиты. На этом участке на КА, кроме притяжения Земли, действует еще и тяга тормозной двигательной установки. Таким образом КА переводится с исходной орбиты на орбиту спуска.

Под действием тяги тормозной двигательной установки скорость КА меняется от первоначальной орбитальной v_0 до значения v_1 ; Δv – приращение скорости, которое по величине значительно меньше v_0 . Скорость v_1 меньше скорости v_0 , поэтому Δv также называют тормозным импульсом скорости.

Из-за ограниченности величины тяги торможение не может быть завершено мгновенно, для этого требуется определенное время, хотя и продолжительность работы тормозной

двигательной установки является относительно короткой. Влияние тяги тормозной двигательной установки обычно описывается тремя параметрами: величина тяги, время ее работы и направление вектора тяги при торможении.

2. *Участок внеатмосферного полета (1-2).* Этот участок начинается в конечной точке работы тормозной двигательной установки 1 и идет до точки входа в атмосферу. В действительности четкой границы атмосферы не существует, ее высоту выбирают условно на высоте 80 – 120 км. Здесь движение КА становится неуправляемым (ориентация КА является управляемой), он находится в состоянии свободного падения под действием притяжения Земли. Скорость КА v_2 в точке 2 называется скоростью входа; угол между вектором скорости v_2 и плоскостью местного горизонта называют углом входа θ_2 . За счет выбора значений v_2 и θ_2 можно обеспечить требуемые условия входа КА в атмосферу.

3. *Участок движения в плотных слоях атмосферы*

Точка 2 находится в верхних слоях атмосферы, после прохождения этой точки необходимо учитывать аэродинамическую силу. Для аппаратов с парашютом в точке 3 включается парашютная система (примерно на высоте 10 – 12 км). На этом участке, помимо притяжения Земли, необходимо также учитывать аэродинамическую силу и три важных фактора: аэродинамический нагрев аппарата, большие перегрузки и точность попадания в район приземления. Таким образом, этот участок является наиболее сложным в плане влияния внешних факторов.

4. *Участок посадки*

Существуют аппараты вертикальной и горизонтальной посадки. Аппараты вертикальной посадки используют парашютную систему. Участок полета от начала работы парашютной системы

до мягкой посадки аппарата соответствует участку 3 – 4. Аппараты горизонтальной посадки имеют достаточную подъемную силу и могут планировать до момента приземления.

Обычно летательные аппараты используют вертикальную посадку (рис. 9.2). Когда ЛА достигает высоты 15 км, его скорость снижается до скорости звука, после чего ЛА продолжает падать, а его скорость постепенно стабилизируется и поддерживается на уровне 100 – 200 м/с. Как правило, для замедления ЛА перед посадкой используется парашютная система.

Парашютная система работает следующим образом: когда скорость КА падает примерно до 200 м/с (высота меньше 20 км), начинает работу парашютная система. В это время скорость спуска велика, и для снижения требований к качеству и прочности парашюта применяется многокаскадная система парашютов. Сначала извлекается небольшой вытяжной парашют, который извлекает тормозной парашют тоже сравнительно небольшого размера. Последний выполняет две функции: во-первых, снижает скорость спуска КА с 200 м/с до 60 м/с, что создает необходимые условия для раскрытия основного парашюта, во-вторых, стабилизирует ориентацию КА. Далее тормозной парашют отделяется и раскрывается основной парашют. Его задача состоит в том, чтобы завершить задачу замедления, доводя скорость спуска КА до нескольких метров в секунду.

Для уменьшения ударной нагрузки при посадке можно использовать двигатели мягкой посадки. Когда аппарату остается всего несколько метров до земли, двигатели мягкой посадки создают отрицательный импульс КА, снижая, таким образом, скорость его приземления до 2 м/с и значительно уменьшая перегрузку. Особенно это важно при посадке пилотируемых аппаратов.



Рис. 9.2. Использование парашютной системы для посадки ЛА

9.2 Классификация способов спуска ЛА

Существуют различные классификации способов спуска ЛА. Например, по наличию человека на борту спуски бывают пилотируемые и беспилотные; по возможности повторного использования – одноразовые ЛА и многоразовые; по назначению – испытательные, исследовательские, прикладные и т.д.

По способу входа в атмосферу спуски можно классифицировать по аэродинамическому качеству и способам управления.

Аэродинамическим качеством называют отношение коэффициента подъемной силы к коэффициенту силы лобового сопротивления.

По аэродинамическому качеству ЛА можно разделить на:

- баллистические ЛА;
- ЛА полубаллистического типа (неуправляемый спуск с малым аэродинамическим качеством);
- ЛА с подъемной силой.

По способу управления в процессе спуска:

- ЛА с управлением углом атаки α ;
- ЛА с управлением по углу крена γ ;
- ЛА с совместным управлением углом атаки α и углом крена γ .

9.2.1 Баллистические ЛА

Это ЛА с нулевым аэродинамическим качеством, т.е. на них действует только сила лобового сопротивления. К такому типу аппаратов относятся первый советский корабль «Восток», пилотируемый корабль «Меркурий» США.

У ЛА баллистического типа аэродинамическое качество $K=0$, их движение является неуправляемым. Форма таких ЛА является несложной и представляет собой тела вращения (рис. 9.3).

Траектория спуска определяется условиями входа: положением, скоростью и направлением входа в атмосферу. Эти величины определяются движением ЛА на внеатмосферном участке.

Так как скорость входа практически не меняется при спуске с низких околоземных орбит, то угол входа является основным варьируемым параметром.

Величина угла входа определяет аэродинамические нагрузки и тепловые потоки, действующие на ЛА, а также существенно влияет на разброс точек посадки. Угол входа зависит от величины и направления тормозного импульса, который прикладывается для схода с околоземной орбиты.

Баллистической траектории спуска присущи большие перегрузки и большие отклонения фактической точки посадки от заданной. Основным способом ограничения максимальной перегрузки является управление углом входа. Например, перегрузка космонавтов не должна превышать допустимого значения в 8-10

единиц, а угол входа должен быть ниже 3° . Потому в настоящее время баллистический спуск используется в качестве резервного в случае отказа системы управления.

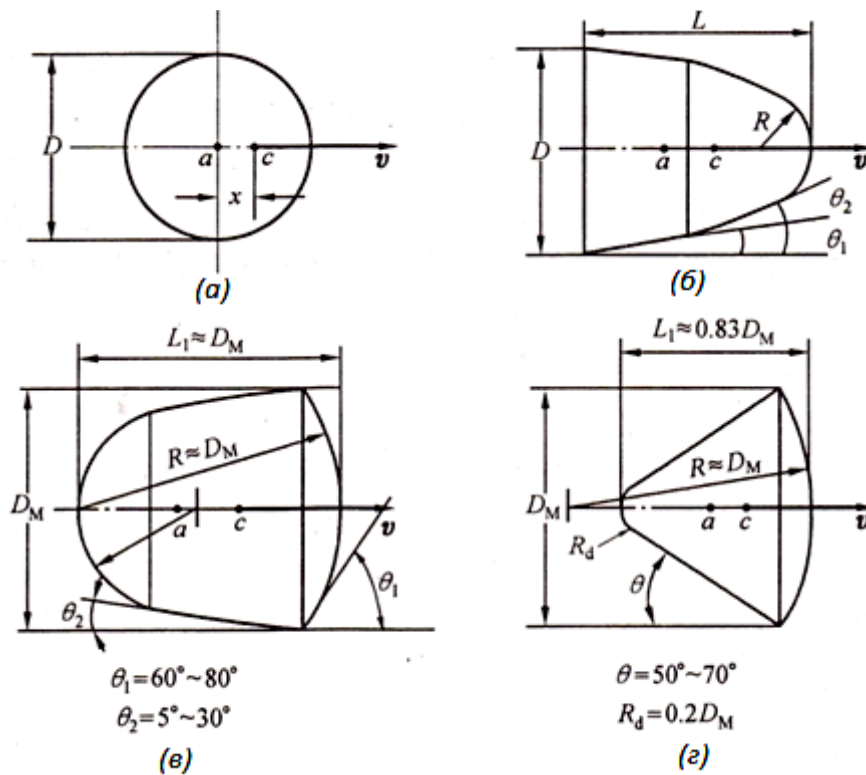


Рис. 9.3. Форма ЛА баллистического типа:

c – центр масс; a – центр давления; v – направление движения

9.2.2 ЛА полубаллистического типа

Это ЛА с малым аэродинамическим качеством. Используются аппараты осесимметричной формы. За счет смещения центра масс от оси симметрии ЛА обеспечивается балансировка аппарата на некотором отрицательном угле атаки, что позволяет реализовать малое аэродинамическое качество порядка 0.5.

Максимальные перегрузки при соответствующем подборе параметров входа в атмосферу и аэродинамического качества составляют порядка 3 – 4.

Наиболее значительное влияние на величину перегрузки оказывает угол входа в атмосферу θ_2 . Тепловой режим близок к

режиму спуска аппаратов баллистического типа. Он характеризуется несколько меньшими значениями максимальных температур и одновременным увеличением суммарного теплового потока.

9.2.3 ЛА с подъемной силой

Это ЛА с большим аэродинамическим качеством $K > 0$. Для горизонтальной посадки нужна достаточная подъемная сила. Причем такую подъемную силу нельзя получить путем отклонения центра масс от оси симметрии. Поэтому подобные ЛА являются не только телами вращения, но и имеют несущий корпус с крыльями или без них. Конфигурация корпуса обычно простая, похожая на самолет. Время спуска у таких ЛА больше, чем у ЛА баллистического и полубаллистического типа. Максимальный тепловой поток и максимальная перегрузка меньше, но общий нагрев аппарата больше и время его действия выше. Как правило, такие ЛА используются многократно.

9.3 Участок внеатмосферного полета

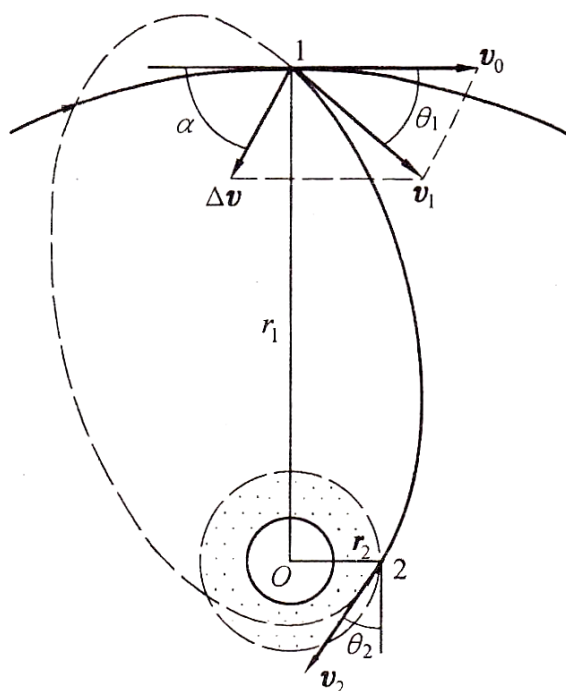


Рис. 9.4. Участок внеатмосферного полета ЛА

Пусть ЛА движется по круговой орбите радиусом r_1 со скоростью v_0 (рис. 9.4). В точке 1 выдается тормозной импульс Δv и скорость становится равной v_1 . Так ЛА переходит с начальной орбиты на эллиптическую, которая пересекает границу атмосферы. ЛА входит в плотные слои атмосферы в точке 2 со скоростью v_2 и углом входа θ_2 .

Участок движения ЛА по эллиптической орбите между точками 1 и 2 называется участком внеатмосферного полета. Здесь высота ЛА продолжает снижаться.

Считаем, что граница атмосферы начинается в точке 2 (атмосфера представляет собой шар с радиусом r_2). На высоте, большей r_2 , на ЛА не действует аэродинамическая сила.

Из векторного треугольника с вершиной в точке 1 по теореме косинусов можно записать:

$$v_1^2 = v_0^2 + \Delta v^2 - 2v_0\Delta v \cos \alpha. \quad (9.1)$$

Если спроецировать v_1 и Δv на Δv_0 , получим:

$$v_0 = v_1 \cos \theta_1 + \Delta v \cos \alpha. \quad (9.2)$$

Движение ЛА из точки 1 в точку 2 является орбитальным, поэтому можем записать закон сохранения энергии:

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (9.3)$$

$$r_1 v_1 \cos \theta_1 = r_2 v_2 \cos \theta_2. \quad (9.4)$$

В приведенных выше четырех уравнениях шесть переменных: $\Delta v, \alpha, v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Так как заданы $\Delta v, \alpha$, то можно определить

остальные переменные. Однако для ограничения перегрузки и аэродинамического нагрева после входа ЛА в плотные слои атмосферы необходимо выбрать значение θ_2 . Следовательно, останется 5 переменных, и можно получить соотношение между величинами $\Delta v, \alpha$. Из расчета, что импульс Δv минимален, получим $d\Delta v/d\alpha = 0$.

Для определения Δv и соответствующего ему значения α выразим $v_1 \cos \theta_1$ из (9.2) и (9.4) и приравняем их:

$$r_2 v_2 \cos \theta_2 = r_1 v_0 - r_1 \Delta v \cos \alpha . \quad (9.5)$$

Продифференцируем по α и, т.к. v_0, r_1, r_2, θ_2 известны, получим:

$$r_2 \cos \theta_2 \frac{dv_2}{d\alpha} = -r_1 \cos \alpha \frac{d\Delta v}{d\alpha} + r_1 \Delta v \sin \alpha .$$

Для решения задачи оптимизации необходимо вычислить $d\Delta v/d\alpha = 0$:

$$\frac{dv_2}{d\alpha} r_2 \cos \theta_2 = r_1 \Delta v \sin \alpha . \quad (9.6)$$

Возьмем производную по α от выражений (9.1) и (9.3), учитывая $d\Delta v/d\alpha = 0$, избавимся от $dv_1/d\alpha$, получим:

$$v_2 \frac{dv_2}{d\alpha} = v_0 \Delta v \sin \alpha . \quad (9.7)$$

Подставим (9.7) в (9.6), получим:

$$\left(r_2 \frac{v_0}{v_2} \cos \theta_2 - r_1 \right) \Delta v \sin \alpha = 0.$$

Чтобы последнее выражение было равно нулю, должно выполняться два условия:

$$\sin \alpha = \sin \alpha_{opt1} = 0 \quad \alpha = \alpha_{opt1} = 0 \quad (9.8)$$

и

$$r_2 \frac{v_0}{v_2} \cos \theta_2 - r_1 = 0. \quad (9.9)$$

Выражение (9.8) – одно из оптимальных значений α . Другое оптимальное значение можно получить из (9.9). Определим:

$$v_0^2 - v_2^2 - \Delta v v_0 \cos \alpha = 0.$$

Далее выразим v_1^2 из (9.1) и (9.3), получим $v_0^2 - v_2^2$ и подставим это в приведенную выше формулу. Получим:

$$-2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) - \Delta v^2 + \Delta v v_0 \cos \alpha = 0.$$

Скорость на круговой орбите определяется как $v_0^2 = \mu/r_1$. Следовательно, второе оптимальное значение α будет

$$\alpha_{opt2} = \arccos \left[\frac{2(r_1/r_2 - 1) + (\Delta v/v_0)^2}{\Delta v/v_0} \right]. \quad (9.10)$$

Тогда

$$(\Delta v/v_0) = \frac{1}{2} \cos \alpha_{opt2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \alpha_{opt2} - 8(r_1/r_2 - 1)}. \quad (9.11)$$

Для разных значений α_{opt2} по формуле (9.11) можно построить кривую в плоскости параметров $(\Delta v/v_0)$ и (r_1/r_2) (рис. 9.5). Так как $\alpha_{opt1} = 0$, то кривая, полученная при $\alpha_{opt2} = \alpha_{opt1} = 0$, называется γ -кривой. А область, ограниченная γ -кривой и вертикальной осью, называется областью Г. Кривая γ является границей между двумя оптимальными состояниями. Запишем условия нахождения за границей области и на кривой γ :

$$\left. \frac{d\Delta v}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{opt1}} = 0,$$

$$\left. \frac{d^2\Delta v}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_{opt1}} > 0.$$

В области Г:

$$\left. \frac{d\Delta v}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{opt2}} = 0,$$

$$\left. \frac{d^2\Delta v}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_{opt2}} > 0.$$

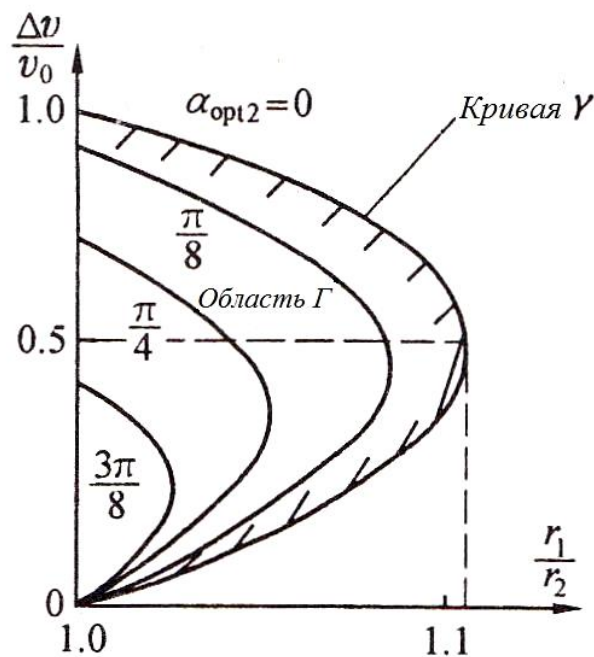


Рис. 9.5. Оптимальные области

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

(1) за границей области Γ и на кривой γ оптимальным будет значение α_{opt1} ;

(2) внутри области Γ оптимальным будет значение α_{opt2} .

Так как максимальным значением r_1/r_2 в области Γ является $r_1/r_2 = 1.125$, то приведенные выше выводы можно переписать так:

(1) если $r_1/r_2 \geq 1.125$ или $r_1/r_2 < 1.125$ и также выполняются следующие условия $\frac{\Delta v}{v_0} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9 - 8r_1/r_2}$ или $\frac{\Delta v}{v_0} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{9 - 8r_1/r_2}$,

то тормозной импульс должен быть приложен в направлении, противоположном направлению вектора скорости v_0 на круговой орбите, т.е. $\alpha = \alpha_{opt1} = 0$. Тогда можно рассчитать необходимые параметры траектории движения ЛА вне атмосферы. Принимаем $\alpha_{opt1} = 0$, подставим v_1 из (9.1) в (9.3), получим:

$$v_2 = v_0 \sqrt{(1 - \Delta v/v_0)^2 + 2(r_1/r_2 - 1)}. \quad (9.12)$$

Видно, что $\theta_1 = 0$. Подставим это в (9.4) и, учитывая (9.12) и $v_1 = v_0 - \Delta v$, определим минимальный импульс скорости Δv_{min} при данном значении θ_2 :

$$\Delta v_{min} = v_0 \left[1 - \frac{\sqrt{2(r_1/r_2 - 1)}}{\sqrt{\left(\frac{r_1/r_2}{\cos \theta_2}\right)^2 - 1}} \right]. \quad (9.13)$$

(2) если $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 8r_1/r_2} \leq \frac{\Delta v}{v_0} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 8r_1/r_2}$ и $\alpha = \alpha_{opt2}$, то для

v_2 и Δv получим:

$$v_2 = v_0 \sqrt{(1 - \Delta v/v_0)^2 - 2(r_1/r_2 - 1)}, \quad (9.14)$$

$$\Delta v_{\min} = v_0 \sqrt{1 - 2(r_1/r_2 - 1) - \left(\frac{\cos \theta_2}{r_1/r_2}\right)^2}. \quad (9.15)$$

9.4 Уравнения движения ЛА в атмосфере

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнения движения ЛА после его входа в атмосферу (угловым движением ЛА пренебрегаем):

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{G}. \quad (9.16)$$

Здесь m – масса ЛА; $\bar{P}, \bar{F}, \bar{G}$ – тяга, аэродинамическая сила и гравитационная сила соответственно. В процессе спуска аэродинамическая сила и аэродинамический нагрев напрямую зависят от скорости полета.

Рассмотрим движение ЛА в вертикальной плоскости. Запишем выражение (9.16) в виде проекций на оси системы координат в соответствии с рис. 2.1:

$$m \frac{dv}{dt} = P_v - D - mg \sin \theta,$$

$$m \left(v \frac{d\theta}{dt} - \frac{v^2}{r} \cos \theta \right) = P_\theta + L - mg \cos \theta.$$

Здесь P_v и P_θ – компоненты силы тяги в проекции на направление скорости и перпендикулярном ей; D, L – сила лобового сопротивления и подъемная сила; r – радиус-вектор, проведенный из центра масс гравитирующего тела к центру масс ЛА. Левая часть формулы – произведение массы ЛА на ускорение.

Во второй формуле θ – угол между вектором скорости и плоскостью местного горизонта (как в левой части формулы (2.2), только там используется угол θ_c – угол между вектором скорости и местной горизонтальной плоскостью в точке старта).

Сила лобового сопротивления и подъемная сила могут быть записаны в виде:

$$D = \frac{\rho v^2}{2} S_m C_x, \quad L = \frac{\rho v^2}{2} S_m C_y.$$

Здесь C_x и C_y – коэффициенты силы лобового сопротивления и подъемной силы; S_m – характерная площадь ЛА (обычно площадь поперечного сечения); ρ – плотность атмосферы; $\frac{\rho v^2}{2}$ – скоростной напор, имеющий размерность давления.

Подставим последние два выражения в уравнения движения ЛА, получим:

$$\frac{dv}{dt} = -\sigma \frac{\rho v^2}{2} - g \sin \theta + \frac{P_v}{m}, \quad (9.17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sigma K \frac{\rho v}{2} + \left(\frac{v}{r} - \frac{g}{v} \right) \cos \theta + \frac{P_\theta}{mv}. \quad (9.18)$$

Баллистический коэффициент зависит от коэффициента силы лобового сопротивления и удельной массы ЛА:

$$\sigma = \frac{S_m C_x}{m}. \quad (9.19)$$

Аэродинамическое качество – отношение коэффициента подъемной силы к коэффициенту силы лобового сопротивления:

$$K = \frac{L}{D} = \frac{C_y}{C_x}. \quad (9.20)$$

Гравитационная сила:

$$g = g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (9.21)$$

Здесь R – радиус центрального гравитирующего тела; g_0 – ускорение свободного падения на поверхности этого тела.

Кинематические уравнения движения ЛА перепишем в виде:

$$\frac{dH}{dt} = v \sin \theta, \quad (9.22)$$

$$\frac{dS}{dt} = v \cos \theta \left(\frac{R}{r} \right). \quad (9.23)$$

Здесь H и S – высота и пройденное расстояние на поверхности гравитирующего тела.

Аэродинамическая перегрузка – это отношение аэродинамической силы к весу ЛА на Земле. Запишем выражения для перегрузки в проекциях на соответствующие направления:

$$n_x = \frac{C_x S_m \rho v^2}{2mg_0} = \sigma \frac{\rho v^2}{2g_0}, \quad (9.24)$$

$$n_y = \frac{C_y S_m \rho v^2}{2mg_0} = K\sigma \frac{\rho v^2}{2g_0}. \quad (9.25)$$

Полная аэродинамическая перегрузка равна

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sigma \frac{\rho v^2}{2g_0} \sqrt{1 + K^2}. \quad (9.26)$$

Выражения (9.17) и (9.18) являются системой нелинейных дифференциальных уравнений, изменяющихся со временем. Их аналитические решения получить сложно. Для выявления особенностей спуска и законов изменения нагрева ЛА и перегрузок, возникающих во время спуска, обычно проводится приближенный анализ. Для точных расчетов должны использоваться численные методы. Для аэродинамического анализа следует также учитывать процесс абляции термостойких материалов от высокой температуры, химические характеристики и теплопередачу и эффекты теплового излучения. Такие задачи очень сложны и не рассматриваются в данном курсе.

В частности, можно провести исследование уравнений (9.17) и (9.18) по следующей схеме:

- 1) находится аналитическое приближенное решение без учета второстепенных элементов уравнения;
- 2) определяются точные решения для некоторых частных случаев;
- 3) выполняется последовательный расчет малых параметров ЛА, которые оказывают влияние на подъемную силу и силу лобового сопротивления;

4) по теории подобия проводится преобразование орбиты ЛА в относительную орбиту, которая затем анализируется через аналогичные безразмерные параметры.

9.5 Перегрузка, нагрев и управление движением ЛА в атмосфере

Рассмотрим уравнения (9.17) и (9.18) при известных начальных условиях, не учитывая компоненты тяги P_v и P_o тормозного двигателя, тогда на движение ЛА могут влиять только баллистический параметр σ и аэродинамическое качество K . Эти параметры действительно оказывают важную роль при спуске ЛА. Особенно большое влияние оказывает K . Для ЛА с разными значениями K используются разные методы исследования уравнений и разные способы управления движением.

9.5.1 Баллистический спуск

Если центр масс и центр давления лежат на геометрической оси симметрии ЛА, подъемной силы не будет, т.е. $K = 0$. Остается только один регулируемый параметр – σ . Изменение траектории спуска ЛА в атмосфере можно достичь только за счет изменения начальных условий, причем наибольшее влияние оказывает угол входа θ_2 . Обычно абсолютная величина этого угла невелика и начальный участок спуска идет практически по прямой из-за высокой скорости движения КА. В первом приближении примем следующие допущения:

(1) плотность атмосферы зависит от высоты:

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta H), \quad (9.27)$$

где H – высота полета; β – константа; ρ_0 – плотность атмосферы на высоте $H = 0$;

(2) высота полета много меньше радиуса центрального гравитирующего тела

$$H \ll R;$$

(3) сила лобового сопротивления много больше проекции силы тяжести на направление вектора скорости, а именно

$$mg \sin \theta \ll C_x S_m \frac{\rho v^2}{2} = m\sigma \frac{\rho v^2}{2};$$

(4) угол наклона траектории считаем постоянным

$$\theta = \theta_2 = const. \quad (9.28)$$

Следовательно, при $P_v = 0$ выражение (9.17) можно переписать в виде:

$$\frac{dv}{dt} = -\sigma \frac{\rho v^2}{2}. \quad (9.29)$$

А выражение (9.22) как

$$\frac{dH}{dt} v \sin \theta_2. \quad (9.30)$$

Из (9.27), (9.29), (9.30) получим:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\sigma \rho_0}{2 \sin \theta_2} \exp(-\beta H) dH. \quad (9.31)$$

Проинтегрируем, получим:

$$\ln \frac{v}{v_2} = \frac{\sigma \rho_0}{2\beta \sin \theta_2} [\exp(-\beta H) - \exp(-\beta H_2)].$$

Здесь нижний индекс «2» указывает на начальный параметр входа в атмосферу.

Далее из (9.27) видно, что

$$v = v_2 \exp \left[\frac{\sigma}{2\beta \sin \theta_2} (\rho - \rho_2) \right]. \quad (9.32)$$

Перегрузка в направлении x , как видно из (9.24), имеет максимум при

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \exp \left[\frac{\sigma}{2\beta \sin \theta_2} (\rho - \rho_2) \right]. \quad (9.33)$$

Для нахождения максимума запишем от последнего выражения производную по ρ и приравняем ее к нулю:

$$\rho^* = -\frac{\beta \sin \theta_2}{\sigma}. \quad (9.34)$$

Подставим это выражение в (9.32), получим скорость ЛА при $n_{x \max}$:

$$v_{n \max} = v_2 \exp \left(-\frac{1}{2} - \frac{\rho_2}{2\rho^*} \right). \quad (9.35)$$

Тогда, как следует из (9.24), максимум перегрузки составит:

$$n_{x \max} = -\frac{\beta \sin \theta_2}{2g_0} v_2^2 \exp \left(-1 - \frac{\rho_2}{\rho^*} \right). \quad (9.36)$$

Как правило, $\rho_2 \ll \rho^*$, тогда (9.35) и (9.36) можно переписать:

$$v_{n\max} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0.61v_2, \quad (9.37)$$

$$n_{x\max} = -\frac{\beta \sin \theta_2}{2g_0} v_2^2. \quad (9.38)$$

Отсюда видно, что максимум перегрузки и соответствующей скорости в первом приближении не зависят от баллистических параметров, а при уменьшении угла наклона траектории θ_2 (по модулю) будет снижаться и максимум перегрузки.

При спуске в атмосфере наблюдается сильный аэродинамический нагрев. Тепло передается аппарату путем конвекции и излучения. Максимальная температура в критической точке может достигать $2000-2700^\circ$, а общий тепловой поток — $(2.0-4.0) \cdot 10^8 \text{ Дж} / \text{м}^2$. Разрушение теплозащитных материалов начинается при температуре около 2000° , а температура внутри аппарат может достигать десятков градусов по Цельсию.

Учитывая только конвективный теплообмен и считая, что воздушный поток находится в ламинарном состоянии, тепловой поток в критической точке можно принять

$$\dot{Q} = k \rho^n v^m. \quad (9.39)$$

Здесь k — константа, зависящая от радиуса носовой части ЛА, типа пограничного слоя и характеристик динамики газов. Для ламинарного пограничного слоя, когда вязкость среды пропорциональна температуре $T^{1/2}$: $m=3, n=0.5$. Тогда средний тепловой поток будет выражаться формулой:

$$\dot{Q}_{cp} = \frac{1}{4} C_F \rho^{\frac{1}{2}} v^3. \quad (9.40)$$

Здесь C_F – эквивалентный коэффициент поверхностного трения, поэтому общее тепло, поглощаемое ЛА в процессе спуска, составит:

$$Q = \frac{1}{4} C_F S \int_{t_0}^{t_k} \rho^{\frac{1}{2}} v^3 dt. \quad (9.41)$$

Здесь t_k и t_0 – время начала и окончания спуска; S – площадь поверхности ЛА.

Температуру ЛА в критической точке можно определить из уравнения Стефана-Больцмана:

$$T_{kp}^0 = \left(\frac{\dot{Q}}{\sigma^* \varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (9.42)$$

Здесь σ^* – постоянная Стефана-Больцмана; ε – коэффициент степени черноты поверхности ЛА ($\varepsilon = 0.9$).

Из формулы (9.39) видно, что максимум теплового потока в критической точке возникает при достижении произведением $\rho^{\frac{1}{2}} v^3$ максимума. Его можно заменить выражением (9.32), а затем найти производную по ρ и приравнять результат к нулю:

$$\rho^{**} = -\frac{\beta \sin \theta_2}{3\sigma}. \quad (9.43)$$

Видно, что тепловой поток в критической точке достигает своего максимума при $\rho = \rho^{**}$. Подставим (9.43) в (9.32) и получим соответствующую скорость:

$$v_{\dot{Q}}^{\max} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{6} - \frac{\sigma\rho_2}{3\beta \sin \theta_2}\right). \quad (9.44)$$

Максимум теплового потока получим из (9.39):

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3 \sqrt{-\frac{\beta \sin \theta_2}{3\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} + \frac{\rho_2}{2\rho^{**}}\right). \quad (9.45)$$

Если считать, что $\rho_2 \ll \rho^*$, получим:

$$v_{\dot{Q}}^{\max} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{6}\right) \approx 0.85v_2, \quad (9.46)$$

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3 \sqrt{-\frac{\beta \sin \theta_2}{3\sigma e}}. \quad (9.47)$$

Здесь e – основание натурального логарифма. Видно, что для уменьшения теплового потока необходимо уменьшить начальный угол наклона траектории (по модулю) и увеличить баллистические параметры (лобовое сопротивление на удельную массу). Если сравнить выражение (9.46) с (9.37), можно увидеть, что максимум теплового потока в критической точке наступает раньше, чем максимум перегрузки.

Подставим выражение (9.32) в (9.41), то dt преобразуется в dv по формуле (9.29). После интегрирования получим общее количество теплоты от аэродинамического нагрева, поглощенное ЛА при спуске:

$$Q = 0.25C_F \frac{S}{\sigma} v_2^2 \left\{ 1 - \exp\left[\frac{\sigma(\rho - \rho_2)}{\beta \sin \theta_2}\right] \right\}. \quad (9.48)$$

Видно, что для уменьшения общего количество теплоты Q необходимо увеличить баллистические параметры σ и увеличить начальный угол наклона траектории θ_2 (по модулю), что противоречит уменьшению максимального теплового потока в критической точке.

Чтобы во время баллистического спуска уменьшить максимальную перегрузку и максимальный тепловой поток, можно управлять только углом θ_2 . Поэтому изменение начальных параметров и погрешность формул и т.д. приведут к погрешности в расчете точки приземления ЛА. Большая полуось эллипса рассеивания точек посадки составит около сотни километров, а малая полуось – более ста километров. Баллистический спуск обеспечивает очень низкую точность для определения точки приземления ЛА.

9.5.2 Полубаллистический спуск ЛА

Недостатки баллистического спуска, такие как низкая точность приземления, большие перегрузки и аэродинамический нагрев, могут быть преодолены за счет увеличения подъемной силы ЛА, например, когда аэродинамическое качество $K = 0.2 - 0.3$. ЛА с малым K могут быть даже пилотируемыми.

А. Управление ЛА с малым аэродинамическим качеством

Управление траекториями таких ЛА может проводиться за счет изменения величины аэродинамического качества. На рис. 9.6 показан принцип изменения K : равнодействующая аэродинамическая сила прикладывается в центре давления ЛА. Эта сила \bar{F} может быть разложена на составляющую вдоль вектора скорости \bar{D} и на подъемную силу \bar{L} , перпендикулярную силе лобового сопротивления. Чтобы ЛА находился в состоянии равновесия, аэродинамическая сила \bar{F} должна проходить через центр масс и вместе с силой тяжести $\bar{G} = m\bar{g}$ и силой инерции образовывать сбалансированную систему сил. Так как все силы проходят

через центр масс ЛА, то не будет моментов относительно центра масс. Угол между вектором скорости и продольной осью ЛА называется углом атаки в состоянии равновесия ЛА. Обозначим его через α_T . При увеличении (уменьшении) угла атаки α_T будет увеличиваться (уменьшаться) и подъемная сила. Вектор аэродинамической силы уже не будет проходить через центр масс под действием момента, угол α будет стремиться к углу α_T . Таким образом, это будет статически устойчивый ЛА по тангажу. Аналогично, ЛА может быть статически устойчивым по углу скольжения.

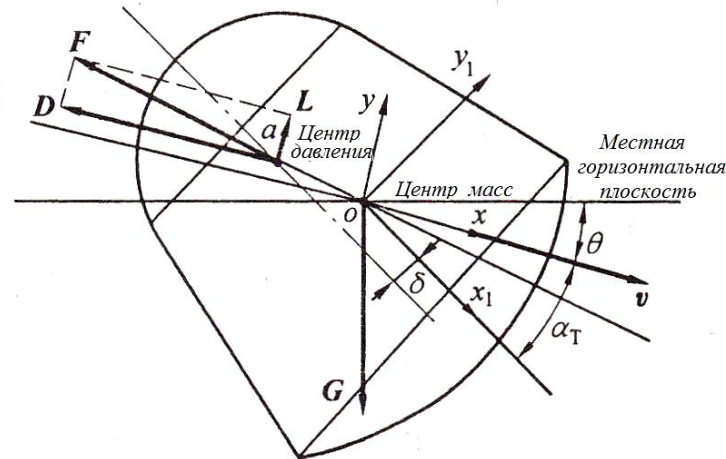


Рис. 9.6. Система сил, действующих на ЛА с малым аэродинамическим качеством

Однако если есть начальный угол крена γ в продольной плоскости ЛА, то подъемная сила в продольной плоскости будет равна $L \cos \gamma$, а эффективное отношение подъемной силы к силе лобового сопротивления составит

$$K_{ef} = K \cos \gamma . \quad (9.49)$$

По тому же принципу можно регулировать дальность при вертикальном полете путем изменения угла γ и значения $L \cos \gamma$.

У аэродинамической силы есть также боковая составляющая $L \sin \gamma$, лежащая в горизонтальной плоскости. Эта составляющая может создавать момент относительно начальной вертикальной плоскости. Небольшой подъемной силы достаточно для повышения точности точек посадки ЛА и уменьшения аэродинамического нагрева и перегрузки. Если в боковой аэродинамической силе нет необходимости или ее не нужно регулировать, то ЛА может делать повороты направо и налево с одинаковым углом крена или менять значения и время отклонения при необходимости.

Этот способ совместного управления поперечным и продольным перемещениями ЛА с помощью угла крена называют одноканальным управлением углом крена. Действительно, этот способ управления обеспечивает взаимосвязь между продольным и поперечным перемещением ЛА. Он прост в использовании и широко используется на практике.

Обычно выбирают следующие параметры:

$$\alpha_T = -30^\circ \dots -20^\circ, \quad \theta_2 = -3^\circ \dots -1^\circ, \quad K = 0.2 \dots 0.3, \quad \gamma_0 = 20 \dots 30^\circ.$$

Также ставится условие $n_{x \max} \leq 3.5$. При увеличении аэродинамического качества происходит уменьшение максимальной перегрузки, т.к. траектория ЛА с малым аэродинамическим качеством не такая крутая, как траектория баллистического спуска. По той же причине максимальная температура в критической точке снижается на $300^\circ \dots 400^\circ$, хотя общее количество теплоты возрастает на $(60 \dots 100) \cdot 10^6 \text{ Дж} / \text{м}^2$ из-за увеличения продолжительности спуска.

Для управления по углу крена на борту ЛА обычно размещают специальное устройство управления с реактивными двигателями, которое создает крутящий момент относительно оси крена и поддерживают нужный угол γ . Например, на советском

корабле «Союз» крутящий момент по крену создавался относительно вектора скорости, что позволяло поддерживать балансировочный угол атаки между направлением вектора тяги и продольной осью симметрии.

Помимо указанного выше способа, для управления полетом ЛА можно также менять угол атаки. При изменении угла атаки происходит изменение коэффициентов подъемной силы и силы лобового сопротивления, следовательно, изменяется и аэродинамическое качество. Угол атаки можно менять с помощью реактивных двигателей, которые создают управляющий момент для компенсации аэродинамического момента, или с помощью смещения центра масс.

Аэродинамическое качество можно также изменять за счет изменения коэффициента лобового сопротивления C_x . Предпочтительным является комплексное использование указанных выше способов для управления движением ЛА на этапе спуска.

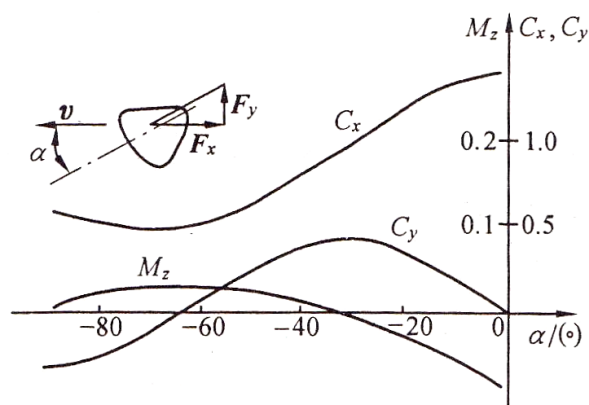


Рис. 9.7. Зависимость между углом атаки и аэродинамическими характеристиками

Б. Перегрузка и нагрев ЛА с малым аэродинамическим качеством

При проведении приближенного анализа перегрузок и нагрева подобных ЛА считается, что скорость спуска зависит от подъемной силы, высоты орбиты и максимальной перегрузки.

При максимальной перегрузке скорость ЛА меняется медленно, поэтому центробежная сила и силы тяжести практически компенсируют друг друга:

$$\left(\frac{mv^2}{r} - mg \right) \cos \theta \approx 0. \quad (9.50)$$

Следовательно, без учета P_θ выражение (9.18) переписывается в виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sigma K \frac{\rho v}{2}. \quad (9.51)$$

Разделим это выражение на (9.22). С учетом (9.27) и принимая, что $|\theta| \leq 5^\circ$, т. е. $\sin \theta = \theta$, получим:

$$\theta \frac{d\theta}{dH} = \sigma K \frac{\rho_0}{2} \exp(-\beta H).$$

Используя выражение (9.27) и проинтегрировав, получим:

$$\rho = \rho_2 - \frac{\beta}{\sigma K} (\theta^2 - \theta_2^2). \quad (9.52)$$

Поделим (9.51) на (9.52), проинтегрируем, получим скорость ЛА:

$$v = v_2 \exp\left(-\frac{\theta - \theta_2}{K}\right) \quad (9.53)$$

или

$$\theta = \theta_2 + K \ln \frac{v_2}{v}. \quad (9.54)$$

Из (9.24) – (9.26) видно, что перегрузки n_x , n_y и n пропорциональны $\frac{\rho v^2}{2}$. Подставим (9.52) и (9.53) в $\frac{\rho v^2}{2}$, возьмем производную по θ и приравняем результат к нулю, получим:

$$\theta^2 - K\theta - \left(\theta_2^2 + \frac{\sigma K}{\beta} \rho_2 \right) = 0.$$

Так как плотность атмосферы в точке входа ρ_2 мала, то ею можно пренебречь:

$$\theta^* = \frac{K}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right). \quad (9.55)$$

Получили угол наклона траектории при максимуме перегрузки n . Подставим это выражение в (9.52) и (9.53), получим плотность и скорость при n_{\max} :

$$\rho^* = \rho_2 - \frac{\beta K}{2\sigma} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right), \quad (9.56)$$

$$v^* = v_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right) + \frac{\theta_2}{K} \right]. \quad (9.57)$$

Подставим (9.56) и (9.57) в (9.26), получим:

$$n_{\max} = \frac{\sigma v_2^2}{2g_0} \left[\rho_2 - \frac{\beta K}{2\sigma} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right) \right] \times \exp \left[-\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right) + \frac{2\theta_2}{K} \right] \times \sqrt{1 + K^2}. \quad (9.58)$$

Чтобы выявить взаимосвязь между K и n_{\max} , будем считать, что $|\theta_2|$ мал. Получим из (9.55) θ^* :

$$\theta^* = 0, \quad (9.59)$$

$$\theta^* = K. \quad (9.60)$$

Здесь $\theta^* = 0$ будет при $C_y > 0$. Из (9.18) видно, что $\theta = \theta_2 < 0^\circ$, т. е. для $\theta^* > 0$ необходимо выполнение условий $C_y > 0$ ($K > 0$). При $\theta = 0^\circ$ орбита начнет подниматься (рис. 9.8). Подставив (9.59) в (9.52) и (9.53), получим:

$$\rho^* = \rho_2 + \frac{\beta}{\sigma K} \theta_2^2, \quad (9.61)$$

$$v^* = v_2 \exp\left(\frac{\theta_2}{K}\right). \quad (9.62)$$

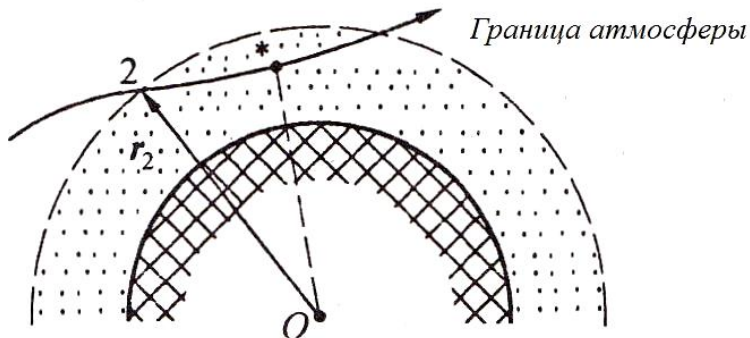


Рис. 9.8. Рикошетирующая траектория ЛА (пунктирная линия – граница атмосферы)

Далее из (9.26) получим:

$$n_{\max} = \frac{\sigma v_2^2}{2g_0} \left[\left(\rho_2 + \frac{\beta}{\sigma K} \theta_2^2 \right) \exp\left(\frac{2\theta_2}{K}\right) \right] \sqrt{1 + K^2}. \quad (9.63)$$

Так как ρ_2 очень мала, можно ею пренебречь:

$$n_{\max} = \frac{\beta v_2^2 \theta_2^2}{2g_0 K} \exp\left(\frac{2\theta_2}{K}\right) \sqrt{1+K^2}. \quad (9.64)$$

Видно, что K увеличилось, а n_{\max} уменьшилась.

Для $\theta^* = K$ необходимо, чтобы $C_y < 0$. Возвратная траектория ЛА крутая. Используя (9.58) и выбирая верхний знак, получим:

$$n_{\max} = \frac{\sigma v_2^2}{2g_0} \left(\rho_2 - \frac{\beta K}{\sigma} \right) \exp\left(\frac{2\theta_2}{K} - 2\right) \sqrt{1+K^2}. \quad (9.65)$$

При $|\theta_2| \ll |K|$ и пренебрегая ρ_2 , получим:

$$n_{\max} = -\frac{\beta v_2^2}{2g_0 e^2} K \sqrt{1+K^2}. \quad (9.66)$$

Видно, что при увеличении K будет увеличиваться и n_{\max} .

При $5^\circ \leq |\theta_2| \leq 90^\circ$ перегрузка достигает максимума n_{\max} при минимуме ρv^2 . Поэтому возьмем производную от ρv^2 и приравняем ее к нулю:

$$2 \frac{dv^*}{v^*} + \frac{d\rho^*}{\rho^*} = 0.$$

После интегрирования получим:

$$\rho^* v^{*2} = \rho_2 v_2^2. \quad (9.67)$$

Следовательно, из (9.26) можно найти максимальную перегрузку:

$$n_{\max} = \frac{\sigma}{2g_0} \rho_2 v_2^2 \sqrt{1 + K^2}. \quad (9.68)$$

Т. е. при больших значениях $|\theta_2|$ и при возрастании K будет возрастать и n_{\max} .

Таким образом, для того чтобы n_{\max} уменьшалась при увеличении K , необходимо использовать малые углы наклона траектории при входе в атмосферу, т.е. $|\theta_2|$ должен достигать своего минимального значения. Доказано, что до $K = 1$ влияние аэродинамического качества на уменьшение величины n_{\max} существеннее, чем при $K > 1$.

Из (9.39) видно, что максимум теплового потока в критической точке возникает при достижении произведением $\rho^{1/2} v^3$ максимума. Подставив (9.52) и (9.53) в $\rho^{1/2} v^3$ и взяв производную по θ , пренебрегая ρ_2 , получим:

$$\theta^2 - \frac{K\theta}{3} - \theta_2^2 = 0.$$

Когда величина $|\theta_2|$ мала, можно получить значение угла θ при максимальном тепловом потоке в критической точке:

$$\theta^{**} = 0, \quad (9.69)$$

$$\theta^{**} = \frac{K}{3}. \quad (9.70)$$

Как было описано выше, $\theta^{**} = 0$ при $C_y > 0$ траектория ЛА становится рикошетирующей (рис. 9.8). Кроме того, из (9.59) видно, что максимальная перегрузка и максимальный тепловой поток в критической точке возникают одновременно. Подставим (9.69) в (9.52) и (9.53), а затем в (9.39), получим:

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3 |\theta_2| \left(\frac{\beta}{\sigma K} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{3\theta_2}{K} \right). \quad (9.71)$$

Видно, что максимальный тепловой поток при увеличении K уменьшается.

$\theta^{**} = \frac{K}{3}$ имеет место при $C_y < 0$. Тогда угол наклона траектории при максимуме теплового потока в критической точке можно получить, как и выше:

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3 \left[\frac{\beta}{\sigma K} \left(\theta_2^2 - \frac{K^2}{9} \right) \right]^{1/2} \exp\left(\frac{3\theta_2 - K}{K} \right). \quad (9.72)$$

При большом значении K и относительно малом $|\theta_2|$ выражение примет вид:

$$\dot{Q}_{\max} = \frac{kv_2^3}{3e} \left(-\frac{K\beta}{\sigma} \right)^{1/2}. \quad (9.73)$$

Видно, что в первом приближении, что \dot{Q}_{\max} не зависит от θ_2 и увеличивается при увеличении K .

При даже небольших значениях аэродинамического качества K траектория движения ЛА в атмосфере будет значительно длиннее, чем при баллистическом спуске. Важной особенностью

ЛА с постоянным аэродинамическим качеством является низка точность посадки. При переменном же аэродинамическом качестве, особенно при одноканальном управлении углом крена, точность посадки значительно увеличивается (в вертикальном направлении она может достигать 20 – 30 км). Для ЛА с переменным аэродинамическим качеством перегрузка и нагрев могут быть определены по указанной выше методике при $K = K_{ef}$.

9.5.3 Коридор входа и свойства аэродинамической перегрузки

А. Коридор входа

Из проведенного выше анализа видно, что влияние величины θ_2 оказывает большое влияние на характеристики спуска. Если θ_2 очень велико, то максимум перегрузки будет выше допустимого значения и максимум теплового потока в критической точке возрастет. Следовательно, можно определить максимум допустимого значения $|\theta_2|_{\max}$ по допустимым значениям $n_{x\max}$ и \dot{Q}_{\max} .

Однако нельзя сказать, что чем меньше θ_2 , тем лучше. Когда $|\theta_2|$ очень мал, ЛА не может войти в плотные слои атмосферы, скорость не может значительно снизиться и ЛА снова выйдет из атмосферы (рис. 9.8). Поэтому минимальное значение $|\theta_2|$ является допустимым $|\theta_2|_{\min}$, когда данное явление отсутствует. Расстояние между $|\theta_2|_{\max}$ и $|\theta_2|_{\min}$ называют коридором входа. Пределами коридора входа являются траектории входа в атмосферу с углами $|\theta_2|_{\max}$ и $|\theta_2|_{\min}$.

Для количественного описания ширины коридора входа представим две эллиптические орбиты, соответствующие углам

$|\theta_2|_{\max}$ и $|\theta_2|_{\min}$, начальной скорости входа v_2 и радиусу границы атмосферы r_2 . Обозначим разность радиусов (или высот) перицентров через величину ΔH_n , которая может быть использована для количественного выражения ширины коридора входа (рис. 9.9). На условной орбите перицентр может быть под поверхностью центрального гравитирующего тела. Ширина коридора входа прямо зависит от гравитационного параметра μ_B центрального гравитирующего тела, плотности атмосферы и максимума допустимой перегрузки ЛА.

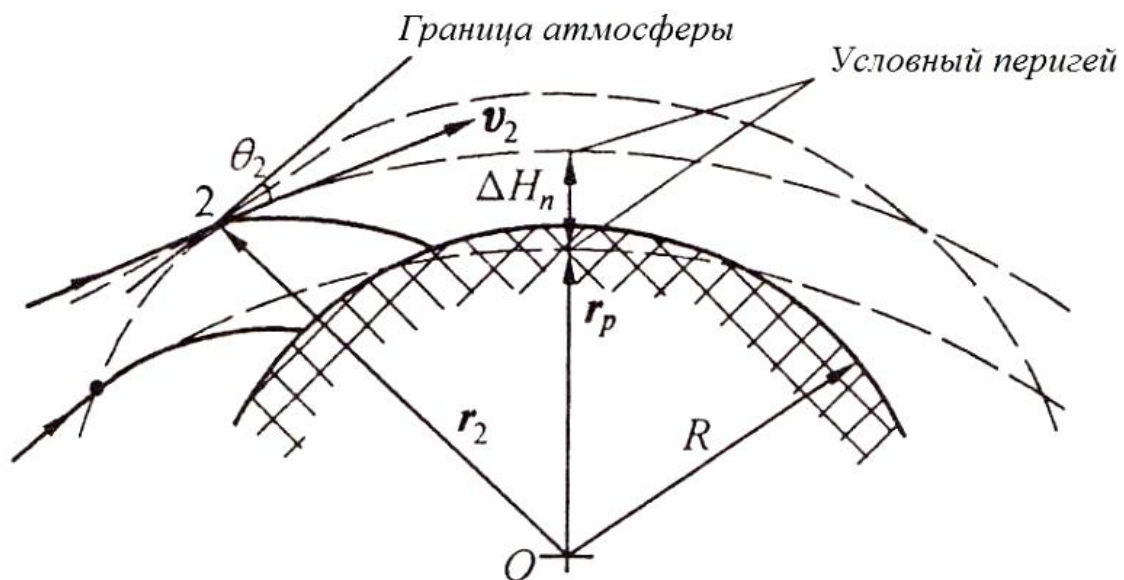


Рис. 9.9. Коридор входа
(пунктирная линия – граница атмосферы, точки – условные перицентры)

Ширину коридора входа можно определить по известному значению $n_{x\max}$. В таблицах 9.1 и 9.2 показаны коридоры входа в атмосферу планет для ЛА с баллистическим и полубаллистическим спуском.

Таблица 9.1. Коридоры входа для ЛА с баллистическим спуском

Планеты назначения	Коридоры входа ΔH_n , км			
	$n_{x\max}$			
	5	10	20	40
Земля	0	11.3	32.2	113
Венера	0	12.9	37	129
Марс	340	645	2000	3540
Юпитер	0	0	0	16.1

Таблица 9.2. Коридоры входа для ЛА с полубаллистическим спуском

Планеты назначения	Коридоры входа ΔH_n , км								
	$n_{x\max}$								
	5			10			20		
	К								
	0	1	>1	0	1	>1	0	1	>1
Земля	0	43.5	55	11.3	82	105	32.2	161	210
Венера	0	43.5	58	12.9	84	113	37	169	226
Марс	340	483	595	645	885	1160	2000	1900	2800
Юпитер	0	55	67.6	0	84	113	0	145	193

Из таблиц видно, что в большинстве случаев коридоры входа в атмосферу Юпитера являются самыми узкими, а для Марса – самыми широкими. Причина в том, что атмосферы вокруг Марса разреженная, а вокруг Юпитера плотная. Также у Юпитера больше гравитационная сила. При появлении у ЛА аэродинамического качества при той же допускаемой перегрузке коридоры входа значительно расширились.

Б. Характеристики аэродинамической перегрузки ЛА

Перегрузка ЛА меняется в процессе полета в атмосфере. Для разных ЛА и разных режимов спуска законы изменения перегрузки будут различны: величина пика перегрузки, продолжи-

тельность и т.д. На рис. 9.10 показан закон изменения перегрузки ЛА баллистического спуска по времени при разных начальных углах входа. Видно, что чем меньше $|\theta_2|$, тем меньше максимум перегрузки и позже момент ее появления. А для пилотируемого спуска должно выполняться условие $|\theta_2| \leq 2^\circ$. Как правило, для ЛА с баллистическим спуском должно выполняться условие $n_{x\max} > 7$, а время увеличится на 60 – 70 с при $n_x(t) > 5$. При уменьшении $|\theta_2|$ увеличится продолжительность полета, уменьшится $n_{x\max}$. Действительно, кроме θ_2 , начальные условия включают в себя v_2 и r_2 . Но так как r_2 задано, то только v_2 может изменяться в малом диапазоне и, таким образом, наибольшее влияние оказывает θ_2 .

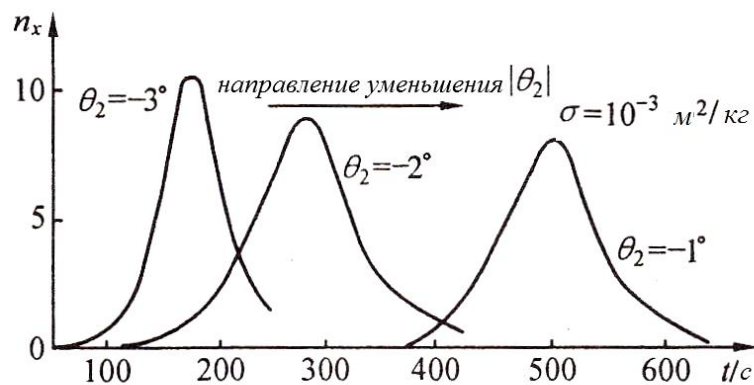


Рис. 9.10. Влияние $|\theta_2|$ на параметры спуска

На рис. 9.11 показаны кривые максимальных перегрузок для ЛА с различным аэродинамическим качеством. Можно четко проследить зависимости между максимальными перегрузками и режимами входа v_2 , θ_2 и K . Видно, что при $K = 0.25$ и $\theta_2 = -3^\circ \dots -1^\circ$ максимальная перегрузка $n_{x\max}$ не будет превышать 3.5; а при $K = 0.5$ $n_{x\max}$ будет не больше 2.5. При увеличении $|\theta_2|$ происходит быстрое увеличение $n_{x\max}$.

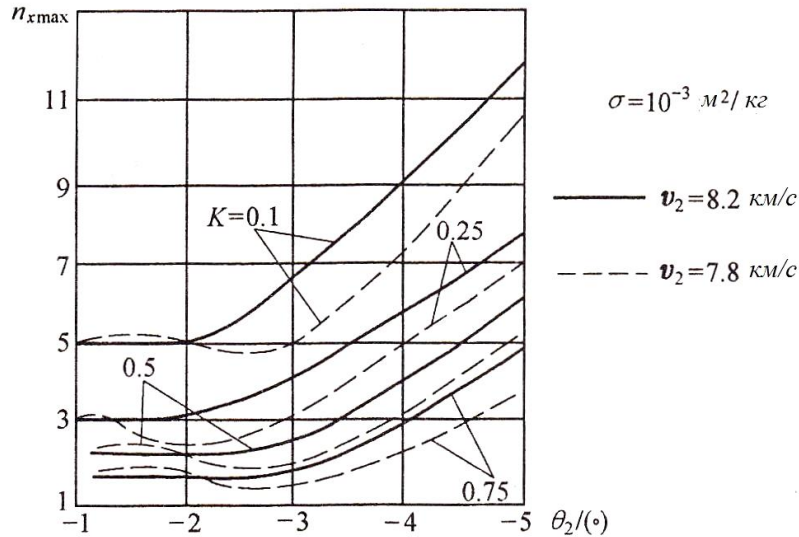


Рис. 9.11. Зависимость между перегрузкой и углами входа

На рис. 9.12 показаны кривые, соответствующие изменению перегрузок от времени для ЛА с различным аэродинамическим качеством. Прослеживается влияние угла входа θ_2 и K на характеристики перегрузки. С увеличением аэродинамического качества максимум перегрузки появляется позже и по величине уменьшается, продолжительность спуска значительно увеличивается. После $K > 0.25$ график носит колебательный характер и у n_x появляется несколько пиков.

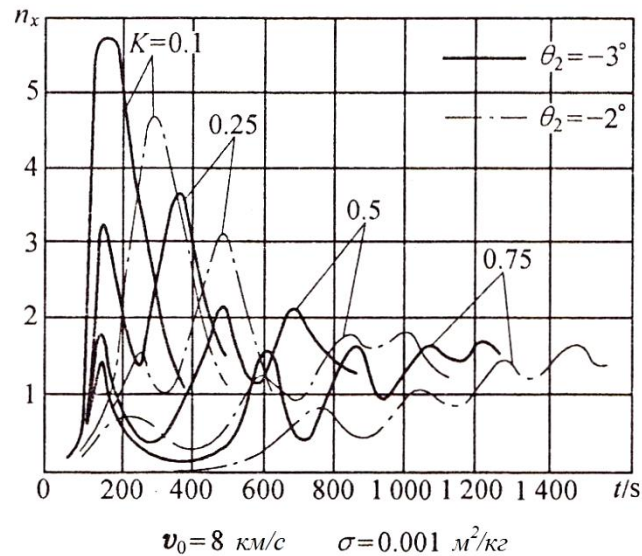


Рис. 9.12. Зависимость перегрузки от времени при различных значениях аэродинамического качества

Если спуск пилотируемый, необходимо учитывать максимум перегрузки, которую может выдержать экипаж, ее направление и время действия. На рис. 9.13 показаны зависимости между допустимой перегрузкой, ее направлением и времени воздействия. Здесь угол ν – угол между направлением перегрузки и продольной осью симметрии человеческого тела. Видно, что чем больше перегрузка, тем короче время, в течение которого человек может выдержать эту перегрузку. Чем ближе направления действия перегрузки к продольной оси симметрии человеческого тела, тем меньшую по величине перегрузку может выдержать человек. При проектировании сидения также необходимо учитывать эти факторы.

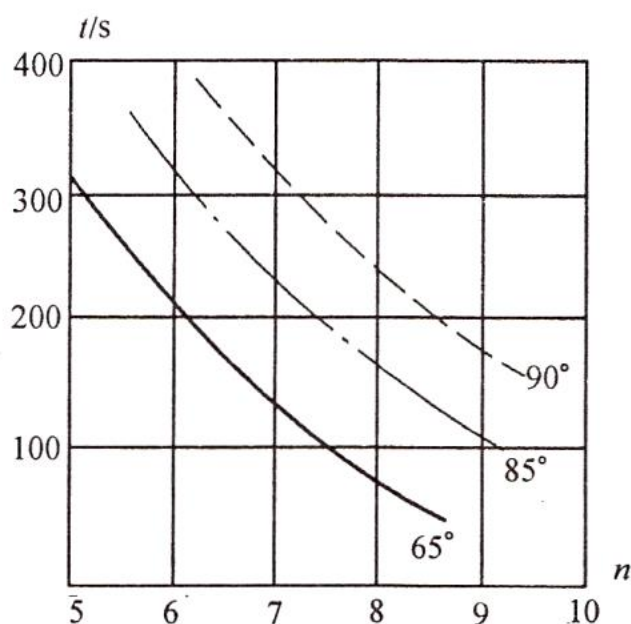


Рис. 9.13. Зависимости между перегрузкой и допустимым временем ее воздействия на человека

9.5.4 Многократный проход через атмосферу

При спуске ЛА ширина коридора повторного входа зависит от начальных условий входа в атмосферу (v_2 и θ_2) и от аэродинамического качества K и т. д. Скорость v_2 оказывает наибольшее влияние. Когда скорость ЛА близка ко второй космической скорости или даже превышает ее, ширина коридора входа обычно равна нескольким километрам или нулю, что создает большие трудности для управления таким КА. Такая ситуация возникает при возвращении ЛА с других планет на Землю или при полете к другим планетам.

Существует несколько способов решения указанной проблемы. Можно с помощью торможения добиться того, чтобы скорость входа ЛА в атмосферу была равна первой космической, однако это значительно увеличит массу ЛА. Другой способ заключается в повышении аэродинамического качества, например, до 1.0 – 1.2 (при значениях больше 1.2 расширение коридора входа не происходит), но в этом случае ЛА должен иметь специальную форму, что увеличивает массу ЛА и теплозащиты. Третий способ предполагает использование более совершенных методов управления низким коридором входа, что также ведет к увеличению массы ЛА. Четвертый способ – многократный проход через атмосферу, что приводит к замедлению ЛА за счет сопротивления атмосферы. Из рис. 9.14 видно, что ЛА входит в атмосферу в точке 2, затем траектория делится на три участка: 2-3 – участок замедления ЛА в атмосфере; 3-4 – участок полета за границей атмосферы; 4-5 – участок повторного входа в атмосферу до момента посадки.

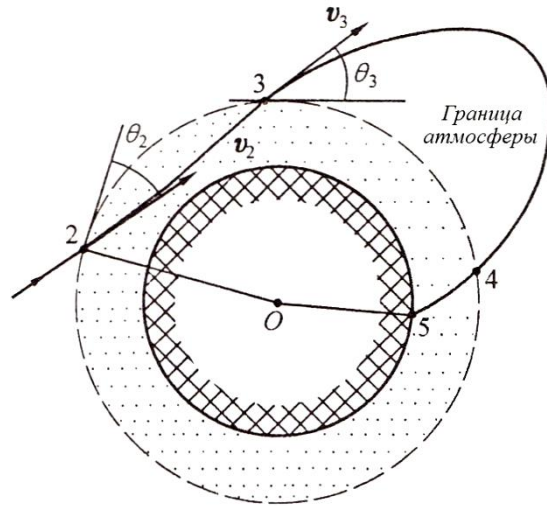


Рис. 9.14. Основные участки многократного прохода через атмосферу

Первый участок 2-3 является наиболее важным, т. к. величина и направление скорости в точке 3 определяют движение ЛА на участке 3-4 и 4-5. Если погрешность скорости составляла 1 м/с, погрешность по углу входа 0.01° , то погрешность точки посадки составит 25 км, а смещение участка 4-5 около ± 400 км.

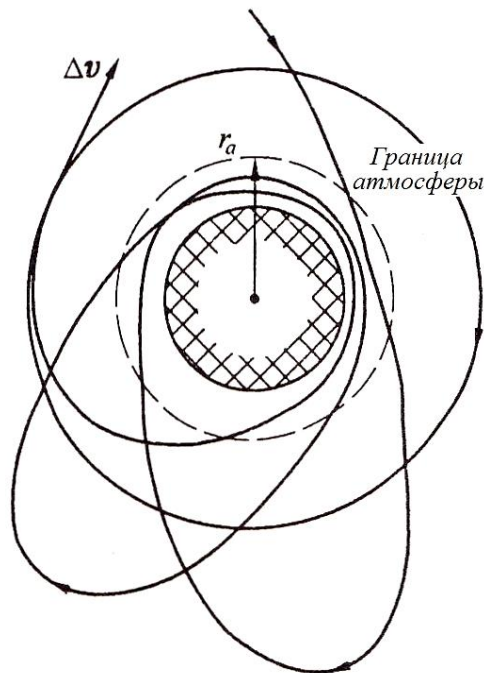


Рис. 9.15. Многократный проход через атмосферу

При входе ЛА в атмосферу планеты со скоростью, близкой ко второй космической или больше ее, обычно требуется не менее двух проходов через атмосферу. Из рис. 9.15 видно, что ЛА проходит через атмосферу три раза. После первого входа в атмосферу и замедления орбита ЛА приобрела более вытянутую форму, после второго и третьего входов орбита под действием аэродинамического сопротивления стала малой эллиптической, после чего ЛА перешел на круговую орбиту вокруг центрального гравитирующего тела с малой скоростью Δv . По этой орбите ЛА либо будет двигаться, либо ждать возможности войти в атмосферу и совершить посадку на планету.

ЧАСТЬ 2
ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС

10 КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ ЛА ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС

Кинематика движения ЛА вокруг центра масс – наука, изучающая законы изменения угловой скорости и углового ускорения при движении ЛА вокруг центра масс в орбитальном полете.

10.1 Основные системы координат

Инерциальная система координат

Основные законы динамики движения ЛА в инерциальной системе координат – три закона Ньютона, описывающие движение тел в инерциальном пространстве. Инерциальное пространство – пространство статического или равномерного прямолинейного движения. Понятия движения и неподвижности относительно. Например, человек в автомобиле неподвижен, дерево также неподвижно. А если посмотреть на автомобиль с платформы или на Землю из космоса, то человек в автомобиле и дерево движутся. Поэтому инерциальное пространство также относительно. В инженерной практике считается, что пространство движется с некоторым ускорением, которое достаточно мало, по сравнению с ускорением объекта исследования, и им можно пренебречь. Это не повлияет на точность решения задач в инерциальном пространстве. Например, удобно выбрать геоцентрическую инерциальную систему координат для изучения движения спутника Земли, гелиоцентрическую инерциальную систему координат – для изучения межпланетных перелетов.

Геоцентрическая инерциальная система координат $EX_1Y_1Z_1$

Начало координат находится в центре Земли (рис. 10.1). Ось EZ_1 совпадает с осью вращения Земли и направлена на север; ось

EX_1 направлена к точке весеннего равноденствия; ось EY_1 дополняет систему до правой прямоугольной. Очевидно, что плоскость EX_1Y_1 – экваториальная плоскость.

Орбитальная система координат $OX_0Y_0Z_0$

Эта система координат задается центром Земли и орбитальной плоскостью. Как известно, орбитальная плоскость проходит через центр Земли, поэтому орбитальная скорость и линия между центром Земли и ЛА должны лежать в орбитальной плоскости. Начало координат – точка O – находится в центре масс ЛА. Ось OZ_0 направлена к центру Земли (точка E) – это положительное направление. В орбитальной плоскости ось OX_0 направлена в сторону движения ЛА. Ось OY_0 дополняет систем до правой (рис. 10.1). Очевидно, что OY_0 – нормаль к орбитальной плоскости, а ось OX_0 – касательная для круговой орбиты.

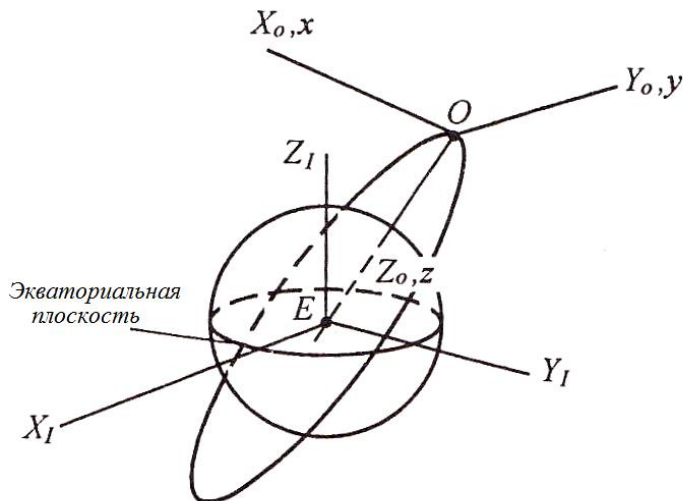


Рис. 10.1. Геоцентрическая инерциальная и орбитальная системы координат

Связанная система координат $Oxyz$

Эта система координат постоянно связана с КА и совпадает с системой $OX_0Y_0Z_0$, когда КА не вращается и находится в идеаль-

ном устойчивом состоянии. Обычно у КА есть продольная ось и продольная плоскость симметрии. Ось Ox совпадает с продольной осью КА и направлена вперед по ходу движения. Ось Oy перпендикулярна продольной плоскости симметрии. Ось Oz дополняет систему до правой. Под действием возмущающих сил и моментов КА будет совершать угловое движение, и тогда система координат $Oxyz$ не будет совпадать с $Ox_0Y_0Z_0$. Угол поворота КА вокруг оси Ox называется углом крена. Углы поворота вокруг осей Oy и Oz называются соответственно углами тангажа и рыскания. Эти три оси называются осью крена, осью тангажа и осью рыскания соответственно.

Связанная фиксированная система координат $Ox_b y_b z_b$

Связанная фиксированная система координат полностью совпадает с системой координат $Oxyz$, если КА не совершает вращательного движения. В действительности же КА совершает вращательные движения относительно осей системы координат $Oxyz$, например, для решения задач наведения. В таком случае оси систем координат $Ox_b y_b z_b$ и $Oxyz$ не будут совпадать. Таким образом, система координат $Ox_b y_b z_b$ выполняет движение ориентации относительно $Oxyz$. Чаще всего вращение происходит относительно оси Oy .

10.2 Углы Эйлера и матрица преобразования координат

Углы Эйлера устанавливают связь между орбитальной $Ox_0Y_0Z_0$ и связанной $Oxyz$ системами координат. В идеальном случае оси этих систем координат совпадают, при воздействии возмущений или управляющего момента они перестают совпадать. Иногда это делается преднамеренно для решения ряда задач. Пусть системы координат $Ox_0Y_0Z_0$ и $Oxyz$ не совпадают. Тогда

связь между этими системами координат может быть описана углами Эйлера.

Известно, что если угловую скорость рассматривать как вектор, то угловая скорость КА, вращающегося вокруг двух пересекающихся осей, может быть получена путем геометрического сложения угловых скоростей вращения КА относительно каждой из этих осей. Общий угол поворота зависит не только от величин углов поворота вокруг соответствующих осей, но и от порядка этих поворотов. Поэтому при использовании углов Эйлера для описания вращательного движения КА мы должны учитывать порядок поворота вокруг осей.

Сначала считаем, что системы $Oxyz$ и $OX_0Y_0Z_0$ совпадают. Затем делаем поворот на угол φ вокруг оси OX_0 , получаем промежуточную систему координат $Ox_1y_1z_1$. Затем поворот на угол ϑ вокруг оси Oy_1 , получаем систему координат $Ox_2y_2z_2$. Наконец, делаем поворот на угол ψ вокруг оси Oz_2 , получаем систему координат $Oxyz$. Запишем кратко:

$$x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow z(\psi).$$

Всего имеем 12 преобразований координат:

$$\begin{aligned} &x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow z(\psi), x(\varphi) \rightarrow z(\psi) \rightarrow y(\vartheta), \\ &x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\psi), x(\varphi) \rightarrow z(\psi) \rightarrow x(\vartheta), \\ &y(\vartheta) \rightarrow z(\psi) \rightarrow x(\varphi), y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow z(\psi), \\ &y(\vartheta) \rightarrow z(\psi) \rightarrow y(\varphi), y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow y(\psi), \\ &z(\psi) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta), z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi), \\ &z(\psi) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow z(\vartheta), z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow z(\varphi). \end{aligned}$$

Матрица преобразования координат

Рассмотрим построение матрицы для следующих поворотов $z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi)$ (рис. 10.2). Сначала выполняется поворот вокруг оси Oz_0 на угол ψ с угловой скоростью $\dot{\psi}$, получаем новую систему координат $Ox_1y_1z_1$. Далее производится поворот вокруг оси Oy_1 на угол ϑ с угловой скоростью $\dot{\vartheta}$, получаем систему $Ox_2y_2z_2$. Наконец, выполняется поворот вокруг оси Ox_2 на угол φ с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, получаем систему координат $Oxyz$.

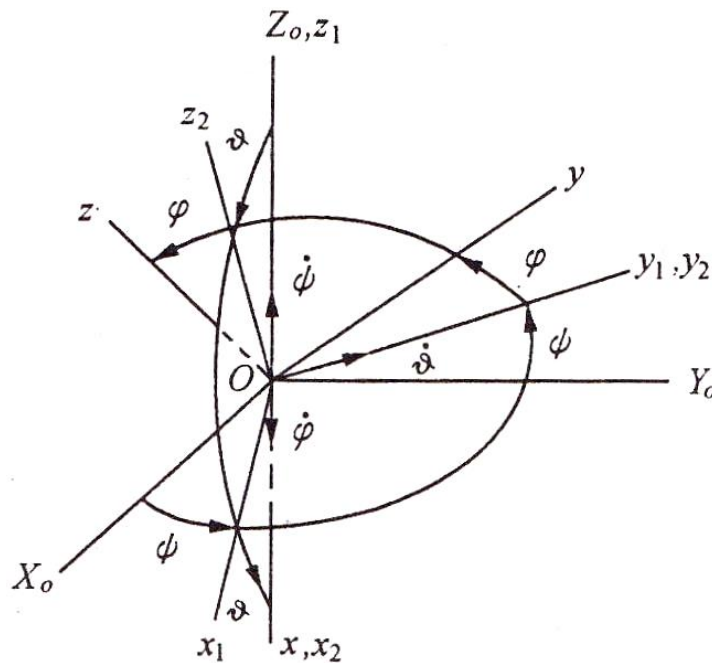


Рис. 10.2. Процесс перехода между системами координат $OX_0Y_0Z_0 \rightarrow Oxyz$

Получим матрицу преобразования координат для перехода $OX_0Y_0Z_0 \rightarrow Ox_1y_1z_1$ (рис. 10.3). Выберем в пространстве некоторую точку P . Пусть $z_1 = z_0$. Следовательно, необходимо выполнить только два поворота. P_1 – проекция точки P на плоскость OX_0Y_0 . Из рис. 10.2 получим геометрические соотношения:

$$x_1 = X_0 \cos \psi + Y_0 \sin \psi,$$

$$y_1 = -X_0 \sin \psi + Y_0 \cos \psi.$$

Таким образом, получим:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}.$$

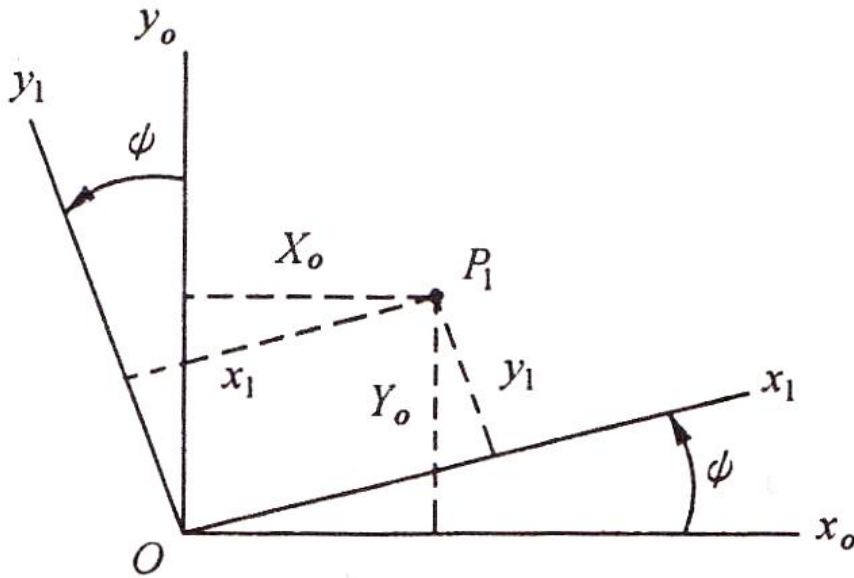


Рис. 10.3. К выводу матрицы преобразования координат $OX_0Y_0Z_0 \rightarrow OX_1Y_1Z_1$

Пусть $\underline{X}_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$ и $\underline{X}_0 = [X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T$, обозначим через \underline{C}_{10} матрицу перехода из системы $OX_0Y_0Z_0$ в $OX_1Y_1Z_1$. Тогда формулу, описывающую связь между этими системами координат, можно переписать следующим образом:

$$\underline{X}_1 = \underline{C}_{10} \underline{X}_0, \quad (10.1)$$

где

$$\underline{C}_{10} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.2)$$

Аналогично, если x_2 , y_2 и z_2 – координаты точки P в системе $Ox_2y_2z_2$, т. е. $\underline{X}_2 = [x_2 \ y_2 \ z_2]^T$, а \underline{C}_{21} – матрица перехода из системы $Ox_1y_1z_1$ в $Ox_2y_2z_2$, тогда можно записать:

$$\underline{X}_2 = \underline{C}_{21} \underline{X}_1. \quad (10.3)$$

$$\underline{C}_{21} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

Наконец, если x , y и z – координаты точки P в системе $Oxyz$, а $\underline{X} = [x \ y \ z]^T$, \underline{C}_{x2} – матрица перехода из $Ox_2y_2z_2$ в $Oxyz$:

$$\underline{X} = \underline{C}_{x2} \underline{X}_2. \quad (10.5)$$

$$\underline{C}_{x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (10.6)$$

Если \underline{C}_{x0} – матрица перехода из $Ox_0y_0z_0$ в $Oxyz$, то

$$\underline{X} = \underline{C}_{x0} \underline{X}_0. \quad (10.7)$$

С помощью формул (10.1), (10.3), (10.5) получим

$$\underline{X} = \underline{C}_{x2} \underline{C}_{21} \underline{C}_{10} \underline{X}_0. \quad (10.8)$$

Сравнивая два последних выражения, запишем

$$\underline{C}_{x0} = \underline{C}_{x2} \underline{C}_{21} \underline{C}_{10}. \quad (10.9)$$

Подставим (10.2), (10.4) и (10.6), получим матрицу:

$$\underline{C}_{x0} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \sin \psi + \sin \varphi \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \cos \psi + \sin \varphi \sin \vartheta \sin \psi & \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi + \cos \varphi \sin \vartheta \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi & \cos \varphi \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

В процесс перехода из системы $OX_0Y_0Z_0$ в $Oxyz$ используются также угловые скорости $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ поворота КА относительно трех осей. Угловые скорости можно рассматривать как векторы. Их векторная сумма равна полной угловой скорости системы. Часто используются компоненты вектора угловой скорости в системе координат $Oxyz$: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Таким образом, $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}$ – компоненты угловой скорости поворота соответственно вокруг осей Ox_2 и Oy_2 в системе координат $Ox_2y_2z_2$; $\dot{\psi}$ – компонента угловой скорости поворота относительно оси OZ_1 в системе координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 10.2).

Получим выражения для компонент $\omega_x, \omega_y, \omega_z$:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \underline{C}_{x2} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{C}_{x2} \underline{C}_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (10.11)$$

Подставим (10.6) и (10.4) в (10.11), получим:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

Здесь $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты угловой скорости при переходе между системами координат $Ox_0Y_0Z_0 \rightarrow Oxuz$. Их векторная сумма $\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$ называется угловой скоростью ориентации КА. Углы φ, ψ, ϑ называются углами ориентации КА; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы вдоль осей Ox, Oy, Oz .

Так как матрица преобразования координат ортогональная, то обратная и транспонированная матрицы равны:

$$\underline{C}_{ij} = (\underline{C}_{ji})^{-1} = (\underline{C}_{ji})^T. \quad (10.13)$$

Здесь \underline{C}_{ij} – матрица перехода из системы координат j в систему i ; \underline{C}_{ji} – матрица перехода из системы координат i в систему j . Эти матрицы обратные, но их можно просто транспонировать по формуле (10.13), что существенно упрощает процесс расчета.

Обратим внимание на то, что матрица преобразования (10.12) не ортогональна, поскольку геометрически компоненты $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ не являются перпендикулярными. Поэтому матрицу нельзя просто транспонировать, а следует записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (10.14)$$

Необходимо вычислить обратную матрицу для (10.14):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos \vartheta} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 & \cos \vartheta \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (10.15)$$

Здесь $\frac{1}{\cos \vartheta}$ означает, что при $\vartheta = 90^\circ$ матрица является сингулярной, и выражение (10.15) не имеет смысла. В этом состоит недостаток метода углов Эйлера. Во избежание сингулярности для преобразования координат могут быть использованы кватернионы.

Система координат $OX_0Y_0Z_0$ вращается вместе с КА в направлении, противоположном оси OY_0 , вокруг геоцентрической инерциальной системы координат с угловой скоростью ω_0 . Получим угловую скорость КА в геоцентрической системе координат. Ее компоненты в системе координат $Oxyz$: $\omega_x^*, \omega_y^*, \omega_z^*$.

$$\begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} = \underline{C}_{x2} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{C}_{x2} \underline{X}_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - \underline{C}_{x0} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.16)$$

Здесь ω_0 – орбитальная угловая скорость движения центра масс КА относительно Земли; $\omega_0 = \dot{\theta}$, где θ – угол истинной аномалии. Момент количества движения и радиус орбиты КА определяются выражениями: $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$, $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$. Тогда

$$\omega_0 = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos \theta)^2. \quad (10.17a)$$

Здесь p – фокальный параметр; μ – гравитационный параметр центрального гравитирующего тела.

Если орбита круговая, то $R = p$, и тогда:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}. \quad (10.176)$$

Для околокруговой орбиты имеем

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} (1 + 2e \cos \theta). \quad (10.17B)$$

Подставив (10.4), (10.6) и (10.10) в (10.16), получим:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \mathcal{G} \\ 0 & \cos \varphi & \cos \mathcal{G} \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \mathcal{G} \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\mathcal{G}} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G} \sin \psi \\ \cos \mathcal{G} \cos \psi + \sin \varphi \sin \mathcal{G} \sin \psi \\ -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \mathcal{G} \sin \psi \end{bmatrix} \omega_0. \end{aligned} \quad (10.18)$$

И наоборот, при известных $\omega_x^*, \omega_y^*, \omega_z^*$ для нахождения $\dot{\varphi}, \dot{\mathcal{G}}, \dot{\psi}$, подставляя (10.15) в (10.18), можно получить:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\mathcal{G}} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\cos \mathcal{G}} \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G} & \sin \mathcal{G} \sin \varphi & \sin \mathcal{G} \cos \varphi \\ 0 & \cos \mathcal{G} \cos \varphi & -\cos \mathcal{G} \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{\cos \mathcal{G}} \begin{bmatrix} \sin \psi \\ \cos \mathcal{G} \cos \psi \\ \sin \mathcal{G} \sin \psi \end{bmatrix} \omega_0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Формулы (10.18) и (10.19) определяют связь между угловыми скоростями $\omega_x^*, \omega_y^*, \omega_z^*$ и $\dot{\varphi}, \dot{\mathcal{G}}, \dot{\psi}$ КА относительно инерциального

пространства. Они отличаются от выражений (10.12) и (10.14) наличием орбитальной скорости ω_0 .

Матрица преобразования координат представляет собой тригонометрические функции углов Эйлера, поэтому дифференциальные уравнения движения являются нелинейными, что делает расчеты очень трудоемкими. Однако если углы Эйлера достаточно малы, то системы координат $Oxyz$ и $OX_0Y_0Z_0$ будут практически совпадать. Тогда можно считать, что $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$ (α – любой угол, определяющий положение КА). Опуская малые второго порядка, перепишем выражения (10.10) и (10.18) в виде:

$$\underline{C}_{x0} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\vartheta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \vartheta & -\varphi & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.20)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi \\ 1 \\ -\varphi \end{bmatrix} \omega_0. \quad (10.21)$$

Сделаем перестановку, получим:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi \\ 1 \\ -\varphi \end{bmatrix} \omega_0. \quad (10.22)$$

В приведенном выше примере рассматривалась матрица преобразования координат для последовательности поворотов $z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi)$. В таблице 10.1 приведены 12 видов матрицы

преобразования координат \underline{C}_{x0} ($OX_0Y_0Z_0 \rightarrow Oxyz$). В таблице 10.2 приведены соответствующие матрицы преобразования угловых скоростей положения КА.

Если орбитальная угловая скорость ω_0 не учитывается или ее влияние рассматривается отдельно, то выражения (10.21) и (10.22) можно переписать в виде:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (10.23)$$

В случае малых углов последовательность поворотов не влияет на результат.

$$\underline{\Phi} = (\varphi \quad \vartheta \quad \psi)^T. \quad (10.24)$$

Тогда формулу (10.20) можно записать в виде:

$$\underline{C}_{x0} = \underline{E} - \underline{\Phi}^x. \quad (10.25)$$

Здесь \underline{E} – единичная матрица размерности 3x3.

Выражение (10.23) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = (\underline{E} - \underline{\Phi}^x) \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (10.26)$$

Таблица 10.1. Матрицы преобразования координат

Последовательность поворотов	Матрицы \underline{C}_{x_0} для перехода $OX_0Y_0Z_0 \rightarrow Oxyz$
$x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow z(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi \cos\vartheta & \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\vartheta \sin\varphi & \sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \sin\vartheta \cos\varphi \\ -\sin\psi \cos\vartheta & \cos\psi \cos\vartheta - \sin\psi \sin\vartheta \sin\varphi & \cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \sin\varphi & \cos\vartheta \cos\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi) \rightarrow z(\psi) \rightarrow y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\psi \cos\vartheta & \cos\vartheta \sin\psi \cos\varphi + \sin\vartheta \sin\varphi & \cos\vartheta \sin\psi \sin\varphi - \sin\vartheta \cos\varphi \\ -\sin\psi & \cos\psi \cos\varphi & \cos\psi \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cos\psi & \sin\vartheta \sin\psi \cos\varphi - \cos\vartheta \sin\varphi & \sin\vartheta \sin\psi \sin\varphi + \cos\vartheta \cos\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \sin\varphi & -\sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\psi \sin\vartheta & \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\vartheta \sin\varphi & \cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\psi \sin\vartheta & -\sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \cos\vartheta \sin\varphi & -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\vartheta \cos\varphi \end{matrix}$
$x(\varphi) \rightarrow z(\psi) \rightarrow x(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\psi & \sin\psi \cos\varphi & -\sin\psi \sin\varphi \\ -\cos\vartheta \sin\psi & \cos\vartheta \cos\psi \cos\varphi - \sin\vartheta \sin\varphi & \cos\vartheta \sin\psi \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\psi & -\sin\vartheta \cos\psi \cos\varphi - \cos\vartheta \sin\varphi & -\sin\vartheta \cos\psi \sin\varphi + \cos\vartheta \cos\varphi \end{matrix}$
$y(\vartheta) \rightarrow z(\psi) \rightarrow x(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\psi \cos\vartheta & \sin\psi & -\cos\psi \sin\vartheta \\ -\cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta + \sin\varphi \sin\vartheta & \cos\varphi \cos\psi & \cos\varphi \sin\psi \sin\vartheta + \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta + \cos\varphi \sin\vartheta & -\sin\varphi \cos\psi & -\sin\varphi \sin\psi \sin\vartheta + \cos\varphi \cos\vartheta \end{matrix}$
$y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow z(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi \cos\vartheta + \sin\psi \sin\varphi \sin\vartheta & \sin\psi \cos\varphi & -\cos\psi \sin\vartheta + \sin\psi \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\psi \cos\vartheta + \cos\psi \sin\varphi \sin\vartheta & \cos\varphi \cos\psi & \sin\psi \sin\vartheta + \cos\psi \sin\varphi \cos\vartheta \\ \cos\varphi \sin\vartheta & -\sin\varphi & \cos\varphi \cos\vartheta \end{matrix}$
$y(\vartheta) \rightarrow z(\psi) \rightarrow y(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta - \sin\varphi \sin\vartheta & \cos\varphi \sin\psi & -\cos\varphi \cos\psi \sin\vartheta - \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\psi \cos\vartheta & \cos\psi & \sin\psi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta + \cos\varphi \sin\vartheta & \sin\varphi \sin\psi & -\sin\varphi \cos\psi \sin\vartheta + \cos\varphi \cos\vartheta \end{matrix}$
$y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow y(\psi)$	$\begin{matrix} \cos\psi \cos\vartheta - \sin\psi \cos\varphi \sin\vartheta & \sin\psi \sin\varphi & -\cos\psi \sin\vartheta - \sin\psi \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta & \cos\varphi & \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\psi \cos\vartheta + \cos\psi \cos\varphi \sin\vartheta & -\cos\psi \sin\varphi & -\sin\psi \sin\vartheta + \cos\psi \cos\varphi \cos\vartheta \end{matrix}$
$z(\psi) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta \cos\psi - \sin\vartheta \sin\varphi \sin\psi & \cos\vartheta \sin\psi + \sin\vartheta \sin\varphi \cos\psi & -\sin\vartheta \cos\varphi \\ -\cos\varphi \sin\psi & \cos\varphi \cos\psi & \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cos\psi + \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi & \sin\vartheta \sin\psi - \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi & \cos\vartheta \cos\varphi \end{matrix}$
$z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta \cos\psi & \cos\vartheta \sin\psi & -\sin\vartheta \\ -\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \sin\vartheta \cos\psi & \cos\vartheta \cos\psi + \sin\varphi \sin\vartheta \sin\psi & \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \sin\vartheta \cos\psi & -\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\vartheta \sin\psi & \cos\vartheta \cos\vartheta \end{matrix}$
$z(\psi) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos\vartheta \cos\psi - \sin\vartheta \cos\varphi \sin\psi & \cos\vartheta \sin\psi + \sin\vartheta \cos\varphi \cos\psi & \sin\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \cos\psi - \cos\vartheta \sin\psi & -\sin\vartheta \sin\psi + \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi & \cos\vartheta \sin\varphi \\ \sin\varphi \sin\psi & -\sin\varphi \cos\psi & \cos\varphi \end{matrix}$
$z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow z(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos\varphi \cos\vartheta \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi & \cos\varphi \cos\vartheta \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi & -\cos\varphi \sin\vartheta \\ -\sin\varphi \cos\vartheta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi & -\sin\varphi \cos\vartheta \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi & \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \cos\psi & \sin\vartheta \sin\psi & \cos\vartheta \end{matrix}$

Таблица 10.2 – Матрицы преобразования угловых скоростей

Последовательность поворотов	$(\dot{\varphi} \dot{\vartheta} \dot{\psi})^T \rightarrow (\omega_x \omega_y \omega_z)^T$	$\omega_0 \rightarrow (\omega_x^* \omega_y^* \omega_z^*)^T$
$x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow z(\psi)$	$\begin{matrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \cos \psi & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{matrix}$
$x(\varphi) \rightarrow z(\psi) \rightarrow y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos \vartheta \cos \psi & 0 & -\sin \vartheta \\ -\sin \psi & 1 & 0 \\ \sin \vartheta \cos \psi & 0 & \cos \vartheta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \psi \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi \end{matrix}$
$x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\psi)$	$\begin{matrix} \cos \vartheta & 0 & 1 \\ \sin \psi \sin \vartheta & 1 & 0 \\ \cos \psi \sin \vartheta & -\sin \psi & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi \end{matrix}$
$x(\varphi) \rightarrow z(\psi) \rightarrow x(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos \psi & 1 & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & 0 & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \psi & 0 & \cos \vartheta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin \varphi \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \cos \psi \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi \end{matrix}$
$y(\vartheta) \rightarrow z(\psi) \rightarrow x(\varphi)$	$\begin{matrix} 1 & \sin \psi & 0 \\ 0 & \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \end{matrix}$
$y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow z(\psi)$	$\begin{matrix} \cos \psi & \sin \psi \cos \varphi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi \cos \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \psi & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\sin \psi \cos \varphi \\ -\cos \psi \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{matrix}$
$y(\vartheta) \rightarrow z(\psi) \rightarrow y(\varphi)$	$\begin{matrix} \cos \varphi & \cos \varphi \sin \psi & -\sin \psi \\ 0 & \cos \psi & 0 \\ \sin \varphi & \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos \varphi \sin \psi \\ -\cos \psi \\ -\sin \varphi \sin \psi \end{matrix}$
$y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow y(\psi)$	$\begin{matrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \sin \varphi \\ 0 & 1 & \cos \varphi \\ \sin \psi & 0 & -\cos \psi \cos \varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$
$z(\psi) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 & 1 & \sin \varphi \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \cos \varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos \varphi \sin \psi - \sin \vartheta \sin \varphi \cos \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi \\ -\sin \vartheta \sin \psi + \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi \end{matrix}$
$z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi)$	$\begin{matrix} 1 & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos \vartheta \cos \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi \end{matrix}$
$z(\psi) \rightarrow x(\varphi) \rightarrow y(\vartheta)$	$\begin{matrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 & 1 & \cos \varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos \vartheta \sin \psi - \sin \vartheta \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \vartheta \sin \psi - \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \end{matrix}$
$z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow z(\varphi)$	$\begin{matrix} 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ 1 & 0 & \cos \varphi \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \\ -\sin \vartheta \sin \psi \end{matrix}$

Полученный результат верен для всех двенадцати формул преобразования координат. Читатель может это проверить для формул из таблиц 10.1 и 10.2.

10.3 Переход от связанной $Oxyz$ к фиксированной системе координат $Ox_b y_b z_b$

Ранее мы рассмотрели связь между системами координат $Oxyz$ и $OX_0Y_0Z_0$. В этом разделе будет исследоваться взаимосвязь между системами $Oxyz$ и $Ox_b y_b z_b$.

КА может вращаться вокруг любой оси системы, но здесь мы рассмотрим только поворот вокруг оси Oy . Обычно при вращении объекта его можно стабилизировать только путем вращения вокруг определенной главной оси инерции. Чаще всего в качестве этой главной оси инерции используется ось симметрии КА.

Если система координат $Ox_b y_b z_b$ вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вокруг оси Oy (рис. 10.4), то матрица преобразования координат \underline{C}_{bx} ($Oxyz \rightarrow Ox_b y_b z_b$) запишется в виде:

$$\underline{C}_{bx} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \nu_0) & 0 & -\sin(\Omega t + \nu_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Omega t + \nu_0) & 0 & \cos(\Omega t + \nu_0) \end{bmatrix}. \quad (10.27)$$

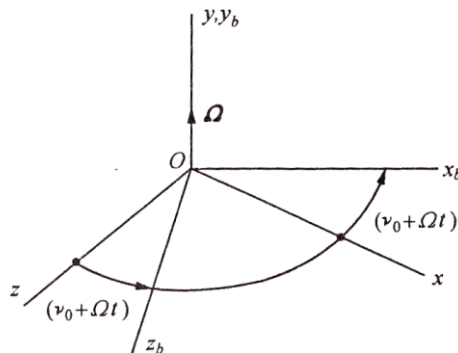


Рис. 10.4. К выводу матрицы перехода $Oxyz \rightarrow Ox_b y_b z_b$

Здесь ν_0 – начальный угол между двумя системами координат в момент времени $t = 0$. Обычно этот угол равен нулю.

Так как система координат $Oxuz$ жестко связана с КА и на его борту нет активных объектов (космонавтов, перелива топлива и т. д.), то момент инерции КА не изменяется. Тогда матрица компонент угловой скорости будет постоянной. Если КА вращается, матрица моментов инерции будет постоянной в фиксированной системе координат $Ox_b y_b z_b$, а в связанной $Oxuz$ будет периодически меняться.

Обозначим через \underline{J}_b и \underline{J} матрицы моментов инерции соответственно в системах координат $Ox_b y_b z_b$ и $Oxuz$. Тогда по формулам (ПЗ.26) и (П4.2), приведенным в Приложениях 3 и 4 соответственно, получим:

$$\underline{J} = \underline{C}_{xb} \underline{J}_b \underline{C}_{bx}.$$

Если \underline{J}_b – матрица главных моментов инерции, то она имеет вид

$$\underline{J}_b = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix},$$

тогда при $v_0 = 0$ получим

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x \cos^2 \Omega t + J_z \sin^2 \Omega t & 0 & (J_z - J_x) \cos \Omega t \sin \Omega t \\ 0 & J_y & 0 \\ (J_z - J_x) \cos \Omega t \sin \Omega t & 0 & J_x \sin^2 \Omega t + J_z \cos^2 \Omega t \end{bmatrix}.$$

Если КА с однородной массой вращается вокруг оси Oy , то $J_x = J_z = J_t$. Любой момент инерции, перпендикулярный оси вращения, равен J_t . Тогда

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_t & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_t \end{bmatrix}.$$

Эта матрица полностью совпадает с матрицей \underline{J}_b .

Пренебрежем орбитальной угловой скоростью ω_0 , тогда сумма угловой скорости ориентации КА $\bar{\omega} = \dot{\phi} + \dot{\vartheta} + \dot{\psi}$ и угловой скорости вращения $\bar{\Omega}$ равна $\bar{\omega} + \bar{\Omega}$. Если углы ориентации КА и угловые скорости малы, то, как известно из раздела 10.2, $\bar{\omega} = \bar{e}^T \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^T$. Тогда угловая скорость вращения КА $\bar{\omega} + \bar{\Omega}$ в фиксированной системе координат $Ox_b y_b z_b$ (при $v_0 = 0$):

$$\underline{C}_{bx} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} + \Omega \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \cos \Omega t - \dot{\psi} \sin \Omega t \\ \dot{\vartheta} + \Omega \\ \dot{\phi} \sin \Omega t + \dot{\psi} \cos \Omega t \end{bmatrix}.$$

Видно, что компоненты по осям Ox_b и Oz_b также периодически меняются.

11 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС

Динамика движения летательного аппарата относительно центра масс исследует связь между ориентацией аппарата и моментами, действующими на него.

11.1 Кинетическая энергия

На рис. 11.1 показано твердое тело B , движущееся в инерциальном пространстве с угловой скоростью $\bar{\omega}$; P – некоторая фиксированная точка внутри него. \bar{R}_p – радиус-вектор точки P относительно инерциальной точки отсчета O . В точке P задан фиксированный базисный вектор $\bar{e} = [\bar{i} \ \bar{j} \ \bar{k}]^T$. dm – масса отдельного бесконечно малого элемента тела B . Радиус-вектор этой элементарной массы относительно точки P – \bar{r} , а относительно точки O – $\bar{\rho} = \bar{R}_p + \bar{r}$. Абсолютная скорость элементарной массы dm – $\bar{v} = \dot{\bar{\rho}} = \dot{\bar{R}}_p + \dot{\bar{r}}$. Здесь $\dot{\bar{R}}_p$ – скорость точки P относительно инерциального пространства; $\dot{\bar{r}}$ – скорость элементарной массы dm относительно точки P в инерциальном пространстве. Разложим $\dot{\bar{r}}$ с помощью формулы (П5.3), приведенной в Приложении 5, на скорость относительно точки P и скорость, полученную в результате вращения тела B : $\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}} + \bar{\omega} \times \bar{r}$. Здесь $\dot{\bar{r}} = 0$, т. к. элементарная масса dm неподвижна относительно точки P (тело твердое). Тогда абсолютная скорость dm будет определяться выражением:

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}}_p + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_p + \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (11.1)$$

а ее кинетическая энергия: $dT = \frac{1}{2} \bar{v} \cdot \bar{v} dm$.

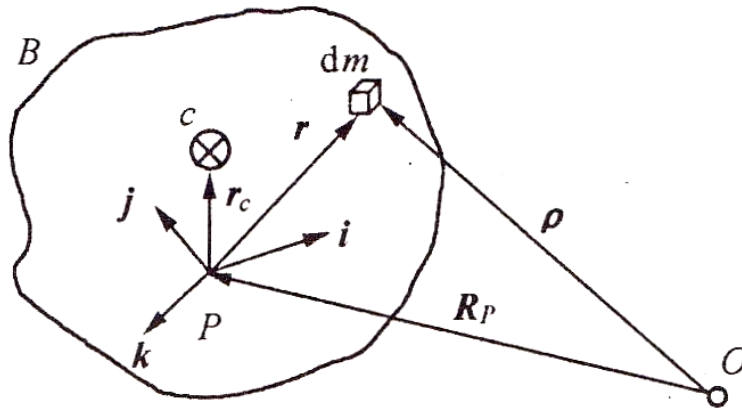


Рис. 11.1. К определению кинетической энергии движения твердого тела

Кинетическая энергия всего твердого тела B :

$$T = \frac{1}{2} \int_B \bar{v} \cdot \bar{v} dm .$$

Знак \int_B указывает на то, что интегрирование производится по всему твердому телу B .

Подставим (11.1) в это выражение, упростим, получим:

$$T = \frac{1}{2} \bar{v}_P \cdot \bar{v}_P m + \bar{v}_P \cdot \left(\bar{\omega} \times \int_B \bar{r} dm \right) + \frac{1}{2} (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm .$$

Здесь $\int_B \bar{r} dm$ – статический момент твердого тела относительно точки P , который можно записать в виде произведения вектора \bar{r}_c от точки P до центра масс C (рис. 11.1) и массы твердого тела m :

$$\int_B \bar{r} dm = \bar{r}_c m . \quad (11.2)$$

Можно переписать третье слагаемое в правой части с помощью формулы (ПЗ.39):

$$T = \frac{1}{2} \bar{v}_P \cdot \bar{v}_P m + \bar{v}_P \cdot \bar{r}_c m + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} \quad (11.3)$$

Здесь \mathbf{J} – тензор инерции твердого тела B относительно точки P .

Первый член справа обозначает кинетическую энергию поступательного движения твердого тела B , третий – кинетическую энергию его вращательного движения. Второй член обозначает обобщенную кинетическую энергию поступательного и вращательного движения твердого тела B . Если вектор $\dot{\bar{v}}_P$ перпендикулярен \bar{r}_c или точка P совпадает с центром масс, то выражение (11.3) можно переписать в виде:

$$T = \frac{1}{2} \bar{v}_P \cdot \bar{v}_P m + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}, \quad (11.4a)$$

или в компонентной форме:

$$T = \frac{1}{2} v_P^2 m + \underline{\omega}^T \underline{\mathbf{J}} \underline{\omega}. \quad (11.4b)$$

Здесь $\underline{\omega}, \underline{\mathbf{J}}$ – компоненты системы базисных векторов жесткого тела:

$$\underline{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T. \quad (11.5)$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}. \quad (11.6)$$

Выражение для кинетической энергии твердого тела в связанной системе координат:

$$T = \frac{1}{2} \left(v_p^2 m + J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 \right) - J_{xy} \omega_x \omega_y - J_{yz} \omega_y \omega_z - J_{xz} \omega_x \omega_z. \quad (11.7)$$

11.2 Угловой момент. Момент импульса

Произведение $\bar{v} dm$ – количество движения элементарной массы dm (рис. 11.1), тогда момент импульса относительно точки O – $\bar{\rho} \times \bar{v} dm$, а относительно точки P – $\bar{r} \times \bar{v} dm$. Момент импульса всего твердого тела B относительно точки P запишется в виде:

$$\bar{h} = \int_B \bar{r} \times \bar{v} dm.$$

Подставляя формулы (11.1) и (11.2), получим

$$\bar{h} = \bar{r}_c \times \bar{v}_p m + \int_B \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm. \quad (11.8)$$

Если точка P неподвижна, совпадает с центром масс тела или ее вектор скорости \bar{v}_p совпадает с направлением вектора \bar{r}_c , то формула (11.8) переписывается в виде:

$$\bar{h} = \int_B \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm. \quad (11.9)$$

Согласно формуле (ПЗ.36):

$$\int_B \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}. \quad (11.10)$$

Видно, что общим выражением углового момента является выражение (11.8), а уравнения (11.9) и (11.10) являются частными случаями, когда точка P не совершает поступательного движения и совпадает с центром масс. Используя уравнения (11.9) и (11.10) и записав \bar{h} в компонентной форме в связанной системе координат, получим:

$$\begin{aligned} \bar{h} = \underline{e}^T \underline{J} \underline{\omega} = \bar{i} (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) + \bar{j} (-J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z) + \\ + \bar{k} (-J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Видно, что момент импульса относительно центра масс связан только с вращательным движением, но т. к. направление базисного вектора не совпадает с главной осью инерции, то угловой момент в одном направлении связан с угловой скоростью в двух других направлениях, т. е. угловая скорость имеет перекрестный эффект. Однако когда вектор \bar{e} связан с главной осью инерции и справедливо равенство $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$, перекрестный эффект отсутствует:

$$\bar{h} = \bar{i} J_x \omega_x + \bar{j} J_y \omega_y + \bar{k} J_z \omega_z. \quad (11.12)$$

Это простейший случай.

Из уравнений (11.11) и (11.12) видно, что направления векторов \bar{h} и $\bar{\omega}$, как правило, не совпадают. Совпадать они могут только в том случае, если направление базисного вектора \bar{e} совпадает с главной осью инерции, а главные моменты инерции во всех направлениях одинаковы.

11.3 Уравнение Эйлера

Уравнение Эйлера описывает движение тел под действием моментов.

На рис. 11.1 показано, что элементарная масса dm на твердом теле B создает ускорение \bar{a} и силу инерции $\bar{a}dm$ под действием момента \bar{M} . Момент силы инерции в точке P равен $\bar{r} \times \bar{a}dm$. Момент силы инерции всего твердого тела B относительно точки P должен быть равен внешнему моменту:

$$\int_B \bar{r} \times \bar{a}dm = \bar{M}. \quad (11.13)$$

Здесь ускорение \bar{a} – производная от скорости по времени (см. выражение (11.1)):

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}}_p + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}.$$

Здесь $\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}} + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ (см. раздел 11.1), поэтому

$$\bar{a} = \bar{a}_p + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (11.14)$$

Можно видеть, что ускорение произвольной элементарной массы dm состоит из трех компонент: ускорение движения точки P (переносное ускорение) \bar{a}_p ; ускорение, вызванное угловой скоростью, $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}$; центростремительное ускорение $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$.

Подставив (11.14) в (11.13), получим:

$$\bar{r}_c \times \bar{a}_p m + \int_B \bar{r} \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}) dm + \int_B \bar{r} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dm = \bar{M}.$$

Используя формулы (ПЗ.36) и (ПЗ.41), это выражение можно переписать в виде

$$\bar{r}_c \times \bar{a}_p m + \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} = \bar{M}. \quad (11.15)$$

Это общий вид уравнения Эйлера. Если точка P совпадает с центром масс, то она фиксируется, а направление ускорения точки P совпадет с направлением вектора \bar{r}_c , и приведенную выше формулу можно переписать в виде:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} = \bar{M}. \quad (11.16)$$

Читатель может сам получить компонентную форму записи уравнения (11.15). Ниже приведем компонентную форму только уравнения (11.16). Если составляющие выражения \mathbf{J} и $\bar{\omega}$ такие, как в уравнении (11.5) и (11.6) и

$$\underline{M} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^T, \quad (11.17)$$

тогда выражение (11.16) можно записать в виде уравнений Эйлера в связанной системе координат:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x - J_{xy} \dot{\omega}_y - J_{xz} \dot{\omega}_z - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z - J_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2) - \\ - J_{xz} \omega_x \omega_y + J_{xy} \omega_x \omega_z = M_x, \end{aligned} \quad (11.18a)$$

$$\begin{aligned} -J_{xy} \dot{\omega}_x + J_y \dot{\omega}_y - J_{yz} \dot{\omega}_z - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x - J_{xz} (\omega_z^2 - \omega_x^2) - \\ - J_{xy} \omega_y \omega_z + J_{yz} \omega_y \omega_x = M_y, \end{aligned} \quad (11.18б)$$

$$\begin{aligned} -J_{xz} \dot{\omega}_x - J_{yz} \dot{\omega}_y + J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y - J_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - \\ - J_{yz} \omega_z \omega_x + J_{xz} \omega_z \omega_y = M_z. \end{aligned} \quad (11.18в)$$

В случае совпадения базисного вектора \bar{e} с главными осями инерции, приведенные выше уравнения можно упростить до вида

$$J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z = M_x, \quad (11.19a)$$

$$J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x = M_y, \quad (11.19б)$$

$$J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y = M_z. \quad (11.19в)$$

Можно видеть, что, вращательные движения вокруг трех координатных осей, как правило, связаны друг с другом.

Из формулы (11.15) видно, что поступательное и вращательное движения взаимосвязаны, если точка P не совпадает с центром масс. Эта взаимосвязь отсутствует только в случаях, когда первое слагаемое в любом из трех последних уравнений равно нулю.

11.4 Упрощение уравнений движения твердого КА относительно центра масс

Углы ориентации КА связаны с орбитальной системой координат, а орбитальная система координат движется относительно центра Земли с угловой скоростью ω_0 . Следовательно, абсолютная угловая скорость КА складывается из двух составляющих: угловой скорости вращательного движения КА и орбитальной угловой скорости. Поставив уравнения (10.18) (или аналогичные формулы из таблицы 10.2) в уравнение Эйлера из раздела 11.3, получим упрощенные уравнения движения КА как твердого тела. Так как уравнения движения относительно центра масс являются тригонометрическими функциями от углов ориентации, то они нелинейные с переменными коэффициентами и в большинстве случаев движения относительно осей взаимосвязаны. В общем случае такие уравнения можно решить

только численно с использованием специальных компьютерных программ.

Рассмотрим в качестве примера следующее преобразование: $OX_0Y_0Z_0$ (орбитальная система координат) $\rightarrow Oxyz$ (связанная система координат) в следующем порядке $z(\psi) \rightarrow y(\mathcal{G}) \rightarrow x(\varphi)$. Запишем соотношение для угловой скорости $\bar{\omega}^*$, которое определяется по формуле (10.18):

$$\bar{\omega}^* = \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \mathcal{G} \\ 0 & \cos \varphi & \sin \mathcal{G} \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \mathcal{G} \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\mathcal{G}} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G} \sin \psi \\ \cos \mathcal{G} \cos \psi + \sin \varphi \sin \mathcal{G} \sin \psi \\ -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \mathcal{G} \sin \psi \end{bmatrix} \omega_0. \quad (10.18)$$

Результат подстановки этого выражения в соответствующую формулу из раздела 11.3 является очень громоздким и здесь не приводится.

Обычно оси системы координат $Oxyz$ мало отклоняются от осей системы координат $OX_0Y_0Z_0$, следовательно, углы ориентации и угловые скорости ориентации являются малыми величинами. Поэтому можно ограничиться лишь малыми первого порядка для углов и угловых скоростей, а малыми второго порядка можно пренебречь. Это позволяет линеаризовать уравнение. Используя этот прием, можно определить угловое ускорение спутника на круговой орбите из уравнения (10.21), полученного, в свою очередь, путем упрощения уравнения (10.18):

$$\bar{\omega}^* = \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} - \omega_0 \dot{\psi} \\ \ddot{\mathcal{G}} \\ \ddot{\psi} + \omega_0 \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (11.20)$$

Добавив к выражению (10.21) уравнения движения из последнего раздела и упростив (10.19), получим:

$$J_x \ddot{\phi} + (J_y - J_z - J_x) \omega_0 \dot{\psi} + (J_y - J_z) \omega_0^2 \phi = M_x, \quad (11.21a)$$

$$J_x \ddot{\theta} = M_y, \quad (11.21б)$$

$$J_z \ddot{\psi} - (J_y - J_z - J_x) \omega_0 \dot{\phi} + (J_y - J_x) \omega_0^2 \psi = M_z. \quad (11.21в)$$

В этих уравнениях движение по оси тангажа отделено от движения по двум другим осям, а по осям рыскания и крена взаимосвязаны. В таблице 10.2 можно найти другие матрицы преобразования координат, а матрицу преобразования угловой скорости можно получить с помощью аналогичных действий.

12 ГРАВИТАЦИОННЫЙ МОМЕНТ И ГРАВИТАЦИОННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СПУТНИКА

Мы привыкли считать, что гравитационное ускорение g - величина постоянная, однако в действительности оно уменьшается с увеличением расстояния от центра Земли. Конечно, разница в высоте, с которой мы сталкиваемся на поверхности Земли, не ощущается в нашей жизни, поэтому люди и не замечают изменения силы тяжести. Спутники на орбите находятся в состоянии невесомости, поэтому даже малые моменты могут оказывать на КА существенное влияние. Векторы ускорения силы тяжести в различных точках КА различны, поэтому возникает гравитационный момент. Гравитационный момент может оказывать как полезный, так и вредный эффект на движение КА.

12.1 Гравитационный момент

Сначала проиллюстрируем понятие гравитационного момента на простом примере. На рис. 12.1 показан спутник в форме гантели, движущийся по круговой околоземной орбите. Этот КА состоит из жесткого стержня нулевой массы и двух точечных масс на его концах массами m_1 и m_2 ($m_1 = m_2 = m$). Когда этот стержень находится в горизонтальном положении (рис. 12.1а), то в силу геометрической симметрии гравитационные и центробежные силы, действующие на точечные массы, равны: $G_{10} = G_{20}$, $P_{10} = P_{20}$. Эти силы не вызывают моментов и спутник находится в состоянии равновесия. Если у спутника есть некоторый угол тангажа ϑ (рис. 12.1б), то масса m_1 будет находиться дальше от центра Земли, чем масса m_2 , т. е. $G_1 < G_{10}$, $P_2 < P_{20}$. Следовательно, у

спутника появятся моменты: момент силы тяжести и момент центробежной силы.

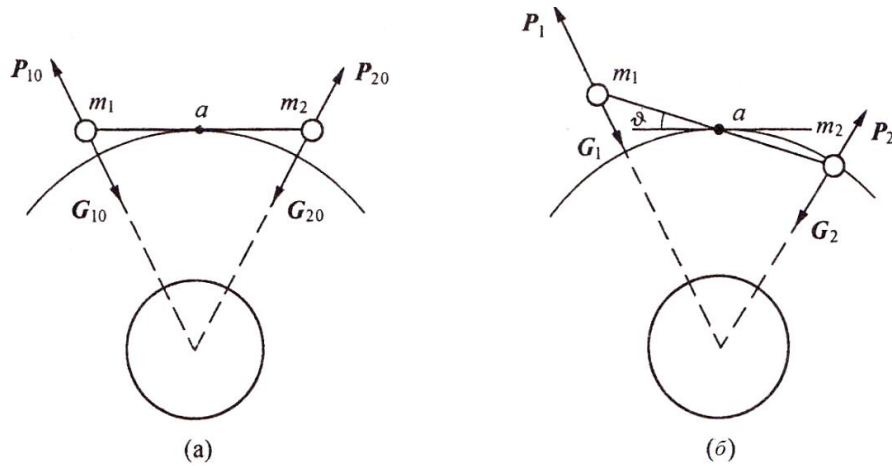


Рис. 12.1. Схема возникновения гравитационного момента

Теперь рассмотрим схему возникновения гравитационного момента в случае движения спутника по орбите (рис. 12.2). Пусть B – спутник; O – центр масс спутника; $Oxyz$ – система координат, связанная с космическим аппаратом; $\bar{e} = [\bar{i} \ \bar{j} \ \bar{k}]^T$ – базисный вектор. Возьмем элементарную массу внутри КА dm , тогда $\bar{\rho}$ – радиус-вектор элементарной массы относительно точки O ; \bar{r} – радиус-вектор элементарной массы относительно центра Земли E .

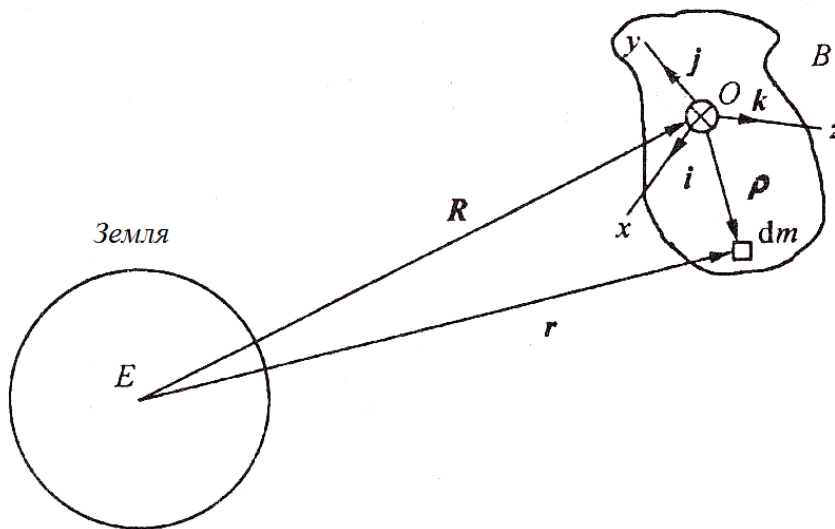


Рис. 12.2. К определению гравитационного момента

На элементарную массу dm действует сила тяжести:

$$d\bar{G} = -G \frac{M_e dm}{r^3} \bar{r} = -\frac{\mu dm}{r^3} \bar{r}.$$

Здесь G – гравитационная постоянная; M_e – масса Земли; $\mu = GM_e$ – гравитационный параметр Земли. Момент силы тяжести элементарной массы можно представить в виде $\bar{\rho} \times d\bar{G}$. А момент силы тяжести всего спутника B :

$$\bar{M}_g = \int_B \bar{\rho} \times d\bar{G}.$$

Подставляя в вышеприведенную формулу выражение для $d\bar{G}$ и учитывая $\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{R}$, получим

$$\bar{M}_g = -\mu \int_B \bar{\rho} \times \frac{\bar{R} + \bar{\rho}}{r^3} dm = -\mu \int_B \frac{\bar{\rho} \times \bar{R}}{r^3} dm.$$

Из геометрических построений, приведенных на рис. 12.2, по теореме косинусов получим:

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + 2\bar{R} \cdot \bar{\rho}.$$

Так как $r/R \ll 1$, с помощью бинома Ньютона запишем:

$$r^{-3} \approx R^{-3} \left(1 - \frac{3\bar{R} \cdot \bar{\rho}}{R^2} \right).$$

Подставим эту формулу в выражение для \bar{M}_g , тогда:

$$\bar{M}_g = -\frac{\mu}{R^3} \int_B \bar{\rho} dm \times \bar{R} + \frac{3\mu}{R^5} \int_B \bar{R} \cdot \bar{\rho} \bar{\rho} \times \bar{R} dm.$$

Так как центр масс тела B находится в точке O , то первый интеграл будет равен нулю. Применяв ко второму слагаемому формулу $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B})$, получим:

$$\bar{M}_g = \frac{3\mu}{R^5} \bar{\rho} \times \int_B [\bar{R} \times (\bar{R} \times \bar{\rho})] dm.$$

С помощью формулы (ПЗ.41) можно записать:

$$\bar{M}_g = \frac{3\mu}{R^5} \bar{R} \times J \cdot \bar{R}. \quad (12.1)$$

Разложим вектор \bar{R} , имеющий вид $\bar{R} = \underline{\bar{e}}^T \underline{R}$, на проекции в системе координат $Oxyz$:

$$\underline{R} = R[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T. \quad (12.2)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – косинусы углов между вектором \bar{R} и осями Ox, Oy, Oz соответственно. Поставим выражение (12.2) в (12.1) и запишем в компонентной форме:

$$\bar{M}_g = \underline{\bar{e}}^{-T} \frac{3\mu}{R^3} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \underline{J} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (12.3)$$

При произвольной ориентации базисного вектора $\underline{\bar{e}}^{-T}$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}.$$

Тогда (12.3) можно переписать в развернутом виде:

$$\overline{M}_g = \frac{3\mu^{-T}}{R^3} \underline{e} \begin{bmatrix} (J_z - J_y)\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)J_{yz} - \alpha_1\alpha_2J_{xz} + \alpha_1\alpha_3J_{xy} \\ (J_x - J_z)\alpha_1\alpha_3 + (\alpha_1^2 - \alpha_3^2)J_{xz} - \alpha_2\alpha_3J_{xy} + \alpha_1\alpha_2J_{yz} \\ (J_y - J_x)\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)J_{xy} - \alpha_1\alpha_3J_{yz} + \alpha_2\alpha_3J_{xz} \end{bmatrix}. \quad (12.4)$$

Это выражение для гравитационного момента в общем виде. Если перейдем из орбитальной системы координат $OX_0Y_0Z_0$ в связанную $Oxyz$ в последовательности $z(\psi) \rightarrow y(\vartheta) \rightarrow x(\varphi)$ (рис. 10.12), то матрица преобразования координат \underline{C}_{x0} будет определяться формулой (10.10). Вектор \overline{R} направлен в сторону, противоположную оси OZ_0 , его компоненты в системе $OX_0Y_0Z_0$ можно записать в виде $[0 \ 0 \ -R]^T$, а после перехода в систему координат $Oxyz$:

$$\underline{R} = \underline{C}_{x0}[0 \ 0 \ -R]^T = \overline{R}[\sin \vartheta \ -\sin \varphi \cos \vartheta \ -\cos \varphi \cos \vartheta]^T.$$

Сравнивая это выражение с (12.2), получим

$$\alpha_1 = \sin \vartheta, \alpha_2 = -\sin \varphi \cos \vartheta, \alpha_3 = -\cos \varphi \cos \vartheta. \quad (12.5)$$

Подставим (12.5) в (12.4) и получим компоненты вектора \overline{M}_g в системе координат $Oxyz$:

$$\bar{M}_g = \underline{e}^{-T} \begin{bmatrix} M_{gx} \\ M_{gy} \\ M_{gz} \end{bmatrix} = \frac{3\mu^{-T}}{R^3} \underline{e} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(J_z - J_y) \sin 2\varphi \cos^2 \vartheta + J_{yz} \cos 2\varphi \cos^2 \vartheta + \frac{1}{2} J_{xz} \sin \varphi \sin 2\vartheta - \frac{1}{2} J_{xy} \cos \varphi \sin 2\vartheta \\ \frac{1}{2}(J_z - J_x) \cos \varphi \sin 2\vartheta + J_{xz} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta) - \frac{1}{2} J_{xy} \sin 2\varphi \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} J_{yz} \sin \varphi \sin 2\vartheta \\ \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin \varphi \sin 2\vartheta + J_{xy} (\sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} J_{yz} \cos \varphi \sin 2\vartheta + \frac{1}{2} J_{xz} \sin 2\varphi \cos^2 \vartheta \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

Если углы ориентации малы, то синус угла равен этому углу, а косинус – единице. Пренебрегая малыми второго порядка и выше, запишем выражение (12.6) в виде:

$$\bar{M}_g = \frac{3\mu^{-T}}{R^3} \underline{e} \begin{bmatrix} (J_z - J_y)\varphi + J_{yz} - J_{xy}\vartheta \\ (J_z - J_x)\vartheta - J_{xz} - J_{xy}\varphi \\ J_{yz}\vartheta + J_{xz}\varphi \end{bmatrix}. \quad (12.7)$$

Если три базисных вектора \bar{e} совпадают с тремя главными осями инерции, то

$$\bar{M}_g = \underline{e}^{-T} \begin{bmatrix} M_{gx} \\ M_{gy} \\ M_{gz} \end{bmatrix} = \frac{3\mu^{-T}}{2R^3} \underline{e} \begin{bmatrix} (J_z - J_y) \sin 2\varphi \cos^2 \vartheta \\ (J_z - J_x) \cos \varphi \sin 2\vartheta \\ (J_x - J_y) \sin \varphi \sin 2\vartheta \end{bmatrix}. \quad (12.8)$$

Считая углы ориентации малыми, получим:

$$\bar{M}_g = \underline{e}^{-T} \begin{bmatrix} M_{gx} \\ M_{gy} \\ M_{gz} \end{bmatrix} = \frac{3\mu^{-T}}{R^3} \underline{e} \begin{bmatrix} (J_z - J_y)\varphi \\ (J_z - J_x)\vartheta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.9)$$

Для КА, движущегося по круговой орбите, справедлива формула

$$\frac{\mu}{R^3} = \omega_0^2. \quad (12.10)$$

Здесь ω_0 – угловая орбитальная скорость, поэтому коэффициент в приведенных выше уравнениях будет ω_0^2 .

В конце этого раздела кратко рассмотрим случаи, когда гравитационный момент будет равен нулю. Анализируя выражение (12.3), можно видеть, что $\bar{M}_g = 0$ только в тех случаях, если:

1) оси связанной системы координат $Oxyz$ совпадают с главными осями инерции КА, т. е.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix};$$

2) любая ось связанной системы координат $Oxyz$ совпадает с радиусом Земли. Например, \bar{R} направлен вдоль оси Oz в отрицательном направлении, т. е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1.$$

12.2 Гравитационная стабилизация спутника на круговой орбите

Предположим, что КА движется по круговой орбите и оси связанной системы координат совпадают с главными осями инерции. Из внешних сил на КА действует только момент гравитационной силы; углы ориентации считаем малыми.

В этом случае уравнение движения КА вокруг центра масс имеет вид выражения (11.21), а действующий момент определяется формулами (12.9) и (12.10):

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\phi} + (J_y - J_z - J_x) \omega_0 \dot{\psi} + 4(J_y - J_z) \omega_0^2 \phi &= 0, \\ J_y \ddot{\vartheta} + 3\omega_0^2 (J_x - J_z) \vartheta &= 0, \\ J_z \ddot{\psi} - (J_y - J_z - J_x) \omega_0 \dot{\phi} + (J_y - J_x) \omega_0^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Из этих трех уравнений только второе (по углу тангажа) является независимым. Его решение имеет вид:

$$\vartheta = A e^{\sqrt{3(J_z - J_x)/J_y} \omega_0 t}. \quad (12.12)$$

Отсюда следует, что условием устойчивости КА по углу тангажа является

$$J_x > J_z. \quad (12.13)$$

Среди уравнений (12.11) первое и третье взаимосвязаны. Применяя к ним преобразование Лапласа, получим

$$\begin{bmatrix} s^2 + 4k_x \omega_0^2 & (k_x - 1) \omega_0 s \\ (1 - k_z) \omega_0 s & s^2 + k_z \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$k_x = \frac{J_y - J_z}{J_x}, \quad k_z = \frac{J_y - J_x}{J_z}. \quad (12.14)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$s^4 + (1 + 3k_x + k_x k_z) \omega_0^2 s^2 + 4k_x k_z \omega_0^4 = 0. \quad (12.15)$$

Это уравнение четвертого порядка, но слагаемые по первой и третьей степенях при s отсутствуют. Если левый многочлен уравнения (12.15) выражается через $f(s)$ и

$$s = -s^*, \quad (12.16)$$

то получим

$$f(s) = f(-s^*). \quad (12.17)$$

Отсюда видно, что корень характеристического уравнения (12.15) может принимать только мнимые значения, т. е. $s = j\omega$. В этом случае система будет устойчивой, в противном случае часть корней будет расположена справа от плоскости корней, и система будет неустойчивой. Пусть $\lambda = s^2$, тогда

$$\lambda^2 + (1 + 3k_x + k_x k_z) \omega_0^2 \lambda + 4k_x k_z \omega_0^4 = 0.$$

Условием того, что s — чисто мнимое число, является условие отрицательности λ , т. е.

$$\begin{aligned} 1 + 3k_x + k_x k_z &> 0, \\ k_x k_z &> 0, \\ 1 + 3k_x + k_x k_z &> 4\sqrt{k_x k_z}. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Среди выражений (12.18) третья формула будет удовлетворять первой формуле. Следовательно, если существуют определители первого и второго порядков, условия устойчивости системы могут быть получены из второй формулы: система будет устойчивой, если k_x и k_z имеют одинаковый знак. Это возможно в двух случаях.

Если $k_x > 0, k_z > 0$, то с помощью выражений (12.13) и (12.14) получим:

$$J_y > J_x > J_z. \quad (12.19a)$$

Если $k_x < 0, k_z < 0$, то

$$J_x > J_z > J_y. \quad (12.19b)$$

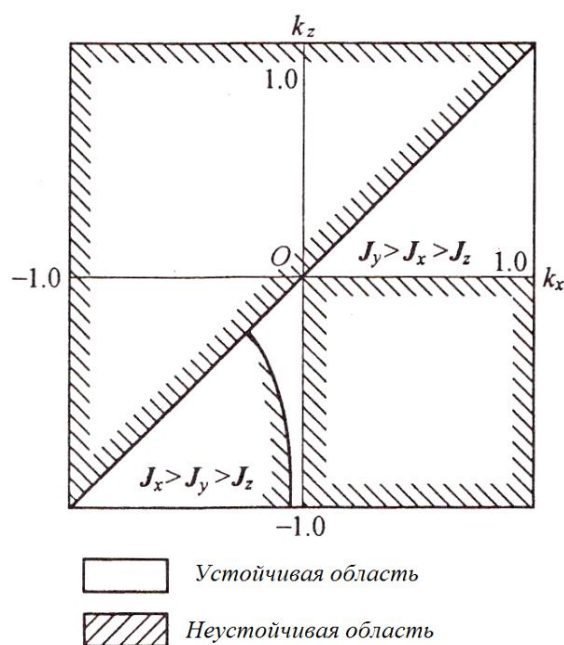


Рис. 12.3. Области гравитационной устойчивости спутника на круговой орбите

На рис. 12.3 приведены области устойчивости, построенные с использованием формул (12.13) и (12.8). Горизонтальная ось k_x , вертикальная — k_z . Во втором и четвертом квадранте КА не устойчив, т. к. знаки k_x и k_z разные. Кривая в третьем квадранте — граница устойчивости, определенная с помощью третьего выражения формул (12.18). Устойчивость под диагональю на рис. 12.3

можно объяснить следующим образом: $k_x > k_z$, т. е. $\frac{J_y - J_z}{J_x} > \frac{J_y - J_x}{J_z}$

или $J_y(J_z - J_x) > (J_z + J_x)(J_z - J_x)$.

Так как момент инерции относительно одной координатной оси меньше суммы моментов инерции относительно двух других осей, то должно выполняться неравенство $(J_z - J_x) < 0$, что в точности соответствует формуле (12.13).

Проведенный выше анализ устойчивости может быть выполнен с помощью теоремы 9.7 из Приложения 9. Результат будет тем же. Читатели могут получить его самостоятельно согласно таблице 9.1.

Учитывая тот факт, что деление на области устойчивости в плоскости параметров $k_x - k_z$ будет использоваться в следующих разделах, покажем, что значения k_x, k_z лежат в пределах ± 1 . Так как главный момент инерции в любом направлении должен быть меньше, чем в двух других направлениях, то для сумм главных моментов инерции должны выполняться неравенства $J_y \leq J_x + J_z$ и $J_x \leq J_y + J_z$. Перенесем J_x и J_y в одну сторону и разделим на J_z , получим, что $-1 \leq k_z \leq 1$. То же самое можно доказать и для $-1 \leq k_x \leq 1$.

Уравнение (12.11) получено для круговых орбит, однако в действительности круговые орбиты получить очень трудно, и большинство из них являются эллиптическими, близкими к круговым. Проведем анализ устойчивости для КА на таких орбитах под действием гравитационного момента и угловых скоростей. Угловая скорость определяется по формуле (10.17в), а угловое ускорение

$$\dot{\omega}_0 \approx -\frac{2e\mu}{p^3}(1 + e \cos \theta)^3 \sin \theta \approx -\frac{2e\mu}{p^3}(1 + 3e \cos \theta) \sin \theta. \quad (12.20)$$

Используя формулы (10.17в), (10.21), (12.9), (11.19), а также учитывая формулу (12.20) и пренебрегая малыми второго порядка, получим уравнения динамики движения КА относительно центра масс:

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\varphi} + (J_y - J_z - J_x) n \dot{\psi} + 4(J_y - J_z) n^2 \varphi &= 0, \\ J_y \ddot{\vartheta} + 3n^2 (J_x - J_z) \vartheta &= -J_y 2n^2 e \sin(nt_p), \\ J_z \ddot{\psi} - (J_y - J_z - J_x) n \dot{\varphi} + (J_y - J_x) n^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (12.21)$$

При выводе уравнений мы приняли, что

$$\frac{\mu}{p^3} \approx \frac{\mu}{R^3} = n^2$$

и

$$\theta = nt_p.$$

Здесь n – средняя угловая орбитальная скорость; t_p – момент времени прохождения через перицентр орбиты; θ – угол истинной аномалии.

Сравнивая формулы (12.21) с (12.11), можно заметить, что в основном уравнении движения (12.21) добавилась правая часть, а остальные уравнения остались без изменений. А также под действием гравитационного момента условия устойчивости по углам крена и рыскания остались теми же, что и для КА, движущегося по круговой орбите.

12.3 Гравитационная стабилизация движения спутника по углу тангажа на круговых и околокруговых орбитах

Если углы крена и рыскания равны нулю, то формула (12.8) заменяется на (11.19б), получим

$$\ddot{\vartheta} + 3\omega_0^2 k_y \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \quad (12.22)$$

Здесь

$$k_y = \frac{J_x - J_z}{J_y}. \quad (12.23)$$

Перепишем $\ddot{\vartheta}$ в виде:

$$\ddot{\vartheta} = \frac{d\dot{\vartheta}}{dt} = \frac{d\dot{\vartheta}}{d\vartheta} \dot{\vartheta}.$$

Проинтегрировав (12.22), получим:

$$\dot{\vartheta}^2 + 3\omega_0^2 k_y \sin^2 \vartheta = c = 3k_y \omega_0^2 d. \quad (12.24)$$

Здесь c, d - постоянные интегрирования, которые могут быть получены из начальных условий. Используя приведенное выше уравнение, ϑ и $\dot{\vartheta} / \sqrt{3k_y} \omega_0$ можно использовать как горизонтальные и вертикальные координаты и построить фазовую диаграмму, представленную на рис. 12.4. При $d \leq 1$ уравнение (12.24) описывает периодические колебания, а траектория в фазовой плоскости является замкнутой кривой; при $d > 1$ движение становится непрерывным вращательным. Спутник будет вращаться в пространстве.

При $d \leq 1$ можно рассчитать время движения:

$$t = \int_0^t dt = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\dot{\vartheta}}.$$

Подставляя выражение (12.24) в приведенную выше формулу, получим:

$$t = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{3k_y \omega_0} \sqrt{d - \sin^2 \vartheta}}. \quad (12.25)$$

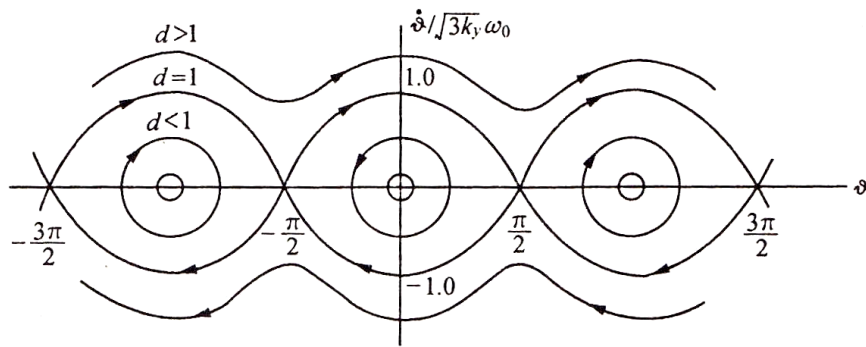


Рисунок 12.4. Фазовая диаграмма гравитационно-устойчивого КА по углу тангажа на круговой орбите

Пусть $d = \sin^2 \alpha$, верхний предел интегрирования равен $\vartheta = \alpha$ (т. е. колебания достигают своей амплитуды от нуля до α), при этом t составит ровно $1/4$ цикла, а период колебаний по углу тангажа КА равен:

$$T = \frac{4}{\sqrt{3k_y \omega_0}} \int_0^{\alpha} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \vartheta}}. \quad (12.26)$$

Очевидно, что период колебаний T зависит не только от массовых характеристик КА k_y , а также и от амплитуды колебаний α , что является одним из важных отличий системы с нелинейными колебаниями от системы с линейными колебаниями. Если $k_y = 1$, а период колебаний равен периоду обращения КА по орбите ($T = \frac{2\pi}{\omega_0}$), то из уравнения (12.24) можно получить:

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \vartheta}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{3}.$$

Рассчитав, получим: $\alpha = 1.294 = 74.16^\circ$, $d = \sin \alpha = 0.962$.

Для случая $d > 1$ движение является аperiодическим, и зависимость между временем вращения и углом может быть рассчитана по формуле (12.25). Для КА с $k_y = 1$, вращающегося в течение недели, это время точно совпадает с периодом обращения при $d = 1.065$.

Рассмотрим движение КА по углу тангажа на околокруговой орбите под действием гравитационного момента. Получим частное решение второго уравнения (12.21).

$$\vartheta^* = -\frac{2e \sin(nt_p)}{3 \frac{J_x - J_z}{J_y} - 1} = \frac{2e}{1 - 3k_y} \sin(nt_p). \quad (12.27)$$

Его полное решение является суммой уравнений (12.27) и (12.12). Согласно аналитической формуле (12.27), при $k_y = 1/3$ ϑ^* стремится к бесконечности, и движение КА по углу тангажа будет неустойчивым. Поэтому при выборе значения k_y следует следить за тем, чтобы оно не составило $1/3$. Если величина колебаний основного тона берется из уравнения (12.27) и строится зависимость между ϑ^*/k_y , как показано на рис. 12.5, то можно увидеть, что в точке $k_y = 1/3$ возникает явление «резонанса».

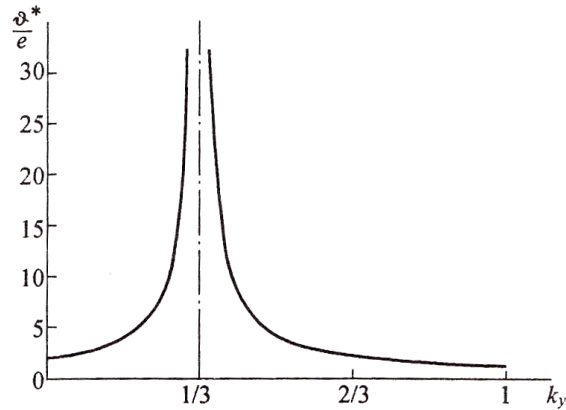


Рис. 12.5. Амплитуда колебаний КА по углу тангажа на круговой орбите

12.4 Влияние потерь энергии на гравитационно-стабилизированный спутник

При наличии потерь энергии, результаты, полученные ранее, несколько изменятся. Если КА не обладает достаточной жесткостью, то во время движения по орбите он будет испытывать упругие деформации, а трение внутри конструкции приведет к расходу энергии. Если эти потери энергии считать пропорциональными угловой скорости ориентации, то в трех уравнениях (12.11) появятся компоненты $C_\phi \dot{\phi}$, $C_\theta \dot{\theta}$, $C_\psi \dot{\psi}$. Очевидно, что движение по каналу угла тангажа по-прежнему не зависит от крена и рыскания, а, следовательно, от двух других уравнений этой системы. Условием устойчивости КА по углу тангажа является выражение (12.13):

$$J_x > J_z. \quad (12.28)$$

Но, как правило, эта устойчивость носит асимптотический характер. Характеристические уравнения по углам крена и рыскания принимают вид:

$$s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0.$$

Здесь:

$$a_3 = \frac{C_\varphi}{J_x} + \frac{C_\psi}{J_z},$$

$$a_2 = (1 + 3k_x + k_x k_z) \omega_0^2 + \frac{C_\varphi}{J_x} \frac{C_\psi}{J_z},$$

$$a_1 = \left(\frac{C_\varphi}{J_x} k_z + 4 \frac{C_\psi}{J_z} k_x \right) \omega_0^2,$$

$$a_0 = 4k_x k_z \omega_0^4.$$

Согласно Приложению 7, для характеристического уравнения четвертого порядка необходимые и достаточные условием устойчивости имеют вид $a_3, a_1, a_0, \Delta_3 > 0$:

$$\frac{C_\varphi}{J_x} + \frac{C_\psi}{J_z} > 0, \quad (12.29)$$

$$\frac{C_\varphi}{J_x} k_z + \frac{C_\psi}{J_z} k_x > 0, \quad (12.30)$$

$$k_x k_z > 0, \quad (12.31)$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0. \quad (12.32)$$

Видно, что неравенство (12.29) выполняется. А из формул (12.30) и (12.31) видно:

$$k_x > 0, \quad k_z > 0. \quad (12.33)$$

Здесь

$$J_y > J_z, \quad J_y > J_x. \quad (12.34)$$

Используя неравенства (12.34) и (12.28), можно построить области устойчивости (рис. 12.6). Видно, что при потере энергии в случае, если момент инерции по оси тангажа является наибольшим, а по оси рыскания наименьшим, КА может быть устойчивым. Чтобы он был устойчивым в целом, должны соблюдаться требования неравенства (12.32).

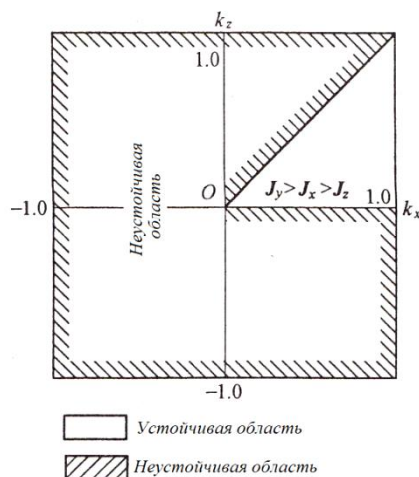


Рис. 12.6. Области устойчивости КА

В отличие от выводов, полученных в предыдущей главе, где условием устойчивости КА был максимальный или минимальный момент инерции по оси тангажа. Как и для любого свободно вращающегося твердого тела, вращение относительно осей максимального и минимального моментов инерции устойчиво, но только в том случае, если нет потерь энергии. При наличии потерь энергии вращение относительно оси минимального момента инерции становится неустойчивым, относительно оси максимального момента инерции это вращение будет устойчивым (но не всегда).

Приведенный выше анализ влияния потерь энергии на устойчивость КА и полученные количественные выводы должны учитывать данные по вязкому демпфированию и возможности регулировки. Ниже приведен пример добавления демпфера к спутнику, движущемуся по круговой орбите, для стабилизации

при действии гравитационного момента. Проанализируем влияние демпфирования на устойчивость. Демпфер D состоит из пружинного поршня и демпферного клапана, установленного на оси OX на расстоянии l от центра масс O . Перемещение поршня вдоль оси OY равно $\bar{\eta}$. В положении равновесия на оси OX $\bar{\eta} = 0$ (рис. 12.7). B – космический аппарат. Когда поршень находится на оси OX , центр масс КА находится в точке O , а диагональную матрицу моментов инерции обозначим \underline{J}_0 . Она состоит из 16 моментов инерции КА без учета момента инерции поршня и момента инерции \underline{I}_b , вызванного демпфером.

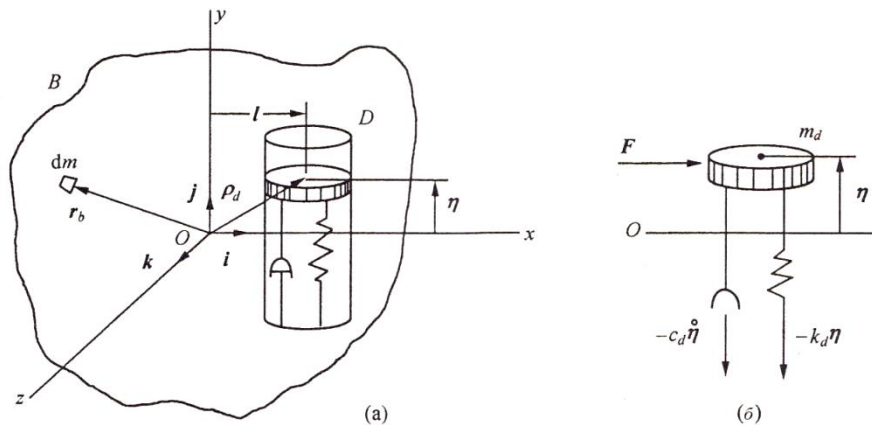


Рис. 12.7. Стабилизация КА демпфером при действии гравитационного момента

$$\underline{J}_0 = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix} = \underline{I}_b + m_d (\underline{l}^T \underline{l} \underline{E} - \underline{l} \underline{l}^T) = \quad (12.35)$$

$$= \begin{bmatrix} J_{bx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{by} + l^2 m_d & 0 \\ 0 & 0 & J_{bz} + l^2 m_d \end{bmatrix},$$

где

$$J_x = I_{bx}, \quad J_y = I_{by} + l^2 m_d, \quad J_z = I_{bz} + l^2 m_d. \quad (12.36)$$

Здесь m_d – масса поршня, который рассматривается как точечная масса; а момент инерции в системе $Oxyz$ может быть выражен формулой (3.35). Когда поршень находится в произвольном положении, векторное расстояние от центра масс КА O до центра масс поршня будет равно $\bar{\rho}_d = \bar{\rho} + \bar{\eta} = \bar{l}i + \eta\bar{j}$. Если перемещение η очень мало, то момент инерции КА можно записать в виде:

$$\underline{J} = \underline{I}_b + m_d (\underline{\rho}_d^T \underline{\rho}_d \underline{E} - \underline{\rho}_d \underline{\rho}_d^T) = \begin{bmatrix} J_x & -l\eta m_d & 0 \\ -l\eta m_d & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}. \quad (12.37)$$

Для получения уравнений движения КА при наличии демпфера, рассчитаем скорость и ускорение элементарной массы dm тела B . Расстояние от точки O равно \bar{r}_b , \bar{v}_0 – скорость движения центра масс. Тогда абсолютные скорость и ускорение КА запишутся в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}_b &= \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_b, \\ \bar{a}_b &= \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_b + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_b). \end{aligned} \quad (12.38)$$

Абсолютные скорость и ускорение поршня:

$$\begin{aligned} \bar{v}_d &= \bar{v}_0 + \dot{\bar{\rho}}_d = \bar{v}_0 + \dot{\bar{\eta}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_d, \\ \bar{a}_d &= \dot{\bar{v}}_0 + \ddot{\bar{\rho}}_d = \dot{\bar{v}}_0 + \ddot{\bar{\eta}} + 2\bar{\omega} \times \dot{\bar{\eta}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}_d + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_d). \end{aligned} \quad (12.39)$$

Уравнения движения КА относительно центра масс можно получить, составив условие баланса моментов для точки O :

$$\int_B \bar{\mathbf{r}}_b \times \bar{\mathbf{a}}_b dm + m_d \bar{\rho}_d \times \bar{\mathbf{a}}_d = \bar{\mathbf{M}} . \quad (12.40)$$

Подставляя выражения (12.38), (12.39) в (12.40) и учитывая, что центр масс в точке O :

$$\int_B \bar{\mathbf{r}}_b dm + \bar{\rho}_d m_d = 0 . \quad (12.41)$$

Используя формулы (П3.36) и (П3.41), перепишем выражение (12.40) в виде:

$$\int_B \bar{\mathbf{r}}_b \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_b) dm + \bar{\rho}_d \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}_d) m_d = \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} , \quad (12.42)$$

$$\int_B \bar{\mathbf{r}}_b \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}_b)] + \bar{\rho}_d \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_d)] = \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} . \quad (12.43)$$

Следовательно:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} + \bar{\rho}_d \times \left(\overset{\infty}{\bar{\eta}} + 2\bar{\omega} \times \overset{\circ}{\bar{\eta}} \right) m_d = \bar{\mathbf{M}} . \quad (12.44)$$

Здесь \mathbf{J} – инерциальный диадик выражения (12.37), а $\bar{\mathbf{M}}$ – действующий момент (здесь рассматриваются только гравитационные моменты). В отличие от формулы (11.16), из-за наличия демпфера к уравнению динамики положения добавлено слагаемое, относящееся к массе поршня m_d . Уравнения (10.21) могут быть использованы для выражения компонентов вектора $\bar{\omega}$, которые, в свою очередь, подставляются в уравнение (12.44). Если угол ориентации, угловая скорость и угловая ускорение, а также η , и их производные по времени первого и второго порядков будут малы, то пренебрегая малыми второго порядка, получим:

$$J_x \ddot{\phi} + (J_y - J_x - J_z) \omega_0 \dot{\psi} + (J_y - J_z) \omega_0^2 \phi = M_x, \quad (12.45a)$$

$$J_y \ddot{\theta} = M_y, \quad (12.45b)$$

$$J_z \ddot{\psi} - (J_y - J_x - J_z) \omega_0 \dot{\phi} + (J_y - J_x) \omega_0^2 \psi + m_d l (\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta) = M_z. \quad (12.45b)$$

Видно, что полученная система из трех уравнений содержит четыре переменные, следовательно, нужно найти дополнительные соотношения, а именно уравнение движения поршня. Если поршень движется от КА (рис. 12.7б), то на него действуют силы от пружины $-k_d \bar{\eta}$ и демпфирующего клапана $-C_d \dot{\bar{\eta}}$, а также сила \bar{F} , передаваемая космическим аппаратом на поршень через стенку цилиндра. Здесь k_d – жесткость пружины; C_d – коэффициент вязкости; $\dot{\bar{\eta}}$ – относительная производная по времени тела B , сила \bar{F} – сила сцепления, перпендикулярная направлению движения поршня $\bar{\eta}$. Из уравнения баланса сил получим уравнение движения поршня:

$$m_d \ddot{\bar{\rho}}_d = -C_d \dot{\bar{\eta}} - k_d \bar{\eta} + \bar{F}.$$

Найдем $\ddot{\bar{\rho}}_d$ из выражения (12.39) и подставим ее в приведенную выше формулу:

$$m_d \left[\overset{\circ}{\bar{\eta}} + 2\bar{\omega} \times \overset{\circ}{\bar{\eta}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}_d + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_d) \right] + C_d \dot{\bar{\eta}} + k_d \bar{\eta} = \bar{F}. \quad (12.46)$$

Перейдем от векторной формы к компонентной в проекции на ось Oy , получим:

$$m_d \ddot{\eta} + C_d \dot{\eta} + k_d \eta + m_d l (\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi) = 0. \quad (12.47)$$

Уравнения (12.45) и (12.47) являются необходимыми кинетическими уравнениями.

Момент в правой части формулы (12.45) можно получить из уравнений (12.9) и (12.10).

$$J_x \ddot{\phi} + (J_y - J_x - J_z) \omega_0 \dot{\psi} + 4 \cdot (J_y - J_z) \omega_0^2 \phi = 0, \quad (12.48a)$$

$$J_y \ddot{\vartheta} + 3\omega_0^2 (J_x - J_z) \vartheta = 0, \quad (12.48б)$$

$$J_z \ddot{\psi} - (J_y - J_x - J_z) \omega_0 \dot{\phi} + (J_y - J_x) \omega_0^2 \psi + m_d l (\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta) = 0. \quad (12.48в)$$

Уравнение (12.48б) относится только к движению по каналу угла тангажа. В этом случае условие устойчивости имеет вид:

$$J_x > J_z. \quad (12.49)$$

Уравнение (12.48) и две формулы из (12.47) также можно переписать в виде:

$$\underline{m} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + (\underline{G} + \underline{D}) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \underline{K} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12.50)$$

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & m_d l \\ 0 & m_d l & m_d \end{bmatrix} = \underline{m}^T,$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -(J_x - J_y + J_z) \omega_0 & 0 \\ (J_x - J_y + J_z) \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\underline{G}^T,$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_d \end{bmatrix} = \underline{D}^T,$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 4(J_y - J_z)\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & (J_y - J_z)\omega_0^2 & m_d l \omega_0^2 \\ 0 & m_d l \omega_0^2 & k_d \end{bmatrix} = \underline{K}^T. \quad (12.51)$$

Согласно Приложениям 9.8 и 9.9, достаточными условиями устойчивости системы являются $\underline{M}, \underline{K} > 0$. Видно, что если \underline{M} положительно, то должно выполняться неравенство

$$J_y > m_d l^2. \quad (12.52)$$

Из выражения (12.36) видно, указанное выше условие выполняется автоматически. При $\underline{K} > 0$ получим:

$$J_y > J_z, \quad J_y > J_x. \quad (12.53)$$

Следовательно

$$J_y - J_x > \frac{m_d^2 l^2 \omega_0^2}{k_d}. \quad (12.54)$$

Из выражения (12.53) видно, ось тангажа должна быть осью максимального момента инерции, что согласуется с предыдущими результатами.

В соответствии с требованиями теоремы 9.8, приведенной в Приложении 9, должно выполняться $\underline{D} > 0$. В действительности это условие не выполняется, поэтому анализ следует проводить в

соответствии с требованиями теоремы 9.9 из Приложения 9, однако из-за большой размерности системы решение будет громоздким. Следовательно, предпочтительнее применять критерий устойчивости из Приложения 7.

Применим преобразование Лапласа для выражения (12.50):

$$\begin{bmatrix} s^2 + 4k_x \omega_0^2 & -(1 - k_x) \omega_0 s & 0 \\ (1 - k_z) \omega_0 s & s^2 + k_z \omega_0^2 & \frac{m_d}{J_z} (s^2 + \omega_0^2) \\ 0 & l(s^2 + \omega_0^2) & s^2 + 2\omega_d \zeta s + \omega_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \\ \eta(s) \end{bmatrix} = 0. \quad (12.55)$$

Здесь ω_d – собственная частота колебаний поршня; ζ – коэффициент демпфирования демпфера.

$$\omega_d = \left(\frac{k_d}{m_d} \right)^{1/2}, \quad \zeta = \frac{C_d}{2\omega_d m_d}. \quad (12.56)$$

Для выражения (12.55) запишем характеристическое уравнение:

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0. \quad (12.57)$$

Обозначим $\hat{\omega}_d = \omega_d / \omega_0$, $\hat{I}_d = \frac{m_d l^2}{J_z}$, тогда коэффициенты в формуле можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
a_6 &= 1 - \hat{I}_d, \\
a_5 &= 2\omega_0 \hat{\omega}_d \zeta, \\
a_4 &= \omega_0^2 \left[1 + 3k_x + k_x k_z + \hat{\omega}_d^2 - 2(2k_x + 1)\hat{I}_d \right], \\
a_3 &= 2\omega_0^3 \hat{\omega}_d \zeta (1 + 3k_x + k_x k_z), \\
a_2 &= \omega_0^4 \left[(1 + 3k_x + k_x k_z) \hat{\omega}_d^2 + 4k_x k_z - (1 + 8k_x)\hat{I}_d \right], \\
a_1 &= 8k_x k_z \omega_0^5 \hat{\omega}_d \zeta, \\
a_0 &= 4\omega_0^6 \left(k_z \hat{\omega}_d^2 - \hat{I}_d \right) k_x.
\end{aligned} \tag{12.58}$$

Согласно Приложению 7, для системы шестого порядка условие устойчивости может быть записано:

$$a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0, \tag{12.59}$$

где условие $a_5 > 0$ выполняется автоматически, а из $a_3, a_1, a_0 > 0$ получим:

$$1 + 3k_x + k_x k_z > 0, \tag{12.60}$$

$$k_x k_z > 0, \tag{12.61}$$

$$k_z \hat{\omega}_d^2 - \hat{I}_d > 0. \tag{12.62}$$

Из анализа уравнения (12.61) видно, что k_x, k_z должны быть одновременно либо больше, либо меньше нуля. Но, учитывая выражение (12.53) и определение k_x, k_z из (12.14), получим:

$$k_x > 0, \quad k_z > 0. \tag{12.63}$$

Установлено, что формула (12.60) будет автоматически выполняться. Можно убедиться, что формула (12.62) совпадает с формулой (12.54). Таким образом, критерии устойчивости, которые мы получили ранее, состоят из трех формул, а именно (12.49), (12.61), (12.62). На рис. 12.8 показаны три области устойчивости, построенные для этих условий. По сравнению с рис. 12.3 и рис. 12.6, эта область сузилась. Однако мы еще не проанализировали два других условия из (12.59): $\Delta_3, \Delta_5 > 0$.

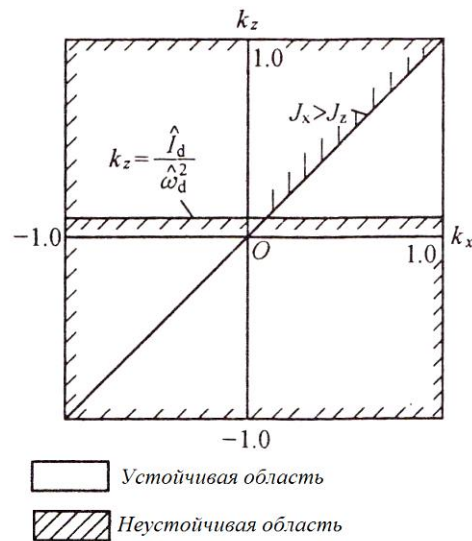


Рис. 12.8. Деление на области устойчивости для КА с гравитационной стабилизацией с демпфером на круговой орбите

Из Приложения 7 известно:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 \\ a_6 & a_4 & a_2 \\ 0 & a_5 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}. \quad (12.64)$$

Подставим вместо a_0, a_1, \dots, a_6 выражения (12.58) и запишем (12.64) в виде:

$$\Delta_3 = 4\hat{I}_d \zeta^2 k_x (k_z - 1) [k_x (3 + k_z) - 4] \omega_0^6 \hat{\omega}_d^2, \quad (12.65)$$

$$\Delta_6 = 288\hat{I}_d \zeta^3 k_x^3 (k_x - 1)(k_z - 1)^3 \omega_0^{15} \hat{\omega}_d^3. \quad (12.66)$$

Ранее было выявлено, что движение устойчиво только при $k_x > 0$, $k_z > 0$ (см. выражение (12.63)). Но также известно, что $|k_x| \leq 1$ и $|k_z| \leq 1$, поэтому выражения (12.65) и (12.66), очевидно, больше или равны нулю. Тогда $\Delta_3 > 0$, и условие $\Delta_5 > 0$ выполняется автоматически. На рис. 12.8 представлены области устойчивости спутника под действием гравитационного момента с использованием демпфирующих устройств.

В конце этого раздела отметим, что при сравнении рисунков 12.8 и 12.3 становится видно, что область устойчивости в плоскости параметров k_x и k_z после установки демпфера сужается, что, естественно, вызывает вопрос: а зачем же тогда нужен демпфер? Для ответа на этот вопрос мы должны снова вернуться к разделу 12.2, в котором доказано, что корень характеристического уравнения системы является сопряженным мнимым числом, а действительное равно нулю. Следовательно, решение системы состоит из положительных функций и функций с косинусами, что говорит об устойчивости в смысле Ляпунова, и амплитуда этой системы никогда не будет затухать. Это невыгодно и не работает на космических аппаратах, где требуется фиксированное наведение. После добавления демпфера, в силу выполнения условия $C_d \dot{\eta}$, процесс стабилизации становится асимптотическим, постепенно приближаясь к точным значениям, соответствующим устойчивости, при этом значительно улучшая условия работы КА. Действительно, у любого КА есть потери энергии, однако, в силу малости этой величины, амплитуда будет затухать до приемлемого уровня. Этот процесс занимает много

времени. Однако после добавления демпфера время затухания существенно сокращается.

Также из уравнения (12.4) видно, что гравитационный момент является функцией движения ориентации $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и также зависит от орбитального движения (радиуса орбиты R), следовательно, угловое и орбитальное движения спутника взаимосвязаны, но для упрощения анализа мы будем считать, что на круговых орбитах эти движения можно разделить. Кроме того, движение КА относительно Земли описывается очень сложной моделью и зависит от широты и долготы (см. первую часть этой книги), что необходимо учитывать при решении задачи ориентации КА.

13 КОСМИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ВРАЩАЮЩИЙСЯ ВОКРУГ ОДНОЙ ИЗ ОСЕЙ

Известно, что при вращении какого-либо объекта возникает гироскопический эффект, который используется для поддержания направления оси вращения объекта в инерциальном пространстве без внешней силы. Этот эффект часто используется для поддержания постоянства наведения КА или для предотвращения его вращения на орбите. Такой КА является устойчивым к вращению. К его преимуществам относятся простота управления и высокая устойчивость к внешним возмущениям.

Обычные КА с одним вращением могут быть двух типов, как показано на рис. 13.1: ось вращения на рисунке (а) расположена в плоскости орбиты и часть времени орбитального движения вращается вокруг Земли, что может быть использовано для наблюдения и обнаружения объектов на поверхности Земли; в случае (б) ось вращения ориентирована перпендикулярно плоскости орбиты. Аппаратура, установленная на КА, может быть постоянно ориентирована на наблюдаемую звезду или планету во время его вращения.

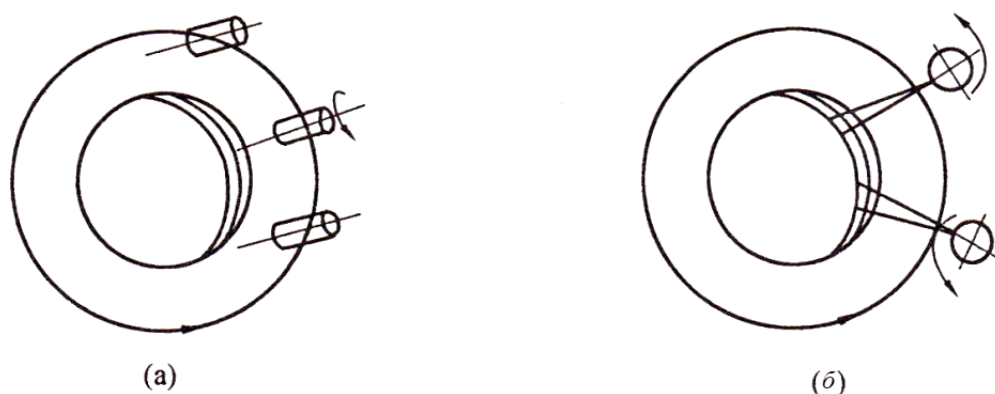


Рис. 13.1. Ориентация оси вращения КА

13.1 Характеристики свободного вращения осесимметричного КА

Рассмотрим движение КА, считая его абсолютно твердым телом. В материалах конструкции такого КА отсутствуют упругие и пластические деформации.

Проанализируем вращение однородного КА осесимметричной формы. Пусть этот КА имеет вид, показанный на рис. 13.2, где $Ox_b y_b z_b$ – жестко связанная с КА система координат, вращающаяся вместе с ним; O – центр масс, а все три оси – главные оси инерции: $J_x = J_y = J_t$, $J_z = J_0$. Система координат $Oxyz$ не вращается вместе с КА. В начальный момент времени $t = 0$ связанная $Oxyz$ и базовая $Ox_b y_b z_b$ системы координат совпадают. Затем система $Ox_b y_b z_b$ поворачивается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вокруг оси Oz (оси Oz_b) на угловое расстояние $\bar{\Omega}t$. Во время вращения оси Oz и Oz_b совпадают. Согласно формуле (11.19), уравнения углового движения вращающегося КА в компонентной форме в системе координат $Ox_b y_b z_b$ имеют вид:

$$J_t \dot{\omega}_{bx} - (J_t - J) \omega_{by} \omega_{bz} = 0, \quad (13.1a)$$

$$J_t \dot{\omega}_{by} - (J - J_t) \omega_{bz} \omega_{bx} = 0, \quad (13.1б)$$

$$J_t \dot{\omega}_{bz} = 0. \quad (13.1в)$$

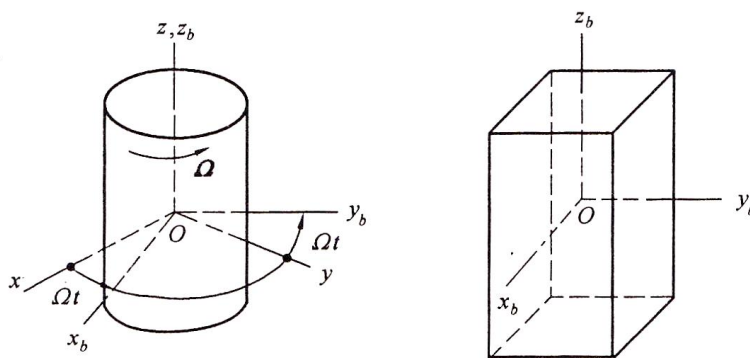


Рис. 13.2. Осесимметричный КА

Из выражения (13.1в) получим:

$$\omega_{bz} = \Omega = const. \quad (13.2)$$

Подставляя это выражение в (13.1а) и (13.1б), получим:

$$\dot{\omega}_{bx} + \omega_p \omega_{by} = 0, \quad (13.3a)$$

$$\dot{\omega}_{by} - \omega_p \omega_{bx} = 0. \quad (13.3б)$$

Здесь

$$\omega_p = \frac{J - J_t}{J_t} \Omega = const. \quad (13.4)$$

Получим ω_{bx} и ω_{by} из двух уравнений (13.3), а затем получим формулы:

$$\ddot{\omega}_{bx} + \omega_p^2 \omega_{bx} = 0, \quad (13.5a)$$

$$\ddot{\omega}_{by} + \omega_p^2 \omega_{by} = 0. \quad (13.5б)$$

Это дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами для ω_{bx} и ω_{by} . Их решения имеют вид

$$\omega_{bx} = A \cos \omega_p t + B \sin \omega_p t,$$

$$\omega_{by} = C \cos \omega_p t + D \sin \omega_p t.$$

Здесь A, B, C, D – постоянные интегрирования, которые могут быть найдены из начальных условий: $t=0$, $\omega_{bx} = \omega_{bx}(0)$, $\omega_{by} = \omega_{by}(0)$, т. е. $\omega_{bx}(0) = A$, $\omega_{by}(0) = C$.

Подставляя их в полученное выше решение и используя (13.3), можно найти:

$$B = -\omega_{by}(0), \quad D = \omega_{bx}(0).$$

Подставим значения постоянных интегрирования в исходное решение, получим:

$$\begin{aligned}\omega_{bx} &= \omega_{bx}(0)\cos\omega_p t - \omega_{by}(0)\sin\omega_p t, \\ \omega_{by} &= \omega_{by}(0)\cos\omega_p t + \omega_{bx}(0)\sin\omega_p t.\end{aligned}$$

Если $Ox_b y_b$ – комплексная плоскость, а Oy_b – мнимая ось, $i = \sqrt{-1}$ и $\omega_t = \omega_{bx} + i\omega_{by}$, то две указанные выше формулы примут вид:

$$\begin{aligned}\omega_t &= [\omega_{bx}(0) + i\omega_{by}(0)](\cos\omega_p t + i\sin\omega_p t) = \\ &= [\omega_{bx}^2(0) + \omega_{by}^2(0)]^{1/2} e^{i\omega_p t} = \omega_{t0} e^{i\omega_p t}.\end{aligned}\tag{13.6}$$

В формуле (13.6):

$$\omega_{t0} = [\omega_{bx}^2(0) + \omega_{by}^2(0)]^{1/2} = const.\tag{13.7}$$

Геометрический смысл выражения (13.6) отражен на рис. 13.3. Угловая скорость ω_t , которая является геометрической суммой ω_{bx} и ω_{by} , перпендикулярна оси Oz_b , поэтому ее также называют поперечной угловой скоростью. Она представляет собой вращательное движение вектора постоянной угловой скорости ω_{t0} . Вектор ω_t вращается вокруг оси Oz_b с угловой скоростью ω_p . Из уравнения (13.6) видно, что вектор $\bar{\omega}_t$ вращает-

ся с угловой скоростью ω_p вокруг оси Oz_b в положительном направлении, но реальная ситуация зависит от того, принимает ли ω_p положительные или отрицательные значения. Когда $J_t > J$, т. е. момент инерции КА по горизонтальной оси больше, чем по вертикальной оси, то зная, что $\omega_p < 0$ из уравнения (13.4), можно увидеть, что ω_t будет двигаться в направлении, противоположном $\bar{\Omega}$, и наоборот, когда $J_t < J$, т. е. момент инерции горизонтальной оси КА выше момента инерции вертикальной оси, $\omega_p > 0$ и ω_t будет вращаться в положительном направлении. Здесь следует отметить, что система $Ox_b y_b z_b$ вращается со скоростью $\bar{\Omega}$ вокруг оси Oz_b , поэтому ω_p можно рассматривать как относительную скорость вращения абсолютно твердого КА. Угловая скорость, вызванная движением ω_t , называется нутацией. Таким образом, абсолютно твердое тело вращается с абсолютной скоростью

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_t + \bar{\Omega}, \quad (13.8)$$

которая является суммой поперечной угловой скорости $\bar{\omega}_t$ и продольной угловой скорости $\bar{\Omega}$ (рис. 13.4). По модулю угловая скорость будет равна:

$$\omega = [\omega_t^2 + \Omega^2]^{1/2} = const. \quad (13.9)$$

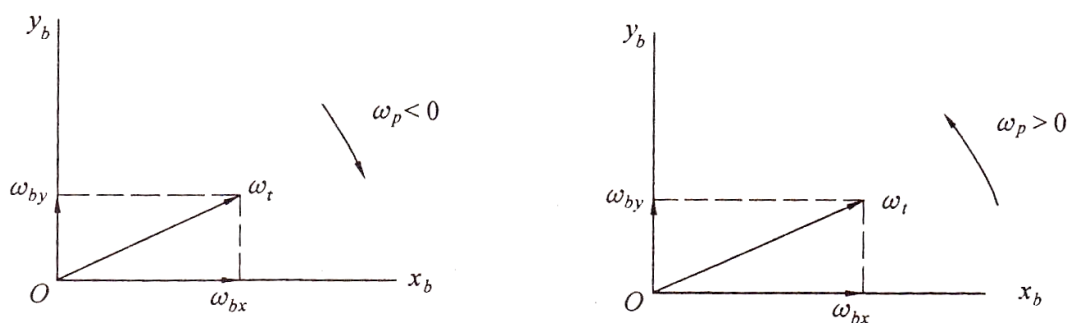


Рис. 13.3. Геометрическая интерпретация выражения $\omega_t = \omega_{bx} + i\omega_{by}$

Очевидно, что $\bar{\omega}_t$, $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}$ (т. е. ось Oz_b) компланарны и образуют продольную плоскость. Согласно формуле (13.6), продольная плоскость вращается относительно твердого КА вокруг оси Oz_b с угловой скоростью ω_p . Во время вращения вокруг оси Oz_b вектор $\bar{\omega}$ образует поверхность конуса. Угол при вершине конуса ζ удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\omega_t}{\Omega} = \frac{[\omega_{bx}^2(0) + \omega_{by}^2(0)]^{1/2}}{\Omega} = \operatorname{const}. \quad (13.10)$$

Поскольку угловая скорость была разделена на поперечную и продольную составляющие, то и угловой момент также можно разделить на поперечный угловой момент $J_t \bar{\omega}_t$ и продольный угловой момент $J \bar{\Omega}$, поэтому общий угловой момент равен:

$$\bar{h} = J_t \bar{\omega}_t + J \bar{\Omega} \quad (13.11)$$

или

$$h = [(J_t \omega_t)^2 + (J \Omega)^2]^{1/2} = \operatorname{const}. \quad (13.12)$$

Вектор углового момента образует с осью Oz_b угол ϕ , который называют углом нутации.

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{J_t \omega_t}{J \Omega} = \frac{J_t [\omega_{bx}^2(0) + \omega_{by}^2(0)]^{1/2}}{J \Omega} = \operatorname{const}. \quad (13.13)$$

Из уравнения (13.11) также можно сделать вывод, что ось Oz_b лежит в одной плоскости с $\bar{\omega}_t$ и \bar{h} . Образованная этими векторами плоскость является продольной (см. рис. 13.5).

Рассмотрим случай $J_t > J$. Согласно закону сохранения момента импульса, вектор \bar{h} должен сохранять направление и величину в инерциальном пространстве, а продольная плоскость может вращаться только вокруг вектора \bar{h} . В результате вращения $\bar{\omega}$ вокруг \bar{h} образуется объемное тело (рис. 13.6), называемое пространственным конусом. На рисунке также показан конус тела, и видно, что эти два конуса касаются по вектору $\bar{\omega}$. Движение твердого тела в пространстве с угловой скоростью $\bar{\omega}$ относительно оси инерции становится вращением конуса тела относительно пространственного конуса без скольжения. Угол между осями конусов равен $\phi - \xi$ и является фиксированным в инерциальном пространстве. В этом случае симметричное твердое тело имеет нутацию.

Схема на рис. 13.6 получена, исходя из предположения, что $J_t > J$. Когда же $J_t < J$, то помимо изменения ω_p , продольная плоскость будет поворачиваться вокруг оси Oz_b в противоположном направлении, так что вектор \bar{h} будет ближе к оси Oz_b , чем вектор $\bar{\omega}$ ($\phi < \xi$). На рис. 13.7 показан случай вращения симметричного твердого тела при $J_t < J$. Как и на рис. 13.6, вектор \bar{h} неподвижен в инерциальном пространстве, и тело вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси Oz_b . Вектор $\bar{\omega}$ является общей касательной двух конусов. Отличие от рис. 13.6 состоит в том, что один конус находится внутри другого. Если твердое тело вращается в одном и том же направлении в обоих случаях, то направление вращения конуса тела вокруг пространственного конуса противоположно. Вертикальные плоскости \bar{h} и $\bar{\omega}$ также отличаются друг от друга с точки зрения направления вращения относительно системы $Ox_b y_b z_b$. Это происходит из-за разницы в соотношении $J_t - J$.

Мы считали, что КА вращается вокруг оси симметрии Oz_b и использовали характеристики вращения гироскопа, чтобы КА сохранял свое направление в пространстве. Однако из проведенного анализа стало видно, что вращательные движения двух конусов будут всегда, пока есть начальные возмущения $\omega_{bx}(0)$ и $\omega_{by}(0)$ или другие возмущения горизонтальной оси.

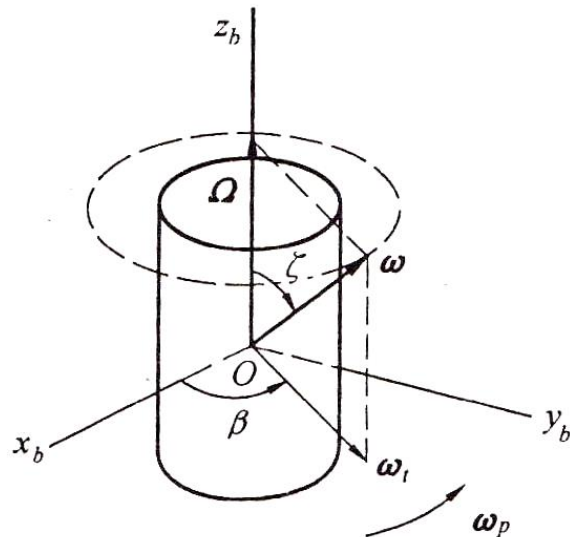


Рис. 13.4. Угловая скорость образует конус вокруг оси Oz_b
(конус тела)

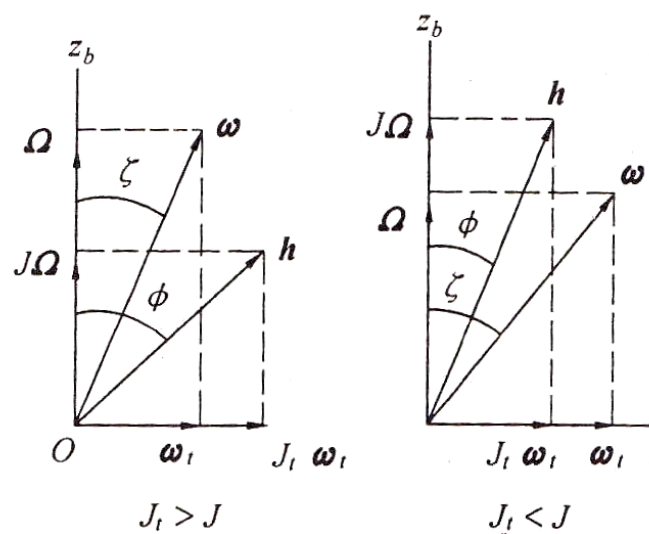


Рис. 13.5. Ось Oz_b и $\bar{\omega}$ и \bar{h} образуют плоскость, вращающуюся с угловой скоростью ω_p

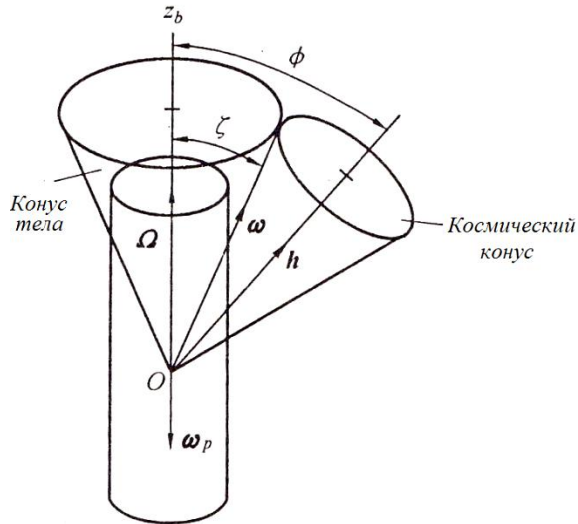


Рис. 13.6. Вращение осесимметричного летательного аппарата при $J_t > J$

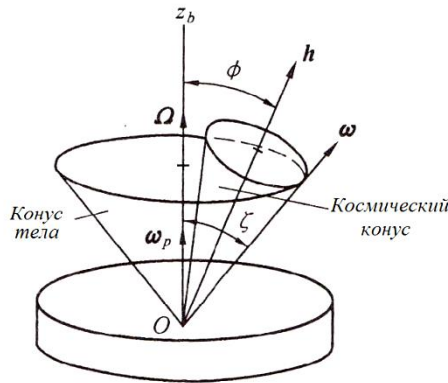


Рис. 13.7. Вращение осесимметричного летательного аппарата при $J_t < J$

Из проведенного выше анализа у нас уже есть четыре угловых скорости: $\bar{\Omega}, \bar{\omega}_t, \bar{\omega}, \bar{\omega}_p$. Очевидно, что первые три связаны формулой (13.8), т. е.

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega} + \bar{\omega}_t. \quad (13.14)$$

Это выражение однозначно описывает свободные вращения твердого тела. Итак, какова связь между угловыми скоростями $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_p$? Ответить на этот вопрос можно, сосредоточив внимание на

конусе вращения, показанном на рис. 13.6 и 13.7. Так как вращение двух конусов без проскальзывания может описывать свободное вращение тела, то вращение конуса без проскальзывания может быть разложено на продольное движение твердого тела относительно продольной и движения продольной плоскости относительно инерциального пространства. Продольная плоскость вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_p$ относительно твердого тела, а угловая скорость твердого тела относительно продольной плоскости равна $-\bar{\omega}_p$. Если угловая скорость продольной плоскости относительно инерциального пространства равна $\bar{\omega}_n$, то:

$$\bar{\omega} = -\bar{\omega}_p + \bar{\omega}_n. \quad (13.15)$$

Из рис. 13.8 можно определить величину и направление $\bar{\omega}_n$. На рисунке ось $Oz_b(\bar{\Omega})$, векторы $\bar{\omega}_t$ и $\bar{\omega}$ образуют продольную плоскость, $\bar{\Omega}$ и $\bar{\omega}_t$ — две стороны прямоугольника, а $\bar{\omega}$ является диагональю прямоугольника. Вектор $-\bar{\omega}_p$ должен располагаться вдоль оси Oz_b , а его направление определяется из выражения (13.4). Обозначим через $\bar{\omega}_n$ вектор, идущий от конца вектора $-\bar{\omega}_p$ к $\bar{\omega}$, т. е. он удовлетворяет выражению (13.15). Результаты построения представлены на рис. 13.8.

$$\omega_n = \left[(\Omega + \omega_p)^2 + \omega_t^2 \right]^{1/2}.$$

Подставляя (13.4) в приведенную выше формулу и учитывая (13.12), получим:

$$\omega_n = \frac{h}{J_t}. \quad (13.16)$$

Также можно получить:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\omega_t}{\Omega + \omega_p} = \frac{J_t \omega_t}{J \Omega}. \quad (13.17)$$

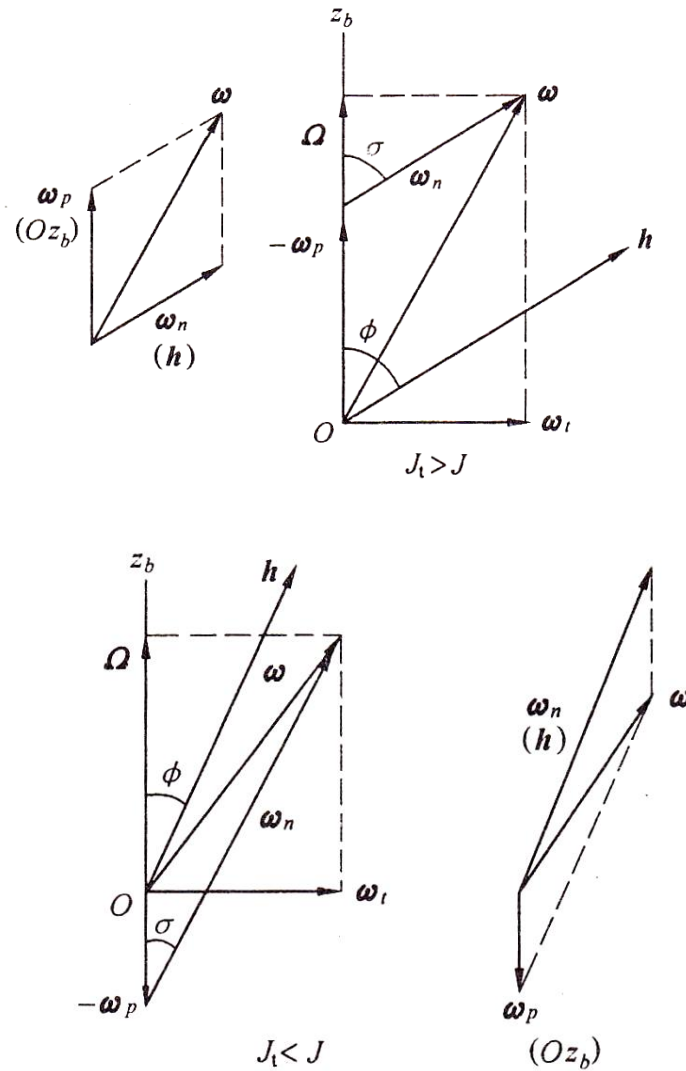


Рис. 13.8. Схема разложения вектора угловой скорости на составляющие

Из сравнения с выражением (13.13), видно, что выполняется равенство $\phi = \sigma$, т. е. $\bar{\omega}_n$ и \bar{h} должны быть параллельны.

Так как $\bar{\omega}_n$ – угловая скорость продольной плоскости (ось Oz_b) относительно конуса (инерциальное пространство), то ее также называют скоростью инерции.

Из проведенного анализа можно понять, что с кинематической точки зрения свободные вращения симметричного твердого тела можно рассматривать как сумму продольной и поперчной угловых скоростей $\bar{\omega}_t + \bar{\Omega}$, а также как сумму угловых скоростей тела и инерциальной системы $-\bar{\omega}_p + \bar{\omega}_n$.

13.2 Свободные вращения космического аппарата

Откажемся от предположения $J_x = J_y = J_z$, изложенного в предыдущей главе. Это означает, что у КА нет как таковой оси симметрии. Однако считаем, что по-прежнему оси связанной системы координат $Ox_b y_b z_b$ являются главными осями инерции

$$J_x \dot{\omega}_{bx} - (J_y - J_z) \omega_{by} \omega_{bz} = 0, \quad (13.18a)$$

$$J_y \dot{\omega}_{by} - (J_z - J_x) \omega_{bz} \omega_{bx} = 0, \quad (13.18б)$$

$$J_z \dot{\omega}_{bz} - (J_x - J_y) \omega_{bx} \omega_{by} = 0. \quad (13.18в)$$

Умножим приведенную выше формулу (13.18a) на ω_{bx} , (13.18б) на ω_{by} , (13.18в) на ω_{bz} и просуммируем их (для удобства опустим индекс b):

$$J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 = const .$$

Сравнивая это выражение с формулой (11.7), видим, что оно равно удвоенной кинетической энергии вращательного движения в базовой системе координат. Поэтому можно записать:

$$J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 = 2T. \quad (13.19)$$

Выражения (13.18а), (13.18б) и (13.18в) умножим на $J_x\omega_x$, $J_y\omega_y$ и $J_z\omega_z$ соответственно, а затем сложим их. Результат сравним с формулой (11.11), получим:

$$J_x^2\omega_x^2 + J_y^2\omega_y^2 + J_z^2\omega_z^2 = h^2. \quad (13.20)$$

Для момента импульса h и кинетической энергии T должны выполняться законы сохранения.

Из уравнений (13.19) и (13.20) видно, что при свободном вращении твердого тела должны выполняться зависимости между угловыми скоростями. Если $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – оси пространственной трехмерной системы координат, то уравнения (13.19) и (13.20) задают эллипсоиды вращения по энергии и моменту импульса. Их центры располагаются в начале координат, а вдоль осей откладываются следующие значения:

$$\left(\frac{2T}{J_x}\right)^{1/2}, \left(\frac{2T}{J_y}\right)^{1/2}, \left(\frac{2T}{J_z}\right)^{1/2}; \left(\frac{h}{J_x}\right), \left(\frac{h}{J_y}\right), \left(\frac{h}{J_z}\right). \quad (13.21)$$

То есть они обратно пропорциональны моменту инерции на соответствующей оси. Поскольку решение задачи о свободных вращениях космического аппарата удовлетворяет уравнениям (13.19) и (13.20), то решением будет пересечение поверхностей двух эллипсоидов (рис. 13.9). Эта линия пересечения также называется полярным следом тела. Вектор, идущий из начала координат к полярному следу тела, представляет собой угловую скорость вращения тела $\bar{\omega}(t)$ с координатами $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. С течением времени он движется по полярному следу тела. Если момент инерции постоянен, а полная энергия будет меняться, то можно

получить семейство полярностей тела на эллипсоиде момента импульса (рис. 13.10), которое описывает все возможные свободные вращательные движения соответствующего твердого тела. В случае если $J_x > J_y > J_z$, то полярный след тела делит эллипсоид на четыре области, которые вращаются вокруг осей ω_x , ω_z и разделены двумя полярными следами, пересекающими ось ω_y . Последний называют граничным полюсом. Если

$$J = \frac{h^2}{2T} \quad (13.22)$$

(J совпадает с моментом инерции), то можно определить условия того, что рабочий полюс попадает в определенную область. При $J_x \geq J > J_y$ ($h^2 > 2TJ_y$) он попадает в область оси ω_x ; при $J_y \geq J > J_z$ ($h^2 < 2TJ_y$) он попадает в область оси ω_z ; при $J = J_y$ ($h^2 = 2TJ_y$) он попадает в область полюса.

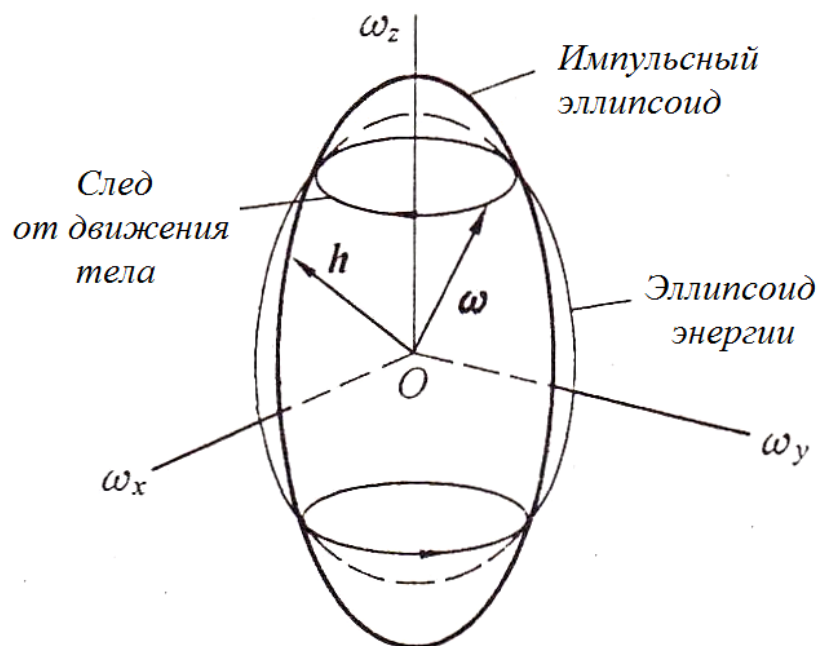


Рис. 13.9. Кривая пересечения эллипсоидов энергии и импульса

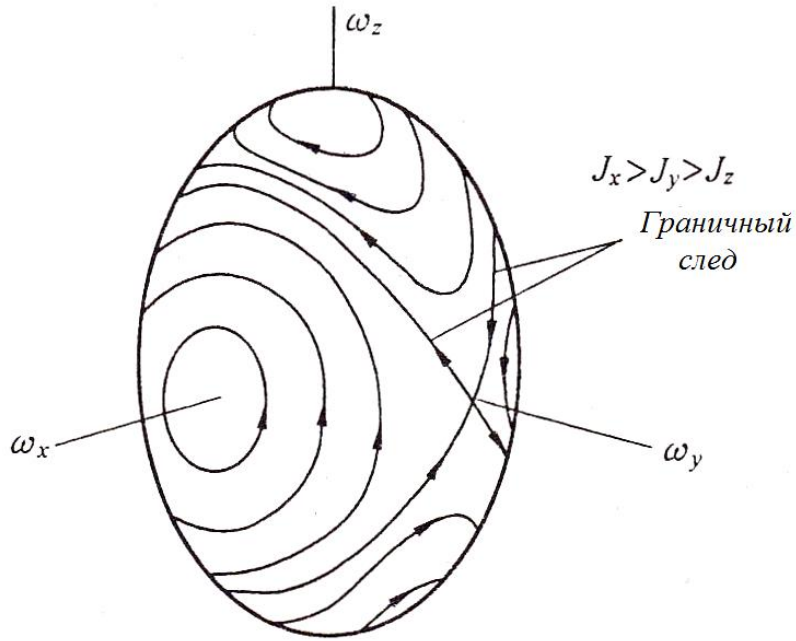


Рис. 13.10. Полярные следы тела при различных энергиях

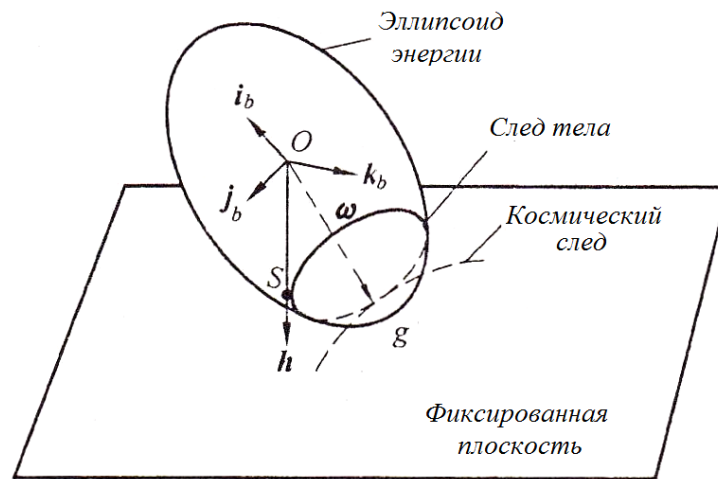


Рис. 13.11. След эллипсоида энергии на фиксированной плоскости

В 1834 году Пуансо создал геометрическую интерпретацию свободных вращений твердого тела. Из его работ следует, что свободные вращения твердого тела можно рассматривать как процесс прокатки центрального эллипсоида энергии по неподвижной плоскости. Расстояние от центра эллипсоида энергии до фиксированной плоскости отмеряется по перпендикуляру \bar{h} и составляет $\frac{2T}{h}$ (рис. 13.11).

Объяснение этой геометрической интерпретации приведено ниже. Во-первых, фиксированная плоскость и эллипсоид энергии пересекаются в точке g . Вектор, проведенный из точки O до g , - это вектор $\bar{\omega}(t)$ с компонентами $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ в соответствии с уравнением (13.19). Так как компоненты угловой скорости в точке касания единственны, и вторая интегральная формула (13.20) выполняется, то модель верна. Уравнение плоскости можно записать в виде:

$$lx_b + my_b + nz_b = p. \quad (13.23)$$

Здесь l, m, n - коэффициенты, определяющие направляющие косинусы между нормалью к плоскости и ее осями x_b, y_b, z_b ; p - длина от начала координат до плоскости по прямой OS . Неподвижная плоскость перпендикулярна \bar{h} , а ее нормаль должна быть параллельна \bar{h} , поэтому направляющие косинусы равны $J_x \omega_x, J_y \omega_y, J_z \omega_z$. Так как точка O неподвижна, то расстояние от нее до неподвижной плоскости также постоянно и равно проекции вектора $\bar{\omega}$ на направление \bar{h} , т. е. $\bar{\omega} \cdot \frac{\bar{h}}{h}$. Учитывая $\bar{h} = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k}$, $\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$ и формулу (13.19), получим $p = \frac{2T}{h}$. Это видно из рис. 13.11. Укажем угловой момент, образованный тремя компонентами угловой скорости точки g , который удовлетворяет требованиям уравнения (13.20). Доказано, что геометрическая модель Пуансо корректно описывает общий случай свободных вращений твердого тела.

13.3 Устойчивость вращения относительно осей инерции

Если система координат инерциальна, то движение в ней является неустойчивым независимо от того, вокруг какой из осей происходит свободное вращение. На рис. 13.12 показано твердое тело. Так как базисный вектор задает направление осей, то недиагональные элементы инерциальной диады не равны нулю. Если твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси системы координат, то ускорение элементарной массы dm (см. выражение (11.14)) равно $\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$, где \bar{a}_0 – ускорение точки O . Сила инерции элементарной массы dm равна $\bar{a}dm$, а момент инерции относительно точки O равен

$$\int_B \bar{r} \times \bar{a} dm = \bar{r}_c \times \bar{a}_0 m + \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}.$$

Здесь m – масса твердого тела B ; \bar{r}_c – радиус-вектор, идущий из точки O до центра масс. Пусть O совпадает с центром масс тела ($\bar{r}_c = 0$), тогда приведенная выше формула с учетом выражения (ПЗ.11) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} &= \underline{\underline{e}}_b^{-T} \underline{\underline{\omega}} \times \mathbf{J} \cdot \underline{\underline{\omega}} = \\ &= \underline{\underline{e}}_b^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} = -J_{yz} \omega^2 \bar{i}_b + J_{xy} \omega^2 \bar{k}_b. \end{aligned}$$

Из формулы видно, что существует момент инерции в направлении векторов \bar{i}_b и \bar{k}_b , поэтому вращение относительно оси \bar{j}_b будет неустойчивым.

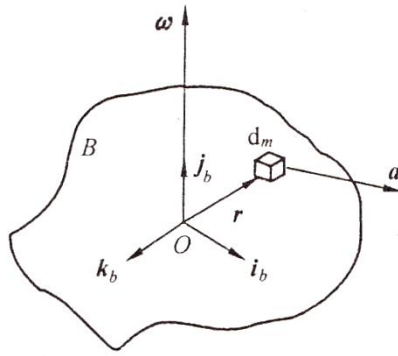


Рис. 13.12. Момент инерции при вращении вокруг оси

Следовательно, свободное вращение твердого тела относительно неинерциальной оси будет неустойчивым. Каким же тогда будет вращение относительно инерциальной оси?

Из приведенной выше формулы можно увидеть, что для свободного твердого тела, вращающегося вокруг инерциальной оси с постоянной скоростью, момент инерции относительно любой оси равен нулю. Кажется, ответ должен быть утвердительным. Однако устойчивость движения зависит не только от типа движения в данный момент времени (сбалансировано ли оно), но и от того, как поведет себя тело под действием небольших возмущений: вернется в исходное состояние или продолжит отклоняться от него. Причем тело может либо устойчиво вернуться к исходному положению, либо приближаться к нему, колеблясь с малой амплитудой около исходного положения.

Рассмотрим вращательные движения твердого тела вокруг главной оси \bar{j}_b . Пусть жесткий космический аппарат вращается с угловой скоростью Ω . В нормальном состоянии должны выполняться равенства: $\omega_{by} = \Omega, \omega_{bx} = \omega_{bz} = 0$. Если же они не выполняются, то подставляя в (11.19) выражения $\omega_{by} = \Omega + \delta\omega_{by}, \omega_{bx} = \delta\omega_{bx}, \omega_{bz} = \delta\omega_{bz}$, получим (для простоты опустим нижний индекс b):

$$\begin{aligned}
J_x \delta \dot{\omega}_x - (J_y - J_z)(\Omega + \delta \omega_y) \delta \omega_z &= 0, \\
J_y \delta \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \delta \omega_z \delta \omega_x &= 0, \\
J_z \delta \dot{\omega}_z - (J_x - J_y)(\Omega + \delta \omega_y) \delta \omega_x &= 0.
\end{aligned}$$

Если $\delta \omega_{bx}, \delta \omega_{by}$ – малые величины первого порядка малости, а величины второго и выше порядков опустить, получим:

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\omega}_x - \frac{(J_y - J_z)}{J_x} \Omega \delta \omega_z &= 0, \\
J_y \delta \dot{\omega}_y &= 0, \\
\delta \dot{\omega}_z + \frac{J_y - J_x}{J_z} \Omega \delta \omega_x &= 0.
\end{aligned}$$

Во втором выражении $\delta \omega_y = const$, а первое и третье уравнения связаны друг с другом. Если выразить $\delta \omega_z, \delta \omega_x$ из первого и третьего уравнений соответственно и заменить их, получим:

$$\delta \ddot{\omega}_y + \omega_p^2 \delta \omega_y = 0, \quad (13.24a)$$

$$\delta \ddot{\omega}_z + \omega_p^2 \delta \omega_z = 0. \quad (13.24b)$$

Здесь

$$\omega_p^2 = \frac{(J_y - J_z)(J_y - J_x)}{J_x J_z} \Omega^2. \quad (13.25)$$

Пусть решением двух уравнений является выражение $\delta \omega_i = C_i e^{\lambda t}$ ($i = x, z$), подставим его в исходное уравнение, получим:

$$\lambda^2 + \omega_p^2 = 0$$

или

$$\lambda = \pm \sqrt{-\omega_p^2} . \quad (13.26)$$

Можно заметить, что если правая часть выражения (13.25) отрицательна, то λ будет иметь положительный и отрицательный вещественные корни, а положительный вещественный корень $\delta\omega_i = C_i e^{\lambda t}$ приведет к тому, что амплитуда колебаний возрастет и вращение тела станет неустойчивым. Если выражение в правой части уравнения (13.25) положительно, то λ будет мнимым числом, т. е. $\lambda = \pm \sqrt{-1}\omega_p$, таким образом, получим:

$$\delta\omega_i = C_{i1} \cos \omega_p t + C_{i2} \sin \omega_p t, \quad i = x, z .$$

Это колебания с небольшой амплитудой, согласно приведенному выше определению устойчивости (устойчивость по Ляпунову), движение твердого тела устойчиво. Этот вывод можно также получить непосредственно из теоремы Приложения 9.2. Поэтому исследование проблемы устойчивости свободных вращений твердого тела сводится к определению величины:

$$\frac{(J_y - J_x)(J_y - J_z)}{J_x J_z} . \quad (13.27)$$

При отрицательном значении приведенного выше выражения движение неустойчиво, при положительном – устойчиво. Это выражение будет положительным в следующих случаях:

(1) $J_y > J_x, J_y > J_z$, т. е. движение происходит вокруг оси с максимальным моментом инерции;

(2) $J_y < J_x, J_y < J_z$, т. е. движение происходит вокруг оси с минимальным моментом инерции.

Это означает, что движение твердого тела без крутящего момента являются устойчивым только тогда, когда оно вращается вокруг оси с максимальным моментом инерции или оси с минимальным моментом инерции.

Этот вывод также можно сделать из рис. 13.10. На рисунке показан полярный след тела на эллипсоиде энергии, который равен J_y , что соответствует оси с промежуточным моментом инерции. Полярный след тела имеет седлоподобную особенность в точке оси $\bar{j}_b(Oy_b)$ и движение расходится вдоль полярного следа от этой точки. Поэтому вращательные движения твердого тела вокруг главной оси с промежуточным моментом инерции неустойчивы, соответственно, спутник, стабилизированный вращением, не должен вращаться вокруг этой оси.

Если k_x, k_z в формуле (12.14) являются параметрами

$$k_x = \frac{J_y - J_z}{J_x}, \quad k_z = \frac{J_y - J_x}{J_z}, \quad (13.28)$$

тогда условие устойчивости в смысле того, что выражение (13.27) больше нуля, также может быть записано в виде:

$$k_x > 0 \text{ и } k_z > 0 \quad (13.29)$$

или

$$k_x < 0 \text{ и } k_z < 0. \quad (13.30)$$

На координатной плоскости с горизонтальной k_x и вертикальной k_z осями показаны области устойчивости, построенные с помощью формул (13.29) и (13.30). Первый квадрант на рис. 13.13 является устойчивой областью, которая удовлетворяет условию формулы (13.29). В этой области J_y – максимальный

момент инерции. Третий квадрант также является областью устойчивости, в которой выполняется уравнение (13.30), а ось тангажа является осью минимального момента инерции J_y .

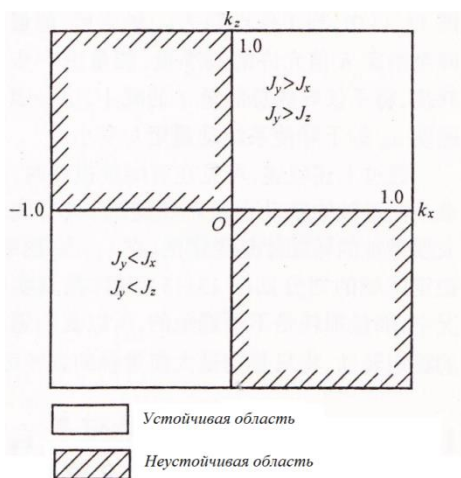


Рис. 13.13. Области устойчивости свободно вращающегося твердого тела

13.4 Свободные вращения твердого тела с потерей энергии

В разделе 13.3 был сделан вывод о том, что вращение твердого тела вокруг осей с максимальным и минимальным моментами инерции является устойчивым. Однако здесь есть проблема. Так называемое твердое тело относится к такому типу объектов, где расстояние между любыми двумя элементарными массами постоянно. Но таких тел в природе не существует. Под действием внешних сил свойства объекта изменяются, что приводит к большим или меньшим смещениям внутри твердого тела. В результате относительного смещения частиц возникает диссипация энергии, которая преобразуется в тепло и уходит в окружающее пространство. В частности, когда твердое тело состоит из нескольких частей или имеет в своем составе емкости с жидкостью, происходит трение между жидкостью и стенкой емкости, в результате чего энергия рассеивается. На практике иногда устанавливают амортизаторы, которые рассеивают энергию.

Когда в твердом теле есть потери энергии, вращение вокруг оси минимального момента инерции становится неустойчивым. Опишем этот процесс.

Для вращающегося твердого тела получены значения энергии и момента импульса малы (см. выражения (13.19) и (13.20)). Для идеальных твердых тел они являются инвариантными, а в случае наличия потерь энергии, энергия постепенно уменьшается, т. е.:

$$\dot{T} < 0. \quad (13.31)$$

Однако момент импульса остается неизменным (т. к. на систему не действуют внешние силы). В выражении (13.22) введен параметр J , представляющий собой отношение момента импульса к энергии и имеющий ту же размерность, что и момент инерции, и может использоваться в качестве меры энергии системы в этом разделе. Логарифмируя выражение (13.22) и дифференцируя по времени, получим:

$$\frac{\dot{J}}{J} + \frac{\dot{T}}{T} = 0. \quad (13.32)$$

Из формулы (13.22) можно сделать вывод о том, что J возрастает с течением времени. На рис. 13.10 приведены графики семейства полярных следов тела при $J_x > J_y > J_z$. Каждая замкнутая кривая соответствует определенной энергии T . Кривая полярного следа, совпадающая с осью ω_z (вырождается в точку на оси), соответствует наибольшей энергии $T = h^2/2J_z$; кривая полярного следа, совпадающая с осью ω_x (точка пересечения с осью ω_z), имеет наименьшую энергию $T = h^2/2J_x$. Другими словами, полярный след J вдоль оси ω_z является наибольшим, а вдоль оси ω_x – наименьшим. Если в начальный момент времени полярный

след оказывается на оси ω_z (рис. 13.14), то происходит потребление определенного количества энергии, и рабочая точка постепенно переместится с оси ω_z и войдет в кривую полярного следа рядом с осью ω_z . Поскольку энергия продолжает уменьшаться, кривая полярного следа не замыкается и все больше удаляется от оси ω_z . Когда кривая полярного следа пересекает пограничный полярный след, она попадает в область полярного следа вокруг оси ω_x и по спирали достигает этой оси. Данный процесс показан на рис. 13.13. Когда рабочая точка достигает оси ω_x , энергия падает до минимально допустимого заданного значения h . Дальнейшая потеря энергии приведет не только к уменьшению полной энергии, но и к уменьшению момента импульса системы h из-за уменьшения угловой скорости ω_x .

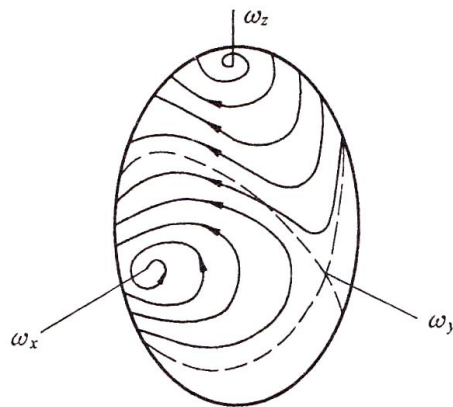


Рис. 13.14. Свободные вращения тела без потерь энергии

Из приведенного выше можно видеть, что, когда происходит потеря энергии, вращение вокруг оси минимального момента инерции также неустойчиво, и только вращение вокруг оси максимального момента инерции является устойчивым. На рис. 13.15 приведена диаграмма в координатах $k_x - k_z$ с областями устойчивости. В реальном мире потери энергии неизбежны, поэтому

устойчивым будет только вращательное движение КА вокруг оси максимального момента инерции.

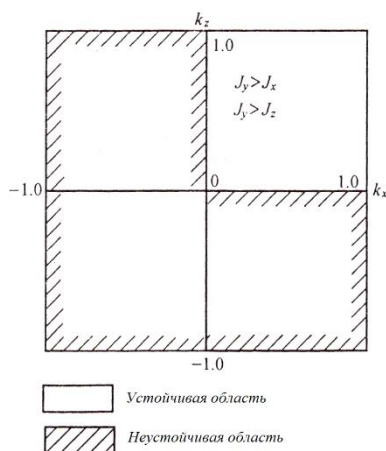


Рис. 13.15. Области устойчивости КА с потерей энергии, стабилизированных вращением

13.5 Влияние гравитационного момента на КА с одним вращением

В предыдущих разделах предполагалось, что на КА не действует внешний момент, что характерно для КА на средних или высоких околоземных орбитах. Однако такое допущение недопустимо для низкоорбитальных КА. На подобные КА действуют гравитационный момент, момент, возникающий от несферичности Земли, аэродинамический момент, момент светового давления, момент геомагнитного поля и т. д. В этом разделе будут рассматриваться только моменты от гравитационной силы.

В 12 главе было показано, что гравитационный момент зависит от параметров ориентации КА $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi, \theta, \psi)$ и параметров орбиты (R, ω_0) . Таким образом, для точного определения углового движения КА под действием гравитационного момента необходимо учитывать орбитальное движение. В данном разделе для упрощения считаем, что КА движется по круговой орбите, и рассматриваем отдельно его орбитальное и угловое движения.

Сначала запишем уравнения углового движения КА на круговой орбите. На рисунке 13.16 B – вращающийся КА, O – его центр масс, движущийся по круговой орбите. $OX_0Y_0Z_0$, $Oxyz$ – орбитальная и связанная системы координат соответственно. Орбитальная система координат вращается с орбитальной угловой скоростью ω_0 в отрицательном направлении оси OY_0 . В идеале связанная система координат $Oxyz$ должна совпасть с орбитальной. При движении КА в идеальных условиях он будет вращаться только вокруг оси OY_0 с угловой скоростью Ω , поэтому $\omega_y = \Omega$. А так как КА осесимметричен, то выполняется условие $J_x = J_z = J_t$ и $J_y = J$. Следовательно, уравнения углового движения КА при отсутствии внешнего момента имеют вид:

$$J_t \dot{\omega}_x - (J - J_t) \Omega \delta \omega_z = 0, \quad (13.33a)$$

$$J \dot{\omega}_y = 0, \quad (13.33б)$$

$$J_t \dot{\omega}_z - (J_t - J) \Omega \delta \omega_x = 0. \quad (13.33в)$$

Для исследования устойчивости этого «идеального» КА добавим небольшое возмущение. Под действием этого возмущения между осями систем координат $Oxyz$ и $OX_0Y_0Z_0$ появились углы Эйлера φ, ϑ, ψ и угловые скорости $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$. Матрица преобразования системы координат $OX_0Y_0Z_0$ в $Oxyz$ (см. выражения (10.20) или (10.25)) имеет вид:

$$\bar{C}_{x0} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\vartheta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \vartheta & -\varphi & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.34)$$

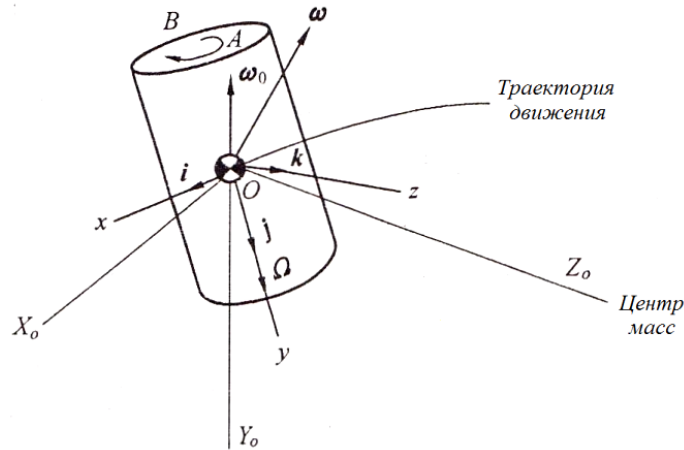


Рис. 13.16. КА с одним вращением на круговой орбите

В силу малости угла $\phi, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$ можно рассматривать как компоненты угловой скорости поворота относительно осей x, y, z : $\delta\omega_x = \dot{\phi}, \delta\omega_y = \dot{\vartheta}, \delta\omega_z = \dot{\psi}$, а полная угловая скорость определяется в виде $\bar{\omega} = \dot{\phi}\bar{i} + \dot{\vartheta}\bar{j} + \dot{\psi}\bar{k}$. Также система координат $OX_0Y_0Z_0$ поворачивается относительно оси OY_0 в отрицательном направлении с орбитальной угловой скоростью $\bar{\omega}_0$ и КА вращается со скоростью $\bar{\Omega}$ относительно оси Oy . Тогда полная угловая скорость будет

$$\bar{\omega}_\Sigma = \bar{\omega}^* + \bar{\Omega} = \bar{\omega} + \bar{\omega}_0 + \bar{\Omega}. \quad (13.35)$$

Ее компонентная форма записи в координатах $Oxyz$ имеет вид

$$\omega_\Sigma = \bar{e}^T \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \underline{C}_{x0} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \bar{e}^T \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \omega_0\psi \\ \dot{\vartheta} - \omega_0 + \Omega \\ \dot{\psi} + \omega_0\phi \end{bmatrix}. \quad (13.36)$$

Так как величина и направление вектора $\bar{\omega}_0$ постоянны, а вектор $\bar{\Omega}$ меняет свое направление с $\bar{\omega}_0$ на $\bar{\omega}$, и величина и

направление $\bar{\omega}$ изменяется вместе с $\bar{\omega}_0$, то производная по времени от $\bar{\omega}_\Sigma$ имеет вид:

$$\dot{\bar{\omega}}_\Sigma = \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega}_0 \times \bar{\omega} + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}) \times \bar{\Omega} = \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} \ddot{\phi} - (\omega_0 + \Omega)\dot{\psi} - \omega_0\Omega\phi \\ \ddot{\vartheta} \\ \ddot{\psi} + (\omega_0 + \Omega)\dot{\phi} - \omega_0\Omega\psi \end{bmatrix}. \quad (13.37)$$

Полученные соотношения подставим в выражение (11.16) и запишем кинетическое уравнение в виде проекций на оси системы координат $Oxyz$:

$$J_t\ddot{\phi} - [(J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\omega_0\phi - [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\dot{\psi} = M_x, \quad (13.38a)$$

$$J\ddot{\vartheta} = M_y, \quad (13.38б)$$

$$J_t\ddot{\psi} - [(J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\omega_0\psi + [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega]\dot{\phi} = M_z. \quad (13.38в)$$

Выражение в правой части уравнения учитывает только влияние гравитационного момента, и эти формулы имеют место только при малых углах, как показано в (12.9). Внесем некоторые пояснения. Так как КА вращается в пространстве, его ось инерции вращается относительно системы координат $Oxyz$. Следовательно, момент инерции относительно всех трех осей системы координат $Oxyz$ также должен изменяться вместе с вращательным циклом. Поэтому гравитационный момент, определяемый выражением (12.9), также будет изменяться периодически. Однако КА, рассматриваемый в данном разделе, является осесимметричным. При вращении вокруг оси симметрии момент инерции любой поперечной оси центра обозначен J_t , а момент инерции продольной оси — J , что позволяет в уравнениях избежать путаницы. Поэтому мы можем взять крутящий момент непосредственно из (12.9) и подставить в (13.38)

$$J_t \ddot{\phi} - [4(J_t - J)\omega_0 + J\Omega] \omega_0 \phi - [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega] \dot{\psi} = 0, \quad (13.39a)$$

$$J \ddot{\theta} = 0, \quad (13.39б)$$

$$J_t \ddot{\psi} - [(J_t - J)\omega_0 + J\Omega] \omega_0 \psi + [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega] \dot{\phi} = 0. \quad (13.39в)$$

Можно заметить, что движение по углу тангажа является независимым, а движения по углам рыскания и крена взаимосвязаны. Из (13.39б) видно, что $\dot{\theta} = const$, следовательно, увеличение возмущения, по сравнению с первоначальным, не влияет на устойчивость направления оси вращения. Для анализа движения по двум другим каналам, перепишем выражения (13.39а) и (13.39в) в виде:

$$\underline{m} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \underline{G} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \underline{K} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13.40)$$

Здесь

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} J_t & 0 \\ 0 & J_t \end{bmatrix} = \underline{m}^T > 0,$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -(2J_t - J)\omega_0 - J\Omega \\ (2J_t - J)\omega_0 + J\Omega & 0 \end{bmatrix} = -\underline{G}^T,$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -4(J_t - J)\omega_0^2 - J\Omega\omega_0 & 0 \\ 0 & -(J_t - J)\omega_0^2 - J\Omega\omega_0 \end{bmatrix} = \underline{K}^T.$$

Очевидно, что выражение (13.40) удовлетворяет условиям теоремы 9.6 из Приложения 9, следовательно, условием устойчивости системы является $\underline{K} > 0$. Из выражения для матрицы \underline{K} можно получить условия устойчивости по углам тангажа и рыскания:

$$\begin{aligned} & \left[4(J_t - J)\omega_0^2 + J\Omega\omega_0 \right] \left[(J_t - J)\omega_0^2 + J\Omega\omega_0 \right] = \\ & = 4(J_t - J)^2 \omega_0^4 + 5(J_t - J)J\Omega\omega_0^3 + J^2\Omega^2\omega_0^2 > 0. \end{aligned} \quad (13.41)$$

Индуктивный относительный коэффициент k_t и безразмерная угловая скорость $\hat{\Omega}$ определяются следующим образом:

$$k_t = \frac{J - J_t}{J_t}, \quad \hat{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}. \quad (13.42)$$

Условие устойчивости выражения (13.41) имеет вид:

$$k_t < \frac{\hat{\Omega}}{4 - \hat{\Omega}}, \quad k_t < \frac{\hat{\Omega}}{1 - \hat{\Omega}}; \quad \text{и} \quad k_t > \frac{\hat{\Omega}}{4 - \hat{\Omega}}, \quad k_t > \frac{\hat{\Omega}}{1 - \hat{\Omega}}. \quad (13.43)$$

Теорема 9.6 очень проста в использовании, однако дает лишь достаточные условия устойчивости системы. Чтобы получить необходимые и достаточные условия, нужно для выражения (13.40) составить характеристическое уравнение. Поэтому для уравнения (13.40) применяется преобразование Лапласа с использованием параметров уравнения (13.42) вместо J_t :

$$\begin{bmatrix} s^2 + [4k_t - (k_t + 1)\hat{\Omega}]\omega_0^2 & [k_t - 1 - (k_t + 1)\hat{\Omega}]\omega_0 s \\ -[k_t - 1 - (k_t + 1)\hat{\Omega}]\omega_0 s & s^2 + [k_t - (k_t + 1)\hat{\Omega}]\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & s^4 + \left\{ 3k_t + 1 + [k_t - (k_t + 1)\hat{\Omega}]^2 \right\} \omega_0^2 s^2 + \\ & + [4k_t^2 - 5k_t(k_t + 1)\hat{\Omega} + (k_t + 1)^2 \hat{\Omega}^2] \omega_0^4 = 0. \end{aligned} \quad (13.44)$$

Согласно таблице П9.1 Приложения 9, условие устойчивости системы будет иметь вид:

$$b_1 = \left\{ 3k_t + 1 + [k_t - (k_t + 1)\hat{\Omega}]^2 \right\} > 0, \quad (13.45)$$

$$b_2 = 4k_t^2 - 5k_t(k_t + 1)\hat{\Omega} + (k_t + 1)^2 \hat{\Omega}^2 > 0, \quad (13.46)$$

$$b_1^2 - 4b_0 > 0. \quad (13.47)$$

В действительности формулы (13.46) и (13.43) полностью идентичны, а уравнения (13.45) и (13.47) являются новыми условиями устойчивости.

На рис. 13.17 представлены области устойчивости, полученные по формулам (13.45) и (13.47). Можно видеть, что при $k_t > 0$ (момент инерции относительно вертикальной оси больше момента инерции относительно горизонтальной оси), система вращается вокруг этой оси, и система в большей части площади будет устойчива. При $k_t < 0$ (вращение происходит вокруг оси с меньшим моментом инерции) система также может быть устойчивой, особенно в случае большого момента.

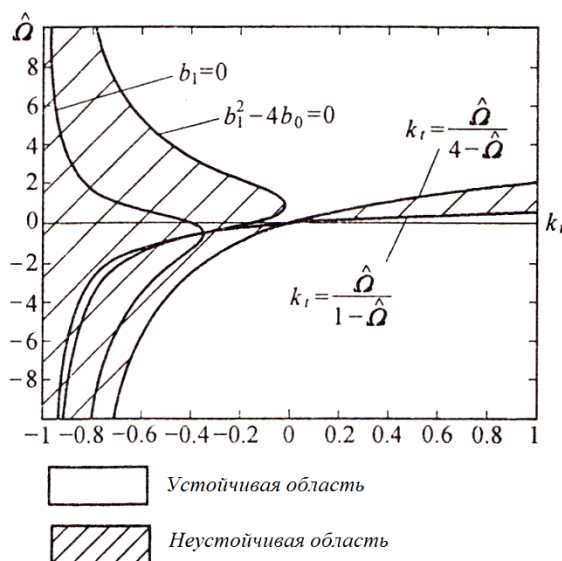


Рис. 13.17. Области устойчивости стабилизированного вращением КА на круговой орбите

13.6 Демпфирование колебаний в стабилизированном вращении КА

В разделах 13.1 и 13.2 мы рассмотрели вращательные движения ЛА, которые можно представить в виде конуса с постоянной амплитудой. Чтобы уменьшить вращение и, наконец, довести его до допустимого диапазона, на такие КА устанавливаются демпферы вращательных колебаний, которые могут быть как пассивными, так и активными.

В этом разделе мы будем рассматривать пассивные демпферы, т. е. устройства, которые не требуют внешней энергии и потребляют только энергию вращающегося КА. Предположим, что на КА установлен пружинно-поршневой демпфер, как описано в разделе 13.5. Исследуем устойчивость КА после добавления к нему демпфера.

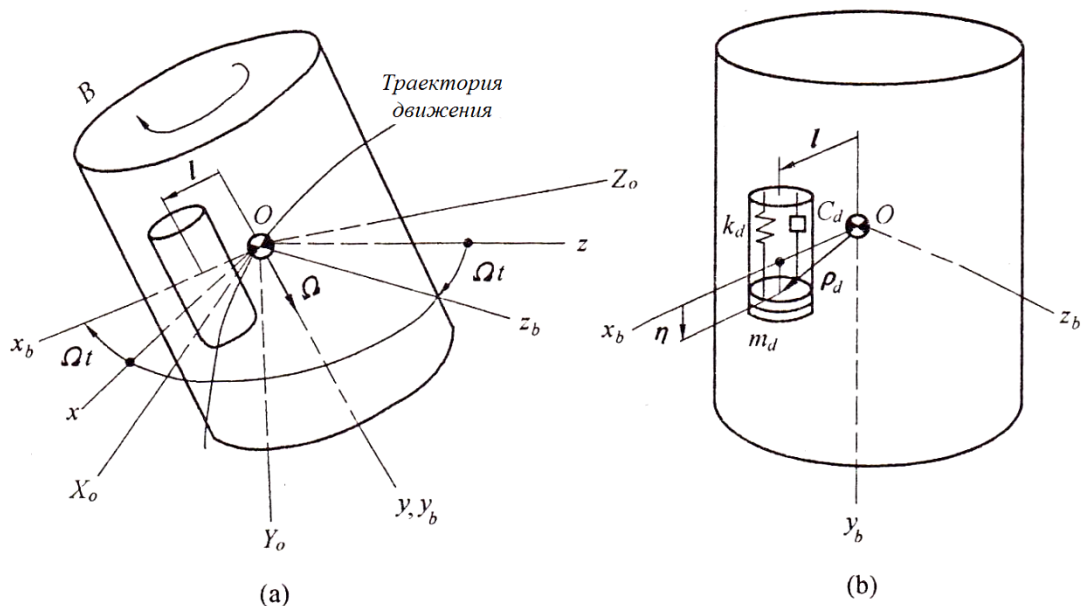


Рис. 13.18. Затухание колебаний во вращающемся КА

На рис. 13.18 показан КА с неподвижным элементом внутри, который вращается вместе с КА в системе координат $Ox_b y_b z_b$. В системе координат $Oxyz$, связанной с КА, происходит только орбитальное движение КА (с угловыми скоростями $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$) без

учета вращательного движения (со скоростью Ω). Поэтому матрица преобразования координат \underline{C}_{bx} из системы $Oxyz$ в систему $Ox_b y_b z_b$ имеет вид (10.27):

$$\underline{C}_{bx} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & 0 & -\sin \Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Omega t & 0 & \cos \Omega t \end{bmatrix}. \quad (13.48)$$

Установим вдоль оси Ox_b системы координат $Ox_b y_b z_b$ демпфер. Демпфер состоит из пружины (с жесткостью k_d), поршня (массой m_d) и вязкой демпфирующей жидкости (вязкостью C_d). Точка равновесия поршня находится на оси Ox_b , а смещение η составляет 70° вдоль оси Oy_b . Когда поршень располагается вдоль оси Ox_b ($\eta=0$), диагональная матрица инерции в системе $Ox_b y_b z_b$ принимает вид:

$$\underline{J}_0 = \begin{bmatrix} J_t & 0 \\ & J \\ 0 & J_t \end{bmatrix}. \quad (13.49)$$

Демпфер состоит из двух частей: поршня демпфера и «звезды инерции», отличной от поршня демпфера. Первый используется, когда демпфер находится на оси Ox_b (справочная формула (П3.35)), и его момент инерции равен:

$$\underline{I}_{d0} = m_d \left(\underline{l}^T \underline{l} \underline{E} - \underline{l} \underline{l}^T \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 \end{bmatrix} m_d. \quad (13.50)$$

Момент инерции последнего равен \underline{I}_b , т. к. $J_0 = \underline{I}_b + \underline{I}_{d0}$, поэтому можно записать:

$$\underline{I}_b = \begin{bmatrix} J_t & 0 & 0 \\ 0 & J - l^2 m_d & 0 \\ 0 & 0 & J_t - l^2 m_d \end{bmatrix}. \quad (13.51)$$

Когда поршень демпфера смещается на расстояние η от точки O , то, если векторное расстояние от точки O до центра поршня равно $\bar{\rho}_b = \bar{l} + \bar{n}$, момент инерции будет

$$\underline{I}_d = m_d \left[\underline{\rho}_d^T \underline{\rho}_d \underline{E} - \underline{\rho}_d \underline{\rho}_d^T \right] = \begin{bmatrix} \eta^2 & -l\eta & 0 \\ -l\eta & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 + \eta^2 \end{bmatrix} m_d. \quad (13.52)$$

Если η – малая величина, то в выражении для полного момента инерции можно опустить η второго порядка малости, получим:

$$\begin{aligned} \underline{J} = \underline{I}_b + \underline{I}_d &= \begin{bmatrix} J_t + \eta^2 m_d & -l\eta m_d & 0 \\ -l\eta m_d & J & 0 \\ 0 & 0 & J_t + \eta^2 m_d \end{bmatrix} \cong \\ &\cong \begin{bmatrix} J_t & -l\eta m_d & 0 \\ -l\eta m_d & J & 0 \\ 0 & 0 & J_t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.53)$$

Следует отметить, что: (1) η изменяется со временем, поэтому J также изменяется со временем; (2) \bar{J} записана в системе координат $Ox_b y_b z_b$, а в системе $Oxyz$ она имеет вид:

$$\underline{J}^* = \underline{C}_{xb} \underline{J} \underline{C}_{bx} = \begin{bmatrix} J_t & -l\eta m_d \cos \Omega t & 0 \\ -l\eta m_d \cos \Omega t & J & l\eta m_d \sin \Omega t \\ 0 & l\eta m_d \sin \Omega t & J_t \end{bmatrix}. \quad (13.54)$$

При выводе уравнений динамики скорость и ускорение поршня рассчитывались для точечной массы. Т. к. $\bar{\rho}_d = \bar{l} + \bar{n}$, то

$$\begin{aligned} \bar{v}_d &= \bar{v}_0 + \dot{\bar{\rho}}_d = \bar{v}_0 + \dot{\bar{\eta}} + \bar{\omega}_\Sigma \times \bar{\rho}_d, \\ \bar{a}_d &= \dot{\bar{v}}_0 + \ddot{\bar{\rho}}_d = \dot{\bar{v}}_0 + \ddot{\bar{\eta}} + 2\bar{\omega}_\Sigma \times \dot{\bar{\eta}} + \dot{\bar{\omega}}_\Sigma \times \bar{\rho}_d + \bar{\omega}_\Sigma \times (\bar{\omega}_\Sigma \times \bar{\rho}_d). \end{aligned} \quad (13.55)$$

Здесь $\bar{\omega}_\Sigma$ – угловая скорость КА относительно инерциального пространства, которая определяется из выражения (13.36), а производная по времени приведена в (13.37).

Уравнение углового движения можно получить при условии баланса моментов точки относительно центра масс O . В отличие от (2.13), выражение увеличится, так как добавится момент инерции демпфера

$$\int_B \bar{r} \times \bar{a} dm + \bar{\rho}_d \times \bar{a}_d m_d = \bar{M}.$$

Используя формулы (11.14) и (13.55) и считая, что O – центр масс, получим:

$$\int_B \bar{r} dm + \bar{\rho}_d m_d = 0. \quad (13.56)$$

В формуле (11.14) \bar{a}_p и $\bar{\omega}$ заменяются соответственно на $\dot{\bar{v}}_0$ и $\bar{\omega}_\Sigma$, тогда выражение приобретает вид:

$$\bar{\mathbf{J}} \cdot \dot{\bar{\omega}}_{\Sigma} + \bar{\omega}_{\Sigma} \times \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\omega}_{\Sigma} + \bar{\rho}_d \times \left(\overset{\circ}{\bar{\eta}} + 2\bar{\omega}_{\Sigma} \times \overset{\circ}{\bar{\eta}} \right) = \bar{\mathbf{M}}. \quad (13.57)$$

Обозначим компонентную форму записи \mathbf{J} в системе координат $Oxyz$ через \underline{J}^* , а проекции вектора $\bar{\rho}_d$ на оси Ox_b и Oy_b – через l и η соответственно, тогда в системе $Oxyz$ можно записать:

$$\underline{\rho}_d = \underline{C}_{xb} \begin{bmatrix} l \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cos \Omega t \\ \eta \\ -l \sin \Omega t \end{bmatrix}. \quad (13.58)$$

Компоненты других векторов в (13.57) могут быть заданы уравнениями (13.36), (13.37), (13.54) и (13.57). Уравнения углового движения в системе $Oxyz$ (малыми второго порядка пренебрегаем) имеют вид:

$$J_t \ddot{\varphi} - [(J_t - J)\omega_0 + J\Omega] \omega_0 \varphi - [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega] \dot{\psi} + m_d l [\ddot{\eta} + (\omega_0 - \Omega)^2 \eta] \sin \Omega t = M_x, \quad (13.59a)$$

$$J \ddot{\vartheta} = M_y, \quad (13.59b)$$

$$J_t \ddot{\psi} - [(J_t - J)\omega_0 + J\Omega] \omega_0 \psi + [(2J_t - J)\omega_0 + J\Omega] \dot{\varphi} + m_d l [\ddot{\eta} + (\omega_0 - \Omega)^2 \eta] \cos \Omega t = M_z. \quad (13.59b)$$

В отличие от формулы (13.39), к левой части уравнения для углов тангажа и рыскания добавлены члены, содержащие синус и косинус аргумента Ωt , включая движение поршня и угол поворота. В приведенном выше уравнении независимых переменных четыре – φ, ϑ, ψ и η , что превышает количество уравнений. Кроме того, у переменной η коэффициент является периодической

функцией, таким образом, уравнения приобретают вид уравнений Флоке. В связи с этим необходимо выполнить следующие действия: сначала найти независимое уравнение, имеющее решение, которое позволило бы замкнуть систему, а затем найти способ решения уравнения Флоке.

Также необходимо найти уравнение движения демпферного поршня. Если поршень отделен от КА, сила \bar{F} должна иметь направление, как показано на рис. 13.19. Без учета силы пружины и вязкого сопротивления $-k_d\bar{\eta}$ и $C_d\dot{\bar{\eta}}$, сила \bar{F} будет перпендикулярна направлению движения и должна прикладываться через стенку цилиндра. Ускорение поршня $\ddot{\rho}_d$ массой m_d в системе отсчета таково, что уравнение движения имеет вид:

$$m_d\ddot{\rho}_d = -C_d\dot{\bar{\eta}} - k_d\bar{\eta} + \bar{F}. \quad (13.60)$$

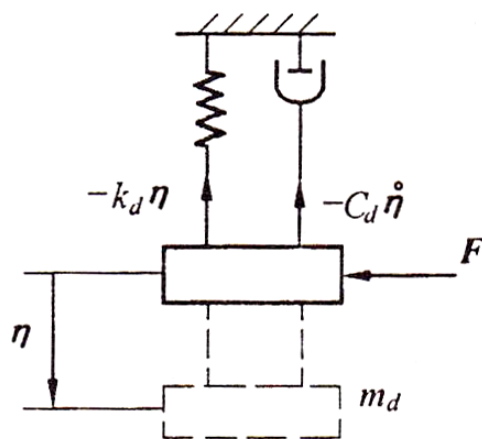


Рис. 13.19. Сила, действующая на поршень демпфера

Из формулы (13.55) выразим $\ddot{\rho}_d$ и подставим в (13.60), а затем запишем в компонентной форме в системе $Oxyz$. Далее возьмем его компоненту в направлении оси Oy (опуская члены второго порядка):

$$\begin{aligned}
& m_d \ddot{\eta} + C_d \dot{\eta} + k_d \eta + m_d l (\ddot{\varphi} \sin \Omega t + \ddot{\psi} \cos \Omega t) + \\
& + 2m_d l \Omega (\dot{\varphi} \cos \Omega t - \dot{\psi} \sin \Omega t) + \\
& + m_d l (\omega_0^2 - 2\omega_0 \Omega) (\varphi \sin \Omega t + \psi \cos \Omega t) = 0.
\end{aligned} \tag{13.61}$$

Видно, что это уравнение с периодически переменным коэффициентом.

Чтобы избавиться от периодически переменного коэффициента, можно использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \varphi \cos \Omega t - \psi \sin \Omega t, \\
\sigma_2 &= \mathcal{G}, \\
\sigma_3 &= \varphi \sin \Omega t + \psi \cos \Omega t.
\end{aligned} \tag{13.62}$$

При отсутствии внешнего момента и с учетом этих соотношений уравнение Флоке становится дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$J_t \ddot{\delta}_1 - (2J_t - J)(\omega_0 - \Omega) \dot{\delta}_3 + (J - J_t)(\omega_0 - \Omega)^2 \delta_1 = 0, \tag{13.63a}$$

$$J \ddot{\delta}_2 = 0, \tag{13.63б}$$

$$\begin{aligned}
& J_t \ddot{\delta}_3 + (2J_t - J)(\omega_0 - \Omega) \dot{\delta}_1 + (J - J_t)(\omega_0 - \Omega)^2 \delta_3 + \\
& + m_d l [\ddot{\eta} + (\omega_0 - \Omega)^2 \eta] = 0,
\end{aligned} \tag{13.63в}$$

$$m_d \ddot{\eta} + C_d \dot{\eta} + k_d \eta + m_d l \ddot{\delta}_3 + m_d l (\omega_0 - \Omega)^2 \delta_3 = 0. \tag{13.63г}$$

В этих четырех уравнениях вторая формула по-прежнему не зависит от трех остальных, следовательно, $\dot{\delta}_2 = const$. Постоянные возмущения не влияют на устойчивость направления оси вращения.

Для анализа устойчивости по остальным трем каналам, рассмотрим J_t . Поделим (13.63а), (13.63в) и (13.63г) на m_d , а затем выполним преобразование Лапласа:

$$\begin{bmatrix} s^2 + k_t(\omega_0 - \Omega)^2 & -(1 - k_t)(\omega_0 - \Omega)s & 0 \\ (1 - k_t)(\omega_0 - \Omega)s & s^2 + k_t(\omega_0 - \Omega)^2 & \frac{m_d l}{J_t} [s^2 + (\omega_0 - \Omega)^2] \\ 0 & l [s^2 + (\omega_0 - \Omega)^2] & s^2 + 2\omega_d \zeta s + \omega_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1(s) \\ \sigma_3(s) \\ \eta(s) \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

Здесь

$$\omega_d = \left(\frac{k_d}{m_d} \right)^{1/2}, \quad \zeta = \frac{C_d}{2\omega_d m_d}, \quad k_t = \frac{J - J_t}{J_t}. \quad (13.64)$$

Пусть определитель квадратной матрицы слева равен нулю, тогда получим характеристическое уравнение системы:

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, \quad (13.65)$$

где

$$\begin{aligned} a_6 &= 1 - \hat{I}_d, \\ a_5 &= 2(\omega_0 - \Omega) \hat{\omega}_d \zeta, \\ a_4 &= (\omega_0 - \Omega)^2 [\hat{\omega}_d + 1 + k_t^2 - \hat{I}_d (k_t + 2)], \\ a_3 &= 2(\omega_0 - \Omega)^3 \hat{\omega}_d \zeta (1 + k_t^2), \\ a_2 &= (\omega_0 - \Omega)^4 [\hat{\omega}_d^2 (1 + k_t^2) + k_t^2 - \hat{I}_d (k_t + 2)], \\ a_1 &= 2(\omega_0 - \Omega)^5 \hat{\omega}_d k_t \zeta, \\ a_0 &= (\omega_0 - \Omega)^6 (\hat{\omega}_d^2 k_t^2 - \hat{I}_d k_t). \end{aligned} \quad (13.66)$$

Здесь

$$\hat{\omega}_d = \frac{\omega_d}{|\omega_0 - \Omega|}, \quad \hat{I}_d = \frac{m_d l^2}{J_t}. \quad (13.67)$$

Согласно Приложению 7, условия устойчивости характеристического уравнения 6-го порядка имеют вид: $a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0$. Здесь a_5, a_3, a_1 больше нуля (если разность $\omega_0 - \Omega$ отрицательна, можно выражение (13.65) умножить на -1); при $a_0 > 0$ получим:

$$k_t \hat{\omega}_d^2 - \hat{I}_d > 0. \quad (13.68)$$

Это выражение аналогично выражению (12.62) для ЛА, стабилизированного гравитационным моментом. Последние два неравенства имеют вид:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 \\ a_6 & a_4 & a_2 \\ 0 & a_5 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0. \quad (13.69)$$

После подстановки сюда соответствующих коэффициентов получим:

$$\Delta_3 = k_t(1 - k_t)(1 + k_t) > 0, \quad (13.70)$$

$$\Delta_5 = 0. \quad (13.71)$$

Из выражения (13.70) следует, что система асимптотически устойчива только в том случае, когда k_t находится в диапазоне

(0,1), т. е. $\Delta_3 > 0$, и система будет неустойчивой; когда $k_t \leq 0$. Если выражение (13.71) равно нулю, то устойчивость системы не может быть определена.

Среди шести критериев устойчивости, перечисленных выше, шестая формула (13.71) не дает гарантии устойчивости системы, поэтому следует использовать другие методы. Например, можно применить теорему из Приложения 9. Для этой цели в формуле (13.63) используется J_t :

$$\underline{m} \begin{bmatrix} \ddot{\sigma}_1 \\ \ddot{\sigma}_3 \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + (\underline{G} + \underline{D}) \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_3 \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \underline{K} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \eta \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad (13.72)$$

где

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m_t \\ 0 & m_t & a_t \end{bmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-k_t) & 0 \\ 1-k_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.73)$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} k_t \omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_t \omega_s^2 & m_t \omega_s^2 \\ 0 & m_t \omega_s^2 & k \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$m_t = \frac{m_d l}{J_t}, \quad a_t = \frac{m_d}{J_t}, \quad C = \frac{C_d}{J_t}, \quad (13.74)$$

$$k = \frac{k_d}{J_t}, \quad \omega_s = \omega_0 - \Omega.$$

Для систем вида (13.72) устойчивость можно оценить по известной теореме Кельвина-Тейта-Четаева (также известной как

теорема КТЧ). Согласно этой теореме, если система, описываемая уравнением (13.72), асимптотически устойчива, то она должна быть полностью затухающей (т. е. $\bar{D} > 0$) и статически устойчивой (т. е. $\bar{K} > 0$).

Зачастую данное требование не удовлетворяется для КА. Например, в нашем примере \bar{D} не соответствует требованию теоремы. В таких случаях следует использовать теорему 9.8 или 9.9 Приложения 9.

Теорема 9.8 дает достаточные условия устойчивости системы типа (13.72), которые описываются следующим образом: если $\underline{m}^T = \underline{m} > 0$, $\underline{G}^T = -\underline{G}$, $\underline{D}^T = \underline{D}$, $\underline{K}^T = \underline{K}$ и существуют $\underline{m}, \underline{G}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n \times n}$, то при $\underline{D} > 0, \underline{K} > 0$ система будет асимптотически устойчивой. Таким образом, требования теоремы выполняются:

$$\underline{D} > 0, \underline{m} > 0, \underline{K} > 0. \quad (13.75)$$

Из последних двух выражений (13.75) можно получить:

$$1 - \hat{I}_d > 0, \hat{\omega}_d^2 > \frac{\hat{I}_d}{k_t}. \quad (13.76)$$

Эти два выражения эквивалентны условиям $a_6 > 0, a_0 > 0$, первое из которых выполняется автоматически, а последнее может быть использовано для выбора собственной частоты (или k_d и m_d). Кроме того, уравнение (13.76) также требует выполнения условия $k_t > 0$, что согласуется с уравнением (13.70). Таким образом, до настоящего времени для оценки асимптотической устойчивости системы мы применяли достаточные условия, приведенные в Приложении 7, несмотря на то, что условие $\underline{D} > 0$ по-прежнему не выполняется.

Для дальнейшего разрешения неопределенности, связанной с требованием $\Delta_s > 0$ и тем, что первая формула (13.76) не удовлетворяет условию $\underline{D} > 0$, рассмотрим теорему, дающую необходимые и достаточные условия. В ней утверждается, что необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости системы (13.72) являются $\underline{m}^T = \underline{m} > 0$, $\underline{G}^T = -\underline{G}$, $\underline{D}^T = \underline{D}$, $\underline{K}^T = \underline{K} > 0$ и

$$\underline{D} \neq 0 \quad (13.77)$$

и

$$\text{rank} \left[\underline{C}^T \quad : \quad \underline{A}^T \underline{C}^T \quad : \quad (\underline{A}^T)^2 \underline{C}^T \quad : \quad \dots \quad : \quad (\underline{A}^T)^{n-1} \underline{C}^T \right] = n, \quad (13.78)$$

где n – размерность выражения (13.72) (в данном примере $n=3$).

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & : & \\ \dots & : & \dots \\ -\underline{m}^{-1} \underline{K} & : & -\underline{m}^{-1} (\underline{G} + \underline{D}) \end{bmatrix}, \quad (13.79)$$

$$\underline{C} = [\underline{0} \quad : \quad \underline{D}].$$

Здесь \bar{E} – единичная матрица размера $n \times n$, обратная матрица для \underline{m} имеет вид:

$$\underline{m}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & a_t & -m_t \\ 0 & -m_t & 1 \end{bmatrix}, \quad (13.80)$$

$$\Delta = a_t - m_t^2.$$

Подставим значение \underline{m}^{-1} в (13.79), получим:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} & & & \vdots & \Delta & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & \vdots & 0 & \Delta & 0 \\ & & & \vdots & 0 & 0 & \Delta \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ -\Delta k_t \omega_s^2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \Delta(1-k_t) & 0 \\ 0 & (m_t^2 - a_t k_t) \omega_s^2 & (k - a_t \omega_s^2) m_t & \vdots & -(1-k_t) a_t & 0 & a_m C \\ 0 & -(1-k_t) m_t \omega_s^2 & m_t^2 \omega_s^2 - k & \vdots & (1-k_t) m_t & 0 & -C \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \underline{0}_{3 \times 3} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & 0 & 0 & C \end{bmatrix}. \quad (13.81)$$

Подставим значения для \underline{A} , \underline{C} в (13.78), получим:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-k_t) k_t \omega_s^2 m_t C / \Delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -(1-k_t) m_t \omega_s^2 C / \Delta & \vdots & \vdots & (1-k_t) \omega_s^2 m_t C^2 / \Delta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (m_t^2 \omega_s^2 - k) C / \Delta & \vdots & \vdots & -(m_t^2 \omega_s^2 - k) C^2 / \Delta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (1-k_t) m_t C / \Delta & \vdots & \vdots & -(1-k_t) m_t C^2 / \Delta^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & (1-k_t) m_t (1-k_t - \omega_s^2) C / \Delta \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & -C^2 / \Delta & \vdots & \vdots & [(m_t^2 \omega_s^2 - k) C / \Delta] - C^3 / \Delta^2 \end{bmatrix}.$$

Сформируем из элементов 1, 2, 6 строк и 3, 6, 9 столбцов:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1-k_t) k_t m_t \omega_s^2 C / \Delta \\ 0 & -(1-k_t) m_t \omega_s^2 C / \Delta & (1-k_t) \omega_s^2 m_t C^2 / \Delta^2 \\ C & -C^2 / \Delta & [(m_t^2 \omega_s^2 - k) C / \Delta] - C^3 / \Delta^2 \end{bmatrix}.$$

Определитель имеет вид:

$$\det \underline{B} = -(1-k_t)^2 k_t m_t^2 \omega_s^4 C^3 / \Delta^2.$$

Очевидно, за исключением случаев $k_t = 0$ и $k_t = 1$, приведенное выше выражение не будет равно нулю. При $k_t \neq 0$ и $k_t \neq 1$ ранг матрицы (13.78) равен 3, поэтому система будет асимптотически устойчивой. Если выполняется второе условие (13.76), полученное при $\underline{K} > 0$, то должно выполняться и условие $k_t > 0$. Таким образом, условия асимптотической устойчивости уравнения (13.72) интегрируются в последние два уравнения (13.76), что соответствует требованиям (13.68) и (13.70) с $k_t > 0$. Если выполняется условие $J > J_t$, то, как и было доказано ранее, система с максимальным моментом инерции по оси вращения будет устойчивой. Однако устойчивость здесь асимптотическая.

Сравнивая (13.48) и (13.62), видим, что выражение (13.62) представляет собой преобразование с помощью углов Эйлера в систему координат $Ox_b y_b z_b$. Следовательно, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – углы ориентации КА в системе $Ox_b y_b z_b$. Выражение (13.63) – уравнение углового движения, в проекциях на оси системы координат $Ox_b y_b z_b$.

13.7 Два вида вынужденных движений вращающегося КА

Рассмотрим КА, вращающийся под действием силы тяги, отклоненной от оси симметрии КА. Для простоты будем считать, что КА представляет собой осесимметричное тело, которое вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ относительно оси симметрии (рис. 13.20). Если вектор тяги КА \bar{F} отклоняется от продольной осевой плоскости $Ox_b y_b$ и образует небольшой угол δ с осью Oy_b , то расстояние от точки O до него равно l . Сила \bar{F} , помимо того, что она обеспечивает орбитальное движение КА, также создает и крутящий момент для изменения положения КА. Если O – центр

масс, орбитальное и угловое движения можно разделить. Если $J_{bx} = J_{bz} = J_t, J_{by} = J$, то уравнения движения (в компонентной форме) будут иметь вид:

$$J_t \dot{\omega}_{bx} - (J - J_t) \omega_{by} \omega_{bz} = 0, \quad (13.82a)$$

$$J \dot{\omega}_{by} = 0, \quad (13.82б)$$

$$J_t \dot{\omega}_{bz} + (J - J_t) \omega_{bx} \omega_{by} = Fl \sin \delta. \quad (13.82в)$$

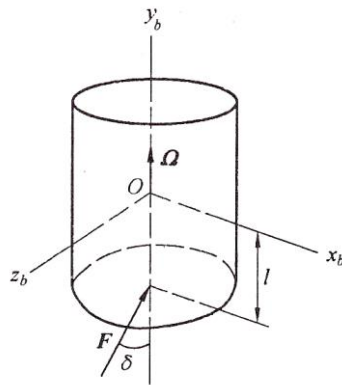


Рис. 13.20. Осесимметричный КА, вращающийся под действием силы тяги, отклоненной от оси симметрии

Из второй формулы получим равенство $\omega_{by} = \Omega = const$ и подставим его в два других выражения:

$$\dot{\omega}_{bx} - \omega_p \omega_{bz} = 0, \quad (13.83a)$$

$$\dot{\omega}_{bz} + \omega_p \omega_{bx} = Fl \sin \delta / J_t. \quad (13.83б)$$

Здесь

$$\omega_p = \frac{J - J_t}{J_t} \Omega. \quad (13.84)$$

Из (13.83a) выразим ω_{bz} и подставим в (13.83б), а затем из (13.83б) найдем выражение для (13.83a):

$$\ddot{\omega}_{bx} + \omega_p^2 \omega_{bx} = \omega_p Fl \sin \delta / J_t ,$$

$$\ddot{\omega}_{bz} + \omega_p^2 \omega_{bz} = 0 .$$

Из полученных выше двух выражений следует:

$$\omega_{bx} = A \cos \omega_p t + B \sin \omega_p t + Fl \sin \delta / (J_t \omega_p) ,$$

$$\omega_{bz} = C \cos \omega_p t + D \sin \omega_p t .$$

При $t=0$ получим начальные условия $\omega_{bx} = \omega_{bx}(0)$ и $\omega_{bz} = \omega_{bz}(0)$, подставим их в (13.83) и найдем константы интегрирования A, B, C, D

$$\omega_{bx} = \left[\omega_{bx}(0) - \frac{Fl \sin \delta}{J_t \omega_p} \right] \cos \omega_p t + \omega_{bz}(0) \sin \omega_p t + \frac{Fl \sin \delta}{J_t \omega_p} , \quad (13.85)$$

$$\omega_{bz} = \omega_{bz}(0) \cos \omega_p t - \left[\omega_{bx}(0) - \frac{Fl \sin \delta}{J_t \omega_p} \right] \sin \omega_p t . \quad (13.86)$$

Отсюда видно, что в дополнение к вращательному движению с угловой скоростью ω_p осей x_b, y_b , ось z_b также вращается с постоянной скоростью, которая пропорциональна крутящему моменту $Fl \sin \delta$ относительно оси z_b и обратно пропорциональна J_t . Для реального КА всегда существуют потери энергии. В результате этого вращательное движение будет постепенно уменьшаться до полного затухания. Постоянное вращение со скоростью $\omega_{bx} = \frac{Fl \sin \delta}{J_t \omega_p}$ вокруг оси Ox_b не затухает, поэтому система $Ox_b y_b z_b$ вращается вокруг Ox_b . Скорость ω_{bx} называют угловой скоростью прецессии.

Вращение оси, вызванное моментом относительно оси z_b , называется прецессией вращающегося тела. Аналогично ситуации с угловой скоростью вращения, направления вектора момента и угловой скорости прецессии можно определить следующим образом: прецессия вызвана моментом, перпендикулярным угловой скорости, а угловая скорость обращена к действующему моменту по кратчайшему угловому расстоянию.

Анализ вращения оси Oy_b вокруг Ox_b позволяет найти угол поворота за время T : $\varphi = \int_0^T \omega_{bx} dt$. Угол поворота в результате действия внешнего момента $Fl \sin \delta = M_z$ с помощью (13.85) определяется выражением:

$$\varphi = \frac{M_z T}{J_t \omega_p}.$$

Здесь $M_z T$ – момент импульса, выраженный через I , тогда (13.84) можно заменить приведенной выше формулой:

$$\varphi = \frac{I}{(J - J_t)\Omega}. \quad (13.87)$$

Видно, что угол поворота оси Oy_b пропорционален моменту импульса и обратно пропорционален величине $(J - J_t)\Omega$.

Случай, рассмотренный выше, представляет собой прецессию, вызванную отклонением двигательной установки возмущающим моментом. Характерным является то, что возмущающий момент поворачивает ЛА, ось x_b также вращается, поэтому ЛА выполняет очень сложное движение в пространстве. Далее будет рассмотрена разновидность прецессии, не только не имеющая

вредного эффекта, а, наоборот, контролирующая направление оси вращающегося ЛА. Если требуется, чтобы ось ЛА поворачивалась на некоторый угол вокруг оси x в системе координат $Oxyz$, то в направлении оси z нужно приложить момент в соответствии с принципом прецессии. Крутящий момент может быть приложен в направлении оси z или же в противоположном ей направлении. Все зависит от угловой скорости прецессии крутящего момента и закона прецессии по кратчайшему расстоянию от оси вращения до вектора момента.

Если КА не вращается, то системы координат $Oxyz$ и $Ox_b y_b z_b$ совпадают. Если $Ox_b y_b z_b$ совпадает с главными осями инерции и главные моменты инерции не равны между собой, то КА будет вращаться относительно определенной оси, а момент инерции в системе $Oxyz$ будет циклически изменяться. Однако для ЛА осесимметричной формы, вращающихся вокруг оси симметрии, матрица моментов инерции в системе $Oxyz$ будет постоянной. Для простоты рассмотрим только модельную задачу о направлении оси вращения осесимметричного тела. Уравнения Эйлера для ЛА такого типа, вращающихся в системе $Oxyz$ вокруг оси Oy , имеют вид:

$$J_t \dot{\omega}_x - (J - J_t) \omega_y \omega_z = 0, \quad (13.88a)$$

$$J \dot{\omega}_y = 0, \quad (13.88b)$$

$$J_t \dot{\omega}_z + (J - J_t) \omega_x \omega_y = M_z. \quad (13.88b)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (13.82), значения параметров при этом одинаковы. Разница между ними заключается только в том, что их компонентные формы записаны в

системах $Ox_b y_b z_b$ и $Oxyz$ соответственно. Но как создать момент M_z вращения оси Oy вокруг оси Ox ЛА? Он может быть создан только органами управления на ЛА (например, двигателями малой тяги и т. д.).

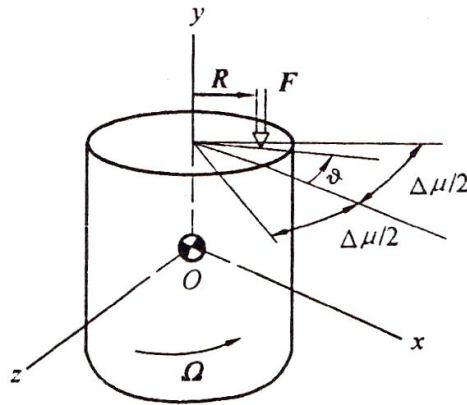


Рис. 13.21. Создание крутящего момента M_z

Последний вращается вместе с ЛА, поэтому создание крутящего момента M_z вдоль оси Oz (которая не вращается) является сложной задачей. В этом случае необходимо, чтобы вектор силы \vec{F} двигателя малой тяги был параллелен оси Oy , а маховики находились под углом $\frac{\Delta\mu}{2}$ по обе стороны от оси Ox ; $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. Поэтому момент импульса определяется выражением $dI_m = FR \cos \theta dt = FR \cos \theta d\theta / \Omega$, а суммарный импульс равен:

$$I_m = 2 \int_0^{\Delta\mu/2} FR \cos \theta d\theta / \Omega = \frac{2FR}{\Omega} \sin\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right). \quad (13.89)$$

Если требуется, чтобы ось Oy повернулась на угол φ вокруг оси Ox , то момент импульса I_m можно рассчитать по формуле (13.87), а диапазон $\Delta\mu$, где должен работать двигатель малой тяги, может быть получен из приведенного выше уравнения.

Исследуем эффективность работы двигателя. Определим импульс тяги двигателя, т. е. I_f :

$$I_f = 2 \int_0^{\Delta\mu/2} F d\mu / \Omega = \frac{F \Delta\mu}{\Omega}. \quad (13.90)$$

Отношение I_m к I_f представляет собой величину управляющего момента, создаваемого устройством на единицу импульса тяги, т. е. эффективность управления направлением оси вращения

$$A = \frac{I_m}{I_f} = \frac{R \sin\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right)}{\frac{\Delta\mu}{2}}. \quad (13.91)$$

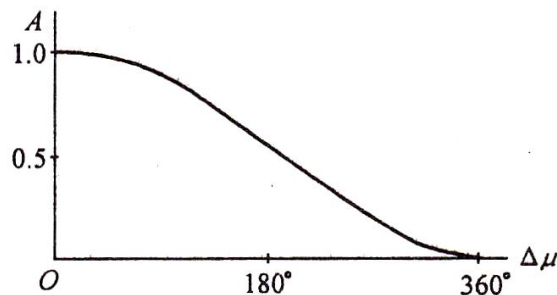


Рис. 13.22. Эффективность работы двигателя

Закон изменения показан на рис. 13.22. Видно, что по мере увеличения рабочего угла маховика $\Delta\mu$, рабочий эффект непрерывно уменьшается, и он падает до нуля, когда угол $\Delta\mu$ достигает 360° . Это подтверждается и на практике: при работе двигателя в течение недели средний крутящий момент уменьшается до нуля.

14 КА С ДВОЙНЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Преимущество КА с одним вращением состоит в том, что направление оси вращения остается постоянным в инерциальном пространстве. В качестве недостатка можно отметить отсутствие устойчивой части КА относительно Земли. Однако в ряде случаев это необходимо, например, при наличии на борту КА аппаратуры для наблюдения за поверхностью Земли, направленных антенн и т. д. КА с двойным вращением не только сочетает в себе преимущества КА с одним вращением, но и компенсирует его недостатки. Так называемый КА с двойным вращением состоит из двух частей, расположенных на одной оси и вращающихся с разными скоростями. Одна часть предназначена для поддержания устойчивости оси вращения, которую часто называют ротором, а другая часть называется платформой. Ее роль заключается в создании условий для наведения на требуемое направление.

На рис. 14.1 приведен пример КА с двойным вращением с осью вращения, перпендикулярной плоскости орбиты, платформы B_1 и ротора B_2 . Если угловая скорость вращения B_1 равна угловой скорости вращения вокруг Земли, то КА будет висеть над Землей с постоянной скоростью. Эта функция используется для установки устройств для наземной связи и наблюдения.

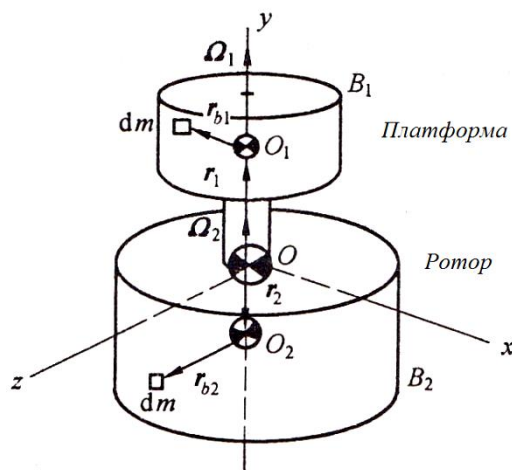


Рис. 14.1. КА с двойным вращением

14.1 Уравнения динамики КА

На рис. 14.1 представлены цилиндры B_1 и B_2 с центрами масс в точках O_1 и O_2 соответственно, а общий центр масс находится в точке O . Как правило, для установки полезной нагрузки используется только одна часть такого КА. В данном случае это часть B_1 . Для описания динамики подобных КА применятся орбитальная система координат $Oxyz$. Скорость вращения такого КА относительно системы $Oxyz$ должна быть равна нулю для обеспечения постоянной ориентации полезной нагрузки. Однако для общности будем считать, что угловая скорость части B_1 в системе $Oxyz$ равна $\bar{\Omega}_1$, ось вращения совпадает с Oy . Функция части B_2 заключается в том, чтобы обеспечить достаточный угловой момент для поддержания постоянства оси КА, т. е. ротора. Пусть ось вращения ротора совпадает с осью вращения платформы и с осью Oy , а угловая скорость будет $\bar{\Omega}_2$. Расстояния от точек O_1 и O_2 до O равны соответственно \bar{r}_1 и \bar{r}_2 . Возьмем элементарные массы dm на цилиндрах B_1 и B_2 , а их радиус-векторы, проведенные из точек O_1 и O_2 , будут \bar{r}_{b1} и \bar{r}_{b2} . Следовательно:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r}_1 + \bar{r}_{b1}, \quad \bar{\rho}_2 = \bar{r}_2 + \bar{r}_{b2}. \quad (14.1)$$

Пусть абсолютная скорость КА в системе $Oxyz$ равна $\bar{\omega}^*$, тогда:

$$\bar{\omega}^* = \bar{\omega} + \bar{\omega}_0. \quad (14.2)$$

Здесь $\bar{\omega}$ – угловая скорость вращения системы относительно орбитальной системы координат $Oxyz$; $\bar{\omega}_0$ – угловая скорость

вращения орбитальной системы координат относительно инерциального пространства.

Скорость движения элемента dm на теле B_1 :

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_1 + \bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}.$$

Здесь \bar{v}_0 – орбитальная скорость точки. Абсолютная производная от приведенной выше формулы есть ускорение массы dm :

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_1 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_1 + \bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}) + \dot{\bar{\Omega}}_1 \times \bar{r}_{b1} + \\ &+ (\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_1) \times \bar{r}_{b1} + \bar{\Omega}_1 \times [(\bar{\omega}^* + \bar{\Omega}_1) \times \bar{r}_{b1}] = \\ &= \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_1 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_1) + \dot{\bar{\Omega}}_1 \times \bar{r}_{b1} + \\ &+ \bar{\Omega}_1 \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}) + (\bar{\omega}^* + \bar{\Omega}_1) \times \bar{r}_{b1} + \bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}) + \bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b1}). \end{aligned} \quad (14.3)$$

Аналогично получается ускорение элемента dm на теле B_2 :

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_2 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_2) + \dot{\bar{\Omega}}_2 \times \bar{r}_{b2} + \bar{\Omega}_2 \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2}) + \\ &+ (\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_2) \times \bar{r}_{b2} + \bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2}) + \bar{\Omega}_2 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b2}). \end{aligned} \quad (14.4)$$

Уравнение углового движения КА:

$$\int_{B_1} (\bar{\rho}_1 \times \bar{a}_1) dm + \int_{B_2} (\bar{\rho}_2 \times \bar{a}_2) dm = \bar{M}.$$

Левая часть – моменты инерции тел B_1 и B_2 относительно точки O ; правая часть – сумма внешних моментов относительно точки O . Подставляя (14.3) и (14.4) в приведенное выше уравнение и учитывая, что O_1 , O_2 и O – центры масс, получим:

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \bar{r}_{b1} dm = 0, \quad \int_{B_2} \bar{r}_{b2} dm = 0, \\
\int_{B_1} \bar{\rho}_1 dm + \int_{B_2} \bar{\rho}_2 dm = 0.
\end{aligned} \tag{14.5}$$

Уравнение можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{B_1} \bar{\rho}_1 \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_1) dm + \int_{B_2} \bar{\rho}_2 \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_2) dm + \\
& + \int_{B_1} \bar{\rho}_1 \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_1)] dm + \int_{B_2} \bar{\rho}_2 \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_2)] dm + \\
& + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_1 \times \bar{r}_{b1} \right) dm + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times [\bar{\Omega}_1 \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1})] dm + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times [(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_1) \times \bar{r}_{b1}] dm + \\
& + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_2 \times \bar{r}_{b2} \right) dm + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times [\bar{\Omega}_2 \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2})] dm + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times [(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_2) \times \bar{r}_{b2}] dm + \\
& + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1})] dm + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times [\bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b1})] dm + \\
& + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2})] dm + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times [\bar{\Omega}_2 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b2})] dm = \bar{M}.
\end{aligned}$$

Приведенную выше формулу можно преобразовать, используя выражения (ПЗ.33) и (ПЗ.41):

$$\begin{aligned}
& \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* + \mathbf{J}_1 \cdot \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_1 + \bar{\Omega}_1 \times \mathbf{J}_1 \cdot \bar{\Omega}_1 + \mathbf{J}_2 \cdot \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_2 + \bar{\Omega}_2 \times \mathbf{J}_2 \cdot \bar{\Omega}_2 + \\
& + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1})] dm + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times [\bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b1})] dm + \\
& + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times [(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_1) \times \bar{r}_{b1}] dm + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2})] dm + \\
& + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times [\bar{\Omega}_2 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b2})] dm + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times [(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_2) \times \bar{r}_{b2}] dm = \bar{M}.
\end{aligned} \tag{14.6}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* &= \int_{B_1} \bar{\rho}_1 \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_1) dm + \int_{B_2} \bar{\rho}_2 \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_2) dm \\
\bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* &= \int_{B_1} \bar{\rho}_1 \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_1)] dm + \\
&+ \int_{B_2} \bar{\rho}_2 \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_2)] dm, \\
\mathbf{J}_i \times \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_i &= \int_{B_i} \bar{r}_{bi} \times \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_i \times \bar{r}_{bi} \right) dm, \quad i=1,2, \\
\bar{\Omega}_i \times \mathbf{J}_i \cdot \bar{\Omega}_i &= \int_{B_i} \bar{r}_{bi} \times [\bar{\Omega}_i \times (\bar{\Omega}_i \times \bar{r}_{bi})] dm, \quad i=1,2.
\end{aligned} \tag{14.7}$$

Здесь \mathbf{J} – тензор инерции всего КА относительно центра масс O ; \mathbf{J}_1 и \mathbf{J}_2 – тензоры инерции тел B_1 и B_2 относительно точек O_1 , O_2 соответственно. Используя формулы (П3.34) и (П3.35), получим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \int_{B_1} (\bar{\rho}_1 \cdot \bar{\rho}_1 \mathbf{E} - \bar{\rho}_1 \cdot \bar{\rho}_1) dm + \int_{B_2} (\bar{\rho}_2 \cdot \bar{\rho}_2 \mathbf{E} - \bar{\rho}_2 \bar{\rho}_2) dm = \underline{\bar{e}}^T \underline{J} \underline{\bar{e}}, \\
\mathbf{J}_i &= \int_{B_i} (\bar{r}_{bi} \cdot \bar{r}_{bi} \mathbf{E} - \bar{r}_{bi} \bar{r}_{bi}) dm = \underline{\bar{e}}^T \underline{J}_i \underline{\bar{e}}, \quad i=1,2.
\end{aligned} \tag{14.8}$$

Здесь $\underline{\bar{e}}^T = [\bar{i} \quad \bar{j} \quad \bar{k}]$ – базисный вектор в системе $Oxyz$. Если подставить (14.1) в первую формулу (14.8) и учесть (14.5), получим:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 & & \underline{0} \\ & 0 & \\ \underline{0} & & r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 \end{bmatrix} \underline{\bar{e}}. \tag{14.9}$$

Здесь m_1, m_2 – массы тел B_1 и B_2 соответственно. Разложим \bar{r}_{bi} в виде:

$$\bar{r}_{bi} = \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2. \quad (14.10)$$

Вторая формула (14.8) также может быть преобразована:

$$\underline{J}_i = \int_{B_i} \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & z_i^2 + x_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} dm, \quad i=1,2.$$

Это компонентная форма записи для моментов инерции тел B_1 и B_2 в системе $Oxyz$. Так как тела B_1 и B_2 вращаются в системе $Oxyz$, то компоненты момента инерции тоже должны быть переменными. Так как тела B_1 и B_2 вращаются вокруг оси Oy , то компоненты момента инерции остаются постоянными, а их произведения равны нулю.

$$\underline{J}_i = \begin{bmatrix} J_{it} & & \\ & J_i & \\ & & J_{it} \end{bmatrix}, \quad i=1,2, \quad (14.11)$$

$$J_{it} = \int_{B_i} (y_i^2 + z_i^2) dm = \int_{B_i} (y_i^2 + x_i^2) dm,$$

$$J_i = \int_{B_i} (x_i^3 + z_i^2) dm.$$

Поэтому (14.9) можно переписать в виде:

$$\mathbf{J} = \underline{\bar{e}}^T \underline{J} \underline{\bar{e}} = \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} J_t & & \\ & J & \\ & & J_t \end{bmatrix} \underline{\bar{e}}, \quad (14.12)$$

$$J_t = J_{1t} + J_{2t} + r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2,$$

$$J = J_1 + J_2.$$

Угловая скорость $\bar{\omega}^*$ проецируется на оси системы $Oxyz$ в (14.6) и выражается через (10.18), также учитывается малость угла как в (10.21)

$$\bar{\omega}^* = \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} \cong \underline{\bar{e}}^{-T} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \omega_0 \psi \\ \dot{\vartheta} - \omega_0 \\ \dot{\psi} + \omega_0 \varphi \end{bmatrix}. \quad (14.13)$$

Угловое ускорение:

$$\dot{\bar{\omega}}^* = \underline{\bar{e}}^{-T} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x^* \\ \dot{\omega}_y^* \\ \dot{\omega}_z^* \end{bmatrix} = \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \bar{\omega}_0 \cong \underline{\bar{e}}^{-T} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} - \omega_0 \dot{\psi} \\ \ddot{\vartheta} \\ \ddot{\psi} + \omega_0 \varphi \end{bmatrix}. \quad (14.14)$$

Составляющие угловой скорости и ускорения вращения тел B_1 и B_2 :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_i &= \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i=1,2, \\ \dot{\bar{\Omega}}_i &= \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Omega}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Используя приведенные выше векторные и компонентные соотношения и разложение векторного произведения в соответствии с Приложением 3, дополнительный элемент в уравнении (14.6) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \left(\bar{r}_{b1} \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}) \right] \right) dm &= - \int_{B_1} (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}) (\bar{r}_{b1} \times \bar{\omega}^*) dm = \\ &= \bar{e}^{-T} \bar{\Omega}_1^T \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \bar{r}_{b1}^T dm \bar{\omega}^* = \bar{e}^{-T} \bar{\Omega}_1^T \int_{B_1} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & x_1 z_1 \\ x_1 y_1 & y_1^2 & y_1 z_1 \\ x_1 z_1 & y_1 z_1 & z_1^2 \end{bmatrix} dm \bar{\omega}^*. \end{aligned}$$

Интеграл от приведенной выше формулы из недиагональных элементов равен нулю, а диагональные элементы могут быть получены из выражений для J_t и J_{it} уравнения (14.11):

$$\begin{aligned} \int_{B_1} x_1^2 dm &= \int_{B_1} z_1^2 dm = \frac{1}{2} J_1, \\ \int_{B_1} y_1^2 dm &= J_{1r} - \frac{1}{2} J_1. \end{aligned} \tag{14.16}$$

Таким образом

$$\bar{e}^{-T} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -J_1 \Omega_1 \omega_z^* \\ 0 \\ J_1 \Omega_1 \omega_x^* \end{bmatrix}.$$

Два других интеграла в уравнении (14.6) равны соответственно:

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times \left[\bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b1}) \right] dm &= - \int_{B_1} (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b1}) (\bar{r}_{b1} \cdot \bar{\Omega}_1) dm = \\ &= \bar{e}^{-T} \bar{\omega}^* \times \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \bar{r}_{b1}^T dm \bar{\Omega}_1 = \bar{e}^{-T} \begin{bmatrix} \left(J_{1r} - \frac{1}{2} J_1 \right) \Omega_1 \omega_z^* \\ 0 \\ - \left(J_{1r} - \frac{1}{2} J_1 \right) \Omega_1 \omega_x^* \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\int_{B_1} \bar{\mathbf{r}}_{b1} \times \left[(\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}_1) \times \bar{\mathbf{r}}_{b1} \right] dm = \mathbf{J}_1 \cdot (\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}_1) = \bar{\mathbf{e}}^T \begin{bmatrix} -J_{1z} \Omega_1 \omega_z^* \\ 0 \\ J_{1x} \Omega_1 \omega_x^* \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{B_1} \bar{\mathbf{r}}_{b1} \times \left[\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times (\bar{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_{b1}) \right] dm + \int_{B_1} \bar{\mathbf{r}}_{b1} \times \left[\bar{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times (\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\mathbf{r}}_{b1}) \right] dm + \\ & + \int_{B_1} \bar{\mathbf{r}}_{b1} \times \left[(\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}_1) \times \bar{\mathbf{r}}_{b1} \right] dm = \bar{\mathbf{e}}^T \begin{bmatrix} -J_1 \Omega_1 \omega_z^* \\ 0 \\ J_1 \Omega_1 \omega_x^* \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\mathbf{H}}_{s1}, \end{aligned} \quad (14.17)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{s1} = \bar{\mathbf{e}}^T \begin{bmatrix} 0 \\ J_1 \Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом можно записать:

$$\begin{aligned} & \int_{B_2} \bar{\mathbf{r}}_{b2} \times \left[\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times (\bar{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \bar{\mathbf{r}}_{b2}) \right] dm + \int_{B_2} \bar{\mathbf{r}}_{b2} \times \left[\bar{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times (\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\mathbf{r}}_{b2}) \right] dm + \\ & + \int_{B_2} \bar{\mathbf{r}}_{b2} \times \left[(\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}_2) \times \bar{\mathbf{r}}_{b2} \right] dm = \bar{\mathbf{e}}^T \begin{bmatrix} -J_2 \Omega_2 \omega_z^* \\ 0 \\ J_2 \Omega_2 \omega_x^* \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\mathbf{H}}_{s2}, \end{aligned} \quad (14.18)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{s2} = \bar{\mathbf{e}}^T \begin{bmatrix} 0 \\ J_2 \Omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая формулы (14.17) и (14.18), формулу (14.6) можно переписать в виде:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}^* + \bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}^* + \sum_{i=1}^2 \left(\mathbf{J}_i \cdot \overset{\circ}{\bar{\boldsymbol{\Omega}}}_i + \bar{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \mathbf{J}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\Omega}}_i + \bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\mathbf{H}}_{si} \right) = \bar{\mathbf{M}}.$$

Так как $\bar{\Omega}_i$ ($i=1,2$) является инвариантной и $\bar{\Omega}_i \times \mathbf{J}_i \cdot \bar{\Omega}_i = 0$, то приведенное выше уравнение можно упростить до

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* + \sum_{i=1}^2 \bar{\omega}^* \times \bar{H}_{si} = \bar{M}.$$

На этом завершена подготовка формулы (14.6) к преобразованию в компонентную форму. Используя выражения для \mathbf{J}, \mathbf{J}_i ($i=1,2$), $\bar{\omega}^*, \bar{\Omega}_i$ ($i=1,2$), формулы (14.17) и (14.18), можно записать уравнение динамики углового движения КА в компонентной форме в системе $Oxyz$:

$$J_t \dot{\omega}_x^* - (J - J_t) \omega_y^* \omega_z^* - (J_1 \Omega_1 + J_2 \Omega_2) \omega_z^* = M_x, \quad (14.19a)$$

$$J \dot{\omega}_y^* = M_y, \quad (14.19b)$$

$$J_t \dot{\omega}_z^* + (J - J_t) \omega_x^* \omega_y^* - (J_1 \Omega_1 + J_2 \Omega_2) \omega_x^* = M_z. \quad (14.19b)$$

Или для небольших углов ориентации:

$$J_t \ddot{\phi} - [(2J_t - J) \omega_0 + J_1 \Omega_1 + J_2 \Omega_2] \dot{\psi} + [(J - J_t) \omega_0^2 - (J_1 \Omega_1 + J_2 \Omega_2) \omega_0] \phi = M_x, \quad (14.20a)$$

$$J \ddot{\theta} = M_y, \quad (14.20b)$$

$$J_t \ddot{\psi} + [2(J_t - J) \omega_0 + J_1 \Omega_1 + J_2 \Omega_2] \dot{\phi} + [(J - J_t) \omega_0^2 - (J_1 \Omega_1 + J_2 \Omega_2) \omega_0] \psi = M_z. \quad (14.20b)$$

Можно видеть, что движение по тангажу не зависит от движения по углам крена и рыскания, в то время как движения по углам крена и рыскания взаимосвязаны.

Обычно в КА с двойным вращением всегда есть одна часть (например, B_1), которая не движется относительно системы

координат $Oxyz$, т. е. $\bar{\Omega} = 0$. Для КА этого типа B_1 можно использовать в качестве разгонного блока. В этом случае B_1 не поворачивается вокруг оси Oy , а его матрица моментов инерции будет несколько отличаться от уравнения (14.11) и иметь вид

$$\underline{J}_1 = \begin{bmatrix} J_{1x} & \underline{0} \\ & J_{1y} \\ \underline{0} & & J_{1z} \end{bmatrix}. \quad (14.21)$$

Из-за этого изменения момент инерции всего КА станет равным

$$\mathbf{J} = \underline{\bar{e}}^T \underline{J} \underline{\bar{e}} = \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} J_x & \underline{0} \\ & J_y \\ \underline{0} & & J_z \end{bmatrix} \underline{\bar{e}},$$

$$\begin{aligned} J_x &= J_{1x} + J_{2t} + r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2, \\ J_y &= J_{1y} + J_2, \\ J_z &= J_{1z} + J_{2t} + r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Учитывая изменение момента инерции и принимая $\Omega_1 = 0$, по формуле (14.6) можно получить уравнения движения тела B_1 , неподвижного в КА с двойным вращением, относительно системы $Oxyz$

$$J_x \dot{\omega}_x^* + (J_y - J_z) \omega_y^* \omega_z^* - J_2 \Omega_2 \omega_z^* = M_x, \quad (14.23a)$$

$$J_y \dot{\omega}_y^* + (J_z - J_x) \omega_z^* \omega_x^* = M_y, \quad (14.23б)$$

$$J_z \dot{\omega}_z^* + (J_x - J_y) \omega_x^* \omega_y^* + J_2 \Omega_2 \omega_x^* = M_z. \quad (14.23в)$$

В силу малости угла поворота можно применить линеаризацию

$$J_x \ddot{\phi} - \left[(J_x - J_y + J_z) \omega_0 + J_2 \Omega_2 \right] \dot{\psi} + \left[(J_y - J_z) \omega_0^2 - J_2 \Omega_2 \omega_0 \right] \phi = M_x, \quad (14.24a)$$

$$J_y \ddot{\theta} = M_y, \quad (14.24б)$$

$$J_z \ddot{\psi} + \left[(J_x - J_y + J_z) \omega_0 + J_2 \Omega_2 \right] \dot{\phi} + \left[(J_y - J_x) \omega_0^2 - J_2 \Omega_2 \omega_0 \right] \psi = M_z. \quad (14.24в)$$

Можно видеть, что в приведенных выше двух системах уравнений движение по углу тангажа по-прежнему не зависит от углов рыскания и крена, а остальные два уравнения связаны друг с другом.

14.2 Движение КА с двойным вращением

Для исследования движения такого КА используем формулу (14.19), опустив индекс «*» в компоненте угловой скорости, и примем внешний момент равным нулю. Из уравнения (14.19б) получим:

$$\omega_y = \Omega = const.$$

Подставим это выражение в (14.19а) и (14.19в), получим:

$$\dot{\omega}_x - \omega_p \omega_z = 0, \quad (14.25a)$$

$$\dot{\omega}_z + \omega_p \omega_x = 0. \quad (14.25б)$$

Здесь

$$\omega_p = \left(\frac{J - J_t}{J_t} + \frac{J_1 \Omega_1 + J_2 \Omega_2}{J_t \Omega} \right) \Omega. \quad (14.26)$$

Из формулы (14.25а) получим ω_z и подставим в (14.25б), а из (14.25б) выразим ω_x и подставим в (14.25а):

$$\ddot{\omega}_x - \omega_p^2 \omega_x = 0, \quad (14.27а)$$

$$\ddot{\omega}_z + \omega_p^2 \omega_z = 0. \quad (14.27б)$$

Сравнивая полученные выражения с формулой (13.5) из раздела 13.1, можно увидеть, что отличие состоит только в индексах, а форма одна и та же. Поэтому можно сделать вывод о том, что КА с двойным вращением совершает движение вокруг оси Oy в соответствии с уравнением (14.26). Согласно выводу из раздела 13.1, у КА будет поперечная угловая скорость, перпендикулярная оси Oy , амплитуда которой равна

$$\omega_{t0} = [\omega_x^2(0) + \omega_z^2(0)]^{1/2}.$$

Она зависит от начальных угловых скоростей ω_x, ω_z , т. е. $\omega_x(0), \omega_z(0)$, причем КА вращается вокруг оси Oy со скоростью ω_p . Если рассмотреть систему координат $Oxyz$, то угловая скорость КА будет равна $\omega_y = \Omega$; компоненты ω_x, ω_z создают боковую угловую скорость ω_t , поэтому полная скорость будет их векторной суммой:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_t + \bar{\Omega}. \quad (14.28)$$

Плоскость, в которой лежат векторы этих трех угловых скоростей (как и в разделе 13.1), называется продольной плоскостью (см. рис. 14.2). На рисунке также показан момент импульса КА. Учитывая, что B_1 и B_2 вращаются вокруг оси Oy системы

координат $Oxyz$ с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 , угловая скорость всего КА (в системе $Oxyz$) относительно оси Oy равна Ω . Следовательно, продольный момент импульса h_a должен быть суммой указанных трех слагаемых, а поперечный момент импульса КА равен h_t . Тогда полный момент импульса:

$$\bar{h} = \bar{h}_a + \bar{h}_t. \quad (14.29)$$

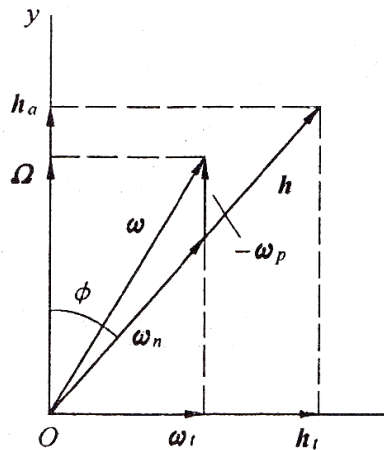


Рис. 14.2. Движение КА с двойным вращением

Здесь

$$\bar{h}_a = (J\Omega + J_1\Omega_1 + J_2\Omega_2)\bar{j}, \quad \bar{h}_t = J_t\bar{\omega}_t. \quad (14.30)$$

Поэтому угол нутации ϕ равен

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h_t}{h_a} = \frac{J_t \omega_t}{J\Omega + J_1\Omega_1 + J_2\Omega_2}. \quad (14.31)$$

Все указанные выше вопросы были подробно рассмотрены в разделе 13.1. Суть здесь не меняется, лишь немного отличаются расчетные формулы. В разделе 13.1 были также даны понятия

инерции и угловой скорости движения тела (см. рис. 13.8). Здесь параметры те же (см. рис. 14.2). В разделе 13.1 говорится, что нутацию можно рассматривать как движение конуса тела по пространственному конусу без проскальзывания. Было доказано, что нутацию можно также рассматривать как вращение КА относительно продольной плоскости с угловой скоростью $-\bar{\omega}_p$, причем продольная плоскость вращается относительно инерциального пространства со скоростью $-\bar{\omega}_n$, направление ее вращения совпадает с направлением вектора \bar{h} . Скорость $\bar{\omega}_p$ также называют угловой скоростью нутации тела, а $\bar{\omega}_n$ – угловой скоростью нутации инерции. На рис. 14.2 треугольник $\bar{\omega}, \bar{\omega}_n, -\bar{\omega}_p$ является результатом использования указанных выше понятий. Обозначим $-\bar{\omega}_p = x$. Если путем вычислений показано, что значение x равно $-\bar{\omega}_p$, то разложение $\bar{\omega}$ на рис. 14.2 является верным.

Из рис. 14.2 видно, что $x = \Omega - \omega_t / \operatorname{tg} \varphi$. Подставив это выражение в (14.31), получим

$$x = - \left(\frac{J - J_t}{J_t} + \frac{J_1 \Omega_1 + J_2 \Omega_2}{J_t \Omega} \right) \Omega.$$

Сопоставляя это выражение с формулой 14.26, можно заметить, что $x = -\omega_p$. Из рисунка также можно найти длину вектора $\bar{\omega}_n$: $\omega_n^2 = \omega_t^2 + (\Omega + \omega_p)^2$. Упростим формулу (14.26):

$$\omega_n = \frac{h}{J_t}. \quad (14.32)$$

Это выражение совпадает с уравнением (13.16). Видно, что $\bar{\omega}_p$ и $\bar{\omega}_n$ – угловые скорости тела и инерции соответственно.

При рассмотрении только тела B_1 (или B_2) также можно исследовать нутацию тела B_1 (или B_2). Поскольку продольная плоскость единственна для тела B_1 или B_2 , их продольные плоскости также вращаются, а для отдельных тел B_1 (или B_2) их движения нутации являются такими, как показано на рис. 14.3 (в качестве примера приведено тело B_1). Угловая скорость вращения тела B_1 вокруг оси Oy относительно инерциального пространства равна $\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}$, угловая скорость вокруг горизонтальной оси равна $\bar{\omega}_t$, а общая скорость $\bar{\omega}_1$. Эта комбинированная скорость может быть разложена на угловую скорость инерции и угловую скорость вращения тела в соответствии с принципом, описанным в разделе 13.1. Выше было упомянуто, что у тела B_1 также есть угловая скорость инерции $\bar{\omega}_n$, а угловую скорость вращения $\bar{\omega}_{1p}$ тела можно получить из треугольника скоростей, как показано на рисунке. Очевидно, что

$$-\omega_{1p} = \Omega_1 + \Omega - \frac{\omega_t}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Подставляя это выражение в формулу (14.31) с учетом формулы (14.26), получим:

$$\omega_{1p} = \omega_p - \Omega_1 \quad (14.33)$$

Для тела B_2 угловая скорость инерции также будет $\bar{\omega}_n$, а угловая скорость вращения тела равна:

$$\omega_{2p} = \omega_p - \Omega_2. \quad (14.34)$$

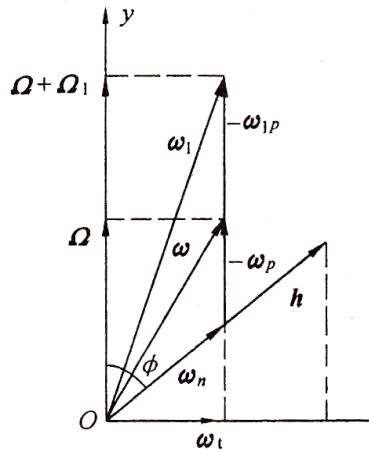


Рис. 14.3. Исследование движения тела B_1 отдельно

14.3 Устойчивость КА

Рассмотрим случай, когда тело B_1 неподвижно относительно связанной системы координат $Oxyz$. Тогда главные оси инерции тела B_1 параллельны осям системы координат $Oxyz$, однако при этом тело B_1 не вращается вокруг оси Oy , а тело B_2 вращается вокруг оси Oy . Этому случаю соответствует уравнение (14.23), для удобства опустим индекс «*» в угловой скорости. Стационарное решение уравнения (14.23) имеет вид $\omega_x = \omega_z = 0$, $\omega_y = \Omega = const$. Если в установившемся состоянии появляется небольшое возмущение, то $\omega_x = \delta\omega_x$, $\omega_y = \Omega + \delta\omega_y$, $\omega_z = \delta\omega_z$. Если опустить малые второго порядка, то из (14.23) можно получить уравнение возмущения без внешнего крутящего момента:

$$J_x \delta\dot{\omega}_x - [(J_y - J_z)\Omega + J_2\Omega_2] \delta\omega_z = 0, \quad (14.35a)$$

$$J_y \delta\dot{\omega}_y = 0, \quad (14.35б)$$

$$J_z \delta\dot{\omega}_z + [(J_y - J_x)\Omega + J_2\Omega_2] \delta\omega_x = 0. \quad (14.35в)$$

Из уравнения (14.35б) видно, что $\delta\omega_y = const$. Это значит, что возмущение угловой скорости КА Ω , является постоянной

величиной и не влияет на устойчивость оси вращения. В уравнениях (14.35а) и (14.35в) учтем, что сумма $J_y\Omega + J_2\Omega_2$ – это момент импульса в направлении оси вращения, т. е. h_a в уравнении (14.30). Введем эквивалентный момент инерции относительно оси y

$$J_y^* = \frac{h_a}{\Omega} = J_y + J_2 \frac{\Omega_2}{\Omega}. \quad (14.36)$$

Эта величина имеет то же значение, что и момент инерции, а это значит, что если КА просто вращается с угловой скоростью Ω , его момент импульса равен h_a . Тогда с учетом момента инерции J_y^* выражение (14.35) можно записать:

$$(J_y - J_z)\Omega + J_2\Omega_2 = h_a - J_z\Omega = (J_y^* - J_z)\Omega, \quad (14.37)$$

$$(J_y - J_x)\Omega + J_2\Omega_2 = h_a - J_x\Omega = (J_y^* - J_x)\Omega. \quad (14.38)$$

Из выражений (14.37), (14.38), (14.35а) и (14.35в), получим:

$$\delta\ddot{\omega}_x + \frac{(J_y^* - J_z)(J_y^* - J_x)}{J_x J_z} \Omega^2 \delta\omega_x = 0,$$

$$\delta\ddot{\omega}_z + \frac{(J_y^* - J_z)(J_y^* - J_x)}{J_x J_z} \Omega^2 \delta\omega_z = 0.$$

Таким образом, условие устойчивости системы состоит в том, чтобы коэффициенты $\delta\omega_x$ и $\delta\omega_z$ были положительны, а это возможно в двух случаях:

$$1) J_z > J_y^*, \quad J_x > J_y^*; \quad (14.39)$$

$$2) J_z < J_y^*, \quad J_x < J_y^*. \quad (14.40)$$

Отсюда видно, что система будет устойчивой, если ось вращения соответствует максимальному или минимальному моменту инерции. Это согласуется с движением КА с одним вращением: вращение вокруг оси максимального и минимального момента инерции является устойчивым, а вращение относительно оси с промежуточным моментом инерции разделяется на два и постепенно переходит к оси максимального или минимального момента инерции. Однако для КА с двойным вращением момент инерции равен не просто J_y . Дело в том, что к J_y добавляется величина $J_2 \frac{\Omega_2}{\Omega}$ и получается J_y^* (см. формулу (14.36)). Если использовать соотношения для k_x и k_z (см. формулу (12.14)), можно получить условия устойчивости, эквивалентные формулам (14.39) и (14.40):

$$1) \quad k_x + \frac{J_2 \Omega_2}{J_x \Omega} > 0, \quad k_z + \frac{J_2 \Omega_2}{J_z \Omega} > 0, \quad (14.41a)$$

$$2) \quad k_x + \frac{J_2 \Omega_2}{J_x \Omega} < 0, \quad k_z + \frac{J_2 \Omega_2}{J_z \Omega} < 0. \quad (14.41б)$$

Уравнения (14.41a) и (14.41б) содержат два переменных параметра (комбинацию параметров). Для уменьшения их количества преобразуем выражение к виду

$$\frac{J_2 \Omega_2}{J_x \Omega} = \frac{J_2 \Omega_2}{(J_x J_z)^{1/2} \Omega} \left(\frac{J_z}{J_x} \right)^{1/2}, \quad \frac{J_2 \Omega_2}{J_z \Omega} = \frac{J_2 \Omega_2}{(J_z J_x)^{1/2} \Omega} \left(\frac{J_x}{J_z} \right)^{1/2},$$

а затем умножим и разделим результат на $(J_x - J_y + J_z)$ и подставим в (14.41):

$$1) \quad k_x + \frac{J_2 \Omega_2}{(J_x J_z)^{1/2} \Omega} \left(\frac{1-k_x}{1-k_z} \right)^{1/2} > 0,$$

$$k_z + \frac{J_2 \Omega_2}{(J_x J_z)^{1/2} \Omega} \left(\frac{1-k_z}{1-k_x} \right)^{1/2} > 0, \quad (14.42a)$$

$$2) \quad k_x + \frac{J_2 \Omega_2}{(J_x J_z)^{1/2} \Omega} \left(\frac{1-k_x}{1-k_z} \right)^{1/2} < 0,$$

$$k_z + \frac{J_2 \Omega_2}{(J_x J_z)^{1/2} \Omega} \left(\frac{1-k_z}{1-k_x} \right)^{1/2} < 0. \quad (14.42б)$$

Это условие оценки устойчивости, которое зависит только от одного параметра $\frac{J_2 \Omega_2}{(J_x J_z)^{1/2} \Omega}$.

На рис. 14.4 показано деление на области устойчивости в соответствии с неравенствами (14.42a) и (14.42б). При правильном выборе параметров ось вращения КА с двойным вращением должна быть осью либо максимального, либо минимального момента инерции. Напомним, что исследование движения КА с одним вращением в главе 13, показало, что если этот КА имеет жесткий корпус без потерь энергии, то его движение вокруг оси промежуточного момента инерции будет неустойчивым. На промежуточной оси инерции движение является точкой бифуркации, а вращение вокруг оси промежуточного момента инерции постепенно переходит не к оси максимального момента инерции, а к оси минимального момента инерции (см. рис. 13.13 и рис. 13.14). Но из рис. 14.4 видно, что КА может вращаться не только вокруг оси максимального или минимального момента инерции, но и вокруг оси с промежуточным моментом инерции и при грамотном выборе параметров сохранять устойчивость.

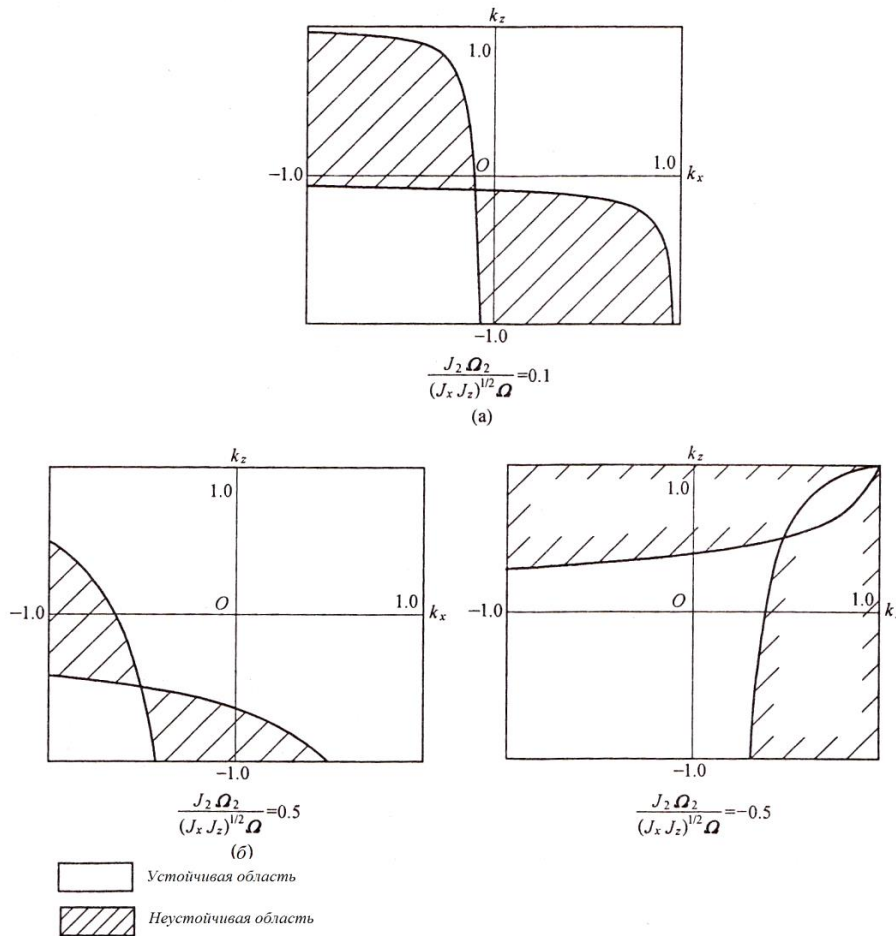


Рис. 14.4. Разделение на области устойчивости для КА с двойным вращением

14.4 КА с двойным вращением с потерями энергии

Область устойчивости для КА с двойным вращением с потерями энергии будет отличаться от области, построенной для того же КА, но без потерь энергии. При наличии потерь энергии система должна быть устойчивой в состоянии минимальной энергии, а при отклонении от точки равновесия и нахождении в ее окрестности энергия будет возрастать. Энергия, рассматриваемая здесь, представляет собой кинетическую энергию, связанную с угловым движением тел B_1 и B_2 . Однако вращательная энергия тел B_1 и B_2 постоянна, поэтому сначала надо исследовать энергию устойчивого движения КА, найти точку, в которой энергия минимальна, а затем исследовать устойчивое состояние.

Угловой момент КА не изменяется с потерей энергии. В отсутствии внешней силы он всегда является постоянным вектором.

Энергия и угловой момент КА с двойным вращением определяются выражениями:

$$2T = \bar{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} = \underline{\omega}^T \underline{J} \underline{\omega}, \quad (14.43)$$

$$\bar{h} = \bar{i} J_x \omega_x + \bar{j} (J_y \omega_y + J_2 \Omega_2) + \bar{k} J_z \omega_z = \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} + \mathbf{J}_2 \cdot \bar{\Omega}_2.$$

Квадрат углового момента равен:

$$h^2 = \underline{h}^T \underline{h} = (\underline{J} \underline{\omega} + \underline{J}_2 \underline{\Omega}_2)^T (\underline{J} \underline{\omega} + \underline{J}_2 \underline{\Omega}_2). \quad (14.44)$$

Для КА с двойным вращением устойчивым является состояние с наименьшей энергией при условии постоянства h^2 . Поэтому введем следующую функцию:

$$E = 2T - \sigma h^2. \quad (14.45)$$

Здесь σ – коэффициент преобразования, который умножается на h^2 и вычитается из $2T$. Когда E достигает минимума, энергия также будет минимальной, поэтому ее следует записать в виде: $\frac{dE}{d\underline{\omega}}$.

Используя выражения (14.43) и (14.44), получим:

$$\frac{1}{\sigma} \underline{\omega} = \underline{J} \underline{\omega} + \underline{J}_2 \underline{\Omega}_2. \quad (14.46)$$

Перепишем это выражение в компонентной форме:

$$\frac{1}{\sigma} \omega_x = J_x \omega_x, \quad \frac{1}{\sigma} \omega_y = J_y \omega_y + J_2 \Omega_2, \quad \frac{1}{\sigma} \omega_z = J_z \omega_z.$$

Данные выражения удовлетворяют условия стационарного состояния КА: $\omega_x = \omega_z = 0$, $\omega_y = \Omega$ (см. раздел 14.3), поэтому из второй формулы получим:

$$\frac{1}{\sigma} = J_y + \frac{J_2 \Omega_2}{\Omega}. \quad (14.47)$$

После выхода КА из стационарного состояния угловая скорость становится равной $\underline{\omega} + \delta\underline{\omega}$, т. е. появится приращение энергии ΔT , но угловой момент не изменится без внешней силы. Поэтому, согласно формулам (14.43) и (14.44):

$$2T + 2\Delta T = (\underline{\omega} + \delta\underline{\omega})^T \underline{J}(\underline{\omega} + \delta\underline{\omega}),$$

$$h^2 = [\underline{J}(\underline{\omega} + \delta\underline{\omega}) + \underline{J}_2 \Omega_2]^T [\underline{J}(\underline{\omega} + \delta\underline{\omega}) + \underline{J}_2 \Omega_2].$$

Вычтем эти выражения из формул (14.43) и (14.44) соответственно, получим:

$$2\Delta T = \delta\underline{\omega}^T \underline{J} \delta\underline{\omega} + 2\underline{\omega}^T \underline{J} \delta\underline{\omega}, \quad (14.48)$$

$$\delta\underline{\omega}^T \underline{J}^2 \delta\underline{\omega} + 2(\underline{J}\underline{\omega} + \underline{J}_2 \Omega_2)^T \underline{J} \delta\underline{\omega} = 0. \quad (14.49)$$

Уравнения (14.46), (14.48) и (14.49) являются основными уравнениями для исследования устойчивости вращения КА.

Подставим формулу (14.46) в (14.49):

$$\delta\underline{\omega}^T \underline{J}^2 \sigma \underline{\omega} + \frac{2}{\sigma} \underline{\omega}^T \underline{J} \delta\underline{\omega} = 0. \quad (14.50)$$

Исключая $\underline{\omega}^T \underline{J} \sigma \underline{\omega}$ из (14.50) и (14.48), получим:

$$2\frac{1}{\sigma}\Delta T = \delta\omega^T \underline{J} \left(\frac{1}{\sigma} \underline{E} - \underline{J} \right) \delta\omega, \quad (14.51)$$

где $\delta\omega = [\delta\omega_x \quad \delta\omega_y \quad \delta\omega_z]^T$, тогда

$$2\frac{1}{\sigma}\Delta T = J_x \left(\frac{1}{\sigma} - J_x \right) (\delta\omega_x)^2 + J_y \left(\frac{1}{\sigma} - J_y \right) (\delta\omega_y)^2 + J_z \left(\frac{1}{\sigma} - J_z \right) (\delta\omega_z)^2.$$

Для устойчивого равновесного состояния энергия будет наименьшей, приращение энергии ΔT при отклонении от равновесного состояния должно быть положительным. Если умножить на $\frac{1}{\sigma}$, то левая часть формулы будет положительна, а значит и правая часть формулы также должна быть положительной:

$$\begin{aligned} & J_x \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - J_x \right) (\delta\omega_x)^2 + J_y \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - J_y \right) (\delta\omega_y)^2 + \\ & + J_z \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - J_z \right) (\delta\omega_z)^2 > 0. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Три независимые переменные в формуле не являются абсолютно независимыми. Чтобы найти связь между ними, используем формулу (14.50). Пренебрегая малыми второго порядка, получим компонентную форму записи уравнения:

$$\frac{1}{\sigma} (J_x \omega_x \delta\omega_x + J_y \omega_y \delta\omega_y + J_z \omega_z \delta\omega_z) = 0.$$

Как уже говорилось, для устойчивого состояния должны выполняться условия $\omega_x = \omega_z = 0$, $\omega_y = \Omega$, поэтому приведенная выше формула может быть получена из условия $\delta\omega_y = 0$, и тогда (14.52) примет вид

$$J_x \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - J_x \right) (\delta\omega_x)^2 + J_z \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - J_z \right) (\delta\omega_z)^2 > 0. \quad (14.53)$$

Приведенная выше формула показывает, что при $\frac{1}{\sigma} > 0$ из нее можно получить два условия устойчивости:

$$\frac{1}{\sigma} - J_x > 0, \quad \frac{1}{\sigma} - J_z > 0.$$

Подставляя (14.47) в два указанных выше уравнения и выполняя те же преобразования, что и в уравнениях (14.42а) и (14.42б), получим условия, выраженные через k_x и k_z (см. (12.14)):

$$k_x + \frac{J_2 \Omega_2}{(J_x J_z)^{1/2} \Omega} \left(\frac{1 - k_x}{1 - k_z} \right)^{1/2} > 0, \quad (14.54)$$

$$k_z + \frac{J_2 \Omega_2}{(J_x J_z)^{1/2} \Omega} \left(\frac{1 - k_z}{1 - k_x} \right)^{1/2} > 0. \quad (14.55)$$

При $\frac{1}{\sigma} < 0$ условие (14.53) будет выполнено. Область устойчивости, построенная на основе полученных выше условий, показана на рис. 14.5.

Для КА с двойным вращением с осесимметричным телом B_1 условия устойчивости могут быть получены из уравнения (14.53):

$$\frac{1}{\sigma} > 0, \quad \frac{1}{\sigma} - J_t > 0, \quad \frac{1}{\sigma} < 0.$$

Если из этих трех условий выполняется второе, то первое также будет выполняться, поэтому главными условиями устойчивости являются второе или третье, или оба:

$$k_i + \frac{J_2 \Omega_2}{J_i \Omega} > 0, \quad k_i + 1 + \frac{J_2 \Omega_2}{J_i \Omega} < 0. \quad (14.56)$$

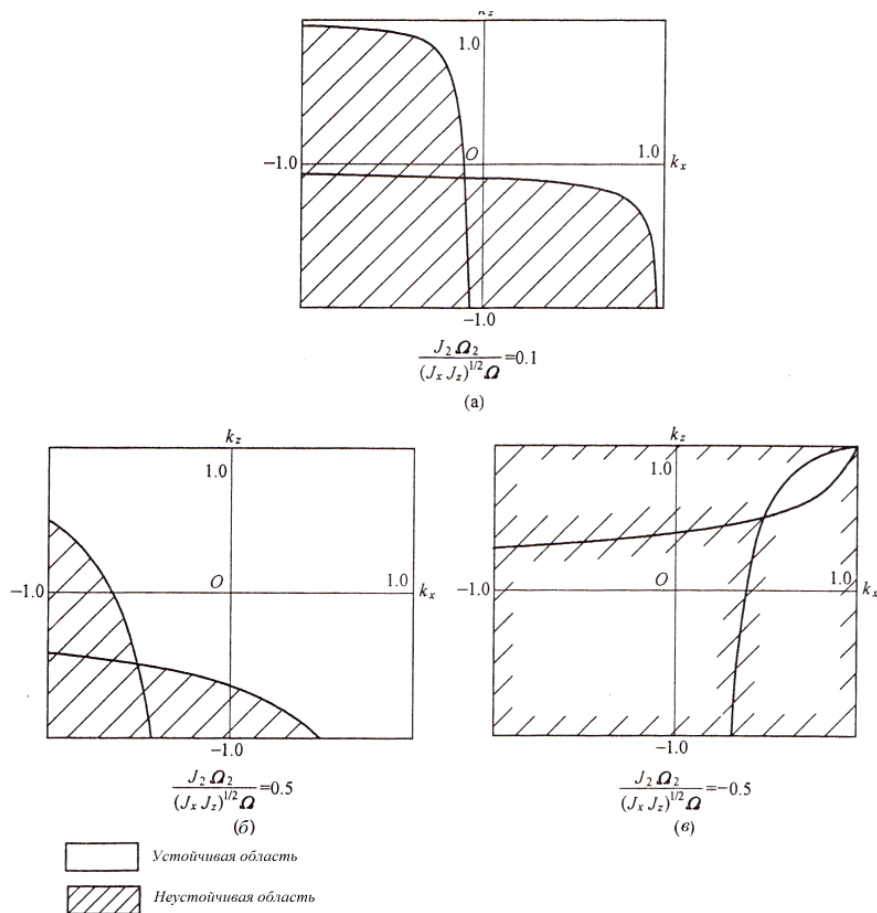


Рис. 14.5. Разделение областей устойчивости для КА с двойным вращением с потерей энергии

Области устойчивости показаны на рис. 14.6, где k_i определяется формулой (13.42). Очевидно, что устойчивым может быть движение не только относительно оси максимального или минимального моментов инерции, то также относительно оси промежуточного момента инерции.

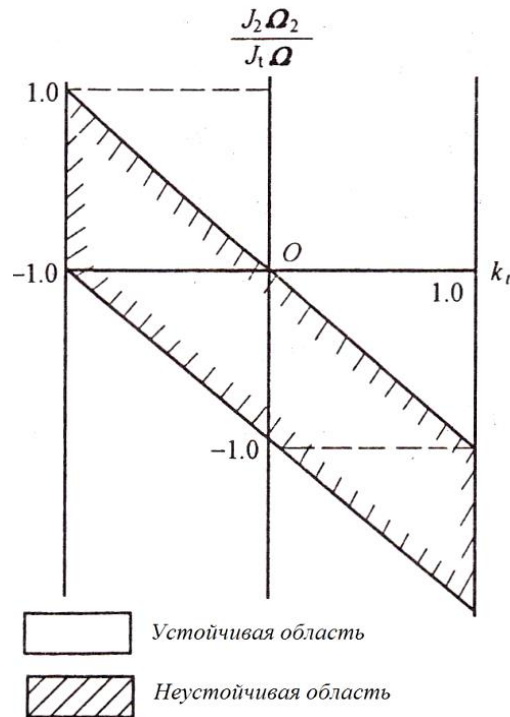


Рис. 14.6. Области устойчивости осесимметричного КА с двойным вращением

14.5 Влияние гравитационного момента на КА

Рассмотрим КА с двойным вращением, функционирующий на круговой орбите, с осью вращения Oy , совпадающей с осью орбитальной системы координат, когда угол ориентации равен нулю. Когда угол наклона является малым углом, гравитационный момент определяется выражением (12.9):

$$M_x = 3\omega_0^2 (J_z - J_y) \varphi,$$

$$M_y = 3\omega_0^2 (J_z - J_x) \vartheta,$$

$$M_z = 0.$$

Поэтому уравнения углового движения можно получить из уравнений системы (14.24):

$$\ddot{\varphi} - \left(1 - k_x + \frac{J_2 \Omega_2}{J_x \omega_0}\right) \omega_0 \dot{\psi} + \left(4k_x - \frac{J_2 \Omega_2}{J_x \omega_0}\right) \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (14.57a)$$

$$\ddot{\vartheta} + 3\omega_0^2 \left(\frac{J_x - J_z}{J_y}\right) = 0, \quad (14.57б)$$

$$\ddot{\psi} + \left(1 - k_x + \frac{J_2 \Omega_2}{J_x \omega_0}\right) \omega_0 \dot{\varphi} + \left(k_z - \frac{J_2 \Omega_2}{J_z \omega_0}\right) \omega_0^2 \psi = 0. \quad (14.57в)$$

Движение точки по углу тангажа по-прежнему является независимым. Условие устойчивости в соответствии с формулой (14.57б) имеет вид $J_x > J_z$. Аналогично, как и в разделе 12.2. можно доказать, что данное условие эквивалентно:

$$k_x > k_z. \quad (14.58)$$

Здесь k_x, k_z определяются выражениями (12.14).

Для уравнений движения по углам крена и рыскания можно использовать преобразование Лапласа и переписать эти уравнения в виде:

$$\begin{bmatrix} s^2 + \left(4k_x - \frac{J_2 \Omega_2}{J_x \omega_0}\right) \omega_0^2 & -\left(1 - k_x + \frac{J_2 \Omega_2}{J_x \omega_0}\right) \omega_0 s \\ \left(1 - k_z + \frac{J_2 \Omega_2}{J_z \omega_0}\right) \omega_0 s & s^2 + \left(k_z - \frac{J_2 \Omega_2}{J_z \omega_0}\right) \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Его характеристическое уравнение:

$$s^4 + a_2 s^2 + a_0 = 0. \quad (14.59)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \left[4k_x - \frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0} + k_z - \frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0} + \right. \\
 &+ \left. \left(1 - k_z + \frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0} \right) \left(1 - k_x + \frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0} \right) \right] \omega_0^2, \\
 a_0 &= \left(4k_x - \frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0} \right) \left(k_z - \frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0} \right) \omega_0^4.
 \end{aligned} \tag{14.60}$$

Перепишем соответствующие элементы в приведенной выше формуле следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{J_2\Omega_2}{J_x\omega_0} &= \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0} \frac{J_y(J_x - J_y + J_z)}{J_x(J_x - J_y + J_z)} = \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0} \alpha_2, \\
 \frac{J_2\Omega_2}{J_z\omega_0} &= \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0} \frac{J_y(J_x - J_y + J_z)}{J_z(J_x - J_y + J_z)} = \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0} \alpha_1, \\
 \alpha_1 &= \frac{1 - k_x k_z}{1 - k_x}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - k_x k_z}{1 - k_z}.
 \end{aligned} \tag{14.61}$$

Подставляя три формулы (14.61) в (14.60) и применяя условия устойчивости $a_2 > 0$, $a_0 > 0$ и $a_2^* - 4a_0^* > 0$, получим:

$$a_2^* = 1 + 3k_x + k_x k_z - (k_x \alpha_1 + k_z \alpha_2) \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0} + \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0} \right)^2 > 0, \tag{14.62}$$

$$a_0^* = \left(4k_x - \alpha_2 \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0} \right) \left(k_z - \alpha_1 \frac{J_2\Omega_2}{J_y\omega_0} \right) > 0, \tag{14.63}$$

$$a_2^* - 4a_0^* > 0. \tag{14.64}$$

Таким образом, все условия устойчивости представляют собой формулы (14.58), (14.62) – (14.64). Области устойчивости в плоскости параметров k_x, k_z показаны на рис. 14.7.

14.6 Демпфирование колебаний КА с двойным вращением

Подобно КА с одним вращением, нутация должна быть затухающей, а активный демпфер является частью системы управления ориентацией. В этом разделе будем рассматривать только пассивное демпфирование.

Вывод уравнений движения

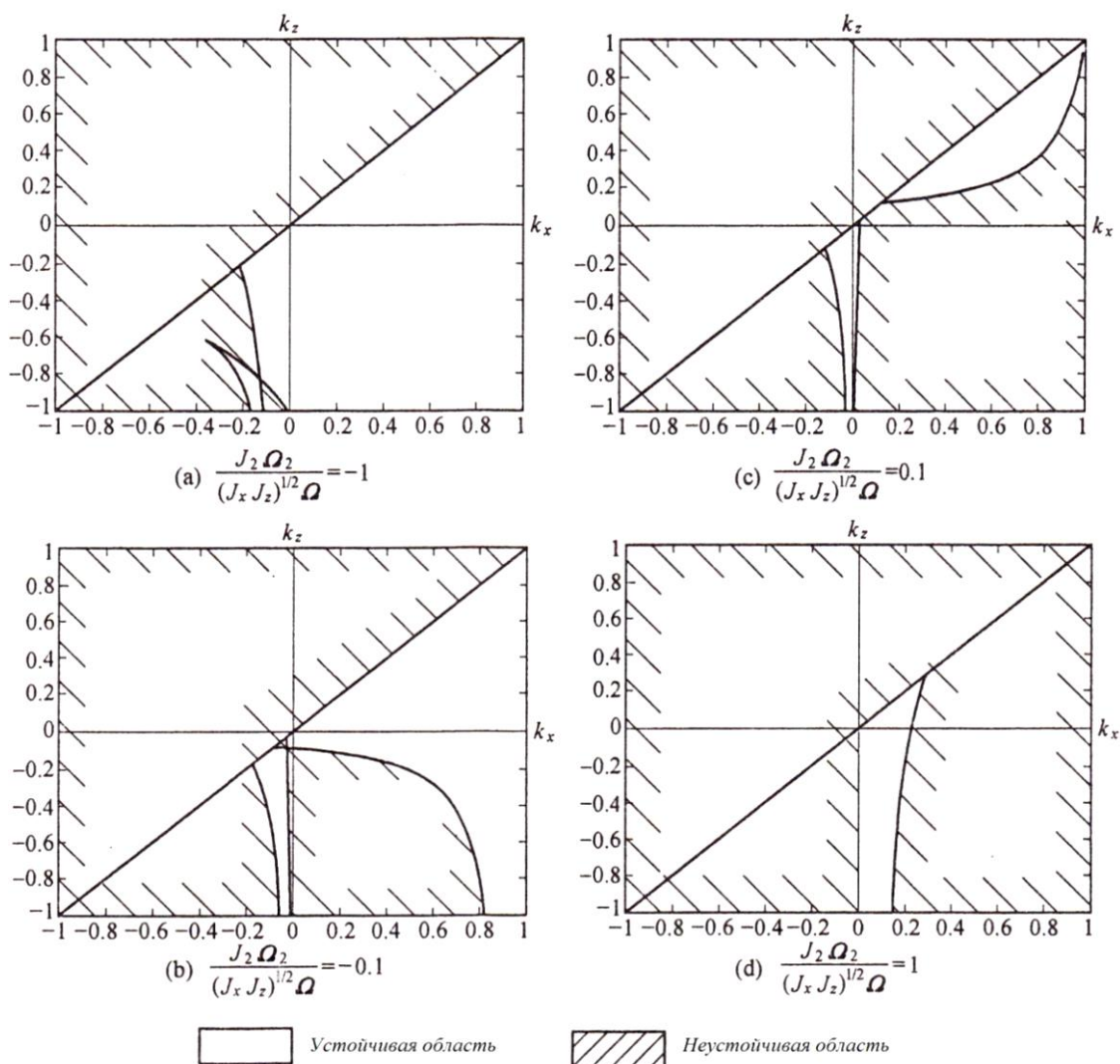


Рис. 14.7. Области устойчивости для КА с двойным вращением на круговой орбите под действием гравитационного момента

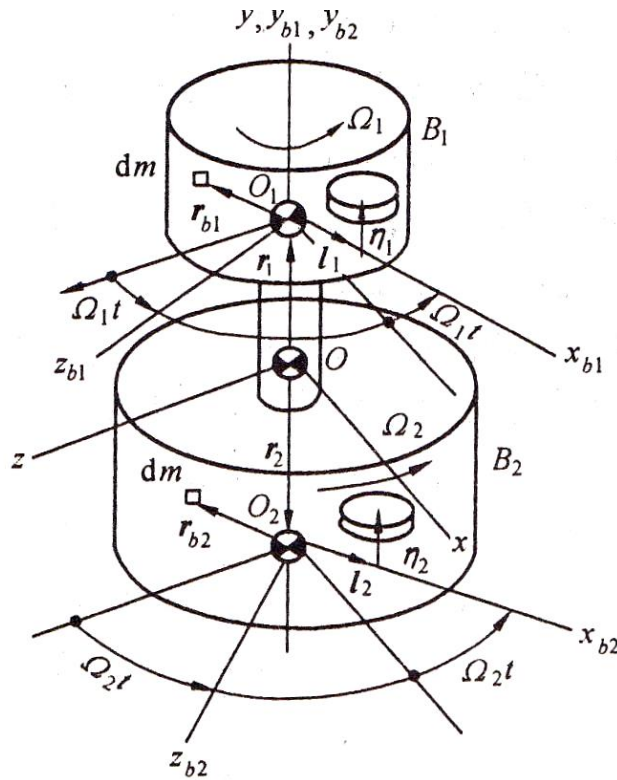


Рис. 14.8. Нутация КА с двойным вращением

На рис. 14.8 показан КА с двойным вращением с демпфером. Как и на рис. 14.1, B_1 и B_2 – платформа и ротор, вращающиеся со скоростями $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ относительно связанной системы координат $Oxyz$. Точки O, O_1, O_2 являются центрами масс всего КА, и его частей B_1 и B_2 соответственно. Для тел B_1 и B_2 заданы системы координат $O_1x_{b1}y_{b1}z_{b1}$ и $O_2x_{b2}y_{b2}z_{b2}$, которые при $t=0$ совпадают с соответствующими осями системы $Oxyz$, а в момент времени t углы между осью Ox системы и осями O_1x_{b1} , O_2x_{b2} равны соответственно $\Omega_1 t$ и $\Omega_2 t$. Демпфер установлен на оси O_1x_{b1} (O_2x_{b2}) тела B_1 (B_2). Расстояние от точки равновесия при движении равно $\bar{\eta}_1$ (или $\bar{\eta}_2$), расстояние от точки O_1 (или O_2) равно \bar{l}_1 (или \bar{l}_2). Для перехода из системы координат $Oxyz$ в $O_1x_{b1}y_{b1}z_{b1}$ используется матрица

преобразования координат, которая задается уравнением (10.27).
Для случая, показанного на рис. 14.8, она имеет вид:

$$\underline{C}_{b1x} = \begin{bmatrix} \cos \Omega_1 t & 0 & -\sin \Omega_1 t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Omega_1 t & 0 & \cos \Omega_1 t \end{bmatrix}. \quad (14.65)$$

Аналогично для B_2 :

$$\underline{C}_{b2x} = \begin{bmatrix} \cos \Omega_2 t & 0 & -\sin \Omega_2 t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Omega_2 t & 0 & \cos \Omega_2 t \end{bmatrix}. \quad (14.66)$$

Анализируя уравнения (13.54) из раздела 13.6, можно видеть, что если B_1 – осесимметричное тело с центром масс в точке O_1 , то его момент инерции в системе $Oxyz$ равен:

$$\underline{J}_1^* = \begin{bmatrix} J_{r1} & -l_1 \eta_1 m_{d1} \cos \Omega_1 t & 0 \\ -l_1 \eta_1 m_{d1} \cos \Omega_1 t & J_1 & l_1 \eta_1 m_{d1} \sin \Omega_1 t \\ 0 & -l_1 \eta_1 m_{d1} \sin \Omega_1 t & J_{r1} \end{bmatrix}. \quad (14.67)$$

Аналогично для тела B_2 с центром масс в точке O_2 в системе координат $Oxyz$ момент инерции равен:

$$\underline{J}_2^* = \begin{bmatrix} J_{r2} & -l_2 \eta_2 m_{d2} \cos \Omega_2 t & 0 \\ -l_2 \eta_2 m_{d2} \cos \Omega_2 t & J_2 & l_2 \eta_2 m_{d2} \sin \Omega_2 t \\ 0 & -l_2 \eta_2 m_{d2} \sin \Omega_2 t & J_{r2} \end{bmatrix}. \quad (14.68)$$

Если векторы, проведенные из точки O к точкам O_1 и O_2 , равны \bar{r}_1 и \bar{r}_2 соответственно, то \underline{J}_1^* и \underline{J}_2^* можно записать через

компоненты момента инерции всего КА относительно общего центра масс O в системе координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \underline{J}_1^* + \underline{J}_2^* + \left(\underline{r}_1^T \underline{r}_1 \underline{E} - \underline{r}_1^T \underline{r}_1 \right) m_{d1} + \left(\underline{r}_2^T \underline{r}_2 \underline{E} - \underline{r}_2^T \underline{r}_2 \right) m_{d2} = \\ &= \begin{bmatrix} J_t & -c_1(\eta) - c_2(\eta) & 0 \\ -c_1(\eta) - c_2(\eta) & J & s_1(\eta) + s_2(\eta) \\ 0 & s_1(\eta) + s_2(\eta) & J_t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14.69)$$

Здесь

$$J_t = J_{t1} + J_{t2} + r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2, \quad J = J_1 + J_2, \quad (14.70)$$

$$c_1(\eta) = l_1 m_{d1} \eta_1 \cos \Omega_1 t, \quad c_2(\eta) = l_2 m_{d2} \eta_2 \cos \Omega_2 t, \quad (14.71)$$

$$s_1(\eta) = l_1 m_{d1} \eta_1 \sin \Omega_1 t, \quad s_2(\eta) = l_2 m_{d2} \eta_2 \sin \Omega_2 t.$$

Элементарная масса dm берется на телах B_1 и B_2 , а их радиус-векторы равны \bar{r}_{b1} и \bar{r}_{b2} соответственно. Если скорость (орбитальная скорость) в точке O равна \bar{v}_0 , то

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r}_1 + \bar{r}_{b1}, \quad \bar{\rho}_2 = \bar{r}_2 + \bar{r}_{b2}. \quad (14.72)$$

Тогда скорость и ускорение элементарной массы на телах B_1 и B_2 будут равны:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{v}_0 + \dot{\bar{\rho}}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_1 + \bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}, \\ \bar{a}_1 &= \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_1 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_1) + \dot{\bar{\Omega}}_1 \times \bar{r}_{b1} + \bar{\Omega}_1 \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}) + \\ &+ \bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}) + \bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b1}) + (\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_1) \times \bar{r}_{b1}, \end{aligned} \quad (14.73)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{v}_0 + \dot{\bar{\rho}}_2 = \bar{v}_0 + \bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_2 + \bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2}, \\ \bar{a}_2 &= \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_2 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_2) + \dot{\bar{\Omega}}_2 \times \bar{r}_{b2} + \bar{\Omega}_2 \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2}) + \\ &+ \bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2}) + \bar{\Omega}_2 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b2}) + (\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_2) \times \bar{r}_{b2}. \end{aligned} \quad (14.74)$$

В приведенных выше двух формулах $\bar{\omega}^*$ представляет собой скорость вращения связанной системы координат $Oxuz$ относительно инерциального пространства и складывается из угловой скорости КА относительно $Ox_0Y_0Z_0$ $\bar{\omega}$ и угловой скорости орбитальной системы координат $Ox_0Y_0Z_0$ относительно инерциального пространства $\bar{\omega}_0$:

$$\bar{\omega}^* = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}. \quad (14.75)$$

Если поршень демпфера рассматривается как точечная масса, то

$$\begin{aligned} \bar{g}_1 &= \bar{r}_1 + \bar{l}_1 + \bar{\eta}_1, \quad \bar{g}_2 = \bar{r}_2 + \bar{l}_2 + \bar{\eta}_2, \\ \bar{\rho}_{d1} &= \bar{l}_1 + \bar{\eta}_1, \quad \bar{\rho}_{d2} = \bar{l}_2 + \bar{\eta}_2. \end{aligned} \quad (14.76)$$

Тогда скорость и ускорение массы m_{d1} будут равны:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{d1} &= \bar{v}_0 + \dot{\bar{g}}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega}^* \times \bar{g}_1 + \bar{\Omega}_1 \times \bar{\rho}_{d1} + \dot{\bar{\eta}}_1, \\ \bar{a}_{d1} &= \dot{\bar{v}}_0 + \ddot{\bar{g}}_1 = \dot{\bar{v}}_0 + \ddot{\bar{\rho}}_{d1} + \ddot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{g}_1 + \bar{\omega}^* \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{g}_1) + \\ &+ \dot{\bar{\Omega}}_1 \times \bar{\rho}_{d1} + \bar{\Omega}_1 \times (\dot{\bar{\Omega}}_1 \times \bar{\rho}_{d1}) + \overset{\circ}{\ddot{\eta}}_1 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{\rho}_{d1}) + \\ &+ \bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_{d1}) + 2(\bar{\omega}^* + \bar{\Omega}_1) \times \dot{\bar{\eta}}_1 + (\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_1) \times \bar{\rho}_{d1}. \end{aligned} \quad (14.77)$$

Из приведенной выше формулы можно получить:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\rho}}_{d1} &= \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_{d1} + \bar{\omega}^* \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_{d1}) + \dot{\bar{\Omega}}_1 \times \bar{\rho}_{d1} + \bar{\Omega}_1 \times (\dot{\bar{\Omega}}_1 \times \bar{\rho}_{d1}) + \\ &+ \overset{\circ}{\ddot{\eta}}_1 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{\rho}_{d1}) + \bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_{d1}) + 2(\bar{\omega}^* + \bar{\Omega}_1) \times \dot{\bar{\eta}}_1 + \\ &+ (\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_1) \times \bar{\rho}_{d1}. \end{aligned} \quad (14.78)$$

Аналогично для поршня массой m_{d2} :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{d2} = & \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{g}_2 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{g}_2) + \\ & + \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_2 \times \bar{\rho}_{d2} + \bar{\Omega}_2 \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{\rho}_{d2}) + \overset{\circ}{\bar{\eta}}_2 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{\rho}_{d2}) + \\ & + \bar{\Omega}_2 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_{d2}) + 2(\bar{\omega}^* + \bar{\Omega}_2) \times \overset{\circ}{\bar{\eta}}_2 + (\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_2) \times \bar{\rho}_{d2}, \end{aligned} \quad (14.79)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\rho}}_{d2} = & \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_{d2} + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_{d2}) + \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_2 \times \bar{\rho}_{d2} + \bar{\Omega}_2 \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{\rho}_{d2}) + \\ & + \overset{\circ}{\bar{\eta}}_2 + \bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{\rho}_{d2}) + \bar{\Omega}_2 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_{d2}) + 2(\bar{\omega}^* + \bar{\Omega}_2) \times \overset{\circ}{\bar{\eta}}_2 + \\ & + (\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_2) \times \bar{\rho}_{d2}. \end{aligned} \quad (14.80)$$

Уравнения углового движения КА с двойным вращением получаются из условия баланса моментов в точке O :

$$\int_{B_1} \bar{\rho}_1 \times \bar{a}_1 dm + \int_{B_2} \bar{\rho}_2 \times \bar{a}_2 dm + \bar{g}_1 \times \bar{a}_{d1} m_{d1} + \bar{g}_2 \times \bar{a}_{d2} m_{d2} = \bar{M}. \quad (14.81)$$

Учитывая, что O, O_1, O_2 являются центрами масс КА и его частей B_1 и B_2 соответственно, можно записать:

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \bar{\rho}_1 dm + \int_{B_2} \bar{\rho}_2 dm + \bar{g}_1 m_{d1} + \bar{g}_2 m_{d2} = 0, \\ \int_{B_1} \bar{r}_{b_1} dm + \bar{\rho}_{d1} m_{d1} = 0, \quad \int_{B_1} \bar{r}_{b_2} dm + \bar{\rho}_{d2} m_{d2} = 0. \end{aligned} \quad (14.82)$$

Следует отметить, что из-за изменения положения поршня (расстояний $\bar{\eta}_1$ и $\bar{\eta}_2$) со временем центры O, O_1, O_2 смещаются. Однако эти смещения невелики, поэтому анализ их изменения опустим.

Подставим выражения (14.73), (14.74), (14.77), (14.79) в (14.81) и, учитывая (14.82), получим векторное уравнение движения поршня:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* + \mathbf{J}_1 \cdot \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_1 + \bar{\Omega}_1 \times \mathbf{J} \cdot \bar{\Omega}_1 + \mathbf{J}_2 \cdot \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_2 + \bar{\Omega}_2 \times \mathbf{J}_2 \cdot \bar{\Omega}_2 + \\
& + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1}) \right] dm + \bar{\rho}_{d1} \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{\rho}_{d1}) \right] m_{d1} + \\
& + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times \left[\bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b1}) \right] dm + \bar{\rho}_{d1} \times \left[\bar{\Omega}_1 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{d1}) \right] m_{d1} + \\
& + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{r}_{b2}) \right] dm + \bar{\rho}_{d2} \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_2 \times \bar{\rho}_{d2}) \right] m_{d2} + \\
& + \int_{B_2} \bar{r}_{b2} \times \left[\bar{\Omega}_2 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{b2}) \right] dm + \bar{\rho}_{d2} \times \left[\bar{\Omega}_2 \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{d2}) \right] m_{d2} + \\
& + \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times \left[(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_1) \times \bar{r}_{b1} \right] dm + \bar{\rho}_{d1} \times \left[(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_1) \times \bar{r}_{d1} \right] m_{d1} + \\
& + \int_{B_1} \bar{r}_{b2} \times \left[(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_2) \times \bar{r}_{b2} \right] dm + \bar{\rho}_{d2} \times \left[(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_2) \times \bar{r}_{d2} \right] m_{d2} + \\
& + \bar{g}_1 \times \left[\overset{\circ\circ}{\bar{\eta}}_1 + 2(\bar{\omega}^* + \bar{\Omega}_1) \times \overset{\circ}{\bar{\eta}}_1 \right] m_{d1} + \\
& + \bar{g}_2 \times \left[\overset{\circ\circ}{\bar{\eta}}_2 + 2(\bar{\omega}^* + \bar{\Omega}_2) \times \overset{\circ}{\bar{\eta}}_2 \right] m_{d2} = \bar{M}.
\end{aligned} \tag{14.83}$$

В приведенной выше формуле

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* &= \int_{B_1} \bar{\rho}_1 \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_1) dm + \int_{B_2} \bar{\rho}_2 \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{\rho}_2) dm + \bar{g}_1 \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{g}_1) m_{d1} + \\
& + \bar{g}_2 \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{g}_2) m_{d2}, \\
\bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* &= \int_{B_1} \bar{\rho}_1 \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_1) \right] dm + \int_{B_2} \bar{\rho}_2 \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\rho}_2) \right] dm + \\
& + \bar{g}_1 \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{g}_1) \right] m_{d1} + \bar{g}_2 \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{g}_2) \right] m_{d2}, \\
\mathbf{J}_i \cdot \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_i &= \int_{B_i} \bar{r}_{bi} \times \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_i \times \bar{r}_{bi} \right) dm + \bar{\rho}_{di} \times \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_i \times \bar{\rho}_{di} \right) m_{di}, \quad i = 1, 2, \\
\bar{\Omega}_i \times \mathbf{J}_i \cdot \bar{\Omega}_i &= \int_{B_i} \bar{r}_{bi} \times \left[\bar{\Omega}_i \times (\bar{\Omega}_i \times \bar{r}_{bi}) \right] dm + \\
& + \bar{\rho}_{di} \times \left[\bar{\Omega}_i \times (\bar{\Omega}_i \times \bar{\rho}_{di}) \right] m_{di}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{14.84}$$

Здесь \mathbf{J} – вектор момента инерции всего КА относительно центра масс O . Компонентная форма записи в системе координат

$Oxyz$ выражается формулой (14.69); J_i – момент инерции тела B_i , $i=1,2$ относительно соответствующего центра масс O_i , который определяется формулами (14.67), (14.68) в компонентной форме в системе координат $Oxyz$.

Переменные в уравнении (14.83) являются угловая скорость $\bar{\omega}^*$ и смещения поршня $\bar{\eta}_1$ и $\bar{\eta}_2$. Для того чтобы замкнуть систему, необходимо еще два уравнения. Используем для этой цели уравнения движения поршня выводятся в соответствии с выражением (13.60) из раздела 13.6, которое можно записать в виде:

$$m_{di}\ddot{\rho}_{di} + \bar{C}_{di}\dot{\bar{\eta}}_i + k_{di}\bar{\eta}_i = \bar{F}_i, \quad i=1,2. \quad (14.85)$$

Для преобразования уравнений (14.83) и (14.85) в компонентную форму, удобную для применения, используем правила из Приложения 3. В качестве примера рассмотрим наиболее сложный элемент $\int_{B_i} \bar{r}_{bi} \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{bi})] dm$. Сначала преобразуем его

в тождество, используя правила векторного анализа:

$$\int_{B_i} \bar{r}_{bi} \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{bi})] dm = - \left(\bar{\Omega}_1 \times \int_{B_i} \bar{r}_{bi} \right) (\bar{r}_{bi} dm \cdot \bar{\omega}^*). \quad (14.86)$$

Компонентная форма записи \bar{r}_{bi} в системе координат $Ox_{b1}y_{b1}z_{b1}$ будет следующей $\bar{r}_{bi} = \underline{\bar{e}}^{(1)T} [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$, где $\underline{\bar{e}}^{(1)}$ – базисный вектор в системе координат $Ox_{b1}y_{b1}z_{b1}$.

$$\underline{\bar{e}}^{(1)T} \int_{B_i} \underline{r}_{bi} \underline{r}_{bi}^T dm \underline{\bar{e}}^{(1)} = \underline{\bar{e}}^{(1)T} \int_{B_i} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & x_1 z_1 \\ x_1 y_1 & y_1^2 & y_1 z_1 \\ x_1 z_1 & y_1 z_1 & z_1^2 \end{bmatrix} dm \underline{\bar{e}}^{(1)}.$$

Учитывая, что тело B_1 является вращающимся телом относительно Oy_{b1} , можно увидеть, что недиагональные элементы в правой части верхней формулы являются произведениями моментов инерции и равны нулю. Кроме того, из

$$J_t = \int_{B_1} (y_1^2 + z_1^2) dm = \int_{B_1} (y_1^2 + x_1^2) dm, \quad J_1 = \int_{B_1} (x_1^2 + z_1^2) dm \quad \text{следует}$$

$$\int_{B_1} x_1^2 dm = \int_{B_1} z_1^2 dm = J_1/2 \quad \text{и} \quad \int_{B_1} y_1^2 dm = J_t - J_1/2, \quad \text{ПОЭТОМУ}$$

$$\underline{\bar{e}}^{(1)\Gamma} = \int_{B_1} \underline{r}_{bi} \underline{r}_{bi}^T dm \underline{\bar{e}}^{(1)} = \underline{\bar{e}}^{(1)\Gamma} \begin{bmatrix} J_1/2 & & 0 \\ & J_t - J_1/2 & \\ 0 & & J_1/2 \end{bmatrix} \underline{\bar{e}}^{(1)}.$$

Преобразуем это в систему координат $Oxyz$:

$$\underline{\bar{e}}^T \underline{C}_{xb1} \begin{bmatrix} J_1/2 & & 0 \\ & J_t - J_1/2 & \\ 0 & & J_1/2 \end{bmatrix} \underline{C}_{b1x} \underline{\bar{e}} = \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} J_1/2 & & 0 \\ & J_t - J_1/2 & \\ 0 & & J_1/2 \end{bmatrix} \underline{\bar{e}}.$$

Учитывая, что компоненты угловых скоростей в системе координат $Oxyz$ равны $\bar{\Omega}_1 = \underline{\bar{e}}^T [0 \quad \Omega_1 \quad 0]^T$, $\bar{\omega}^* = \underline{\bar{e}}^T [\omega_x^* \quad \omega_y^* \quad \omega_z^*]^T$, выражение (14.86) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \bar{r}_{b1} \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_1 \times \bar{r}_{b1})] dm &= \underline{\bar{e}}^T \underline{\Omega}^{\times T} \begin{bmatrix} J_1/2 & & 0 \\ & J_t - J_1/2 & \\ 0 & & J_1/2 \end{bmatrix} \bar{\omega}^* = \\ &= \underline{\bar{e}}^T \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -J_1 \Omega_1 \omega_z^* \\ 0 \\ J_1 \Omega_1 \omega_x^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично найдем компонентную форму интегрального члена (14.83), а затем опустим малые второго порядка малости и выше ($\omega_x^*, \omega_z^*, \eta_1, \eta_2, m_{d1}, m_{d2}$ – малые первого порядка), при $\dot{\bar{\Omega}}_1 = \dot{\bar{\Omega}}_2 = 0$ получим уравнение ориентации в компонентной форме:

$$\begin{aligned}
 & J_t \dot{\omega}_x^* - (J - J_t) \omega_y^* \omega_z^* + [s_1(\eta) + s_2(\eta)] (\omega_y^*)^2 + \\
 & + s_1(\eta) \Omega_1^2 + s_2(\eta) \Omega_2^2 - [(J_1 - J_{t1}) \Omega_1 + (J_2 - J_{t2}) \Omega_2] \omega_z^* + (14.87a) \\
 & + 2(s_1(\eta) \Omega_1 + s_2(\eta) \Omega_2) \omega_y^* + \\
 & + m_{d1} l_1 \ddot{\eta}_1 \sin \Omega_1 t + m_{d2} l_2 \ddot{\eta}_2 \sin \Omega_2 t = M_x,
 \end{aligned}$$

$$J_t \dot{\omega}_y^* = M_y, \quad (14.87б)$$

$$\begin{aligned}
 & J_t \dot{\omega}_z^* - (J - J_t) \omega_x^* \omega_y^* + [c_1(\eta) + c_2(\eta)] (\omega_x^*)^2 + \\
 & + c_1(\eta) \Omega_1^2 + c_2(\eta) \Omega_2^2 + [(J - J_{t1}) \Omega_1 + (J - J_{t2}) \Omega_2] \omega_x^* + (14.87в) \\
 & + 2(c_1(\eta) \Omega_1 + c_2(\eta) \Omega_2) \omega_y^* + \\
 & + m_{d1} l_1 \ddot{\eta}_1 \cos \Omega_1 t + m_{d2} l_2 \ddot{\eta}_2 \cos \Omega_2 t = M_z.
 \end{aligned}$$

Это система уравнений, описывающих движение КА с двойным вращением. Однако широко используемые КА с двойным вращением характеризуется тем, что скорость вращения платформы равна нулю относительно орбитальной системы координат, т. е. $\bar{\Omega}_1 = 0$. Для таких КА он разделяется на два типа: демпфер установлен платформе B_1 или на роторе B_2 . У первого $\bar{\eta}_2 = 0$, а у последнего $\bar{\eta}_1 = 0$.

Поэтому платформа B_1 не вращается относительно орбитальной системе координат, а формулы (14.87) при установленном на теле B_1 демпфере приобретают вид:

$$J_t \dot{\omega}_x^* - \left[(J - J_t) \omega_y^* + (J_2 - J_{t2}) \Omega_2 \right] \omega_z^* = M_x, \quad (14.88a)$$

$$J \dot{\omega}_y^* = M_y, \quad (14.88б)$$

$$J_t \dot{\omega}_z^* + \left[(J - J_t) \omega_y^* + (J_2 - J_{t2}) \Omega_2 \right] \omega_x^* + m_{d1} l_1 \left(\ddot{\eta}_1 + (\omega_y^*)^2 \eta_1 \right) = M_z. \quad (14.88в)$$

В случае установки демпфера на теле B_2 , если B_1 не вращается, формула (14.87) запишется в виде:

$$J_t \dot{\omega}_x^* - \left[(J - J_t) \omega_y^* + (J_2 - J_{t2}) \Omega_2 \right] \omega_z^* + s_2(\eta) \left((\omega_y^*)^2 + \Omega_2^2 \right) + 2s_2(\eta) \Omega_2 \omega_y^* + m_{d2} l_2 \ddot{\eta}_2 \sin \Omega_2 t = M_x, \quad (14.89a)$$

$$J \dot{\omega}_y^* = M_y, \quad (14.89б)$$

$$J_t \dot{\omega}_z^* + \left[(J - J_t) \omega_y^* + (J_2 - J_{t2}) \Omega_2 \right] \omega_x^* + c_2(\eta) \left((\omega_y^*)^2 + \Omega_2^2 \right) + 2c_2(\eta) \Omega_2 \omega_y^* + m_{d2} l_2 \ddot{\eta}_2 \cos \Omega_2 t = M_z. \quad (14.89в)$$

Для приведения указанных выше трех уравнений к форме, описываемой углами Эйлера, следует использовать выражения (14.13), (14.14) и (14.15). Поэтому для КА, у которого часть B_1 с установленным на ней демпфером не вращается относительно орбитальной системы координат считается, что углы φ, ϑ, ψ являются малыми величинами первого порядка. Тогда, пренебрегая величинами более высоких порядков малости, формулы (14.88) можно записать в виде:

$$J_t \ddot{\varphi} + \left[(J - 2J_t) \omega_0 - (J_2 - J_{t2}) \Omega_2 \right] \dot{\psi} + \left[(J - J_t) \omega_0^2 - (J_2 - J_{t2}) \omega_0 \Omega_2 \right] \varphi = M_x, \quad (14.90a)$$

$$J \ddot{\vartheta} = M_y, \quad (14.90б)$$

$$\begin{aligned}
& J_t \ddot{\psi} - [(J - 2J_t)\omega_0 - (J_2 - J_{t2})\Omega_2] \dot{\phi} + \\
& + [(J - J_t)\omega_0^2 - (J_2 - J_{t2})\omega_0\Omega_2] \psi + m_{d1} l_1 \ddot{\eta}_1 + \omega_0^2 \eta_1 = M_z.
\end{aligned} \tag{14.90в}$$

Если тело B_1 не вращается относительно орбитальной системы координат, а демпфер установлен на роторе B_2 , то с помощью формул (14.89) можно получить:

$$\begin{aligned}
& J_t \ddot{\phi} + [(J - 2J_t)\omega_0 - (J_2 - J_{t2})\Omega_2] \dot{\psi} + \\
& + [(J - J_t)\omega_0^2 - (J_2 - J_{t2})\omega_0\Omega_2] \phi + \\
& + m_{d2} l_2 [\ddot{\eta}_2 + (\omega_0 - \Omega_2)^2 \eta_2] \sin \Omega_2 t = M_x,
\end{aligned} \tag{14.91а}$$

$$J \ddot{\vartheta} = M_y, \tag{14.91б}$$

$$\begin{aligned}
& J_t \ddot{\psi} - [(J - 2J_t)\omega_0 + (J_2 - J_{t2})\Omega_2] \dot{\phi} + \\
& + [(J - J_t)\omega_0^2 - (J_2 - J_{t2})\omega_0\Omega_2] \psi + \\
& + m_{d2} l_2 [\ddot{\eta}_2 + (\omega_0 - \Omega_2)^2 \eta_2] \cos \Omega_2 t = M_z.
\end{aligned} \tag{14.91в}$$

Полученные уравнения содержат четыре переменные: три компоненты угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (или три угла φ, ϑ, ψ) и одно перемещение поршня η_1 или η_2 . Однако уравнений в системе всего три. Для получения решения требуется еще одно независимое уравнение. Это уравнение движения поршня. Согласно разделу 13.6 и уравнению (13.60), его можно записать в виде:

$$m_{di} \ddot{\rho}_{di} + C_{di} \dot{\bar{\eta}}_i + k_{di} \bar{\eta}_i = \bar{F}_i, \quad i=1,2. \tag{14.92}$$

где C_{di} и k_{di} – коэффициенты вязкости демпфирующего клапана на корпусе тела $B_i, i=1,2$ и жесткости поршневой пружины соответственно, а \bar{F}_i – сила, действующая на поршень, направление

которой перпендикулярно оси Oy . Используем выражения (14.78) и (14.80), чтобы избавиться от $\bar{\rho}_{di}$ в приведенной выше формуле и записать вектор в компонентной форме. Опустив малые второго порядка, получим уравнения движения вдоль направления $\bar{\eta}_i$ (направление оси Oy) для демпфера B_1 . При этом тело B_1 не вращается в орбитальной системе координат:

$$m_{d1}l_1\dot{\omega}_z^* + m_{d1}l_1(\omega_x^*\omega_y^*) + m_{d1}\ddot{\eta}_1 + C_{d1}\dot{\eta}_1 + k_{d1}\eta_1 = 0. \quad (14.93)$$

Выразим через углы Эйлера:

$$m_{d1}l_1(\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi) + m_{d1}\ddot{\eta}_1 + C_{d1}\dot{\eta}_1 + k_{d1}\eta_1 = 0. \quad (14.94)$$

Во втором случае, когда демпфер установлен на роторе B_2 , получим:

$$m_{d2}l_2 \left[\dot{\omega}_z^* \cos \Omega_2 t + \dot{\omega}_x^* \sin \Omega_2 t - \right. \\ \left. - (\omega_z^* \cos \Omega_2 t - \omega_x^* \sin \Omega_2 t)(\omega_y^* + 2\Omega_2) \right] + m_{d2}\ddot{\eta}_2 + C_{d2}\dot{\eta}_2 + k_{d2}\eta_2 = 0 \quad (14.95)$$

и

$$m_{d2}l_2 \left[\ddot{\phi} \sin \Omega_2 t + \ddot{\psi} \cos \Omega_2 t + 2(\dot{\phi} \cos \Omega_2 t - \dot{\psi} \sin \Omega_2 t)\Omega_2 + \right. \\ \left. + (\omega_0^2 - 2\omega_0\Omega_2)(\phi \sin \Omega_2 t + \psi \cos \Omega_2 t) \right] + \\ + m_{d2}\ddot{\eta}_2 + C_{d2}\dot{\eta}_2 + k_{d2}\eta_2 = 0. \quad (14.96)$$

Анализ устойчивости

Из формул (14.83) и (14.87) – (14.91) видно, что уравнение движения по углу тангажа не зависит от движения по двум другим каналам и при отсутствии внешних сил имеет вид:

$$\omega_y = 0, \dot{\vartheta} = const. \quad (14.97)$$

В случае, когда платформа B_1 не вращается относительно орбитальной системы координат, а демпфер установлен на B_1 , для преобразования уравнений (14.90) и (14.94) вводятся следующие параметры

$$\begin{aligned} k_t &= \frac{J - J_t}{J_t}, \quad k_{t2} = \frac{J_2 - J_{t2}}{J_t}, \quad \hat{\Omega} = \frac{\Omega_0}{\omega_0}, \\ \omega_d^2 &= \frac{k_{d1}}{m_{d1}}, \quad \zeta = \frac{C_{d1}}{2m_{d1}\omega_d}. \end{aligned} \quad (14.98)$$

Далее можно получить:

$$\begin{bmatrix} s^2 + (k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)\omega_0^2 & (k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2 - 1)\omega_0 s & 0 \\ -(k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2 - 1)\omega_0 s & s^2 + (k_t - k_{t2}\hat{\Omega}_2)\omega_0^2 & \frac{m_{d1}l_1}{J_t}(s^2 + \omega_0^2) \\ 0 & l_1(s^2 + \omega_0^2) & s^2 + 2\omega_d\zeta s + \omega_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \\ \eta_1(s) \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом, получим характеристическое уравнение:

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0. \quad (14.99)$$

Затем запишем:

$$\hat{I}_{d1} = \frac{I_{d1}}{J_t} = \frac{m_{d1}l_1^2}{J_t}, \quad \hat{\omega}_d = \frac{\omega_d}{\omega_0}. \quad (14.100)$$

Коэффициенты в характеристическом уравнении определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 a_6 &= 1 - \hat{I}_{d1}, \\
 a_5 &= 2\omega_0 \hat{\omega}_d \zeta, \\
 a_4 &= \omega_0^2 \left[\hat{\omega}_d^2 + (k_t - k_{t2} \hat{\Omega}_2)^2 + 1 - \hat{I}_{d1} (k_t - k_{t2} \hat{\Omega}_2 + 2) \right], \\
 a_3 &= 2\omega_0^3 \left[(k_t - k_{t2} \hat{\Omega}_2)^2 + 1 \right] \hat{\omega}_d \zeta, \\
 a_2 &= \omega_0^4 \left[(k_t - k_{t2} \hat{\Omega}_2)^2 (\hat{\omega}_d + 1) + \hat{\omega}_d^2 - \hat{I}_{d1} (2k_t - 2k_{t2} \hat{\Omega}_2 + 1) \right], \\
 a_1 &= 2\omega_0^5 (k_t - k_{t2} \hat{\Omega}_2)^2 \hat{\omega}_d \zeta, \\
 a_0 &= \omega_0^6 \left[(k_t - k_{t2} \hat{\Omega}_2)^2 \hat{\omega}_d^2 - (k_t - k_{t2} \hat{\Omega}_2) \hat{I}_{d1} \right].
 \end{aligned} \tag{14.101}$$

Используя критерии оценки устойчивости Гурвица из Приложения 7, можно сделать вывод о том, что система будет устойчивой, если

$$a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0.$$

Из (14.101) легко видеть, что $a_5 > 0, a_3 > 0$ и $a_1 > 0$.

При $B = k_t - k_{t2} \hat{\Omega}_2$, если выполняется требование $a_0 > 0$, то B и выражение $B - \hat{I}_{d1} / \hat{\omega}_d^2$ должны иметь одинаковые знаки:

$$B > 0, B > \hat{I}_{d1} / \hat{\omega}_d^2$$

ИЛИ

$$B < 0, B < \hat{I}_{d1} / \hat{\omega}_d^2.$$

Исключая избыточность в этих четырех условиях, условием устойчивости будет: $B > \hat{I}_{d1}/\hat{\omega}_d^2$ или $B < 0$. Если выражение для B заменить, система останется устойчивой. Условия устойчивости можно записать в виде:

$$\hat{\Omega}_2 < \left(k_t - \frac{\hat{I}_{d1}}{\hat{\omega}_d^2} \right) / k_{t2}, \quad \hat{\Omega}_2 > k_t / k_{t2}. \quad (14.102)$$

Требование $\Delta_3 > 0$ получается путем подстановки коэффициентов при a_6, a_5, \dots и т. д. из (14.101) в соответствующую формулу из Приложения 7.

$$\Delta_3 = a_5^2 \omega_0^4 B(1-B)(1-B^2).$$

Условие $\Delta_3 > 0$ выполняется в случаях: $B > 0$ (но $B \neq 0$) или $B < -1$. После замены выражения B можно записать в виде:

$$\hat{\Omega}_2 < \frac{k_t}{k_{t2}}, \quad \hat{\Omega}_2 > \frac{k_t + 1}{k_{t2}}. \quad (14.103)$$

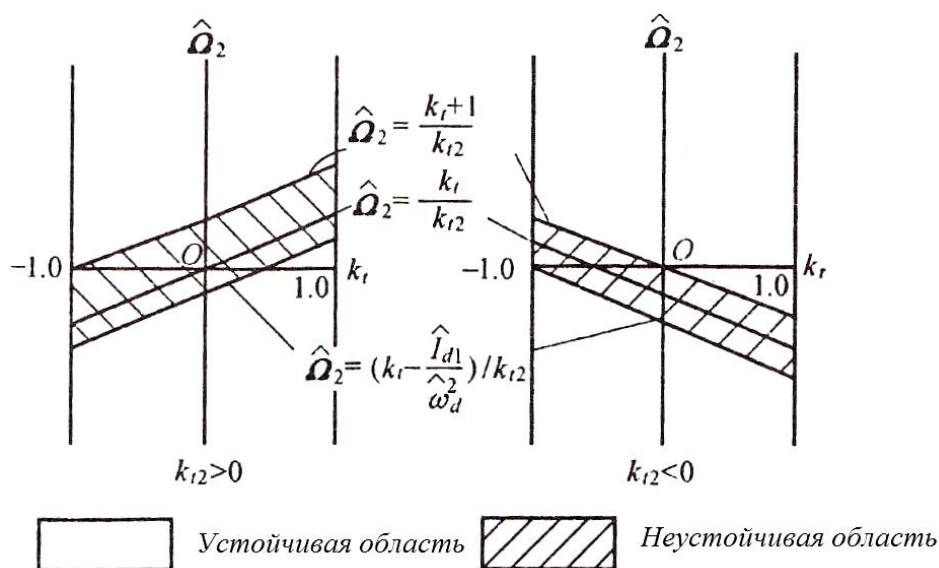


Рис. 14.9. Области устойчивости КА с двойным вращением (демпфер установлен на платформе)

С помощью выражений (14.102) и (14.103) построены области устойчивости, изображенные на рис. 14.9 в координатах $k_t - \hat{\Omega}_2$.

Проанализируем еще одно условие: $\Delta_5 > 0$. После подстановки коэффициента в формулу (14.101) получаем, что $\Delta_5 = 0$. Это указывает на то, что устойчивость системы не может быть определена с помощью Δ_5 , и для ее оценки необходимо использовать другие методы. Результат анализа с использованием теоремы 9.9 Приложения 9 состоит в том, что, если $B \neq 0$ и $B \neq 1$, система асимптотически устойчива (рис. 14.9). Пока выполняются неравенства (14.102) и (14.103), КА устойчив.

В случае если демпфер установлен на роторе, необходимо провести анализ устойчивости КА, используя формулы (14.91) и (14.96). Но т. к. они содержат функции синуса и косинуса от независимой переменной t , аналитически это будет выполнить сложно. Поэтому формулы (14.91) и (14.96) с нулевой правой частью можно преобразовать в уравнение (13.62):

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_1 + [k_t - 1 - (k_{t2} - 2)\hat{\Omega}_2] \omega_0 \dot{\sigma}_3 + \\ + [k_t - (k_{t2} - 1)\hat{\Omega}_2] (1 - \hat{\Omega}_2) \omega_0^2 \sigma_1 = 0, \end{aligned} \quad (14.104a)$$

$$\ddot{\sigma}_2 = 0, \quad (14.104б)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_3 + [k_t - 1 - (k_{t2} - 2)\hat{\Omega}_2] \omega_0 \dot{\sigma}_1 + \\ + [k_t - (k_{t2} - 1)\hat{\Omega}_2] (1 - \hat{\Omega}_2) \omega_0^2 \sigma_3 + \\ + \frac{m_{d2} l_2}{J_t} [\ddot{\eta}_2 + (1 - \hat{\Omega}_2)^2 \omega_0^2 \eta_2] = 0, \end{aligned} \quad (14.104в)$$

$$l_2 \ddot{\sigma}_3 + l_2 (1 - \hat{\Omega}_2)^2 \omega_0^2 \sigma_3 + \ddot{\eta}_2 + 2\omega_d \zeta \dot{\eta}_2 + k_{d2} \eta_2 = 0. \quad (14.104г)$$

Применяя преобразование Лапласа для уравнений (а), (в) и (г) последней системы, получим характеристическое уравнение:

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0.$$

Коэффициенты равны:

$$\begin{aligned} a_6 &= 1 - \hat{I}_{d2}, \\ a_5 &= 2\omega_0 \hat{\omega}_d \zeta, \\ a_4 &= \omega_0^2 \left\{ \hat{\omega}_d^2 + (1 - A)^2 - (1 - \hat{\Omega}_2) \left[A(2 - \hat{I}_{d2}) + 2\hat{I}_{d2}(1 - \hat{\Omega}_2) \right] \right\}, \\ a_3 &= 2\omega_0^3 \hat{\omega}_d \zeta \left[(1 - A)^2 - 2A(1 - \hat{\Omega}_2) \right], \\ a_2 &= \omega_0^4 \left\{ \left[(1 - A)^2 - 2A(1 - \hat{\Omega}_2) \right] \hat{\omega}_d^2 + A^2 (1 - \hat{\Omega}_2)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2\hat{I}_{d2} A (1 - \hat{\Omega}_2)^3 - \hat{I}_{d2} (1 - \hat{\Omega}_2)^4 \right\}, \\ a_1 &= 2\omega_0^5 A \hat{\omega}_d \zeta (1 - \hat{\Omega}_2)^2, \\ a_0 &= \omega_0^6 A (1 - \hat{\Omega}_2)^2 \left[A \hat{\omega}_d^2 + \hat{I}_{d2} (1 - \hat{\Omega}_2)^3 \right]. \end{aligned} \tag{14.105}$$

Здесь

$$\hat{I}_{d2} = \frac{m_{d2} l_2^2}{J_t}, \quad A = (k_t - 2) \hat{\Omega}_2 - k_t. \tag{14.106}$$

Анализ устойчивости такого ЛА может быть проведен любым из методов, перечисленных в Приложениях 6 – 9, однако результаты будут очень громоздкими. Читатель может попытаться сделать это самостоятельно.

15 КА С ТРЕХОСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ

В предыдущих двух главах изучалась стабилизация КА за счет вращения вокруг оси для сохранения пространственной ориентации КА. Ориентация исследуемого в этой главе КА относительно центральной звезды осуществляется системой управления. Система координат, жестко связанная с КА, $Ox_b y_b z_b$ и система координат $Oxyz$ объединяются в одну, а их ориентация относительно осей координат выполняется согласно заданному закону, который также называется трехосной стабилизацией КА.

Управляющими приводами для КА с трехосной стабилизацией являются в основном реактивные двигатели и реактивные маховики, а также их сочетания. Есть КА с трехосной стабилизацией с реактивным двигателем, гироскопическими устройствами и маховиками с реактивным двигателем, но наиболее часто используются последние два.

15.1 Динамические уравнения КА с маховиками

Маховик – это ротор, который движется с высокой скоростью от привода двигателя. Статор устанавливается на корпусе КА. Когда вращающий момент не создается, ротор может не вращаться (колесо с нулевым импульсом) или вращаться с постоянной скоростью – вращающийся реактивный маховик. Когда приводной двигатель ускоряет (или замедляет) ротор с определенным крутящим моментом, реакционный крутящий момент, действующий на статор, перемещает КА в противоположное ускорению ротора направление через конструкцию, поэтому управляющий эффект маховика представляет собой ускорение (или замедление) ротора. Существует также маховик, управляющий крутящий момент которого не создается ускорением или замедлением ротора, т. е. скорость вращения ротора не изменяется.

Гироскопический момент формируется путем изменения направления оси вращения, что позволяет управлять ориентацией КА. Также это колесо называется силовым гироскопом.

На рис. 15.1 показан принцип работы указанных двух типов устройств: (а) реактивный маховик; (б) силовой гироскоп. Ротор установлен на рамке и вращается вокруг оси x_w со скоростью $\bar{\Omega}$ и моментом импульса $\bar{H} = J \cdot \bar{\Omega}$. Если ось y_w вращается с $\dot{\delta} = \bar{\Omega} \cdot \bar{\omega}$, управляющий крутящий момент направлен противоположно вектору \bar{e}_w и равен $\bar{M}_z = \bar{\Omega}_w \times \bar{H}$.

В качестве уравнения динамики ориентации КА с трехосной стабилизацией, управляемого маховиком, может быть непосредственно использовано выражение (11.18) или (11.19), где $\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ являются компонентами момента тяги.

Динамические уравнения управления ориентацией КА на орбите с реактивными маховиками, обусловленные динамикой маховика, сложнее.

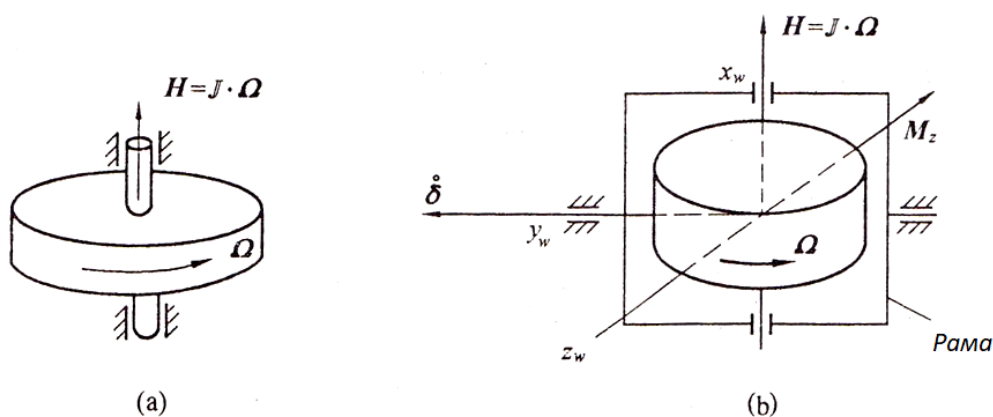


Рис. 15.1. Реактивный маховик и силовой гироскоп

На рис. 15.2 представлена принципиальная схема их получения. Если угловая скорость вращения рамки $\bar{\Omega}_{wp} = 0$, можно получить уравнение движения КА с реактивным маховиком. На рисунке в точке O находится центр масс КА, включающего все маховики, которые оснащены реактивными маховиками

в количестве P с импульсами W_p ($p=1,2,\dots,P$), O_p — центр масс отдельного реактивного колеса W_p . Базисные векторы $\underline{\bar{e}} = [\bar{i} \quad \bar{j} \quad \bar{k}]^T$ и $\underline{\bar{e}}^p = [\bar{w}_{p1} \quad \bar{w}_{p2} \quad \bar{w}_{p3}]^T$ совпадают с главными осями инерции. Один единичный вектор \bar{e}^p (на рисунке \bar{w}_{p1}) совпадает с угловой скоростью ротора $\bar{\Omega}_p$ относительно рамки, а другой единичный вектор (на рисунке \bar{w}_{p2}) совпадает с угловой скоростью рамки $\bar{\Omega}_{wp}$ относительно КА. Угловые скорости $\bar{\omega}_0$ и $\bar{\omega}$ те же, что и в предыдущей главе, и представляют собой угловую скорость орбитальной системы координат относительно инерциального пространства и системы координат КА с базисным вектором $\underline{\bar{e}}$ относительно орбитальной системы координат.

$$\bar{\omega}^* = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}, \quad (15.1)$$

$$\bar{\omega}_p = \bar{\Omega}_{wp} + \bar{\Omega}_p, \quad (15.2)$$

$$\bar{\omega}_p^* = \bar{\omega}^* + \bar{\omega}_p. \quad (15.3)$$

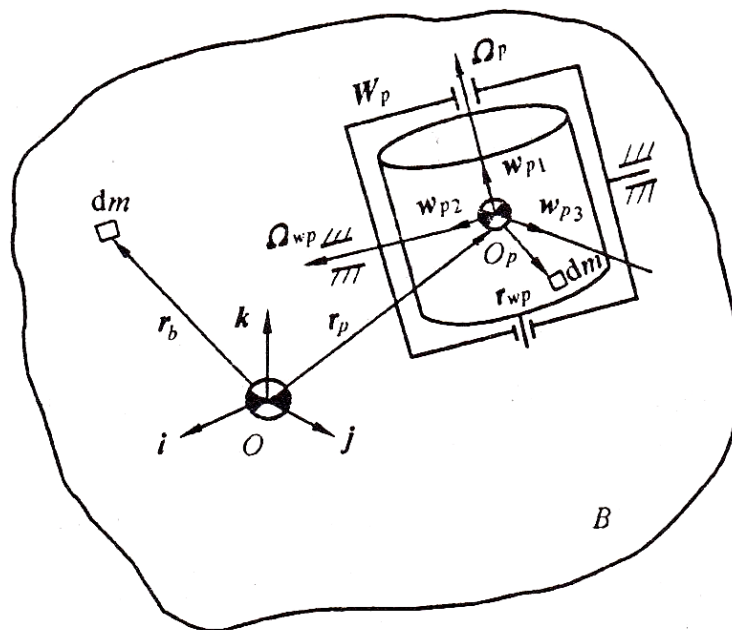


Рис. 15.2. Схема для расчета маховика

На КА и на реактивном маховике возьмем элементарные массы dm , их расстояния от точек O и O_p равны \bar{r}_b и \bar{r}_{wp} ($p=1,2,\dots,P$), скорость и ускорение соответственно будут:

$$\bar{v}_b = \bar{v}_0 + \bar{\omega}^* \times \bar{r}_b, \quad (15.4)$$

$$\bar{a}_b = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{r}_b + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_b) \quad (15.5)$$

и

$$\bar{v}_p = \bar{v}_0 + \bar{\omega}^* \times \bar{r}_p + \bar{\omega}_p^* \times \bar{r}_{wp}, \quad p=1,2,\dots,P, \quad (15.6)$$

$$\bar{a}_p = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{r}_p + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_p) + \dot{\bar{\omega}}_p^* \times \bar{r}_{wp} + \bar{\omega}_p^* \times (\bar{\omega}_p^* \times \bar{r}_{wp}). \quad (15.7)$$

В приведенных выше уравнениях \bar{v}_0 и \bar{a}_0 – абсолютные (орбитальные) скорость и ускорение центра масс O . Из формулы (15.3) следует $\dot{\bar{\omega}}_p^* = \dot{\bar{\omega}}^* + \dot{\bar{\omega}}_p$. Подставим это выражение в последнюю формулу:

$$\begin{aligned} \bar{a}_p = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}}^* \times (\bar{r}_p + \bar{r}_{wp}) + \bar{\omega}^* \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{r}_p + \bar{r}_{wp})] + \dot{\bar{\omega}}_p \times \bar{r}_{wp} + \\ + \bar{\omega}_p \times (\bar{\omega}_p \times \bar{r}_{wp}) + \bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}_p \times \bar{r}_{wp}) + \bar{\omega}_p \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{wp}). \end{aligned} \quad (15.8)$$

Так как O и O_p – центры масс КА и маховиков W_p , то можно записать

$$\int_B \bar{r}_b dm + \sum_{p=1}^P \int_{wp} (\bar{r}_{wp} + \bar{r}_p) dm = 0, \quad (15.9)$$

$$\int_{wp} \bar{r}_{wp} dm = 0, \quad p=1,2,\dots,P. \quad (15.10)$$

Уравнение динамики КА с трехосной стабилизацией с P реактивными маховиками может быть получено из условия баланса моментов относительно точки O , т. е.

$$\int_B \bar{r}_b \times \bar{a}_b dm + \sum_{p=1}^P \int_{wp} (\bar{r}_p + \bar{r}_{wp}) \times \bar{a}_p dm = \bar{M}. \quad (15.11)$$

Здесь \bar{M} – сумма внешних моментов, действующих на КА. Если подставить формулы (15.5) и (15.8) в приведенное выше выражение и учесть (15.9) и (15.10), получим:

$$\begin{aligned} & \int_B \bar{r}_b \times (\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{r}) dm + \sum_{p=1}^P \int_{wp} (\bar{r}_p + \bar{r}_{wp}) \times [\dot{\bar{\omega}}^* \times (\bar{r}_p + \bar{r}_{wp})] dm + \\ & + \int_B \bar{r}_b \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_b)] dm + \\ & + \sum_{p=1}^P \int_{wp} (\bar{r}_p + \bar{r}_{wp}) \times \left\{ \bar{\omega}^* \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{r}_p + \bar{r}_{wp})] \right\} dm + \\ & + \sum_{p=1}^P \left\{ \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times (\dot{\bar{\omega}}_p + \bar{r}_{wp}) dm + \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times [\bar{\omega}_p \times (\bar{\omega}_p + \bar{r}_{wp})] dm + \right. \\ & \left. + \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times [\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}_p \times \bar{r}_{wp})] dm + \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times [\bar{\omega}_p \times (\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{wp})] dm \right\} = \bar{M}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Величину $\dot{\bar{\omega}}_p$ в приведенной выше формуле можно получить из уравнения (15.2) $\dot{\bar{\omega}}_p = \dot{\bar{\Omega}}_{wp} + \dot{\bar{\Omega}}_p$. Однако при управлении КА нас интересуют не абсолютные производные по времени $\dot{\bar{\Omega}}_{wp}$ и $\dot{\bar{\Omega}}_p$, а относительные производные $\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_p$, поэтому:

$$\dot{\bar{\omega}}_p = \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_{wp} + \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_p + \bar{\omega}^* \times \bar{\omega}_p + \bar{\Omega}_{wp} \times \bar{\Omega}_p. \quad (15.13)$$

После подстановки формулы (15.13) в (15.12), учитывая формулу (ПЗ.36) и (ПЗ.41), уравнение динамики можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* + \sum_{p=1}^P \left[\mathbf{J}_p \cdot \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_{wp} + \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_p \right) + \bar{\omega}_p \times \mathbf{J}_p \cdot \bar{\omega}_p \right] + \\
& + \sum_{p=1}^P \left\{ \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times \left[\left(\bar{\omega}^* \times \bar{\omega}_p \right) \times \bar{r}_{wp} \right] dm + \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times \left[\left(\bar{\Omega}_{wp} \times \bar{\Omega}_p \right) \times \bar{r}_{wp} \right] dm + \right. \\
& \left. + \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times \left[\bar{\omega}^* \times \left(\bar{\omega}_p \times \bar{r}_{wp} \right) \right] dm + \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times \left[\bar{\omega}_p \times \left(\bar{\omega}^* \times \bar{r}_{wp} \right) \right] dm \right\} = \bar{M}.
\end{aligned} \tag{15.14}$$

где \mathbf{J} – тензор инерции всего КА (включая P реактивных маховиков) относительно центра масс O ; \mathbf{J}_p – тензор инерции реактивного маховика W_p относительно собственного центра масс O_p

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* = \int_B \bar{r}_b \times \left(\dot{\bar{\omega}}^* \times \bar{r}_b \right) dm + \sum_{p=1}^P \int_{wp} \left(\bar{r}_{wp} + \bar{r}_p \right) \times \left[\dot{\bar{\omega}}^* \times \left(\bar{r}_{wp} + \bar{r}_p \right) \right] dm, \tag{15.15}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* = \int_B \bar{r}_b \times \left[\bar{\omega}^* \times \left(\bar{\omega}^* \times \bar{r}_b \right) \right] dm + \\
& + \sum_{p=1}^P \int_{wp} \left(\bar{r}_{wp} + \bar{r}_p \right) \times \left\{ \bar{\omega}^* \times \left[\bar{\omega}^* \times \left(\bar{r}_{wp} + \bar{r}_p \right) \right] \right\} dm,
\end{aligned} \tag{15.16}$$

$$\mathbf{J}_p \cdot \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_{wp} + \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_p \right) = \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times \left[\left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_{wp} + \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_p \right) \times \bar{r}_{wp} \right] dm$$

$$\bar{\omega}_p \times \mathbf{J}_p \cdot \bar{\omega}_p = \int_{wp} \bar{r}_{wp} \times \left[\bar{\omega}_p \times \left(\bar{\omega}_p \times \bar{r}_{wp} \right) \right] dm.$$

Очевидно, что для системы маховиков с реактивным моментом, т. к. рамка закреплена на КА, верно равенство $\bar{\Omega}_{wp} = \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_{wp} = 0$, поэтому формула (15.14) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* + \sum_{p=1}^P \left(\mathbf{J}_p \cdot \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_p + \bar{\Omega}_p \times \mathbf{J}_p \cdot \bar{\Omega}_p \right) + \\
& + \sum_{p=1}^P \left\{ \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[(\bar{\omega}^* \times \bar{\Omega}_p) \times \bar{\mathbf{r}}_{wp} \right] dm + \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\Omega}_p \times \bar{\mathbf{r}}_{wp}) \right] dm + \right. \\
& \left. + \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[\bar{\Omega}_p \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\mathbf{r}}_{wp}) \right] dm \right\} = \bar{\mathbf{M}}.
\end{aligned} \tag{15.17}$$

В уравнении движения КА, управляемого гироскопическим моментом, скорость ротора фиксирована $\left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_p = 0 \right)$, поэтому

$$\begin{aligned}
& \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* + \sum_{p=1}^P \left(\mathbf{J}_p \cdot \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_p + \bar{\omega}_p \times \mathbf{J}_p \cdot (\bar{\Omega}_{wp} + \bar{\Omega}_p) \right) + \\
& + \sum_{p=1}^P \left\{ \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[(\bar{\omega}^* \times \bar{\omega}_p) \times \bar{\mathbf{r}}_{wp} \right] dm + \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[\bar{\omega}^* \times (\bar{\omega}_p \times \bar{\mathbf{r}}_{wp}) \right] dm + \right. \\
& \left. + \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[\bar{\omega}_p \times (\bar{\omega}^* \times \bar{\mathbf{r}}_{wp}) \right] dm \right\} = \bar{\mathbf{M}}.
\end{aligned} \tag{15.18}$$

Дальнейший анализ уравнений (15.17) и (15.18) приведен ниже. Рассмотрим КА, управляемый реактивным маховиком. Если $\bar{\mathbf{a}}$ – единичный вектор направления оси вращения ротора, т. е. один из векторов $\bar{\omega}_{p1}, \bar{\omega}_{p2}$ или $\bar{\omega}_{p3}$, то угловая скорость ротора может быть записана как $\bar{\Omega}_p = \Omega_p \cdot \bar{\mathbf{a}}$, а момент инерции ротора в этом направлении равен J_p . Можно записать:

$$\bar{\Omega}_p \times \mathbf{J}_p \cdot \bar{\Omega}_p = 0. \tag{15.19}$$

Используя векторное тождество, запишем интеграл в уравнении (15.17):

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^P \left\{ \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[(\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}_p) \times \bar{\mathbf{r}}_{wp} \right] dm + \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times (\bar{\boldsymbol{\Omega}}_p \times \bar{\mathbf{r}}_{wp}) \right] dm + \right. \\
& \left. + \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \times \left[\bar{\boldsymbol{\Omega}}_p \times (\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\mathbf{r}}_{wp}) \right] dm \right\} = \sum_{p=1}^P \left[\mathbf{J}_p \cdot (\bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}_p) - \right. \\
& \left. - \bar{\boldsymbol{\Omega}}_p \times \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} dm \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}^* - \bar{\boldsymbol{\omega}}^* \times \int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} dm \cdot \bar{\boldsymbol{\Omega}}_p \right].
\end{aligned} \tag{15.20}$$

Выражение (15.20) содержит смешанное $\bar{\mathbf{r}}_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp}$ и неопределенное произведение векторов $\bar{\mathbf{r}}_{wp}$ и $\bar{\mathbf{e}}_p$, где $\bar{\mathbf{e}}_p^T = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$, то

$$\begin{aligned}
\int_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} \bar{\mathbf{r}}_{wp} dm &= \bar{\mathbf{e}}_p^T \int_{wp} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & x_1 z_1 \\ x_1 y_1 & y_1^2 & y_1 z_1 \\ x_1 z_1 & y_1 z_1 & z_1^2 \end{bmatrix} dm \bar{\mathbf{e}}_p = \\
&= \bar{\mathbf{e}}_p^T \int_{wp} \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & y_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^2 \end{bmatrix} dm \bar{\mathbf{e}}_p.
\end{aligned} \tag{15.21}$$

Так как ротор W_p является осесимметричным телом, недиагональные члены указанной выше матрицы после интегрирования должны быть равны нулю. Для обеспечения необходимой точности единичный вектор $\bar{\mathbf{a}}$ угловой скорости $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ должен совпадать с вектором $\bar{\mathbf{w}}_{p1}$. В этом случае момент инерции J_p продольного направления (вдоль $\bar{\mathbf{a}}$) и J_{pt} поперечного направления (перпендикулярно $\bar{\mathbf{a}}$) ротора выражаются формулами:

$$J_p = \int_{wp} (y_1^2 + z_1^2) dm, \tag{15.22}$$

$$J_{pt} = \int_{wp} (x_1^2 + y_1^2) dm = \int_{wp} (x_1^2 + z_1^2) dm, \tag{15.23}$$

$$\int_{wp} y_1^2 dm = \int_{wp} z_1^2 dm = \frac{1}{2} J_p. \tag{15.24}$$

Видно, что:

$$\int_{wp} x_1^2 dm = J_{pt} - \frac{1}{2} J_p. \quad (15.25)$$

Подставляя этот результат обратно в (15.21), а затем в (15.20) и учитывая, что вектор $\bar{\Omega}_p$ направлен вдоль \bar{a} (а значит и вдоль \bar{w}_{p1}), выражение (15.20) примет вид:

$$\bar{e}_p^T \begin{bmatrix} 0 \\ J_p \Omega \omega_z^{*(p)} \\ -J_p \Omega \omega_y^{*(p)} \end{bmatrix}.$$

Верхний индекс (p) в приведенном выше выражении указывает на то, что компонента разложения в базисном векторе \bar{e}_p

$$\bar{H}_p = J_p \Omega_p \bar{a} = \mathbf{J}_p \cdot \bar{\Omega}_p \quad (15.26)$$

является моментом импульса ротора W_p относительно рамки. Тогда выражение (15.20) примет вид:

$$\bar{\omega}^* \times \sum_{p=1}^P \bar{H}_p. \quad (15.27)$$

Подставим (15.17) в (15.19) и (15.27), тогда уравнения углового движения КА с трехосной стабилизацией (в векторной форме), управляемого маховиком, примет вид:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* + \sum_{p=1}^P \left(\mathbf{J}_p \cdot \dot{\bar{\Omega}}_p + \bar{\omega}^* \times \bar{H}_p \right) = \bar{M}. \quad (15.28)$$

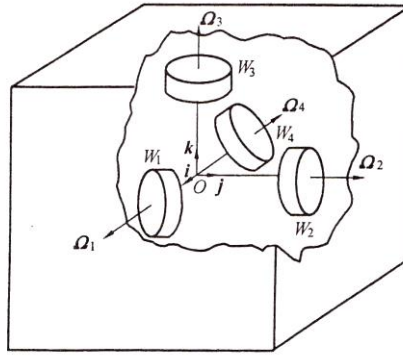


Рис. 15.3. Три основных и один резервный реактивный маховик для КА с трехосной стабилизацией

Преобразуем выражение (15.28) в компонентную форму в системе координат $Oxyz$, удобную для вычисления и использования:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^* &= \bar{e}^T [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T, \quad \bar{M} = \bar{e}^T [M_x \quad M_y \quad M_z]^T, \\ \mathbf{J} &= \bar{e}^T \underline{J} \bar{e} = \bar{e}^T \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yx} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \bar{e}. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Если на ЛА установлены 4 маховика, то w_1, w_2 и w_3 являются основными, их единичные векторы $\bar{w}_{p1}, \bar{w}_{p2}$ и $\bar{w}_{p3}, (p=1,2,3)$ параллельны $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответственно (следовательно, для перехода от \bar{e}_p к \bar{e} матрица преобразования координат является единичной матрицей), а угловые скорости ротора $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$ и $\bar{\Omega}_3$ параллельны $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответственно (рис. 15.3). Четвертый реактивный маховик w_4 – резервное. Когда один из трех реактивных маховиков выходит из строя, его работу можно заменить четвертым. Угловая скорость ротора $\bar{\Omega}_4$ резервного реактивного маховика раскладывается по векторам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и ее составляющие образуют соответствующие

углы α , поэтому матрица преобразования координат от \bar{e}_4 к $Oxyz$ имеет вид:

$$C_{xw4} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & * & * \\ \cos \alpha & * & * \\ \cos \alpha & * & * \end{bmatrix}. \quad (15.30)$$

Здесь «*» соответствует элементам, не отображенным в операциях, приведенных в этом разделе, и которые нет необходимости указывать.

Компоненты тензора инерции для каждого реактивного маховика \mathbf{J}_p в системе координат $Oxyz$ можно записать в виде:

$$\underline{J}_1 = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_{1t} & \\ 0 & & J_{1t} \end{bmatrix}, \quad \underline{J}_2 = \begin{bmatrix} J_{2t} & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_{2t} \end{bmatrix}, \quad \underline{J}_3 = \begin{bmatrix} J_{3t} & & 0 \\ & J_{3t} & \\ 0 & & J_3 \end{bmatrix}. \quad (15.31)$$

Для реактивного колеса w_4 с базисным вектором \bar{e}_4 :

$$\underline{J}_4 = \begin{bmatrix} J_4 & & 0 \\ & J_{4t} & \\ 0 & & J_{4t} \end{bmatrix}. \quad (15.32)$$

Или в системе координат $Oxyz$

$$J_4 = C_{xw4} J_4^{(4)} C_{w4x}. \quad (15.33)$$

Компоненты угловой скорости ротора каждого реактивного колеса в системе $Oxyz$ имеют вид:

$$\underline{\Omega}_1 = [\Omega_1 \ 0 \ 0]^T, \quad \underline{\Omega}_2 = [0 \ \Omega_2 \ 0]^T, \quad \underline{\Omega}_3 = [0 \ 0 \ \Omega_3]^T. \quad (15.34)$$

А угловая скорость w_4 будет $\bar{\Omega}_4$ с единичным вектором \bar{e}_4

$$\underline{\Omega}_4 = [\Omega_4 \ 0 \ 0]^T. \quad (15.35)$$

После перехода к системе $Oxyz$ получим:

$$\underline{\Omega}_4 = \underline{C}_{xw4} \underline{\Omega}_4^{(4)} = [1 \ 1 \ 1]^T \Omega_4 \cos \alpha. \quad (15.36)$$

Аналогично запишем компонентное отношение \underline{H}_p в $Oxyz$:

$$\begin{aligned} \underline{H}_1 &= [J_1 \Omega_1 \ 0 \ 0]^T, \quad \underline{H}_2 = [0 \ J_2 \Omega_2 \ 0]^T, \\ \underline{H}_3 &= [0 \ 0 \ J_3 \Omega_3]^T, \quad \underline{H}_4 = [1 \ 1 \ 1]^T J_4 \Omega_4 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (15.37)$$

С учетом указанных выше формул преобразования компонент, выражение (15.28) может быть использовано для оценки устойчивости КА с трехосной стабилизацией с резервным реактивным маховиком:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} J_x \dot{\omega}_x - J_{xy} \dot{\omega}_y - J_{xz} \dot{\omega}_z - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z - J_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2) - J_{xz} \omega_x \omega_y + J_{xy} \omega_x \omega_z \\ - J_{xy} \dot{\omega}_x + J_y \dot{\omega}_y - J_{yz} \dot{\omega}_z - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x - J_{xz} (\omega_z^2 - \omega_x^2) - J_{xy} \omega_y \omega_z + J_{yz} \omega_y \omega_x \\ - J_{xz} \dot{\omega}_x - J_{yz} \dot{\omega}_y + J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y - J_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - J_{yz} \omega_z \omega_x + J_{xz} \omega_z \omega_y \end{array} \right] + \\ & + \left[\begin{array}{l} J_1 \dot{\Omega}_1 + J_4 \dot{\Omega}_4 \cos \alpha + \omega_y (J_3 \Omega_3 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) - \omega_z (J_2 \Omega_2 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) \\ J_2 \dot{\Omega}_2 + J_4 \dot{\Omega}_4 \cos \alpha + \omega_z (J_1 \Omega_1 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) - \omega_x (J_3 \Omega_3 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) \\ J_3 \dot{\Omega}_3 + J_4 \dot{\Omega}_4 \cos \alpha + \omega_x (J_2 \Omega_2 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) - \omega_y (J_1 \Omega_1 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15.38)$$

Нормальными функциями управления в формуле являются $\dot{\bar{\Omega}}_1, \dot{\bar{\Omega}}_2$ и $\dot{\bar{\Omega}}_3$. Когда один из реактивных маховиков поврежден и теряет работоспособность, его можно заменить на $\dot{\bar{\Omega}}_4$, чтобы продолжить управление ориентацией.

Иногда требуется записать уравнение (15.38) в углах Эйлера. Для малых углов Эйлера, согласно результатам главы 1, результат разложения вектора $\bar{\omega}^*$ в системе $Oxyz$ будет следующим (см. уравнение (10.21)):

$$\omega_x = \dot{\varphi} - \omega_0 \psi, \quad \omega_y = \dot{\vartheta} - \omega_0, \quad \omega_z = \dot{\psi} + \omega_0 \varphi. \quad (15.39)$$

Угловое ускорение:

$$\dot{\omega}_x = \ddot{\varphi} - \omega_0 \dot{\psi}, \quad \dot{\omega}_y = \ddot{\vartheta}, \quad \dot{\omega}_z = \ddot{\psi} + \omega_0 \dot{\varphi}. \quad (15.40)$$

Подставим эти выражения в (15.38). Когда оси системы координат $Oxyz$ совпадают с главными осями инерции, после отбрасывания малых второго порядка, получим:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_x \ddot{\varphi} - (J_x - J_y + J_z) \omega_0 \dot{\psi} + (J_y - J_z) \omega_0^2 \varphi \\ J_y \ddot{\vartheta} \\ J_z \ddot{\psi} + (J_x - J_y + J_z) \omega_0 \dot{\varphi} + (J_y - J_x) \omega_0^2 \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1 \dot{\Omega}_1 + J_4 \dot{\Omega}_4 \cos \alpha + \\ J_2 \dot{\Omega}_2 + J_4 \dot{\Omega}_4 \cos \alpha + \\ J_3 \dot{\Omega}_3 + J_4 \dot{\Omega}_4 \cos \alpha + \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} + (\dot{\vartheta} - \omega_0)(J_3 \Omega_3 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) - (\dot{\psi} + \omega_0 \varphi)(J_2 \Omega_2 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) \\ + (\dot{\psi} + \omega_0 \varphi)(J_1 \Omega_1 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) - (\dot{\varphi} - \omega_0 \psi)(J_3 \Omega_3 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) \\ + (\dot{\varphi} - \omega_0 \psi)(J_2 \Omega_2 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) - (\dot{\vartheta} - \omega_0)(J_1 \Omega_1 + J_4 \Omega_4 \cos \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Как видно из формул (15.38) и (15.41), когда реактивный маховик в определенном направлении управляет осью (например в направлении оси Ox создает управляющее ускорение $\dot{\Omega}_1$), то по углу крена φ также будет формироваться управляющее воздействие для двух других каналов посредством Ω_1 . Что касается резервного маховика w_4 , то он создает ускорение $\dot{\Omega}_4$, одинаковое по всем трем каналам.

Ниже рассмотрим вывод уравнения динамики КА с трехосной стабилизацией с гиродином. Для простоты все реактивные

маховики W_1, W_2, W_3 расположены по трем координатным осям. Когда угол поворота рамки равен нулю, векторы $\bar{w}_{p1}, \bar{w}_{p2}, \bar{w}_{p3}$ ($p=1,2,3$) совпадают с $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответственно, а $\bar{w}_{11}, \bar{w}_{22}, \bar{w}_{33}$ — единичные векторы направления оси ротора $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ направлений, когда угол поворота оси равен нулю, тогда $\bar{w}_{13}, \bar{w}_{21}, \bar{w}_{32}$ соответственно представляют собой оси рамки, а углы ее поворота вокруг соответствующих осей $\delta_{13}, \delta_{21}, \delta_{32}$ (см. рис. 15.4), $\bar{M}_{12}, \bar{M}_{23}, \bar{M}_{31}$ — составляющие реактивного момента на соответствующие оси. Матрицы преобразования от \bar{e} к \bar{e}_1, \bar{e}_2 и \bar{e}_3 имеют вид:

$$\begin{aligned} \underline{C}_{1x} &= \begin{bmatrix} \cos \delta_{13} & \sin \delta_{13} & 0 \\ -\sin \delta_{13} & \cos \delta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \underline{C}_{2x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_{21} & \sin \delta_{21} \\ 0 & -\sin \delta_{21} & \cos \delta_{21} \end{bmatrix}, \\ \underline{C}_{3x} &= \begin{bmatrix} \cos \delta_{32} & 0 & -\sin \delta_{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta_{32} & 0 & \cos \delta_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15.42)$$

Момент инерции ротора \bar{J} , угловая скорость $\bar{\Omega}_p$ и \bar{e}_p ($p=1,2,3$) по-прежнему определяются по формулам (15.31) и (15.34), а момент инерции рамки опускается. Угловая скорость $\bar{\Omega}_{wp}$ ($p=1,2,3$) может быть получена из (15.4):

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{w1} &= \bar{e}_1^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\delta}_{13} \end{bmatrix}^T, \\ \bar{\Omega}_{w2} &= \bar{e}_1^T \begin{bmatrix} \dot{\delta}_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{\Omega}_{w3} &= \bar{e}_1^T \begin{bmatrix} 0 & \dot{\delta}_{32} & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (15.43)$$

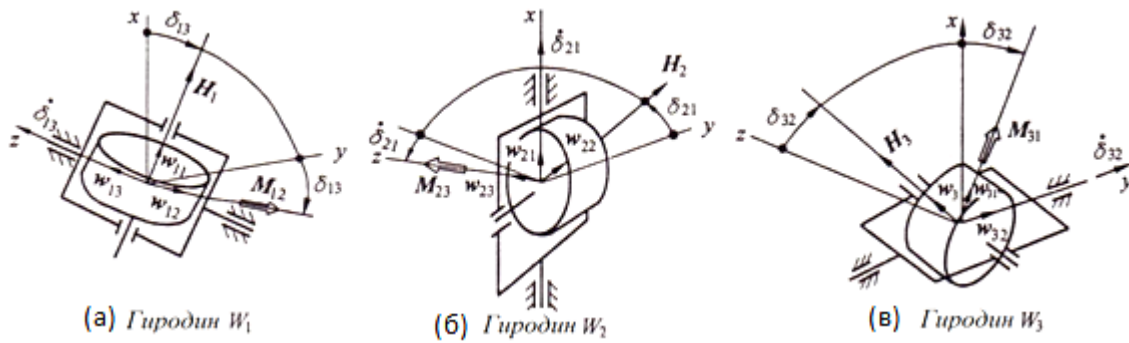


Рис. 15.4. Установка гиродина

С помощью формулы (15.42) преобразуем компоненты указанного выше вектора в систему координат $Oxyz$ и подставим результат в формулу (15.18):

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^* + \bar{e} \begin{bmatrix} J_{2r} \ddot{\delta}_{21} - H_1 \dot{\delta}_{13} \sin \delta_{13} + H_3 \dot{\delta}_{32} \cos \delta_{32} \\ J_{3r} \ddot{\delta}_{32} - H_2 \dot{\delta}_{21} \sin \delta_{21} + H_1 \dot{\delta}_{13} \cos \delta_{13} \\ J_{1r} \ddot{\delta}_{13} - H_3 \dot{\delta}_{32} \sin \delta_{32} + H_2 \dot{\delta}_{21} \cos \delta_{21} \end{bmatrix} + 2 \sum_{p=1}^3 \mathbf{J}_p \cdot (\bar{\omega}^* \times \bar{\omega}_p) = \bar{M}. \quad (15.44)$$

Величины H_1, H_2, H_3 определяются формулами (15.26) и (15.37), а элементы управления $H_3 \dot{\delta}_{32} \cos \delta_{32}$ (направление вдоль оси Ox), $H_1 \dot{\delta}_{13} \cos \delta_{13}$ (направление вдоль оси Oy) и $H_2 \dot{\delta}_{21} \cos \delta_{21}$ (направление вдоль оси Oz) являются моментами ротора относительно поперечной оси, генерируемыми при изменении ротором направления угловой скорости. Поэтому данный тип маховика называют гиродинам. Другие элементы в компонентах, за исключением слагаемых при вторых производных, таких как $\ddot{\delta}_{21}$, являются моментами ускорения и поперечным воздействием момента. Можно видеть, что момент, за счет которого КА вращается вокруг оси (например, Ox), не генерируется маховиком, установленным вдоль этой оси. Это результат создания момента

устройством на другой оси (Oz), перпендикулярно ей, вокруг вертикальной оси (Oy).

Последний элемент в левой части формулы (15.44) определяется по методике из Приложения 3:

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{p=1}^3 \mathbf{J}_p \cdot (\bar{\omega}^* \times \bar{\omega}_p) = \\
 & = 2 \bar{e}^T \left\{ \begin{aligned} & \left[(J_{1r} - J_1) \dot{\delta}_{13} \omega_x^* \cos \delta_{13} \sin \delta_{13} + (J_{1r} \sin^2 \delta_{13} + J_1 \cos^2 \delta_{13}) \dot{\delta}_{13} \omega_y^* - J_{1r} \Omega_1 \omega_z^* \sin \delta_{13} \right. \\ & - (J_{1r} \cos^2 \delta_{13} - J_1 \sin^2 \delta_{13}) \dot{\delta}_{13} \omega_x^* - (J_{1r} - J_1) \dot{\delta}_{13} \omega_y^* \sin \delta_{13} \cos \delta_{13} + J_{1r} \Omega_1 \omega_z^* \cos \delta_{13} \\ & \left. J_{1r} \Omega_1 \omega_x^* \sin \delta_{13} - J_{1r} \Omega_1 \omega_y^* \cos \delta_{13} \right] + \\ & \left[J_{2r} \Omega_2 \omega_y^* \sin \delta_{21} - J_{2r} \Omega_2 \omega_z^* \cos \delta_{21} \right. \\ & - J_{2r} \Omega_2 \omega_x^* \sin \delta_{21} + (J_{2r} - J_2) \dot{\delta}_{21} \omega_y^* \sin \delta_{21} \cos \delta_{21} + (J_{2r} \sin^2 \delta_{21} + J_2 \cos^2 \delta_{21}) \dot{\delta}_{21} \omega_z^* \\ & \left. J_{2r} \Omega_2 \omega_x^* \cos \delta_{21} - (J_{2r} \cos^2 \delta_{21} - J_2 \sin^2 \delta_{21}) \dot{\delta}_{21} \omega_y^* - (J_{2r} - J_2) \dot{\delta}_{21} \omega_z^* \sin \delta_{21} \cos \delta_{21} \right] + \\ & \left. \left[-(J_{3r} - J_3) \dot{\delta}_{32} \omega_x^* \sin \delta_{32} \cos \delta_{32} + J_{3r} \Omega_3 \omega_y^* \cos \delta_{32} - (J_{3r} \cos^2 \delta_{32} + J_3 \sin^2 \delta_{32}) \dot{\delta}_{32} \omega_z^* \right. \right. \\ & - J_{3r} \Omega_3 \omega_x^* \cos \delta_{32} + J_{3r} \Omega_3 \omega_z^* \sin \delta_{32} \\ & \left. \left. (J_{3r} \sin^2 \delta_{32} + J_3 \cos^2 \delta_{32}) \dot{\delta}_{32} \omega_x^* - J_{3r} \Omega_3 \omega_y^* \sin \delta_{32} + (J_{3r} - J_3) \dot{\delta}_{32} \omega_z^* \sin \delta_{32} \cos \delta_{32} \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Если по одному и тому же каналу установлены два идентичных гиродина (рис. 15.5), то они будут вращаться при нулевом угле поворота рамки.

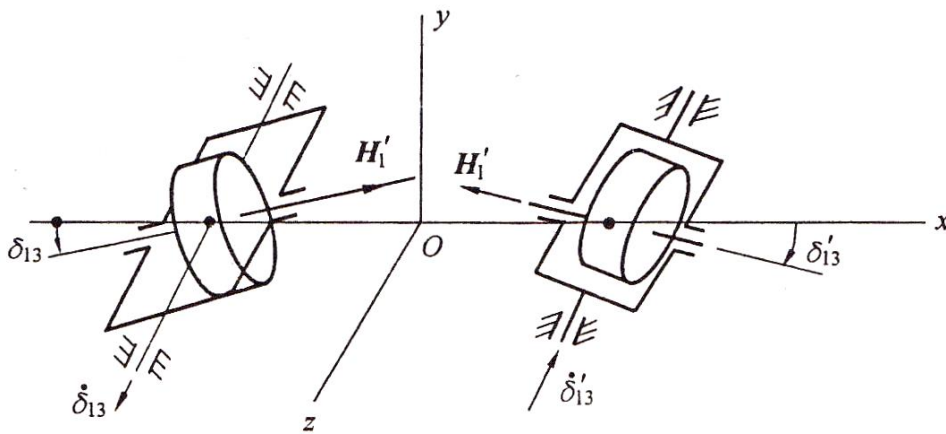


Рис. 15.5. Пара гиродинов, установленных на противоположных сторонах оси Ox

Векторы угловой скорости коллинеарны, но направлены в противоположные стороны. Оси рамки, в которой генерируется управляющий крутящий момент, параллельны, но вращаются в обратном направлении. На рис. 15.5 показаны двухосные гиродины на оси Ox , которые вращаются синхронно в противоположных направлениях вокруг оси Oz с одним и тем же углом наклона рамки $\delta_{13} = -\delta_{13}^*$ в любой момент времени. Если аналогичные двухосные гиродины установлены вдоль осей Oy и Oz , угловая скорость ротора будет совпадать с двумя осями, когда угол поворота рамки равен нулю. При условии, что момент инерции рамки опускается, $\delta_{ij}, \dot{\delta}_{ij}, \ddot{\delta}_{ij}$ и H_i в уравнении (15.44) заменяются на $-\delta_{ij}, -\dot{\delta}_{ij}, -\ddot{\delta}_{ij}$ и H_i ($i, j=1,2,3$), а затем добавляются к исходной матрице для получения уравнения динамики положения КА с трехосной стабилизацией с двухосными гиродинами.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \bar{\omega}^* + 2\bar{\underline{e}}^T \begin{bmatrix} H_3 \dot{\delta}_{32} \cos \delta_{32} \\ H_1 \dot{\delta}_{13} \cos \delta_{13} \\ H_2 \dot{\delta}_{21} \cos \delta_{21} \end{bmatrix} + \\
& + 4\bar{\underline{e}}^T \left\{ \begin{bmatrix} (J_{1t} - J_1) \dot{\delta}_{13} \omega_x^* \sin \delta_{13} \cos \delta_{13} - J_{1t} \Omega_1 \omega_z^* \sin \delta_{13} \\ -(J_{1t} - J_1) \dot{\delta}_{13} \omega_y^* \sin \delta_{13} \cos \delta_{13} \\ J_{1t} \Omega_1 \omega_x^* \sin \delta_{13} \end{bmatrix} + \right. \\
& + \begin{bmatrix} J_{2t} \Omega_2 \omega_y^* \sin \delta_{21} \\ (J_{2t} - J_2) \dot{\delta}_{21} \omega_y^* \sin \delta_{21} \cos \delta_{21} - J_{2t} \Omega_2 \omega_x^* \sin \delta_{21} \\ -(J_{2t} - J_2) \dot{\delta}_{21} \omega_z^* \sin \delta_{21} \cos \delta_{21} \end{bmatrix} + \\
& \left. + \begin{bmatrix} -(J_{3t} - J_3) \dot{\delta}_{32} \omega_x^* \sin \delta_{32} \cos \delta_{32} \\ J_{3t} \Omega_3 \omega_z^* \sin \delta_{32} \\ (J_{3t} - J_3) \dot{\delta}_{32} \omega_z^* \sin \delta_{32} \cos \delta_{32} - J_{3t} \Omega_3 \omega_y^* \sin \delta_{32} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (15.45)
\end{aligned}$$

Видно, что применение двухосного гироскопа значительно упрощает кросс-эффекты в уравнении. Что касается уравнений (15.44) и (15.45), то сумма $\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}}^* + \bar{\omega}^* \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}^*$ может быть взята из выражений (15.38) или (15.41).

15.2 Динамика неуправляемого движения КА с трехосной стабилизацией с маховиком

В предыдущем разделе было дано уравнение динамики движения КА с трехосной стабилизацией. Теперь исследуем его динамические характеристики при отсутствии управления. Рассмотрим обычный КА с маховиком. Для изучения движения КА относительно орбитальной системы координат будем считать, что оси системы $Oxyz$ совпадают с главными осями инерции КА. Тогда при $\bar{M} = \bar{\Omega}_p = 0$ выражение (15.28) примет вид:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \left(\mathbf{J} \cdot \bar{\omega} + \sum_{p=1}^P \bar{H}_p \right) = 0. \quad (15.46)$$

Когда КА находится в установившемся режиме ($\bar{\omega} = \bar{\omega}_s$, $\dot{\bar{\omega}}_s = 0$), то

$$\bar{\omega}_s \times \left(\mathbf{J} \cdot \bar{\omega}_s + \sum_{p=1}^P \bar{H}_p \right) = 0. \quad (15.47)$$

Данное выражение может быть равно нулю только в трех случаях, а именно:

$$(1) \bar{\omega}_s = 0; (2) \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}_s + \sum_{p=1}^P \bar{H}_p = 0; (3) \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}_s + \sum_{p=1}^P \bar{H}_p = \lambda \bar{\omega}_s, \quad (15.48)$$

где λ – константа, которую нужно определить.

Случай (1) является типичным рабочим состоянием КА с трехосной стабилизацией. Если $\bar{\omega}_s = 0$, то это идеальная угловая скорость для КА в установившемся режиме, а угловая скорость после действия возмущения $\delta\bar{\omega}$ имеет вид $\bar{\omega} = \bar{\omega}_s + \delta\bar{\omega}$. Подставляя это выражение в уравнение (15.46), получим:

$$\mathbf{J} \cdot \delta\dot{\bar{\omega}} + \delta\bar{\omega} \times \left(\mathbf{J} \cdot \delta\bar{\omega} + \sum_{p=1}^P \bar{H}_p \right) = 0.$$

Если $\delta\bar{\omega}$ малая величина, то величины второго порядка малости могут быть опущены, тогда получим:

$$\mathbf{J} \cdot \delta\dot{\bar{\omega}} + \delta\bar{\omega} \times \sum_{p=1}^P \bar{H}_p = 0. \quad (15.49)$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Изучая действие одного реактивного маховика, можно проанализировать эффект от применения нескольких подобных устройств. В предположении, что все три импульсных маховика установлены вдоль оси Oz , получим компонентную форму записи выражения (15.49):

$$J_x \delta\dot{\omega}_x + H_3 \delta\omega_y = 0, \quad (15.50a)$$

$$J_y \delta\dot{\omega}_y + H_3 \delta\omega_x = 0, \quad (15.50б)$$

$$J_z \delta\dot{\omega}_z = 0. \quad (15.50в)$$

Из формулы (15.50в) получим:

$$\delta\omega_z = \delta\omega_z(0) = const. \quad (15.51)$$

Формулы (15.50а) и (15.50б) можно переписать в виде:

$$\delta\ddot{\omega}_x + \delta\omega_p^2 \delta\omega_x = 0, \quad (15.52a)$$

$$\delta\ddot{\omega}_y + \delta\omega_p^2 \delta\omega_y = 0, \quad (15.52б)$$

$$\omega_p = \frac{H_3}{\sqrt{J_x J_y}}. \quad (15.53)$$

Сравнивая полученные выше три формулы с выражениями (13.5а), (13.5б) и (13.4), видим, что КА, рассматриваемый в этом разделе, совершает вращательное движение вокруг оси Oz с угловой скоростью $\delta\omega_z$.

$$\delta\omega_x = -\sqrt{\frac{J_y}{J_x}} \delta\omega_y(0) \sin \omega_p t + \delta\omega_x(0) \cos \omega_p t, \quad (15.54a)$$

$$\delta\omega_y = -\sqrt{\frac{J_x}{J_y}} \delta\omega_x(0) \sin \omega_p t + \delta\omega_y(0) \cos \omega_p t. \quad (15.54б)$$

Если записать $\delta\omega_t = \delta\omega_x + i\sqrt{\frac{J_y}{J_x}} \delta\omega_y$, то из формулы (15.54)

можно получить

$$\delta\omega_t = \delta\omega_t(0) e^{i\omega_p t}. \quad (15.55)$$

Здесь

$$\delta\omega_t(0) = \left[\delta^2\omega_x(0) + \frac{J_y}{J_x} \delta^2\omega_y(0) \right]^{1/2}. \quad (15.56)$$

Таким образом, угол при вершине конуса равен:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\left[\delta^2 \omega_x(0) + J_y \delta^2 \omega_y(0) / J_x \right]^{1/2}}{\delta \omega_z}. \quad (15.57)$$

Случай (2) указывает на то, что сумма угловых моментов КА и маховика равна нулю. Подставим $\bar{\omega} = \bar{\omega}_s + \delta \bar{\omega}$ в (15.46), учтем $\mathbf{J} \cdot \bar{\omega}_s + \sum_{p=1}^P \bar{H}_p = 0$ и опустим малые второго порядка:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega}_s \times \mathbf{J} \cdot \delta \bar{\omega} = 0. \quad (15.58)$$

Если компонентами $\bar{\omega}_s$ являются $\omega_{sx}, \omega_{sy}, \omega_{sz}$, то

$$J_x \delta \dot{\omega}_x + \omega_{sy} J_z \delta \omega_z - \omega_{sz} J_y \omega_y = 0, \quad (15.59a)$$

$$J_y \delta \dot{\omega}_y + \omega_{sz} J_x \delta \omega_x - \omega_{sx} J_z \omega_z = 0, \quad (15.59б)$$

$$J_z \delta \dot{\omega}_z + \omega_{sx} J_y \delta \omega_y - \omega_{sy} J_x \omega_x = 0. \quad (15.59в)$$

Можно также записать:

$$\underline{M} \dot{\underline{X}} + \underline{G} \underline{X} = 0. \quad (15.60)$$

Здесь

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{sz} & \omega_{sy} \\ \omega_{sz} & 0 & -\omega_{sx} \\ -\omega_{sy} & \omega_{sx} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} J_x \delta \omega_x \\ J_y \delta \omega_y \\ J_z \delta \omega_z \end{bmatrix}.$$

Следовательно, выражение (15.60) удовлетворяет условиям теоремы 9.3 Приложения 9, и существует $\det \underline{G} = 0$, поэтому си-

стема, представленная уравнением (15.59), неустойчива. В действительности, если взять

$$\delta\omega_x = Ae^{\lambda t}, \quad \delta\omega_y = Be^{\lambda t}, \quad \delta\omega_z = Ce^{\lambda t}$$

и подставить в выражение (15.59), получим:

$$\lambda \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -J_y\omega_{sz} & J_z\omega_{sy} \\ J_x\omega_{sz} & 0 & -J_z\omega_{sx} \\ -J_x\omega_{sy} & J_y\omega_{sx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + (\omega_{sx}^2 + \omega_{sy}^2 + \omega_{sz}^2)\lambda = 0,$$

а собственные значения:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = i(\omega_{sx}^2 + \omega_{sy}^2 + \omega_{sz}^2)^{1/2}. \quad (15.61)$$

Следовательно, величина возмущения λ_1 , соответствующая угловой скорости, является постоянной, поэтому система неустойчива.

Для случая (3), если установлен только один маховик, то углы между его осью ротора и осями Ox, Oy, Oz равны соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, тогда компонентная форма третьей формулы (15.48) имеет вид:

$$J_x\omega_{sx} + H \cos \alpha_1 = \lambda\omega_{sx}, \quad (15.62a)$$

$$J_y\omega_{sy} + H \cos \alpha_2 = \lambda\omega_{sy}, \quad (15.62b)$$

$$J_z\omega_{sz} + H \cos \alpha_3 = \lambda\omega_{sz}. \quad (15.62b)$$

Кинетическая энергия КА (без маховика), равна $2T_0 = J_x \omega_{sx}^2 + J_y \omega_{sy}^2 + J_z \omega_{sz}^2$ и равна угловому моменту реактивного маховика. Запишем Q в виде:

$$Q = \frac{2T_0}{H^2} = \frac{J_x \omega_{sx}^2 + J_y \omega_{sy}^2 + J_z \omega_{sz}^2}{H^2}. \quad (15.63)$$

Найдем из выражения (15.62) отношение $\frac{\omega_{si}^2}{H^2} =, i = x, y, z$ и, подставив его в приведенную выше формулу, получим:

$$Q = \frac{J_x \cos^2 \alpha_1}{(\lambda - J_x)^2} + \frac{J_y \cos^2 \alpha_2}{(\lambda - J_y)^2} + \frac{J_z \cos^2 \alpha_3}{(\lambda - J_z)^2}. \quad (15.64)$$

Если известны энергия T_0 и момент импульса \bar{H} , то можно выразить из (15.64) λ и подставить ее в (15.62) для вычисления $\omega_{sx}, \omega_{sy}, \omega_{sz}$. Они являются точками стационарного движения в случае (3). Рассмотрим случай установки по одному маховику на трех координатных осях. Когда вектор \bar{H} параллелен оси Ox , то, подставляя $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ в (15.64), получим:

$$\lambda_{1,2} = J_x \pm (J_x/Q)^{1/2}. \quad (15.65)$$

Для случаев, когда вектор \bar{H} параллелен осям Oy или Oz , получим:

$$\lambda_{3,4} = J_y \pm (J_y/Q)^{1/2}, \quad (15.66)$$

$$\lambda_{5,6} = J_z \pm (J_z/Q)^{1/2}. \quad (15.67)$$

Чтобы исследовать устойчивость движения при каждом из шести значений λ , примем $\bar{\omega} = \bar{\omega}_s + \delta\bar{\omega}$, подставим (15.46), учтем уравнение (15.48) в (3) и опустим член $\delta\bar{\omega}$, умноженный на себя:

$$\mathbf{J} \cdot \delta\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega}_s \times (\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}) \delta\bar{\omega} = 0. \quad (15.68)$$

Его компонентная форма записи:

$$\lambda \begin{bmatrix} J_x & 0 \\ & J_y \\ 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\dot{\omega}_x \\ \delta\dot{\omega}_y \\ \delta\dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(J_y - \lambda)\omega_{sz} & (J_z - \lambda)\omega_{sy} \\ (J_x - \lambda)\omega_{sz} & 0 & -(J_z - \lambda)\omega_{sx} \\ -(J_x - \lambda)\omega_{sy} & (J_y - \lambda)\omega_{sx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После преобразования Лапласа получим:

$$\begin{bmatrix} sJ_x & -(J_y - \lambda)\omega_{sz} & (J_z - \lambda)\omega_{sy} \\ (J_x - \lambda)\omega_{sz} & sJ_y & -(J_z - \lambda)\omega_{sx} \\ -(J_x - \lambda)\omega_{sy} & (J_y - \lambda)\omega_{sx} & sJ_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_x(s) \\ \delta\omega_y(s) \\ \delta\omega_z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда получим характеристическое уравнение:

$$J_x J_y J_z s^3 + [(J_x - \lambda)(J_z - \lambda)\omega_{sy}^2 + (J_x - \lambda)(J_y - \lambda)\omega_{sz}^2 + (J_y - \lambda)(J_z - \lambda)\omega_{sx}^2] s = 0, \quad (15.69)$$

которое имеет три корня:

$$s_1 = 0, \quad (15.70)$$

$$s_{2,3} = \pm \left[\frac{(J_x - \lambda)(J_y - \lambda)\omega_{sz}^2 + (J_x - \lambda)(J_z - \lambda)\omega_{sy}^2 + (J_y - \lambda)(J_z - \lambda)\omega_{sx}^2}{J_x J_y J_z} \right]^{1/2} = 0. \quad (15.71)$$

Найдем $\omega_{sx}, \omega_{sy}, \omega_{sz}$ из (15.62) и подставим их в приведенную выше формулу:

$$s_{2,3} = \pm \left[\frac{(J_x - \lambda)(J_y - \lambda)H^2 \cos^2 \alpha_3}{(J_z - \lambda)^2 J_x J_y J_z} - \frac{(J_x - \lambda)(J_z - \lambda)H^2 \cos^2 \alpha_2}{(J_y - \lambda)^2 J_x J_y J_z} - \frac{(J_y - \lambda)(J_z - \lambda)H^2 \cos^2 \alpha_1}{(J_x - \lambda)^2 J_x J_y J_z} \right]^{1/2} = 0. \quad (15.72)$$

В случае если маховик установлен вдоль оси системы координат $Oxyz$, можно записать:

$$s_{2,3} = \pm \begin{cases} \left[-\frac{(J_y - \lambda)(J_z - \lambda)}{(J_x - \lambda)^2 J_x J_y J_z} \right]^{1/2}, & H \parallel Ox, \\ \left[-\frac{(J_x - \lambda)(J_z - \lambda)H^2}{(J_y - \lambda)^2 J_x J_y J_z} \right]^{1/2}, & H \parallel Oy, \\ \left[-\frac{(J_y - \lambda)(J_x - \lambda)H^2}{(J_z - \lambda)^2 J_x J_y J_z} \right]^{1/2}, & H \parallel Oz. \end{cases} \quad (15.73)$$

Если $J_x > J_y > J_z$, то для случая, когда \vec{H} параллелен оси Ox , λ_1 и λ_2 можно найти из уравнения (15.65). Если Q достаточно велико, то $\lambda_1 > J_x > \lambda_2 > J_y > J_z$, поэтому первая формула уравнения (15.73) дает два чисто мнимых корня $s_{2,3}$, которые указывают на то, что система устойчива по Ляпунову; для \vec{H} , параллельного оси Oz , аналогично получим тот же результат; для \vec{H} , параллельного Oy , применяя формулы (15.66) и (15.73). Получаются положительные значения $s_{2,3}$, что указывает на неустойчивость

системы. Это аналогично вращению твердого тела вокруг главной оси максимального или минимального момента инерции.

Не следует забывать, что существует еще один корень характеристического уравнения (15.70), который соответствует постоянной скорости вращения системы.

16 КОСМИЧЕСКИЙ АППАРАТ С ГИБКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

Развитие современных космических аппаратов идет в двух направлениях: первое – создание больших многофункциональных КА, второе – создание малых КА. В первом случае структура космических аппаратов со временем усложнялась, ее размеры постепенно увеличивались, а структурная гибкость становилась все более выраженной. Гибкие КА делятся на две большие категории: большие гибкие конструкции и КА с гибкими креплениями. Например, солнечные электростанции, представляют собой спутники с гибкими креплениями (солнечные батареи и большие антенны). Большая космическая станция, состоящая из нескольких секций и гибких креплений, таких как солнечные батареи, установленные на каждом участке, представляет из себя гибрид этих двух типов структур. В данной главе внимание будет уделено КА с гибкими элементами.

Современные КА также несут значительное количество жидкостей: топливо для коррекции орбиты и управления движением, бытовая вода, используемая на пилотируемых КА или космических станциях, и жидкости, применяемые в производственных испытаниях, которые иногда имеют большой массовый коэффициент. Для таких КА перемещение жидкостей внутри может влиять на точность ориентации и качество работы КА. Несмотря на то, что на КА существует система управления жидкостью, минимизирующая ее перемещения, иногда все же необходимо учитывать ряд особенностей.

Учитывая структурную деформацию КА, перемещение жидкостей и другие факторы, уравнения движения КА

относительно центра масс становятся очень сложными. В этой главе рассмотрим только основные понятия и методы исследования.

16.1 Динамические уравнения КА с гибкими элементами

На рис. 16.1 показан спутник связи, состоящий из центрального тела, панели солнечной батареи и антенны. Обычно считается, что центральное тело является твердым, которое не деформируется. В то же время панель солнечной батареи и антенна являются гибкими элементами, которые пластично деформируются. Они образуют тип конфигурации с центральным телом и рядом гибких креплений на нем. К этой категории относится большое число современных КА (рис. 16.2). На рисунке B – центральное жесткое тело, которое представляет собой основную часть КА; $A_i (i=1,2,\dots,N)$ – гибкие элементы, N – общее число таких элементов. Структуру такой конфигурации часто называют кластерной топологией. Еще одна конфигурация представляет собой множество жестких и пластично деформируемых гибких тел, соединенных последовательно, как показано на рис. 16.3. Они также известны как топологии деревьев из-за формы, напоминающей ствол, ветви и листья. Если существует только последовательная взаимосвязь и отсутствуют параллельные ветви, данную конфигурацию также можно назвать цепной топологией. Лучшим примером топологии дерева является станция «МИР». В качестве примеров цепных КА можно привести КА-челнок и крупные манипуляторы. Также существуют КА со структурой, называемой кольцевой топологией. Это твердое и гибкое тело с замкнутым контуром. Кластерная топология является наиболее часто встречающейся абстракцией КА, поэтому она служит основой для расчета других типов топологий. В этой главе дается краткое описание вывода динамических уравнений подобных КА и их анализ.

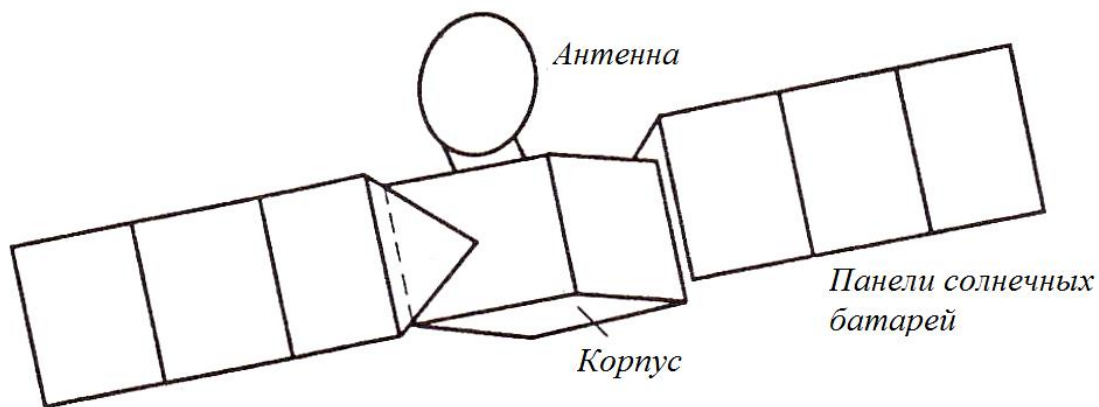


Рис. 16.1. КА с гибкими элементами

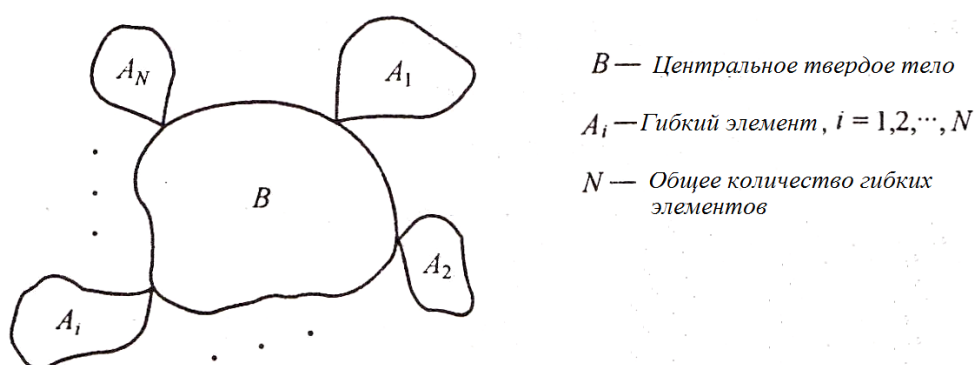


Рис. 16.2. Кластерный КА

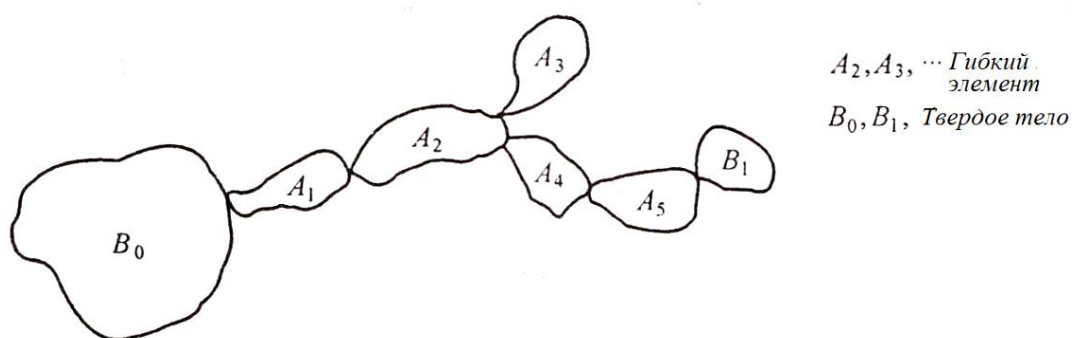


Рис. 16.3. Топология дерева

16.1.1 Уравнения углового движения КА в векторной форме

На рис. 16.4 приведена принципиальная схема расчета космического аппарата кластерной топологии; B — центральное твердое тело; A_i — i -й гибкий элемент, $i = 1, 2, \dots, N$; N — общее количество гибких элементов. Пусть элемент A_i прикреплен

к центральному твердому телу B точках P_i , где O – центр масс всего КА. Возьмем на теле B и элементе A_i элементарные массы dm , а их векторные расстояния от точек O и P_i равны соответственно \bar{r}_b и \bar{r}_{ai} , $\bar{\delta}_i$ – вектор смещения dm до dm' при упругой деформации, что естественно для гибких тел; векторное расстояние от P_i до O – \bar{r}_{pi} , $i=1,2,\dots,N$. Каждая из точек O и P_i связана с множеством базисных векторов $\bar{e} = [\bar{i} \ \bar{j} \ \bar{k}]^T$ и $\bar{e}_{ai} = [\bar{a}_{i1} \ \bar{a}_{i2} \ \bar{a}_{i3}]^T$, $i=1,2,\dots,N$, а матрица преобразования от \bar{e}_{ai} к \bar{e} равна \underline{C}_{bai} . Как и в предыдущих главах, $\bar{\omega}$ – угловая скорость КА относительно орбитальной системы координат. Вообще говоря, элемент A_i должен иметь угловую скорость $\bar{\Omega}_i$ относительно тела B . Однако в этой главе $\bar{\Omega}_i$ опущена для простоты.

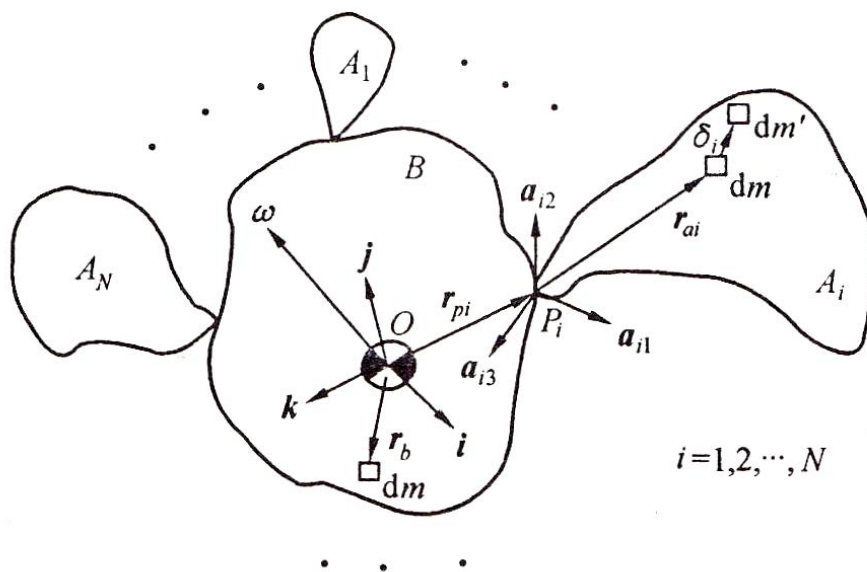


Рис. 16.4. Принципиальная схема для расчета кластерного КА

Сначала найдем ускорения элементарных массы dm на теле B и на A_i . Абсолютная скорость dm на B равна:

$$\bar{v}_b = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_b. \quad (16.1)$$

Здесь \bar{v}_0 – скорость перемещения центра масс O . Ускорение dm равно:

$$\bar{a}_b = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_b + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_b). \quad (16.2)$$

Здесь \bar{a}_0 – ускорение точки O . Скорость элементарной массы dm на A_i равна:

$$\bar{v}_{ai} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) + \overset{\circ}{\delta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (16.3)$$

В формуле $\bar{\rho}_i = \bar{r}_{pi} + \bar{r}_{ai}$, $\overset{\circ}{\delta}_i$ – скорость деформации $\bar{\delta}_i$ относительно \bar{e}_{ai} . Взяв производную от скорости, получим ускорение для dm :

$$\bar{a}_{ai} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i)] + \overset{\circ\circ}{\delta}_i + 2\bar{\omega}_i \times \overset{\circ}{\delta}_i. \quad (16.4)$$

Чтобы упростить вывод, считаем, что $\bar{\omega}$, $\bar{\delta}_i$ и их производные по времени – малые величины. Опуская члены второго порядка малости и выше, из уравнений (16.2) и (16.4) получим:

$$\bar{a}_b = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_b, \quad (16.5)$$

$$\bar{a}_{ai} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}_i + \overset{\circ\circ}{\delta}_i. \quad (16.6)$$

Уравнение углового движения КА можно записать в виде:

$$\int_B \bar{r}_b \times \bar{a}_b dm + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) \times \bar{a}_{ai} dm = \bar{M}, \quad (16.7)$$

где \bar{M} – сумма внешних моментов, действующих на ЛА. Поставляя выражения (16.2) и (16.4) в приведенную выше формулу и рассматривая точку O как центр масс, получим:

$$\int_B \bar{r}_b dm + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) dm = 0. \quad (16.8)$$

Уравнение углового движения КА в векторной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} + \sum_{i=1}^N \left[\int_{A_i} (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) \times \overset{\circ}{\delta}_i + \right. \\ \left. + 2 \int_{A_i} (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) \times \left(\bar{\omega} \times \overset{\circ}{\delta}_i \right) dm \right] = \bar{M}, \end{aligned} \quad (16.9)$$

где

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} \equiv \int_B \bar{r}_b \times (\dot{\bar{\omega}} + \bar{r}_b) dm + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) \times [\dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i)] dm, \quad (16.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega} = \int_B \bar{r}_b \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_b)] dm + \\ + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) \times \left\{ \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i)] \right\} dm. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Сравнивая формулы (П3.33) – (П3.38), (П3.41) и (П3.42), с учетом (16.10) и (16.11), получим выражение для тензора инерции КА:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \int_B (\bar{r}_b \cdot \bar{r}_b \mathbf{E} - \bar{r}_b \bar{r}_b) dm + \\ + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} [(\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) \cdot (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) \mathbf{E} - (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i) \cdot (\bar{\rho}_i + \bar{\delta}_i)] dm. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Так как $\bar{\delta}_i$ является функцией времени и положения, то после интегрирования \mathbf{J} будет переменной, зависящей от времени, т. е. \mathbf{J} не будет константой. Однако изменение \mathbf{J} во времени является незначительным и этим можно пренебречь.

$$\mathbf{J} = \int_B (\bar{r}_b \cdot \bar{r}_b \mathbf{E} - \bar{r}_b \bar{r}_b) dm + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} [\bar{\rho}_i \cdot \bar{\rho}_i \mathbf{E} - \bar{\rho}_i \bar{\rho}_i] dm. \quad (16.13)$$

Если $\bar{\omega}$ и $\bar{\delta}_i$ – малые величины первого порядка, а величины второго порядка опущены, то векторные уравнения движения относительно центра масс могут быть получены из формул (16.5) и (16.6). Опустив в формуле (16.9) малые второго порядка и выше, получим

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \bar{\rho}_i \times \bar{\delta}_i dm = \bar{M}. \quad (16.14)$$

\mathbf{J} в уравнении является тензором инерции ЛА, представленным формулой (16.13).

Уравнения (16.9) и (16.14) являются основными уравнениями для изучения движения ориентации. Однако в последующем анализе также используется орбитальное ускорение, поэтому сначала необходимо вывести уравнения орбитального движения. В системе координат $Oxyz$ они имеют вид:

$$\int_B \bar{a}_b dm + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \bar{a}_{ai} dm = \bar{F}.$$

Здесь \bar{F} – сумма внешних сил, действующих на КА. Если в это выражение подставить вместо \bar{a}_b и \bar{a}_{ai} формулы (16.2) и (16.4), то с учетом (16.8) получим:

$$\bar{a}_0 m + \sum_{i=1}^N \left(\int_{A_i} \overset{\circ}{\delta}_i dm + 2\bar{\omega} \times \int_{A_i} \overset{\circ}{\delta}_i dm \right) = \bar{F}.$$

Если взять от выражения (16.8) производную по времени, то $\sum_{i=1}^N \int_{A_i} \overset{\circ}{\delta}_i dm = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \overset{\circ}{\delta}_i dm = 0$, и приведенная выше формула примет вид:

$$\bar{a}_0 m = \bar{F}. \quad (16.15)$$

Здесь m – масса всего КА, а формула (16.15) описывает движение КА в орбитальной системе координат $OX_0Y_0Z_0$. Видно, что уравнения орбитального движения связаны с уравнениями углового движения, поэтому в качестве точки отсчета выбран центр масс системы.

В уравнениях углового движения (16.9) или (16.14) и в уравнении орбитального движения (16.15) необходимо найти три переменные: $\bar{\omega}, \bar{a}_0, \bar{\delta}_i$. Чтобы замкнуть систему уравнений, необходимо добавить уравнение, описывающее упругое смещение $\bar{\delta}_i$ гибкого элемента, которое представляет собой уравнение в частных производных. Его вывод и решение сложны. В технике такая задача часто дискретизируется методом конечных элементов и решается алгебраически. Оба этих метода не будут рассматриваться в данной главе из-за их сложности и громоздкости. Для упрощения вывода уравнений гибкое крепление будет рассматриваться как консольная балка.

На рис. 16.5 показан КА с двумя ($N=2$) идентичными и симметрично установленными гибкими элементами. Продольная ось совпадает с осью Oy , а упругая деформация и перемещение направлены вдоль оси Oz . Разделим консоль на L равных частей в осевом направлении, при этом масса каждой из них делится на две равные части, размещенные по обе стороны от центра каждой грани. Пронумеруем эти точки: $m_1, m_2, \dots, m_l, \dots, m_L$. Считаем, что к прямому стержню с жесткостью и нулевой массой прикреплены L сосредоточенных масс. Для этой модели сила $f_l (l=1, 2, \dots, L)$, действующая на любую массу m_l должна быть связана со смещением каждой массы. В пределах линейной упругой деформации

$$f_l = \sum_{j=1}^N k_{lj} \bar{\delta}_j, \quad l=1, 2, \dots, L. \quad (16.16)$$

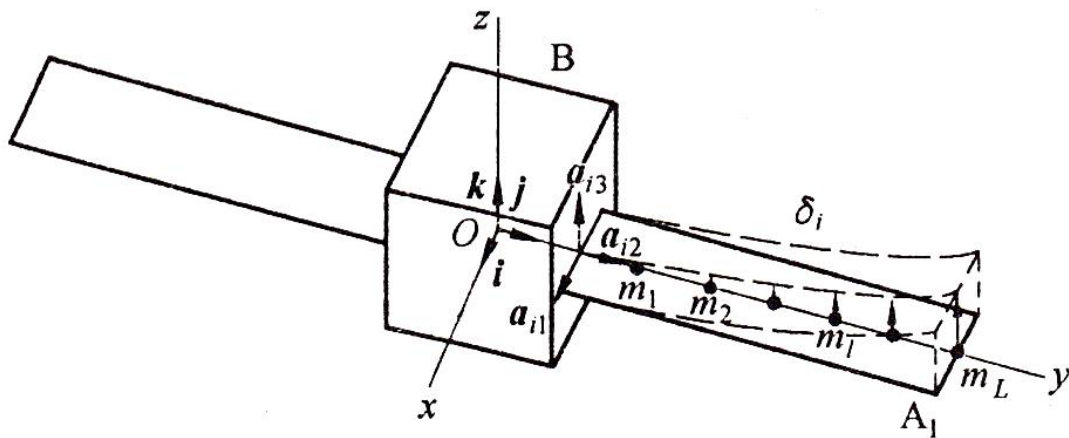


Рис. 16.5. Симметричный КА с гибкими элементами

Здесь k_{lj} – единичное смещение массы m_j . Когда остальные массы не имеют смещения, сила в m_l называется силовым воздействием. Коэффициенты жесткости могут быть получены в соответствии со структурными параметрами.

Сила \bar{f}_l должна включать в себя силу инерции $-m_l \bar{a}_{al}$, силу демпфирования $-c_l \dot{\bar{\delta}}_l$ и внешнюю силу \bar{f}_l^e , действующую на массу m_l . Здесь инерционная сила и сила демпфирования являются «пассивными» силами, поэтому знак отрицательный, а внешняя сила является «активной», поэтому используем положительный знак. Используя эти силы для выражения (16.16), получим:

$$m_l \bar{a}_{al} + c_l \dot{\bar{\delta}}_l + \sum_{j=1}^N k_{lj} \bar{\delta}_j = \bar{f}_l^e, \quad l=1,2,\dots,L. \quad (16.17)$$

Для исключения \bar{a}_0 подставим (16.15) в (16.6), а \bar{a}_{al} заменим формулой (16.17):

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}_l m_l + m_l \ddot{\bar{\delta}}_l + c_l \dot{\bar{\delta}}_l + \sum_{j=1}^N k_{lj} \bar{\delta}_j = \bar{f}_l^e - \frac{m_l}{m} \bar{F}, \quad l=1,2,\dots,L. \quad (16.18)$$

Это дифференциальное уравнение движения, выраженное в векторной форме, которое является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Для КА на рис. 16.15, поскольку имеются два одинаковых гибких элемента A_1 и A_2 , существует $2L$ уравнений (16.18). В уравнение движения гибкого крепления после дискретизации указанным выше способом (16.9) (или (16.14)) интеграл от $\bar{\delta}_j$ должен быть преобразован в суммирование сосредоточенных масс. Поэтому после соответствующих вычислений в уравнениях (16.18) и (16.17) (или (16.14)) переменными будут $\bar{\delta}_l, l=1,2,\dots,L$ и $\bar{\omega}$, общее их число $2L+1$, что совпадает с количеством уравнений, поэтому система разрешима.

16.1.2 Уравнения углового движения КА в компонентной форме

Если выбрать базисные векторы $\underline{\bar{e}}$ и $\underline{\bar{e}}_{ai}$, $i=1,2$, как показано на рис. 16.5, то получим:

$$\underline{C}_{bai} = \underline{E}_{3 \times 3}, \quad i=1,2. \quad (16.19)$$

Здесь $\underline{E}_{3 \times 3}$ – единичная матрица размера 3×3 .

Компонентная форма углового движения (16.14) и уравнений вибрации крепления (16.18) в системе $Oxyz$ будет иметь вид:

$$\underline{J}\underline{\omega} + \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^L \underline{\rho}_{il}^{\times} m_{il} \ddot{\underline{\delta}}_{il} = \underline{M}, \quad (16.20)$$

$$\underline{\rho}_{il}^{\times T} m_{il} \dot{\underline{\omega}} + m_{il} \ddot{\underline{\delta}}_{il} + c_{il} \dot{\underline{\delta}}_{il} + \sum_{j=1}^L k_{lj} \underline{\delta}_{ij} = \underline{f}_{il}^e - \frac{m_{il}}{m} \underline{F}, \quad (16.21)$$

$$i=1,2, l=1,2,\dots,L.$$

Следует отметить, в процессе преобразования уравнения (16.14) к виду (16.20) интегральная форма записывается в виде:

$$\int_{A_i} \underline{\bar{\rho}}_i \times \overset{\circ}{\underline{\delta}}_i dm = \underline{\bar{e}}^T \sum_{l=1}^L \underline{\rho}_{il}^{\times} m_{il} \ddot{\underline{\delta}}_{il}.$$

Здесь интеграл заменяется на сумму произведения L членов, а второй индекс l в правой части уравнения указывает на порядковый номер L -го элемента, первый индекс i означает принадлежность конкретному элементу A_i , ($i=1,2$). При выводе формулы (16.20) из (16.18) переменная параметра также изменяется на два скаляра одного и того же значения.

Чтобы дополнительно получить матричную форму с использованием выражений (16.20) и (16.21), считаем, что упругие

смещения двух элементов A_1 и A_2 зеркально симметричны. Следовательно, выполняется равенство $\bar{\delta}_{1l} = \bar{\delta}_{2l}$, поэтому можно записать уравнение вибрации m массовых точек на A_1 . Аналогично можно записать уравнения для A_2 и других элементов. Для простоты считаем, что $L=2$. Следовательно:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}, \quad m_{11} = m_1, \quad m_{12} = m_2, \quad c_{11} = c_{12} = c,$$

$$\underline{\delta}_{11} = [0 \quad 0 \quad \delta_1]^T, \quad \underline{\delta}_{12} = [0 \quad 0 \quad \delta_2]^T, \quad (16.22)$$

$$\underline{\rho}_{11} = [0 \quad \rho_1 \quad 0]^T, \quad \underline{\rho}_{12} = [0 \quad \rho_2 \quad 0]^T,$$

$$\underline{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T, \quad \underline{M} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^T, \quad f_{11}^e = f_{12}^e = 0.$$

Пусть угол поворота мал:

$$\omega_x = \dot{\varphi}, \quad \omega_y = \dot{\vartheta}, \quad \omega_z = \dot{\psi}. \quad (16.23)$$

Тогда выражения (16.20) и (16.21) можно записать в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} J_x \ddot{\varphi} \\ J_y \ddot{\vartheta} \\ J_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \rho_1 m_1 \ddot{\delta}_1 + \rho_2 m_2 \ddot{\delta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad (16.24)$$

$$\rho_1 m_1 \ddot{\varphi} + m_1 \ddot{\delta}_1 + c \ddot{\delta}_1 + k_{11} \delta_1 + k_{12} \delta_2 = -\frac{m_1}{m} F_z, \quad (16.25)$$

$$\rho_2 m_2 \ddot{\varphi} + m_2 \ddot{\delta}_2 + c \ddot{\delta}_2 + k_{21} \delta_1 + k_{22} \delta_2 = -\frac{m_2}{m} F_z. \quad (16.26)$$

Здесь приведены уравнения (16.25) и (16.26), полученные в результате преобразования (16.21), где $i=1$ и 2 соответственно.

Так как колебательное смещение элемента учитывается только в направлении z , то берется проекция только на это направление.

В приведенных выше двух уравнениях вторая и третья формулы (16.24) независимы, а остальные три связаны друг с другом и должны решаться совместно. Они также могут быть переписаны в виде:

$$J_x \ddot{\phi} + \underline{H} \ddot{\delta} = M_x, \quad (16.27)$$

$$\underline{H}^T \ddot{\phi} + \underline{m}_\delta \ddot{\delta} + c \dot{\delta} + \underline{K} \delta = -\underline{w} F_z, \quad (16.28)$$

$$\underline{H} = [2\rho_1 m_1 \quad 2\rho_2 m_2], \quad \underline{m}_\delta = \begin{bmatrix} 2m_1 & 0 \\ 0 & 2m_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix}, \quad (16.29)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 2k_{11} & 2k_{12} \\ 2k_{21} & 2k_{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} 2m_1/m_0 \\ 2m_2/m_0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что матрицы \underline{m}_δ и \underline{K} симметричны ($\underline{m}_\delta = \underline{m}_\delta^T$, $\underline{K} = \underline{K}^T$) и $\underline{m}_\delta > 0$ (т. к. $m_1, m_2 > 0$).

Как правило, для КА с кластерной топологией могут быть получены уравнения движения (16.27) и (16.28). Выражение (16.27) описывает движение КА как твердого тела. В этом примере имеет место только вращение в направлении x . Сложные случаи также включают повороты в направлениях осей y и z . А еще более сложные – поворот гибкого элемента, движение активного тела внутри (например, космонавта или робота). Уравнение (16.28) является уравнением колебательного движения гибкого элемента. В этом примере применяются только два двумерных колебания в направлении z . При использовании метода конечных элементов вибрация гибкого элемента может быть представлена смещением узла крепления. Размерность задачи может достигать десятков и сотен, а также включать поступательную вибрацию в двух других направлениях и вращательную вибрацию вокруг

трех осей. Для КА, содержащих жидкости, также необходимо уравнение, описывающее движение жидкости. Все это должно быть учтено в уравнениях вида (16.28).

16.1.3 Решения упрощенных уравнений углового движения КА с гибкими элементами

Уравнения (16.27) и (16.28) являются упрощенными уравнениями углового движения КА с гибкими элементами, но их форма и структура согласуются с результатами, полученными общими инженерными методами.

Существует множество методов решения уравнений (16.27) и (16.28), например: разложение в ряды, гипотетические модальные, ограниченные и неограниченные и безусловные модальные методы. Чаще всего используются ограниченные и неограниченные модальные методы. Рассмотрим общую схему решения подобных задач.

Так называемый режим является общим термином для обозначения режима вибрации и частоты вибрационной системы, а режим колебаний – это диаграмма, составленная из амплитуд колебаний каждой точки. Неограниченный режим – это режим и частота системы при незатухающей свободной вибрации системы. Согласно этому определению, неограниченные модальные уравнения вибрационных систем (16.27) и (16.28) имеют вид:

$$\underline{J}_x \ddot{\underline{\varphi}}_u + \underline{H} \ddot{\underline{\delta}}_u = 0, \quad (16.30)$$

$$\underline{H}^T \ddot{\underline{\varphi}}_u + \underline{m}_\delta \ddot{\underline{\delta}}_u + \underline{K} \underline{\delta}_u = 0. \quad (16.31)$$

Индекс «*u*» указывает на неограниченный режим. Пусть решения приведенных выше двух уравнений имеют вид:

$$\underline{\varphi}_u = \underline{\varphi}_{ur} e^{\sqrt{-1} \Omega_r t}, \quad \underline{\delta}_u = \underline{\delta}_{ur} e^{\sqrt{-1} \Omega_r t}. \quad (16.32)$$

Здесь Ω_r и $\underline{\delta}_{ur}$, φ_{ur} – частота и дополнительная линейная вибрация r -порядка ($r=1,2,\dots,L$) неограниченной моды, а также амплитуду угловой вибрации центрального твердого тела. Подставляя формулу (16.32) в (16.30) и (16.31), получим:

$$J_x \varphi_{ur} + \underline{H} \underline{\delta}_{ur} = 0, \quad (16.33)$$

$$\Omega_r^2 (\underline{H}^T \varphi_{ur} + \underline{m}_\delta \underline{\delta}_{ur}) = \underline{K} \underline{\delta}_{ur}, \quad r=1,2,\dots,L. \quad (16.34)$$

Найдем φ_{ur} из формулы (16.33) и подставим ее в (16.34):

$$(\Omega_r^2 \underline{m}^* - \underline{K}) \underline{\delta}_{ur} = 0, \quad r=1,2,\dots,L. \quad (16.35)$$

Здесь

$$\underline{m}^* = \underline{m}_\delta - \frac{1}{J_x} \underline{H}^T \underline{H}. \quad (16.36)$$

Очевидно, что матрица \underline{m}^* симметрична ($\underline{m}^{*T} = \underline{m}^*$) и, как правило, положительна ($\underline{m}^* > 0$). Величина $\underline{\delta}_{ur}$ не должна быть равна нулю, поэтому определитель в круглых скобках уравнения (16.35) должен быть равен нулю, т. е.:

$$\det(\Omega_r^2 \underline{m}^* - \underline{K}) = 0. \quad (16.37)$$

Если \underline{m}^* и \underline{K} и R – R - мерные квадратные матрицы (в данном случае $R=2$ – двумерные колебательные движения δ_1 и δ_2), то приведенная выше формула будет алгебраическим уравнением с наивысшим порядком $(\Omega_r^2)^R$. Оно называется характеристиче-

ским уравнением системы. Корнем является характеристическое значение, т. е. частота свободных колебаний. Для физически достижимой системы решениями уравнения (16.37) должны быть R пар мнимых корней. Подставляя эти корни (собственные значения) обратно в (16.35), можно получить соответствующие значения $\underline{\delta}_{ur}$. Это характеристический вектор или амплитуда колебаний системы. Полученные значения также можно получить по формуле (16.33), где φ_{ur} является соответствующей индуцированной модой твердого тела. Фактически для решения уравнения углового движения, которое будет приведено ниже, необходимы только режимы, соответствующие собственным значениям сопряженных мнимых чисел, и индуцированные режимы.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – ненулевые собственные значения, а $\underline{\delta}_{u1}$ и $\underline{\delta}_{u2}$ – соответствующие собственные векторы, которые удовлетворяют условиям ортогональности и могут быть получены следующим образом. Сначала примем $i=1$ в (16.35), а затем умножим слева на $\underline{\delta}_{u2}^T$:

$$\Omega_1^2 \underline{\delta}_{u2}^T \underline{m}^* \underline{\delta}_{u1} = \underline{\delta}_{u2}^T \underline{K} \underline{\delta}_{u1}.$$

Теперь примем $i=2$ в (16.35), умножим на $\underline{\delta}_{u1}$ после транспонирования и учтем симметрию \underline{m}^* и \underline{K} :

$$\Omega_2^2 \underline{\delta}_{u2}^T \underline{m}^* \underline{\delta}_{u1} = \underline{\delta}_{u2}^T \underline{K} \underline{\delta}_{u1}. \quad (16.38)$$

Вычтем из первого уравнения второе, тогда:

$$(\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \underline{\delta}_{u2}^T \underline{m}^* \underline{\delta}_{u1} = 0.$$

Отсюда получим первую формулу режима:

$$\underline{\delta}_{ur}^T \underline{m}^* \underline{\delta}_{uq} = \begin{cases} 0, & r \neq q, \\ g^2, & r = q. \end{cases} \quad (16.39)$$

Если принять $\underline{\delta}_{ur}^* = \underline{\delta}_{ur}/g$ и $\underline{\delta}_{uq}^* = \underline{\delta}_{uq}/g$ и подставить в приведенную выше формулу, то, опуская верхний индекс «*», получим условие ортогональности нормированных колебаний:

$$\underline{\delta}_{ur}^T \underline{m}^* \underline{\delta}_{uq} = \begin{cases} 0, & r \neq q, \\ 1, & r = q. \end{cases} \quad (16.40)$$

Если установлено

$$\underline{D} = [\underline{\delta}_{u1} \underline{\delta}_{u2}] \quad (16.41)$$

и

$$\underline{\Omega} = \text{diag}(\Omega_1 \quad \Omega_2) \quad (16.42)$$

(они все являются R -мерными квадратными матрицами), то условие режима ортогональности (16.40) можно записать как

$$\underline{D}^T \underline{m}^* \underline{D} = \underline{E}. \quad (16.43)$$

Здесь \underline{E} – R -мерная единичная матрица.

Подставляя (16.39) обратно в (16.38), получим вторую форму условия ортогональности:

$$\underline{\delta}_{uq}^T \underline{K} \underline{\delta}_{ur} = \begin{cases} 0, & r \neq q, \\ \Omega_i^2, & r = q. \end{cases} \quad (16.44)$$

или

$$\underline{D}^T \underline{K} \underline{D} = \underline{\Omega}^2. \quad (16.45)$$

Если подставить формулу (16.33), получим:

$$\underline{\varphi}_{ur} = -\frac{1}{J_x} \underline{H} \underline{\delta}_{ur}, \quad r=1,2,\dots,R. \quad (16.46)$$

Это индуцированный режим вибрации r -порядка твердого тела.

$$\underline{\Phi} = [\varphi_{u1} \quad \varphi_{u2} \quad \dots \quad \varphi_{uR}]. \quad (16.47)$$

Это режим твердого тела (где $R=2$). Уравнение (16.33) также можно записать в виде:

$$J_x \underline{\Phi} + \underline{H} \underline{D} = 0. \quad (16.48)$$

На этом завершим исследование неограниченного режима. Однако наша конечная цель состоит в том, чтобы использовать неограниченный модальный режим и частоту для решения уравнений углового движения (16.27) и (16.28). Для этого построим ряд, состоящий из мод:

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_{u1} \eta_1(t) + \dots + \underline{\delta}_{uR} \eta_R(t) = \underline{\delta}_{u1} \eta_1(t) + \underline{\delta}_{u2} \eta_2(t) = \underline{D} \underline{\eta}(t), \quad (16.49)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= B_0(t) + \varphi_{u1} \eta_1(t) + \dots + \varphi_{uR} \eta_R(t) = \\ &= B_0(t) + \varphi_{u1} \eta_1(t) + \varphi_{u2} \eta_2(t) = B_0(t) + \underline{\Phi} \underline{\eta}(t). \end{aligned} \quad (16.50)$$

Здесь $B_0(t)$ и

$$\underline{\eta}(t) = [\eta_1(t) \dots \eta_R(t)]^T = [\eta_1(t) \quad \eta_2(t)]^T \quad (16.51)$$

являются определенными функциями времени, которые согласуются с измерениями движения твердого тела и упругих колебаний соответственно. В действительности, уравнения (16.49) и (16.50) также можно рассматривать как соотношения для преобразования переменных от $\underline{\delta}$ к φ и от $\underline{\eta}$ к B_0 . В физическом смысле это разложение истинного смещения вибрации и угла поворота на взвешенную сумму вибрационных гармоник.

Подставляя (16.49) и (16.50) в (16.27) и учитывая (16.48), можно получить:

$$J_x \ddot{B}_0(t) = M_x. \quad (16.52)$$

После получения (16.28) воспользуемся выражением (16.48) для исключения $\underline{\Phi}$, а затем воспользуемся выражением (16.36), чтобы ввести \underline{m}^* :

$$\underline{H}^T \ddot{B}_0(t) + \underline{m}^* \underline{D} \ddot{\underline{\eta}} + \underline{C} \underline{D} \dot{\underline{\eta}} + \underline{K} \underline{D} \underline{\eta} = -\underline{W} \underline{F}_z.$$

Умножим эту формулу слева на \underline{D}^T и, используя для упрощения (16.43) и (16.45), получим:

$$\ddot{\underline{\eta}} + \underline{D}^T \underline{C} \underline{D} \dot{\underline{\eta}} + \underline{\Omega}^2 \underline{\eta} = -\underline{D}^T \underline{W} \underline{F}_z - \underline{D}^T \underline{H}^T \ddot{B}_0.$$

Пусть $\underline{D}^T \underline{C} \underline{D}$ – диагональная матрица, обозначим ее как \underline{C}^* . Исключим \ddot{B}_0 с помощью формулы (16.52)

$$\ddot{\underline{\eta}} + \underline{C}^* \dot{\underline{\eta}} + \underline{\Omega}^2 \underline{\eta} = -\underline{D}^T \underline{W} F_z - \underline{D}^T \underline{H}^T M_x / J_x. \quad (16.53)$$

Для этого примера уравнение (16.53) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + C_1^* \dot{\eta}_1 + \Omega_1^2 \eta_1 &= -\alpha_1 F_z - b_1 M_x / J_x, \\ \ddot{\eta}_2 + C_2^* \dot{\eta}_2 + \Omega_2^2 \eta_2 &= -\alpha_2 F_z - b_2 M_x / J_x. \end{aligned}$$

В формуле α_1, α_2 и b_1, b_2 – элементы $\underline{D}^T \underline{W}$ и $\underline{D}^T \underline{H}^T$, которые являются известными величинами, поэтому η_1 и η_2 могут быть найдены из этих двух уравнений. После нахождения B_0 и η_1, η_2 из (16.49) и (16.50), вычисляя φ и δ_1, δ_2 , можно полностью решить задачу.

Из выражения (16.52) можно увидеть, что $B_0(t)$ имеет физический смысл. Изменение положения твердого тела под действием внешнего момента \bar{M}_x , как это следует из формулы (16.50), $\Phi \underline{\eta}$ представляет собой изменяющийся угол из-за упругой вибрации крепления.

Существуют также режим и частота, называемые ограниченным режимом, что является результатом фиксации движения твердого тела КА до нуля (ограничение). Используя их, можно также решить уравнения углового движения, которое ограничено пространством. Т. к. ограниченный режим проще для расчетов, чем неограниченный, и его можно проверить наземными экспериментами, то он часто используется в инженерной практике, в то время как неограниченный режим реализуется в полете КА. Для систем небольшого порядка (3-й, 4-й порядок или чуть выше) решение может быть аппроксимировано с достаточной точностью.

Поясним еще один момент. В этом разделе центр масс O является основной точкой для составления уравнений движения

КА. Это мгновенный центр масс и он удовлетворяет соотношению (16.8). Т. к. уравнение содержит упругое смещение деформации $\bar{\delta}_i$ элементарной массы dm , положение полученной точки центра масс O на теле B изменится. Если центр масс в недеформированном состоянии установлен в точке O_0 , он называется кажущимся центром масс. Очевидно, он зафиксирован на B и удовлетворяет условию:

$$\int_B \bar{r}_b dm + \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \bar{\rho}_i dm = 0. \quad (16.54)$$

Разница между уравнением (16.8) и (16.54) состоит в относительном расстоянии \bar{e} от O до O_0 , также известного как эксцентриситет, значение которого равно:

$$\bar{e} = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \bar{\delta}_i dm. \quad (16.55)$$

Однако движение мгновенного центра масс O является реальной орбитой, определяемой уравнением орбитального движения, а центр масс O_0 колеблется относительно него с эксцентриситетом \bar{e} . В общем случае \bar{e} представляет собой небольшую величину, которую можно опустить. Однако для получения точной оценки необходимо использовать формулу (16.55).

16.2 КА с полостями, заполненными жидкостью

Процесс перемещения жидкости в условиях микрогравитации является сложной задачей и здесь не исследуется. Обычно результатом расчета является получение ряда эквивалентных простых масс маятников или пружины. В этой главе рассматри-

ваются только эквивалентный маятник, который включает в себя координаты точки подвеса маятника, длины стержня маятника и его массы. Частота колебаний и динамический момент каждого маятника соответствуют динамике жидкости. Особенность движения жидкости в КА характеризуется длительным периодом колебаний, т. к. восстанавливающая сила, вызванная микрогравитацией, чрезвычайно мала.

16.2.1 Уравнения углового движения КА в векторной форме

На рис. 16.6 показана упрощенная схема КА с движущейся в нем жидкостью, B – центральное твердое тело (корпус КА), $e = [\bar{i} \ \bar{j} \ \bar{k}]^T$ – базисный вектор; O – центр масс всего КА; P_i – точка подвеса i -го маятника, $i=1,2,\dots,Q$, Q – общее число маятников; \bar{r}_i – векторное расстояние от точки O до P_i ; l_i и m_i – длина стержня и масса маятника; $\bar{\Omega}_i$ – угловая скорость маятника относительно тела B ; $\bar{\omega}$ – угловая скорость движения тела B относительно орбитальной системы координат $OX_0Y_0Z_0$.

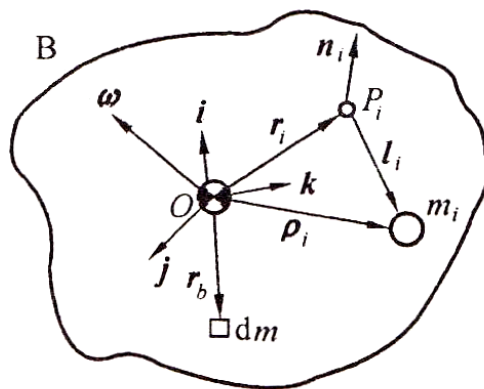


Рис. 16.6. КА с жидкостью внутри

Возьмем элементарную массу dm на теле B , вектор от центра O до этой элементарной массы равен \bar{r}_b . Ее ускорение определяется уравнением (16.2) или (16.5) (малые ниже второго порядка опущены). Тогда скорость равна:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i + \bar{\Omega}_i \times \bar{l}_i, \quad i=1,2,\dots,Q. \quad (16.56)$$

Здесь \bar{v}_0 – скорость движения центра масс O , и

$$\bar{\rho}_i = \bar{r}_i + \bar{l}_i, \quad (16.57)$$

ускорение для m_i :

$$\begin{aligned} \bar{a}_i = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}_i + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i + \bar{\Omega}_i \times \bar{l}_i) + \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}} + \bar{\omega} \times \bar{\Omega}_i \right) \times \bar{l}_i + \\ + \bar{\Omega}_i \times \left[(\bar{\omega} + \bar{\Omega}_i) \times \bar{l}_i \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times (\bar{\Omega}_i \times \bar{l}_i) + \bar{\Omega}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{l}_i) + (\bar{\omega} \times \bar{\Omega}_i) \times \bar{l}_i = 2\bar{\omega}(\bar{\Omega}_i \times \bar{l}_i), \\ \bar{a}_i = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}_i + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) + \overset{\circ}{\bar{\Omega}} \times \bar{l}_i + \bar{\Omega}_i \times (\bar{\Omega}_i \times \bar{l}_i) + \\ + 2\bar{\omega}(\bar{\Omega}_i \times \bar{l}_i), \quad i=1,2,\dots,Q. \end{aligned} \quad (16.58)$$

Если считать, что $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}_i$ малы и опустить их произведения, то (16.58) примет вид:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}_i + \overset{\circ}{\bar{\Omega}} \times \bar{l}_i. \quad (16.59)$$

Уравнение движения КА с жидкостью внутри может быть получено из условия баланса моментов относительно точки O , т. е.

$$\int_B \bar{r}_b \times \bar{a}_b dm + \sum_{i=1}^Q \bar{\rho}_i \times \bar{a}_i m_i = \bar{M}. \quad (16.60)$$

Подставляя формулы (16.5) и (16.59) в приведенное выше выражение, получим:

$$\int_B \bar{r}_b dm + \sum_{i=1}^Q \bar{\rho}_i m_i = 0. \quad (16.61)$$

Уравнения движения КА относительно центра масс в векторной форме:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \sum_{i=1}^Q \bar{\rho}_i \times \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}} \times \bar{l}_i \right) m_i = \bar{M}, \quad (16.62)$$

где \mathbf{J} – мгновенный момент инерции.

$$\mathbf{J} = \int_B (\bar{r}_b \cdot \bar{r}_b \mathbf{E} - \bar{r}_b \bar{r}_b) dm + \sum_{i=1}^Q (\bar{\rho}_i \cdot \bar{\rho}_i \mathbf{E} - \bar{\rho}_i \bar{\rho}_i) m_i. \quad (16.63)$$

Предполагая, что перемещение является малой величиной, то, опустив ее, приведенную выше формулу можно упростить до вида

$$\mathbf{J} = \int_B (\bar{r}_b \cdot \bar{r}_b \mathbf{E} - \bar{r}_b \bar{r}_b) dm + \sum_{i=1}^Q (\bar{r}_i \cdot \bar{r}_i \mathbf{E} - \bar{r}_i \bar{r}_i) m_i. \quad (16.64)$$

Таким образом, момент инерции стал постоянной величиной.

Уравнение движения маятника получается из условия баланса моментов маятника и центрального твердого тела, разделенного относительно точки подвеса P_i . Т. к. точка подвеса эквивалентна шарниру, крутящий момент равен нулю, поэтому

$$\bar{l}_i \times \bar{a}_i m_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q.$$

Подставляя (16.59), получим:

$$\bar{l}_i \times \bar{a}_0 m_i + \bar{l}_i \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{p}_i) m_i + \bar{l}_i \times \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_i \times \bar{l}_i \right) m_i = 0. \quad (16.65)$$

В формуле ускорение \bar{a}_0 центра масс O может быть получено из уравнения орбитального движения:

$$\int_B \bar{a}_b dm + \sum_{i=1}^Q \bar{a}_i m_i = \bar{F}.$$

Здесь \bar{F} – сумма внешних сил, приложенных к КА.

Подставляя выражения (16.5) и (16.59), принимая во внимание (16.61), получим уравнение орбитального движения:

$$\bar{a}_0 m + \sum_{i=1}^Q \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_i \times \bar{l}_i m_i = \bar{F}. \quad (16.66)$$

Здесь m – общая масса КА. Получив \bar{a}_0 из выражения (16.66), подставив выражение (16.65), получим векторное уравнение движения маятника:

$$\bar{l}_i \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{p}_i) m_i + \bar{l}_i \times \left(\overset{\circ}{\bar{\Omega}}_i \times \bar{l}_i \right) m_i - \frac{m_i}{m} \bar{l}_i \times \sum_{j=1}^Q \overset{\circ}{\bar{\Omega}}_j \times \bar{l}_j m_j = -\frac{m_i}{m} \bar{l}_i \times \bar{F}, \quad (16.67)$$

$i = 1, 2, \dots, Q.$

Таким образом, получены уравнения движения КА (16.62) и уравнение движения маятника (16.67). В общей сложности

получается $1+Q$ уравнений, где переменные $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}_i$, $i=1,2,\dots,Q$. Их достаточно для решения задачи.

16.2.2 Уравнения углового движения КА в компонентной форме

Если векторы в уравнениях (16.62) и (16.67) разложить в системе координат, определяемой вектором \bar{e} , формы этих двух уравнений примут вид:

$$\underline{J}\underline{\dot{\omega}} + \sum_{i=1}^Q \underline{\rho}_i^{\times} \times \underline{l}_i^{\times\Gamma} m_i \underline{\dot{\Omega}}_i = \underline{M}, \quad (16.68)$$

$$\underline{l}_i^{\times} \underline{\rho}_i^{\times\Gamma} m_i \underline{\dot{\omega}} + \underline{l}_i^{\times} \underline{l}_i^{\times\Gamma} m_i \underline{\dot{\Omega}}_i - \frac{m_i}{m} \underline{l}_i^{\times} \sum_{j=1}^Q \underline{l}_j^{\times\Gamma} m_j \underline{\dot{\Omega}}_j = -\frac{m_j}{m} \underline{l}_i^{\times} \underline{F}. \quad (16.69)$$

Рассмотрим частный случай: базисный вектор \bar{e} совпадает с главными осями инерции КА, таким образом:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{bmatrix}.$$

Сила \underline{F} имеет составляющую только в направлении \bar{k} :

$$\underline{F} = [0 \quad 0 \quad F_z]^T.$$

Под действием этой силы жидкое топливо в резервуаре опускается в отрицательном направлении \bar{k} , поэтому при отсутствии возмущений эквивалентный маятник должен указывать в направлении $-\bar{k}$. Если учитывается влияние малых только первого порядка, то стержень маятника длиной \bar{l}_1 под действием

возмущения поворачивается на небольшой угол α вокруг \bar{j} . Тогда приближенное выражение для \bar{l}_1 будет:

$$\underline{l}_1 = [-l_1\alpha \quad 0 \quad -l_1]^\top.$$

А угловая скорость вращения маятника будет:

$$\underline{\Omega}_1 = [0 \quad \dot{\alpha} \quad 0]^\top.$$

Пусть $\bar{r}_1 = 0$ (тогда $\bar{\rho}_1 = \bar{l}_1$) и $\underline{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^\top$, тогда (16.68) и (16.69) примут вид:

$$\begin{bmatrix} J_x \dot{\omega}_x \\ J_y \dot{\omega}_y \\ J_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1^2(1+\alpha^2)m_1\ddot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad (16.70)$$

$$\begin{bmatrix} l_1^2 \dot{\omega}_x - l_1^2 \alpha \dot{\omega}_z \\ l_1^2(1+\alpha^2)\dot{\omega}_y \\ -l_1^2 \alpha \dot{\omega}_x + l_1^2 \alpha^2 \dot{\omega}_z \end{bmatrix} m_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1^2(1+\alpha^2)m_1\left(1 - \frac{m_1}{m}\right)\ddot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_1}{m}l_1F_z\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16.71)$$

Из полученных выражений (16.70) и (16.71) только второе связано с перемещением жидкости. Можно видеть, что под действием составляющей силы F_z тело из начального состояния повернется вокруг \bar{j} на угол и с угловой скоростью ω_y . Кроме того, появятся возмущения ω_x и ω_z . Из второй формулы выражения

(16.70) можно выразить $\dot{\omega}_y$ и подставить ее в (16.71). После исключения α^2 можно получить чистое колебательное движение:

$$\ddot{\alpha} + \frac{F_z}{l_1 m \left(1 - \frac{m_1}{m} - \frac{l_1^2 m_1}{J_y} \right)} \alpha = - \frac{M_y}{J_y \left(1 - \frac{m_1}{m} - \frac{l_1^2 m_1}{J_y} \right)}. \quad (16.72)$$

Легко понять, что частота колебаний:

$$\omega_s = \left[\frac{F_z}{l_1 m \left(1 - \frac{m_1}{m} - \frac{l_1^2 m_1}{J_y} \right)} \right]^{1/2}. \quad (16.73)$$

Очевидно, что колебаний ω_s пропорциональна приложенной управляющей силе F_z и обратно пропорциональна массе КА. Т. к. составляющая F_z обычно мала, частота колебаний ω_s жидкости будет лежать в диапазоне от 0.01 до 0.1 c^{-1} или меньше. Решение уравнения (16.72) имеет вид:

$$\alpha(t) = \alpha(0) \cos \omega_s t - \frac{\dot{\alpha}(0)}{\omega_s} \sin \omega_s t - \frac{m l_1}{F_z J_y} M_y. \quad (16.74)$$

Здесь $\alpha(0)$ и $\dot{\alpha}(0)$ – начальные угол поворота и угловая скорость. Взяв второе выражение для α из (16.70), можно также найти $\omega_y(t)$, вызванное колебанием жидкости, т. е.

$$\omega_y(t) = \frac{l_1^2 m_1}{J_y} [\omega_s \alpha(0) \sin \omega_s t - \dot{\alpha}(0) \cos \omega_s t] + \omega_y(0) + \frac{1}{J_y} \int_0^t M_y dt . \quad (16.75)$$

Здесь $\omega_y(0)$ – начальное значение угловой скорости в направлении y . Видно, что влияние ω_y пропорционально отношению момента инерции $l_1^2 m_1$ и J_y маятника.

Следует также отметить, что для орбитального КА, когда сила тяжести равна нулю или близка к нулю, жидкость находится во взвешенном состоянии и, тогда она не оказывает воздействия на КА.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Плотность атмосферы

Атмосфера имеет довольно сложную структуру, поэтому построение полной аналитической модели атмосферы является делом непростым. Такая модель должна основываться на табличной динамической модели, которая задает зависимость плотности не только от высоты, но и от температуры. Примером динамической модели может служить модель CIRA, где плотность атмосферы является функцией температуры и высоты:

$$\rho = \rho(T, h).$$

В действительности на плотность атмосферы влияет множество различных факторов, например:

- суточный эффект (в зависимости от времени суток плотность воздуха на данной высоте различна, что обусловлено изменением температуры);
- высота Солнца над горизонтом; колебания плотности с периодом 27 суток (это эффект, период которого равен периоду вращения Солнца вокруг своей оси по отношению к Земле, связан с количеством и активностью солнечных пятен на видимой стороне Солнца);
- 6-месячные колебания (плотность воздуха подвержена колебаниям с периодом около 6 месяцев и амплитудой, достигающей на высоте 350 км около 40% от средней плотности, что связано с наклоном оси вращения Солнца к плоскости эклиптики);
- 11-летний цикл (самые большие вариации плотности связаны с 11-летним циклом солнечной активности);
- и т. д.

Модель стандартной атмосферы CIRA задается таблицами и формулами, позволяющими находить плотность на данной высоте в данный момент времени. Основными входными данными Стандартной атмосферы, помимо высоты h и местного солнечного времени, являются широта точки, в которой определяется плотность, склонение Солнца, индексы, характеризующие поток солнечного излучения на волне 10.7 см, и геомагнитный индекс.

Наиболее надежные данные по радиоизлучению Солнца получены на волне 10.7 см (частота 2800 МГц), начиная с 1963 г. Индекс F10,7 измеряется в солнечных единицах потока (с.е.п.), причем единица с.е.п. равна 10^{-22} ($Вт/м^2Гц$). На рис. П1.1 показано изменение индекса солнечной активности по годам.

Поскольку в теории движения спутника нас интересует только та область высот, в которой находится его орбита, то мы можем использовать локальную модель, отражающую плотность в некотором ограниченном слое. Таким образом, атмосферу можно разделить на 10 слоев (см. таблицу П1.1), на рис. П1.2 показана зависимость средней суточной плотности атмосферы от высоты для различных слоев.

Таблица П1.1

$F_{10.7}/10^{-22}$ $Вт\ м^{-2}Гц^{-1}$	65	75	100	125	150	175	200	225	250	275
Номер типа атмосферы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Плотность атмосферы может быть выражена в форме экспоненциального закона:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}}, \quad (\text{П1.1})$$

где ρ , ρ_0 – плотность атмосферы на высотах h , h_0 соответственно; H – шкала высот, которая в свою очередь является функцией высоты (рис. П1.3). При изменении высоты от 200 до 800 км шкала высот H возрастает примерно от 20 до 200 км. Таким образом, формула (П1.1) тем лучше описывает распределение плотности, чем более тонкий слой рассматривается.

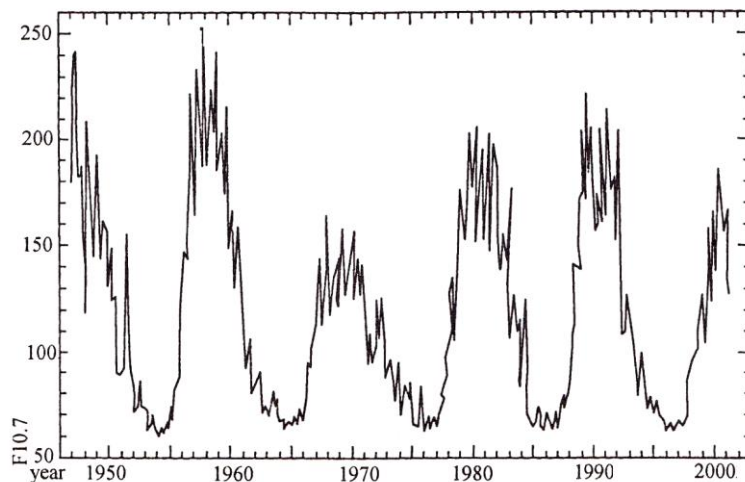


Рис. П1.1. Изменение индекса солнечной активности по годам

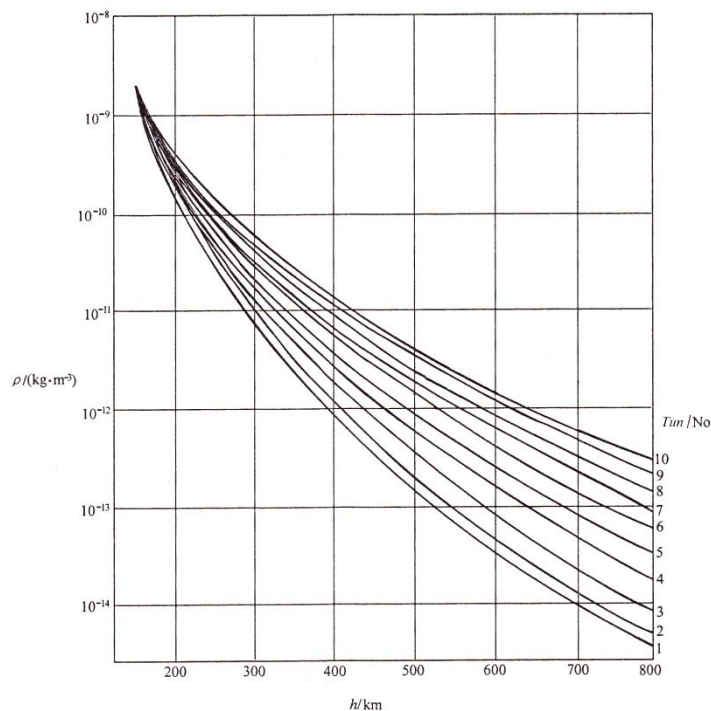


Рис. П1.2. Зависимость средней суточной плотности атмосферы от высоты для различных типов атмосферы

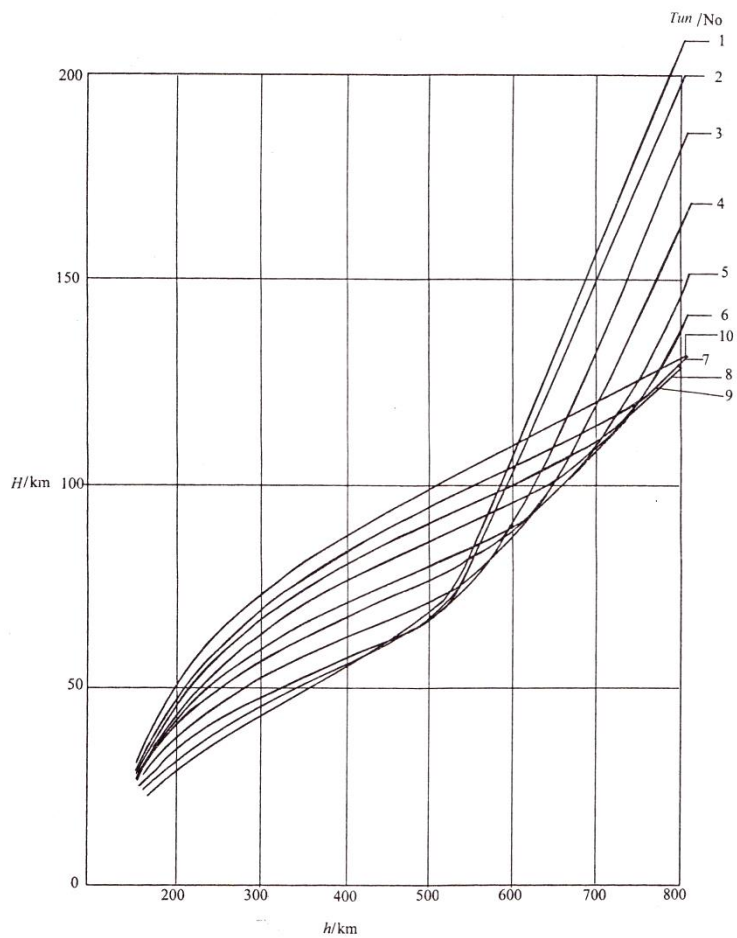


Рис. П1.3. Зависимость шкалы высот H от h

Приложение 2. Формула Циолковского

Ракета движется в пространстве за счёт действия реактивной тяги, возникающей вследствие отброса части собственной массы (рабочего тела) и без использования вещества из окружающей среды.

На ракету в полете также действуют аэродинамическая сила, сила притяжения со стороны Земли (на малых высотах), сила светового давления, гравитационные силы со стороны других небесных тел, которые необходимо учитывать при рассмотрении движения.

Рассмотрим движение ракеты под действием только силы тяги основного двигателя, исключая действие других указанных выше сил.

Пусть \bar{v} и $\bar{v}_1 = \bar{v} + d\bar{v}$ – скорости ракеты в моменты времени t и $t + dt$ соответственно (рис. П2.1). Количество движения в начальный момент времени равно $m\bar{v}$, а в момент времени $t + dt$ оно состоит из двух компонент: масса dm отделяется от ракеты, и скорость ракеты увеличивается до значения $\bar{v} + d\bar{v}$, а импульс равен $(m - dm)(\bar{v} + d\bar{v})$; отбрасываемая масса dm движется с относительной скоростью \bar{w} (абсолютная скорость равна $\bar{w} + \bar{v} + d\bar{v}$) и имеет импульс $(\bar{w} + \bar{v} + d\bar{v})dm$.

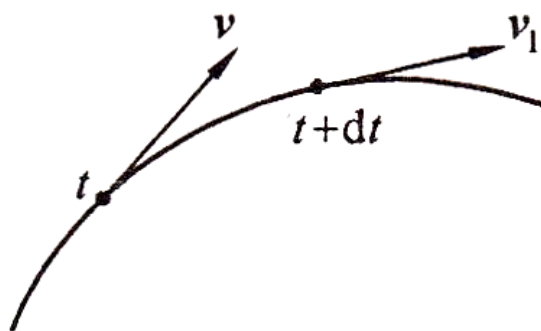


Рис. П2.1. К выводу формулы для изменения количества движения

В соответствии с законом сохранения количества движения, импульсы в моменты времени t и $t + dt$ должны быть равны $m\bar{v} = (m - dm)(\bar{v} + d\bar{v}) + (\bar{w} + \bar{v} + d\bar{v})dm$. Пренебрегая малыми второго порядка, получим:

$$m d\bar{v} + \bar{w} dm = 0. \quad (\text{П2.1})$$

Считая, что векторы \bar{v} и \bar{w} коллинеарны, перейдем к их абсолютным величинам. Зная скорость и массу ракеты в начальный момент времени, проинтегрировав (П2.1), получим формулу для расчета скорости в любой момент времени:

$$v(t) = v_0 + w \ln \frac{m_0}{m}. \quad (\text{П2.2})$$

Таким образом, получили формулу Циолковского, известную также как уравнение движения ракеты. Эта формула может быть также записана через приращение скорости:

$$\Delta v(t) = v(t) - v_0 = w \ln \frac{m_0}{m}. \quad (\text{П2.3})$$

Максимальное приращение скорости ракета получит при полном выгорании топлива, т. е. когда ее масса будет равна конечной массе m_k

$$\Delta v_k = w \ln \frac{m_0}{m_k}. \quad (\text{П2.4})$$

Из формулы (П2.4) можно видеть, что, во-первых, для современного уровня развития ракетной техники $m_0/m_k=10$, $w=3500 \text{ м/с}$ при $v_0=0$, $v_k=8 \text{ км/с}$ ракета может развить первую космическую скорость (7.9 км/с). Однако в действительности из-за влияния сопротивления атмосферы и силы тяжести эта величина будет меньше. Из этого следует, что ракеты-носители должны быть многоступенчатыми. Во-вторых, если величину w увеличить в α раз, то конечная скорость ракеты v_k^* возрастет в то же количество раз. Если величину m_0/m_k увеличить в α раз, то $v_k^* = w \ln m_0/m_k + w \ln \alpha$, т. е. конечная скорость возрастет в $v_k^*/v_k = 1 + \ln \alpha / \ln(m_0/m_k)$ раз. Очевидно, предпочтительнее увеличивать w для получения большей конечной скорости, поэтому на практике стремятся увеличить w , а не m_0/m_k .

Если обозначить разность между массами ракеты в начальный и конечный моменты времени через $\Delta m = m_0 - m_k$, то (П2.4) можно переписать в виде:

$$\Delta m = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta v_k}{w}} \right). \quad (\text{П2.5})$$

Это выражение используется для оценки расхода топлива при коррекции орбиты и ориентации.

Приложение 3. Векторы и векторные компоненты

Описание

Любой вектор \bar{V} может быть представлен в виде линейной комбинации трех компонент B_1, B_2, B_3 и соответствующих им единичных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$$\bar{V} = B_1 \bar{e}_1 + B_2 \bar{e}_2 + B_3 \bar{e}_3. \quad (\text{ПЗ.1})$$

Совокупность трех единичных векторов называется базисным вектором:

$$\underline{\bar{e}} = [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3]^T. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Обозначения: (\bullet) – матрица произвольной размерности, элементами которой могут быть как скаляры, так и векторы. Например, матрица $\underline{\bar{e}}$ представляет собой массив размерности 3×1 , элементами которого являются векторы $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Для двух взаимно ортогональных векторов справедливо следующее:

$$\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\beta = \begin{cases} 1, \text{ при } \alpha = \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \\ 0, \text{ при } \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Тогда

$$\underline{\bar{e}} \cdot \underline{\bar{e}}^T = \underline{\bar{E}}_3. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Здесь матрица $\underline{\bar{E}}_3$ имеет размерность 3×3 .

Компонента некоторого базисного вектора может являться линейной комбинацией компонент другого базисного вектора.

Например, для описания различных пространственных физических величин часто используется более одного базисного вектора, эти векторы обозначаются дополнительными верхними индексами $\underline{\bar{e}}^{(s)}, \underline{\bar{e}}^{(r)}$.

$$\underline{\bar{e}}_{\alpha}^{(s)} = \sum_{\beta=1}^3 C_{\alpha\beta} \underline{\bar{e}}_{\beta}^{(r)}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

В матричном виде это выражение запишется так

$$\underline{\bar{e}}^{(s)} = \underline{C}_{sr} \underline{\bar{e}}^{(r)}. \quad (\text{ПЗ.4})$$

Здесь \underline{C}_{sr} – матрица размерностью 3×3 для преобразования базисного вектора (r) в (s) . Элементы этой матрицы состоят из косинусов углов между соответствующими единичными векторами. Т. е. $C_{\alpha\beta}$ – косинус угла между векторами $\underline{\bar{e}}_{\alpha}^{(s)}$ и $\underline{\bar{e}}_{\beta}^{(r)}$, а именно $\cos\left(\underline{\bar{e}}_{\alpha}^{(s)}, \underline{\bar{e}}_{\beta}^{(r)}\right)$. Матрица перехода является ортогональной и обладает следующим свойством $\underline{C}_{sr} = \left(\underline{C}_{rs}\right)^{-1} = \underline{C}_{rs}^T$. Поэтому формулу (ПЗ.4) можно переписать в виде:

$$\underline{\bar{e}}^{(r)} = \underline{C}_{rs} \underline{\bar{e}}^{(s)} = \underline{C}_{sr}^T \underline{\bar{e}}^{(s)}. \quad (\text{ПЗ.5})$$

Определитель матрицы преобразования равен единице:

$$\det \underline{C}_{sr} = 1. \quad (\text{ПЗ.6})$$

Сумма квадратов трех элементов одной строки (или одного столбца) равна единице.

Если компоненты вектора \bar{B} имеют вид $\underline{B} = [B_1 \ B_2 \ B_3]^T$ (см. формулу (ПЗ.1)), то можно записать:

$$\bar{B} = \underline{e}^T \underline{B}, \quad \underline{B} = \underline{B}^T \underline{e}. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Эти уравнения связывают вектор с его компонентами. Если вектор \bar{B} содержит в себе компоненты $\underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)}$, то можно записать:

$$\bar{B} = \underline{e}^{(s)T} \underline{B}^{(s)} = \underline{e}^{(r)T} \underline{B}^{(r)}.$$

Используя формулу (ПЗ.5), можно избавиться от $\underline{e}^{(r)}$

$$\underline{B}^{(s)} = \underline{C}_{sr} \underline{B}^{(r)}. \quad (\text{ПЗ.8})$$

Видно, что матрица преобразования между системами координат является матрицей преобразования между базисными векторами.

Скалярное произведение векторов

Если заданы компоненты двух базисных векторов \bar{a}, \bar{b} $\underline{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T, \underline{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$, то с помощью формулы (ПЗ.7) можно записать:

$$\bar{a} = \underline{a}^T \underline{e}, \quad \bar{b} = \underline{e}^T \underline{b}.$$

Скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$ равно $\underline{a}^T \underline{e} \cdot \underline{e}^T \underline{b}$. Используя выражение (ПЗ.3), получим:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \underline{a}^T \underline{b}. \quad (\text{ПЗ.9})$$

Можно также записать:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \underline{b}^T \underline{a}.$$

Если \bar{a} раскладывается через $\underline{e}^{(r)}$, а \bar{b} через $\underline{e}^{(s)}$ то выражение (ПЗ.9) можно записать в виде:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \underline{a}^{(r)T} \underline{C}_{rs} \underline{b}^{(s)} = \underline{b}^{(s)T} \underline{C}_{sr} \underline{a}^{(r)}. \quad (\text{ПЗ.10})$$

Векторное произведение векторов

По определению:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

В виде компонент выражение запишется следующим образом:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \underline{e}^T \underline{a}^\times \underline{b}. \quad (\text{ПЗ.11})$$

Здесь

$$\underline{a}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Матрица \underline{a}^\times является несимметричной $\underline{a}^{\times T} = -\underline{a}^\times$. Рассмотрим векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$. Тогда выражение (ПЗ.11) может быть записано:

$$\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{a}}^{\times T} \underline{\mathbf{b}}. \quad (\text{П3.13})$$

Очевидно:

$$\underline{\mathbf{a}}^{\times} \underline{\mathbf{a}} = 0. \quad (\text{П3.14})$$

Компоненты вектора $\bar{\mathbf{a}}$ удовлетворяют следующему выражению:

$$\underline{\mathbf{a}}^{(s)\times} = \left(\underline{\mathbf{C}}_{sr} \underline{\mathbf{a}}^{(r)} \right)^{\times} = \underline{\mathbf{C}}_{sr} \underline{\mathbf{a}}^{(r)\times} \underline{\mathbf{C}}_{rs}. \quad (\text{П3.15})$$

Это равенство может быть получено путем разложения левой и правой частей.

Неопределенное произведение векторов и тензор

Неопределенное произведение векторов или диада задается написанием векторов один за другим, например, $\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}$:

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2 \bar{\mathbf{b}}_2 + \dots. \quad (\text{П3.16})$$

Неопределенное произведение в общем случае является некоммутативным, т. е. $\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}} \neq \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}$.

Диадиком \mathbf{D} называется тензор второго ранга, который всегда может быть представлен в виде суммы конечного числа диад.

Если $\bar{\mathbf{v}}$ – произвольный вектор, то скалярные произведения $\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{D}$ и $\mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ тоже являются векторами, которые определяются соответственно формулами:

$$\mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{v}} = (\bar{a}_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2 + \dots) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{a}_1 b_1 v \cos(\bar{b}_1, \hat{\bar{\mathbf{v}}}) + \bar{a}_2 b_2 v \cos(\bar{b}_2, \hat{\bar{\mathbf{v}}}) + \dots,$$

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{D} = \bar{\mathbf{v}} \cdot (\bar{a}_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2 + \dots) = v a_1 v \cos(\bar{b}_1, \hat{\bar{\mathbf{v}}}) \bar{b}_1 + v a_2 v \cos(\bar{b}_2, \hat{\bar{\mathbf{v}}}) \bar{b}_2 + \dots$$

Если в каждой диаде первый и второй сомножители поменять местами, то полученный тензор называется сопряженным исходному

$$\mathbf{D} = \bar{a}_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2 + \dots$$

и имеет вид:

$$\mathbf{D}^* = \bar{b}_1 \bar{a}_1 + \bar{b}_2 \bar{a}_2 + \dots$$

Неопределенное произведение векторов обладает свойством дистрибутивности:

$$\bar{a} \bar{b}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{a} \bar{b}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{a} (\bar{b}_1 + \bar{b}_2) \cdot \bar{\mathbf{v}},$$

$$\bar{a}_1 \bar{b} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{a}_2 \bar{b} \cdot \bar{\mathbf{v}} = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \bar{b} \cdot \bar{\mathbf{v}}.$$

Запишем диадик для двух векторов, выраженных через их компоненты $\bar{\mathbf{a}} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3$, $\bar{\mathbf{b}} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3$:

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha} b_{\beta} \bar{e}_{\alpha} \bar{e}_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta} \bar{e}_{\alpha} \bar{e}_{\beta}. \quad (\text{П3.17})$$

Приведенная выше формула является компонентной или координатной, а \mathbf{D} определяется выражением:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \underline{a} \underline{b}^T. \quad (\text{П3.18})$$

Тогда выражение (П3.17) можно переписать в виде:

$$\mathbf{D} = \underline{\bar{e}}^T \underline{D} \underline{\bar{e}} \quad (\text{П3.19})$$

Это компонентная форма записи тензора или диадика через тензорную матрицу \underline{D} .

Если в \mathbf{D} имеется несколько пар векторов, как в (П3.16), то:

$$\mathbf{D} = \underline{\bar{e}}^T (\underline{a}_1 \underline{b}_1^T + \underline{a}_2 \underline{b}_2^T + \dots) \underline{\bar{e}} = \underline{\bar{e}}^T \underline{D} \underline{\bar{e}}.$$

Здесь

$$\underline{D} = \underline{a}_1 \underline{b}_1^T + \underline{a}_2 \underline{b}_2^T + \dots. \quad (\text{П3.20})$$

Из выражения (П3.18) также можно получить:

$$\underline{D}^* = \underline{D}^T. \quad (\text{П3.21})$$

Т. е. транспонированная тензорная матрица равна сопряженной тензорной матрице.

Из формулы (П3.17) можно получить выражения (см. (П3.1) и (П3.3)):

$$\mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta} \bar{e}_\alpha \bar{e}_\beta^T \bar{e}_\beta B_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta} \bar{e}_\beta B_\beta \bar{e}_\alpha.$$

Формулы (П3.19) и (П3.7) также могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}}. \quad (\text{П3.22})$$

Тензор, состоящий из трех компонент $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ базисного вектора:

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3 \bar{\mathbf{e}}_3.$$

является единичным тензором. Пусть вектор $\bar{\mathbf{e}}_i (i=1,2,3)$ может быть записан в виде $\bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{e}}_i = \underline{\mathbf{e}}_i^T \bar{\mathbf{e}} (i=1,2,3)$, тогда

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T, \underline{\mathbf{e}}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T, \underline{\mathbf{e}}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

Запишем выражение с помощью формул (П3.19) и (П3.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \bar{\mathbf{e}}^T (\underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_1^T + \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_2^T + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_3^T) \bar{\mathbf{e}} = \\ &= \bar{\mathbf{e}}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{e}}. \end{aligned} \quad (\text{П3.23})$$

или

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3 \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}}. \quad (\text{П3.24})$$

Для любого вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и единичного вектора \mathbf{E} справедливо следующее:

$$\mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{E} = \bar{\mathbf{a}}. \quad (\text{П3.25})$$

Запишем тензор $\underline{\mathbf{D}}$ через компоненты $\underline{\bar{e}}^{(s)}$, $\underline{\bar{e}}^{(r)}$ с помощью формулы (ПЗ.19), получим $\underline{\bar{e}}^{(s)\top} \underline{\mathbf{D}}^{(s)} \underline{\bar{e}}^{(s)} = \underline{\bar{e}}^{(r)\top} \underline{\mathbf{D}}^{(r)} \underline{\bar{e}}^{(r)}$, а помощью формулы (ПЗ.5) получим $\underline{\bar{e}}^{(s)\top} \underline{\mathbf{D}}^{(s)} \underline{\bar{e}}^{(s)} = \underline{\bar{e}}^{(s)\top} \underline{\mathbf{C}}_{sr} \underline{\mathbf{D}}^{(r)} \underline{\bar{e}}^{(s)}$:

$$\underline{\mathbf{D}}^{(s)} = \underline{\mathbf{C}}_{sr} \underline{\mathbf{D}}^{(r)} \underline{\mathbf{C}}_{rs}. \quad (\text{ПЗ.26})$$

Это формула перехода между различными тензорными матрицами.

Смешанное произведение векторов и диад

Возьмем три произвольных вектора $\underline{\bar{a}}, \underline{\bar{b}}, \underline{\bar{c}}$ и составим смешанное произведение:

$$(\underline{\bar{a}} \times \underline{\bar{b}}) \times \underline{\bar{c}} = \underline{\bar{b}} (\underline{\bar{a}} \cdot \underline{\bar{c}}) - \underline{\bar{a}} (\underline{\bar{b}} \cdot \underline{\bar{c}}) = (\underline{\bar{b}} \underline{\bar{a}} - \underline{\bar{a}} \underline{\bar{b}}) \cdot \underline{\bar{c}}.$$

Если $\underline{\bar{b}} \underline{\bar{a}} - \underline{\bar{a}} \underline{\bar{b}}$ рассматривать как диаду, то тензорная матрица будет иметь вид:

$$\underline{\bar{b}} \underline{\bar{a}}^\top - \underline{\bar{a}} \underline{\bar{b}}^\top = \begin{bmatrix} 0 & b_1 a_2 - b_2 a_1 & b_1 a_3 - b_3 a_1 \\ -(b_1 a_2 - b_2 a_1) & 0 & b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ -(b_1 a_3 - b_3 a_1) & -(b_2 a_3 - b_3 a_2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Из (ПЗ.19) можно получить:

$$\underline{\bar{b}} \underline{\bar{a}} - \underline{\bar{a}} \underline{\bar{b}} = \underline{\bar{e}}^\top (\underline{\bar{b}} \underline{\bar{a}}^\top - \underline{\bar{a}} \underline{\bar{b}}^\top) \underline{\bar{e}}.$$

Используя $\underline{\bar{c}} = \underline{\bar{e}}^\top \underline{\mathbf{c}}$ и формулу (ПЗ.3), получим:

$$(\underline{\bar{a}} \times \underline{\bar{b}}) \times \underline{\bar{c}} = \underline{\bar{e}}^\top (\underline{\bar{b}} \underline{\bar{a}}^\top - \underline{\bar{a}} \underline{\bar{b}}^\top) \underline{\mathbf{c}}. \quad (\text{ПЗ.27a})$$

В соответствии с (ПЗ.11):

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{e}^T (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c}. \quad (\text{ПЗ.276})$$

Сравнивая последние два выражения, можно получить:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times = \underline{b} \underline{a}^T - \underline{a} \underline{b}^T. \quad (\text{ПЗ.28})$$

С другой стороны, для векторного произведения вида $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$ запишем:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{c} \cdot \bar{a} \bar{b} - \bar{c} \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Применяя к последнему выражению формулу (ПЗ.25), получим:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{c} \cdot \bar{a} \mathbf{E} - \bar{c} \bar{a}) \cdot \bar{b}. \quad (\text{ПЗ.29})$$

Используя формулы (ПЗ.19), (ПЗ.9), (ПЗ.23), получим:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{e}^T (\underline{c}^T \underline{a} \mathbf{E} - \underline{c} \underline{a}^T) \cdot \underline{b}. \quad (\text{ПЗ.30})$$

Далее с помощью (ПЗ.11), перепишем выражение в виде:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{e}^T \underline{a} \times \underline{c} \times^T \underline{b}. \quad (\text{ПЗ.31})$$

Сравнивая последние два выражения, получим:

$$\underline{a} \times \underline{c} \times^T = \underline{c}^T \underline{a} \mathbf{E} - \underline{c} \underline{a}^T. \quad (\text{ПЗ.32})$$

Для описания вращения твердого тела часто используют три векторных интеграла. На рис. ПЗ.1 представлен набор ортогональных базисных векторов $\underline{\bar{b}}^T = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ с началом в точке O твердого тела B . Твердое тело вращается с угловой скоростью $\underline{\bar{\omega}}$, а элементарная масса dm находится на расстоянии $\underline{\bar{r}}$ от точки O .

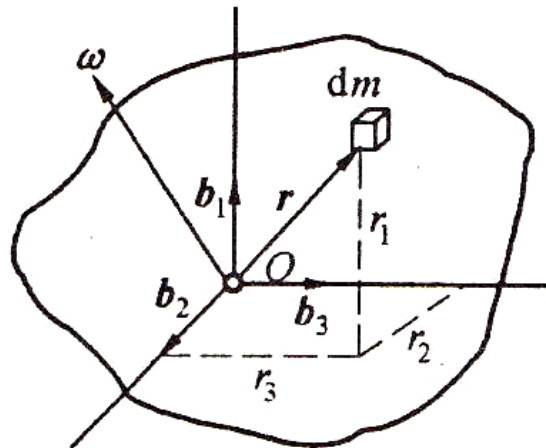


Рис. ПЗ.1. Вращающееся твердое тело

$$\int_B \underline{\bar{r}} \times (\dot{\underline{\bar{\omega}}} \times \underline{\bar{r}}) dm.$$

С помощью (ПЗ.29) получим:

$$\int_B \underline{\bar{r}} \times (\dot{\underline{\bar{\omega}}} \times \underline{\bar{r}}) dm = \int_B (\underline{\bar{r}} \cdot \underline{\bar{r}} \mathbf{E} - \underline{\bar{r}} \underline{\bar{r}}) dm \cdot \dot{\underline{\bar{\omega}}}. \quad (\text{ПЗ.33})$$

Используя выражения (ПЗ.9), (ПЗ.18), (ПЗ.32), перепишем интеграл в виде:

$$\int_B (\underline{\bar{r}} \cdot \underline{\bar{r}} \mathbf{E} - \underline{\bar{r}} \underline{\bar{r}}) dm = \underline{\bar{e}}^T \int_B (\underline{\bar{r}}^T \underline{\bar{r}} \mathbf{E} - \underline{\bar{r}} \underline{\bar{r}}^T) dm \underline{\bar{e}} = \underline{\bar{e}}^T \int_B \underline{\bar{r}}^x \underline{\bar{r}}^{xT} dm \underline{\bar{e}}. \quad (\text{ПЗ.34})$$

Подставим $\underline{\bar{r}} = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ в последнее выражение:

$$\int_B (\underline{r}^T \underline{r} \underline{E} - \underline{r} \underline{r}^T) dm = \int_B \begin{bmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_2 r_1 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2 r_3 \\ -r_3 r_1 & -r_2 r_3 & r_1^2 + r_2^2 \end{bmatrix} dm = \quad (\text{П3.35})$$

$$= \begin{bmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & J_3 \end{bmatrix} = \underline{J} = \int_B \underline{r}^\times \underline{r}^{\times T} dm.$$

Очевидно, здесь J – момент инерции тела B в базисной системе координат. Поэтому формула (П3.33) приобретает вид:

$$\int_B \bar{\underline{r}} \times (\dot{\bar{\underline{\omega}}} \times \bar{\underline{r}}) dm = \underline{J} \cdot \dot{\bar{\underline{\omega}}}. \quad (\text{П3.36})$$

Здесь

$$\underline{J} = \underline{\bar{e}}^T \underline{J} \underline{\bar{e}} = \underline{\bar{e}}^T \begin{bmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & J_3 \end{bmatrix} \underline{\bar{e}}. \quad (\text{П3.37})$$

Это тензор инерции с компонентами:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_B (r_2^2 + r_3^2) dm, & J_2 &= \int_B (r_3^2 + r_1^2) dm, \\ J_3 &= \int_B (r_1^2 + r_2^2) dm, & J_{12} &= \int_B r_1 r_2 dm, \\ J_{13} &= \int_B r_1 r_3 dm, & J_{23} &= \int_B r_2 r_3 dm. \end{aligned} \quad (\text{П3.38})$$

Рассмотрим второй интеграл вращения твердого тела:

$$\frac{1}{2} \int_B (\bar{\underline{\omega}} \times \bar{\underline{r}}) \cdot (\bar{\underline{\omega}} \times \bar{\underline{r}}) dm.$$

Перепишем подынтегральное выражение, используя основные правила векторного анализа:

$$(\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \cdot [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})].$$

С помощью выражения (ПЗ.36) перепишем интеграл:

$$\frac{1}{2} \int_B (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}. \quad (\text{ПЗ.39})$$

Это кинетическая энергия вращательного движения.

$$\frac{1}{2} \int_B (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{J} \underline{\omega}. \quad (\text{ПЗ.40})$$

Запишем третий интеграл вращательного движения $\int_B \bar{r} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dm$ и преобразуем подынтегральное выражение по правилам векторного анализа:

$$\bar{r} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] = \bar{\omega} \times [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})].$$

Тогда

$$\int_B \bar{r} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dm = \bar{\omega} \times \left[\int_B \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm \right].$$

Используя выражение (ПЗ.36), получим:

$$\int_B \bar{r} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dm = \bar{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \bar{\omega}).$$

В данном случае порядок перемножения не имеет значения:

$$\int_B \bar{r} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dm = \bar{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \bar{\omega}. \quad (\text{ПЗ.41})$$

В другом виде:

$$\int_B \bar{\mathbf{r}} \times [\bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}})] dm = \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\boldsymbol{\omega}}^\times \mathbf{J} \bar{\boldsymbol{\omega}}. \quad (\text{П3.42})$$

Можно доказать, что для любых \mathbf{D} и $\bar{\mathbf{a}}$ верно следующее:

$$(\mathbf{D} \times \bar{\mathbf{a}}) \cdot \bar{\mathbf{a}} = 0, \quad \bar{\mathbf{a}} \cdot (\bar{\mathbf{a}} \times \mathbf{D}) = 0, \quad (\text{П3.43})$$

$$(\bar{\mathbf{a}} \times \mathbf{D}) \cdot \bar{\mathbf{a}} \neq 0, \quad \bar{\mathbf{a}} \times (\mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{a}}) = (\bar{\mathbf{a}} \times \mathbf{D}) \cdot \bar{\mathbf{a}}. \quad (\text{П3.44})$$

Приложение 4. Момент инерции

Запишем выражение (П3.35) для двух базисных векторов $\underline{\bar{e}}^{(s)}$ и $\underline{\bar{e}}^{(r)}$ с началом в одной и той же точке тела B

$$\underline{r}^{(s)} = \begin{bmatrix} r_1^{(s)} & r_2^{(s)} & r_3^{(s)} \end{bmatrix}^T \text{ и } \underline{r}^{(r)} = \begin{bmatrix} r_1^{(r)} & r_2^{(r)} & r_3^{(r)} \end{bmatrix}^T :$$

$$\underline{J}^{(s)} = \begin{bmatrix} J_1^{(s)} & -J_{12}^{(s)} & J_{13}^{(s)} \\ -J_{12}^{(s)} & J_2^{(s)} & -J_{23}^{(s)} \\ -J_{13}^{(s)} & -J_{23}^{(s)} & J_3^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^{(r)} & -J_{12}^{(r)} & J_{13}^{(r)} \\ -J_{12}^{(r)} & J_2^{(r)} & -J_{23}^{(r)} \\ -J_{13}^{(r)} & -J_{23}^{(r)} & J_3^{(r)} \end{bmatrix}. \quad (\text{П4.1})$$

Вторая матрица в (П4.1) имеет вид:

$$\underline{J}^{(s)} = \underline{C}_{sr} \underline{J}^{(r)} \underline{C}_{rs}. \quad (\text{П4.2})$$

Главные оси и главные моменты инерции

Для разных направлений базисного вектора компоненты момента инерции будут различны. При фиксированном направлении базисного вектора недиагональные элементы матрицы тензора инерции обращаются в нуль. Три составляющие базисного вектора называются главными осями инерции, а соответствующие им моменты инерции – главными моментами инерции. Т. е. диагональные элементы являются главными моментами инерции.

Если $\underline{J}^{(r)}$ – матрица главного момента инерции, то $\underline{J}^{(s)}$ – момент матрица «неглавного» момента инерции. Из (П4.2) можно получить:

$$\underline{C}_{sr} = \begin{bmatrix} J_1^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & J_2^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & J_3^{(r)} \end{bmatrix} = \underline{J}^{(s)} \underline{C}_{sr}.$$

Если $\underline{C}_{sr}^\alpha$ ($\alpha=1,2,3$) является α -столбцом матрицы \underline{C}_{sr} , то из выше приведенной формулы можно получить

$$\underline{J}_\alpha^{(r)} \underline{C}_{sr}^\alpha = \underline{J}^{(s)} \underline{C}_{sr}^\alpha \quad (\alpha=1,2,3)$$

$$\underline{J}^{(s)} - \underline{J}_\alpha^{(r)} \underline{E} \underline{C}_{sr}^\alpha = \underline{0}, \quad (\alpha=1,2,3). \quad (\text{П4.3})$$

Это типовая задача о собственных значениях матрицы 3×3 , где $\underline{J}_\alpha^{(r)}$ – собственное значение выражения (П4.3), а $\underline{C}_{sr}^\alpha$ – собственный вектор, $\underline{J}^{(s)}$ – вещественная симметричная матрица. Собственные значения и собственные векторы также вещественны, а собственные векторы ортогональны.

Когда значения $\underline{J}_\alpha^{(r)}$, ($\alpha=1,2,3$) отличаются друг от друга, для некоторого α из выражения (П4.3) можно получить два независимых уравнения и условие, что направляющий косинус должен удовлетворять выражению $\sum_{\beta=1}^3 (\underline{C}_{sr}^{\alpha\beta})^2 = 1$. Можно определить три элемента из $(\underline{C}_{sr}^{\alpha\beta})$ ($\beta=1,2,3$). Для разных α можно найти все направляющие косинусы матрицы \underline{C}_{sr} . Если $\underline{J}_1^{(r)} = \underline{J}_2^{(r)} \neq \underline{J}_3^{(r)}$, то по приведенной выше методике можно найти направление главной оси $\underline{J}_3^{(r)}$, а в матрице коэффициентов \underline{C}_{sr}^3 только одна строка $\underline{J}_1^{(r)}$ (или $\underline{J}_2^{(r)}$) будет независимой, $(\underline{J}^{(s)} - \underline{J}_1^{(r)} \underline{E})$. Это указывает на то, что в плоскости, перпендикулярной главной оси $\underline{J}_3^{(r)}$ (направление $\bar{e}_3^{(r)}$), любые две взаимно ортогональные оси являются главными осями. Для случая $\underline{J}_1^{(r)} = \underline{J}_2^{(r)} = \underline{J}_3^{(r)}$ матрица $\underline{J}^{(s)}$ также является диагональной, откуда следует, что любые три оси, проходящие через точку O , являются главными осями.

Взаимосвязь между моментами инерции в различных точках

На рис. П4.1 показано твердое тело B при постоянном направлении главного вектора $\bar{b}_1 // \bar{p}_1, \bar{b}_2 // \bar{p}_2, \bar{b}_3 // \bar{p}_3$. Когда начала главных векторов – b и p соответственно, векторное расстояние от точки p до b равно \bar{r}_p и $\underline{r}_p = [r_{p1} \ r_{p2} \ r_{p3}]^T$. Пусть расстояние от элементарной массы dm твердого тела B до точки b равно \bar{r} , а до точки p – $\bar{\rho}$. Тогда матрицу моментов инерции твердого тела B в точке b $\underline{J}^{(b)}$ и в точке p $\underline{J}^{(p)}$ можно записать следующим образом в соответствии с формулой (П3.35):

$$\underline{J}^{(p)} = \int_B (\underline{\rho}^T \underline{\rho} \underline{E} - \underline{\rho} \underline{\rho}^T) dm,$$

$$\underline{J}^{(b)} = \int_B (\underline{r}^T \underline{r} \underline{E} - \underline{r} \underline{r}^T) dm.$$

Здесь $\bar{r} = \bar{r}_p + \bar{\rho}$.

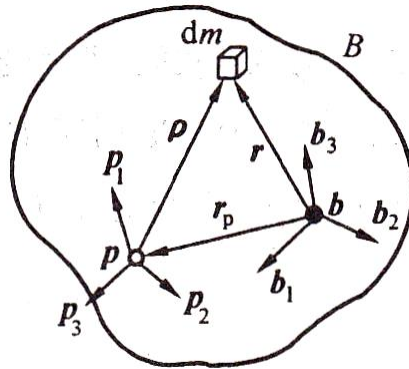


Рис. П4.1. Момент инерции твердого тела в различных точках

$$\underline{J}^{(b)} = \underline{J}^{(p)} + (\underline{r}_p^T \underline{r}_p \underline{E} - \underline{r}_p \underline{r}_p^T) m + 2 \underline{r}_p^T \int_B \underline{\rho} dm \underline{E} -$$

$$- \underline{r}_p \int_B \underline{\rho}^T dm - \int_B \underline{\rho} dm \underline{r}_p^T. \quad (\text{П4.4})$$

Здесь m — масса твердого тела B , а интеграл можно переписать в виде:

$$\int_B \underline{\rho} dm = \underline{r}_c m. \quad (\text{П4.5})$$

В этом выражении \underline{r}_c представляет собой векторную компоненту, выражающую расстояние от центра масс C до точки p . Формулу (П4.4) можно переписать в виде:

$$\underline{J}^{(b)} = \underline{J}^{(p)} + \left(\underline{r}_p^T \underline{r}_p \underline{E} - \underline{r}_p \underline{r}_p^T \right) m + \left(2 \underline{r}_p^T \underline{r}_c \underline{E} - \underline{r}_p \underline{r}_c^T \right) m. \quad (\text{П4.6})$$

Если точка p находится в центре масс, то $\int_B \bar{\rho} dm = 0$, и формула (П4.6) примет вид:

$$\underline{J}^{(b)} = \underline{J}^{(p)} + \left(\underline{r}_p^T \underline{r}_p \underline{E} - \underline{r}_p \underline{r}_p^T \right) m. \quad (\text{П4.7})$$

Приложение 5. Векторные и тензорные производные

Производная от вектора по времени

Производная от вектора по времени представляет собой скорость изменения векторной величины и направления по времени:

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3. \quad (\text{П5.1})$$

Здесь $\underline{\bar{e}} = [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3]^T$ – единичный базисный вектор.

$$\dot{\bar{a}} = \frac{da_1}{dt} \bar{e}_1 + \frac{da_2}{dt} \bar{e}_2 + \frac{da_3}{dt} \bar{e}_3 + a_1 \frac{d\bar{e}_1}{dt} + a_2 \frac{d\bar{e}_2}{dt} + a_3 \frac{d\bar{e}_3}{dt}.$$

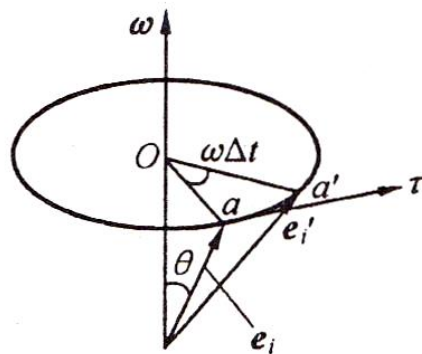


Рис. П5.1. Вращение базисного вектора

По первым трем слагаемым в правой части можно видеть, что производная от каждой компоненты по времени берется как геометрическая сумма в направлении базисного вектора, которая представляет собой скорость изменения вектора \bar{a} относительно системы координат с вектором $\underline{\bar{e}}$. Обозначим эту величину через $\overset{\circ}{\bar{a}}^{(r)}$, чтобы отличить ее от производной $\dot{\bar{a}}$. Последние три элемента в правой части являются производными по времени от единичного базисного вектора (см. рис. П5.1) $\bar{e}_i, i=1,2,3$. На рисунке П5.1 $\bar{\omega}$ – угловая скорость вращения базисного вектора.

При $t = t_0$ конец вектора \bar{e}_i находится в точке a . С течением времени вектор \bar{e}_i переходит в положение \bar{e}_i' , а конец вектора описывает дугу в направлении $\bar{\omega}$ и достигает точки a' . Если центр дуги aa' находится в точке O , то $\angle aOa' = \angle \omega \Delta t_0$. Если угол между векторами \bar{e}_i и $\bar{\omega}$ равен θ , то, как видно из рис. П5.1, $aa' = \omega \Delta t_0 |\bar{e}_i| \sin \theta$. При стремлении к нулю величины Δt , дуга aa' переходит в хорду aa' , идущую по касательной $\bar{\tau}$ к окружности в точке a . Таким образом, при $\Delta t \rightarrow 0$ $aa' \approx aa' - \bar{\omega} \times \bar{e}_i \Delta t$ и производную можно записать в виде:

$$\frac{d\bar{e}_i}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{aa'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\omega} \times \bar{e}_i \Delta t}{\Delta t} = \bar{\omega} \times \bar{e}_i, i = 1, 2, 3.$$

Применим эти соотношения к приведенной выше производной:

$$\dot{\bar{a}} = \overset{\circ}{\bar{a}}^{(r)} + \bar{\omega} \times (a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3) = \overset{\circ}{\bar{a}} + \bar{\omega} \times \bar{a}. \quad (\text{П5.2})$$

При выводе формулы (П5.2) предполагалось, что вектор \bar{e} вращается относительно инерциального пространства, поэтому в выражении (П5.2) $\dot{\bar{a}}$ представляет собой производную по времени относительно инерциального пространства, а $\overset{\circ}{\bar{a}}$ – производная по времени относительно пространства базисного вектора, отличаются они лишь слагаемым $\bar{\omega} \times \bar{a}$.

В действительности не требуется, чтобы правая часть формулы соответствовала инерциальному пространству, поэтому выражение (П5.2) можно описать так: производная по времени от вектора \bar{a} относительно базисного вектора $\underline{\bar{x}}$ $\dot{\bar{a}}^{(s)}$ равна производной вектора \bar{a} относительно пространства базисного вектора $\underline{\bar{x}}$

$\overset{\circ}{\bar{a}}^{(r)}$ плюс угловая скорость вращения пространства \bar{r} относительно \bar{s} ${}^s\bar{\omega}^r$, умноженная на вектор \bar{a} :

$$\dot{\bar{a}}^{(s)} = \overset{\circ}{\bar{a}}^{(r)} + {}^s\bar{\omega}^r \times \bar{a}. \quad (\text{П5.3})$$

Производная от тензора по времени

Согласно приведенной выше методике вычисления векторной производной, аналогично можно получить производную от тензора по времени:

$$\bar{D} = \underline{\bar{e}}^T \underline{D} \underline{\bar{e}}. \quad (\text{П5.4})$$

Его производная по времени:

$$\dot{\bar{D}} = \dot{\underline{\bar{e}}}^T \underline{D} \underline{\bar{e}} + \underline{\bar{e}}^T \dot{\underline{D}} \underline{\bar{e}} + \underline{\bar{e}}^T \underline{D} \dot{\underline{\bar{e}}}. \quad (\text{П5.5})$$

Так как $\dot{\bar{e}}_i = \bar{\omega} \times \bar{e}_i$, то

$$\dot{\underline{\bar{e}}} = \bar{\omega} \times \underline{\bar{e}}, \quad \dot{\underline{\bar{e}}}^T = \bar{\omega} \times \underline{\bar{e}}^T. \quad (\text{П5.6})$$

Подставим (П5.4) в (П5.5):

$$\dot{\bar{D}} = \dot{\bar{D}} + \bar{\omega} \times \bar{D} - \bar{D} \times \bar{\omega}. \quad (\text{П5.7})$$

Первый элемент в правой части приведенной выше формулы $\dot{\underline{\bar{e}}}^T \underline{D} \underline{\bar{e}}$ – сокращение, обозначающее, что \bar{D} – скорость изменения компонентов по времени в системе вектора \bar{e} . Остальные два элемента являются результатом изменения производной от базисного вектора по времени.

Если существует множество базисных векторов, определяющих системы отсчета, и базисный вектор \bar{e}_b вращается относительно \bar{e}_a с угловой скоростью ${}^a\bar{\omega}^b$, то диадик \bar{D} для вектора \bar{e}_b запишется в виде $\bar{D} = \bar{e}_b^T \underline{D}^{(b)} \bar{e}_b$. Тогда в соответствии с (П5.7) запишем производную вектора:

$$\dot{\bar{D}} = \overset{\circ}{\bar{D}} + {}^a\bar{\omega}^b \times \bar{D} - \bar{D} \times {}^a\bar{\omega}^b. \quad (\text{П5.8})$$

Действительно, правая часть выражения (П5.8) соответствует скорости, с которой изменяется вектор \bar{D} из-за изменения векторов \bar{e}_b и \bar{e}_a . Также необходимо учитывать взаимосвязь систем отсчета для выше приведенных величин.

Можно доказать, что для любых \bar{D} и \bar{a} верно следующее:

$$(\bar{D} \times \bar{a}) \cdot \bar{a} = 0, \quad \bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{D}) = 0, \quad (\text{П5.9})$$

$$(\bar{a} \times \bar{D}) \cdot \bar{a} \neq 0, \quad \bar{a} \times (\bar{D} \cdot \bar{a}) = (\bar{a} \times \bar{D}) \cdot \bar{a}. \quad (\text{П5.10})$$

Умножая выражение (П5.7) скалярно на $\bar{\omega}$, получим:

$$\dot{\bar{D}} \cdot \bar{\omega} = \overset{\circ}{\bar{D}} \cdot \bar{\omega} + (\bar{\omega} \times \bar{D}) \cdot \bar{\omega}, \quad (\text{П5.11})$$

$$\bar{\omega} \cdot \dot{\bar{D}} = \bar{\omega} \cdot \overset{\circ}{\bar{D}} + \bar{\omega} \cdot (\bar{D} \times \bar{\omega}). \quad (\text{П5.12})$$

Приложение 6. Устойчивость и критерий Рауса-Гурвица

Сначала рассмотрим понятие устойчивости с позиции физических явлений. На рис. Пб.1 показан небольшой шарик на неровной поверхности. Точки a, b, c, d являются точками его статического равновесия. При отсутствии внешней силы шарик может быть сбалансирован в этих четырех точках. Однако если на этот шарик подействует достаточно малое возмущение, то точки a и c перестанут быть точками устойчивого равновесия шарика. После прекращения возмущения шарик постепенно вернется в исходное состояние, и эти две точки снова станут устойчивыми. Иначе обстоит дело с точками b и d . Это точки устойчивого равновесия. В данном разделе мы не будем рассматривать устойчивость под действием больших возмущений.

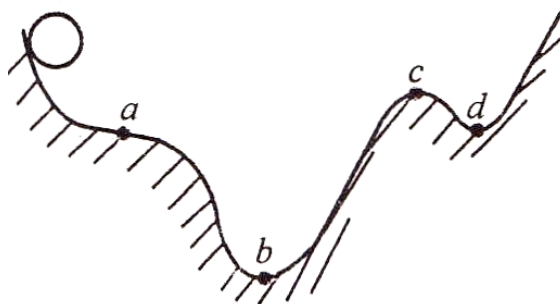


Рис. Пб.1. Точки устойчивости шарика

Рассмотрим теперь понятие устойчивости для динамической системы. Пусть состояние системы $\underline{x} \in R^n$, тогда уравнение состояния будет иметь вид:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}). \quad (\text{Пб.1})$$

Здесь $\dot{\underline{x}} = 0$ соответствует плоскости, а значение $\underline{x} = \underline{x}_p$ может быть получено по формуле (Пб.1). Можно считать $\underline{x}_p = 0$, в противном случае необходим новый набор переменных $\underline{z} = \underline{x}_p - \underline{x}$

(рис. Пб.1). Состояние равновесия при $\underline{z}=0$ называется состоянием нулевого равновесия.

В этом разделе будем рассматривать устойчивость систем для нулевых состояний равновесия. Он включает в себя следующие виды устойчивости.

Устойчивость системы по Ляпунову. На рис. Пб.2а точка O является точкой равновесия. Если на систему подействует малое возмущение, она перейдет в точку O' . Если при этом при $\varepsilon > 0$ существует такая положительная δ , что при $\|\underline{x}(0)\| < \delta$ для всех $t \geq 0$ верно $\|\underline{x}(t)\| < \varepsilon$, система называется устойчивой по Ляпунову (см. рис. Пб.2а). Здесь $\|(\bullet)\|$ – любая мера переменной состояния, такая что $\|\underline{x}(t)\| = [x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)]^{1/2}$. На рисунке Пб.2а показано состояние системы, когда значение δ никогда не превышает значение ε .

Асимптотическая устойчивость. Для всех $t \geq 0$ при $\|\underline{x}(0)\| < \delta$ существует такое $\|\underline{x}(t)\|$, при котором возникает точка нулевой устойчивости, показанная на рисунке Пб.2(б). В отличие от первого случая, фазовая траектория, начиная с любой точки в области δ , в конечном итоге асимптотически устойчиво приближается к нулевой устойчивости.

Устойчивость системы в целом. Для произвольных $\|\underline{x}(0)\|$ при $t \geq 0$ всегда существует $\|\underline{x}(t)\|$, близкое к нулевой устойчивости (см. рисунок Пб.2б).

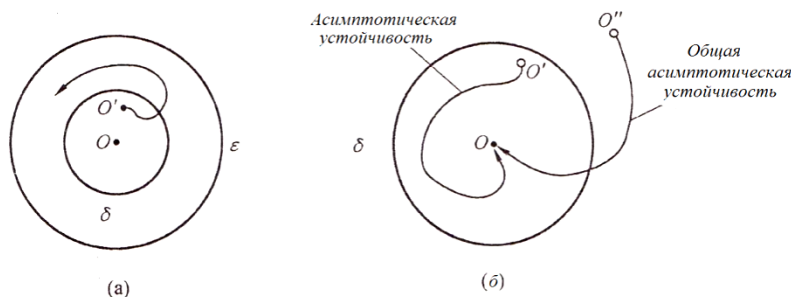


Рис. Пб.2. К определению устойчивости

Для нелинейных систем иногда существует более одной точки равновесия, поэтому глобальная асимптотическая устойчивость особенно важна, поскольку гарантирует, что одна и та же цель будет достигнута независимо от начальной точки.

Для линейных систем асимптотическая устойчивость и глобальная асимптотическая устойчивость согласуются и используется правило Гурвица: если характеристическое уравнение линейной системы имеет вид

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (\text{П6.2})$$

необходимым условием асимптотической устойчивости является:

$$1) \text{ ни одно из } a_i \text{ (} i=0,1,2,\dots,n \text{) не равно нулю;} \quad (\text{П6.3})$$

$$2) \text{ все } a_i \text{ (} i=0,1,2,\dots,n \text{) положительны.} \quad (\text{П6.4})$$

Системы, которые не отвечают этим двум условиям, являются неустойчивыми.

Необходимыми и достаточными условиями для асимптотической устойчивости системы являются следующие: на первом этапе коэффициенты характеристического уравнения располагают в две строки следующим образом

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{array}$$

На втором этапе заполняют таблицу. В качестве примера рассмотрим систему 6-го порядка. Последовательность вычислений выглядит следующим образом:

s^6	a_6	a_4	a_2	a_0
s^5	a_5	a_3	a_1	0
s^4	$\frac{a_5 a_4 - a_6 a_3}{a_5} = A$	$\frac{a_5 a_2 - a_6 a_1}{a_5} = B$	$\frac{a_5 a_0 - a_6 \cdot 0}{a_5} = a_0$	0
s^3	$\frac{A a_3 - B a_5}{A} = C$	$\frac{A a_1 - a_5 \cdot 0}{A} = D$	$\frac{A \cdot 0 - a_5 \cdot 0}{A} = 0$	0
s^2	$\frac{CB - AD}{C} = E$	$\frac{C a_0 - A \cdot 0}{C} = a_0$	0	0
s^1	$\frac{ED - C a_0}{E} = F$	$\frac{E \cdot 0 - C \cdot 0}{E} = 0$	0	0
s^0	a_0	0	0	0

Для характеристических уравнений с порядком выше 6-го проводятся аналогичные расчеты.

На третьем этапе если элементы в первом столбце в приведенной выше таблице ($a_6, a_5, A, C, E, F, a_0$) положительны, то система устойчива (корни $[s]$ характеристического уравнения находятся в левой полуплоскости). Если есть отрицательные корни, то порядок отсчитывается сверху вниз, а число раз, когда изменится символ, – это количество корней характеристического уравнения $[s]$ в правой полуплоскости.

Для характеристического уравнения второго порядка можно записать:

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, \quad (\text{П6.5})$$

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0. \quad (\text{П6.6})$$

Приложение 7. Критерий устойчивости Гурвица

Если характеристическое уравнение линейной системы имеет вид выражения (Пб.2), то необходимым и достаточным условием ее асимптотической устойчивости является положительность определителей различных порядков $\Delta_i (i=1,2,\dots,n)$, составленных из таблицы упорядоченных элементов размером $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_0 \end{bmatrix} = \underline{D},$$

$$\Delta_1 = a_{n-1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \det(\underline{D}).$$

Т. е. из \underline{D} берутся первая строка и столбец, первые две строки и два столбца, первые три строки и три столбца и т.д.

Изменяя a_n на единицу (см. выражение (Пб.2)), рассмотрим $a_i > 0 (i=1,2,\dots,n)$, критерий Гурвица можно записать в общем виде:

	Условие устойчивости
$n = 2$	$a_1, a_0 > 0$
$n = 3$	$a_2, a_0, \Delta_2 > 0$, или $a_1, a_0, \Delta_2 > 0$
$n = 4$	$a_3, a_2, a_0, \Delta_3 > 0$ или $a_3, a_1, a_0, \Delta_3 > 0$
$n = 5$	$a_4, a_2, a_0, \Delta_2, \Delta_4 > 0$ или $a_3, a_1, a_0, \Delta_2, \Delta_4 > 0$
$n = 6$	$a_5, a_4, a_2, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0$ или $a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5 > 0$
$n = 7$	$a_6, a_4, a_2, a_0, \Delta_2, \Delta_4, \Delta_6 > 0$ или $a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_2, \Delta_4, \Delta_6 > 0$
$n = 8$	$a_7, a_6, a_4, a_2, a_0, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7 > 0$ или $a_7, a_5, a_3, a_1, a_0, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7 > 0$

Приложение 8. Теорема об устойчивости по Ляпунову (вторая теорема)

Если для уравнения (Пб.1) найдется непрерывная функция $v(\underline{x}, t)$, удовлетворяющая следующим условиям и имеющая непрерывную частную производную первого порядка в окрестности начала координат, равновесное состояние системы в начале координат будет асимптотически устойчиво.

Рассмотрим два случая.

(1) $v(\underline{x}, t)$ положительно,

(2) $\dot{v}(\underline{x}, t)$ отрицательно.

Если в условии (2) $\dot{v}(\underline{x}, t)$ неотрицательна, то равновесное состояние системы в начале координат будет устойчивым по Ляпунову в следующих случаях:

(3) если $\|\underline{x}\|$ стремится к бесконечности, то $\dot{v}(\underline{x}, t)$ также стремится к бесконечности,

(4) если $\underline{x}=0$ – точка, отличная от 0, то $\dot{v}(\underline{x}, t)$ всегда нулевая, система глобально асимптотически устойчива.

Объяснение этой теоремы следующее: так как $v(\underline{x})$ положительно и непрерывно, то $v(\underline{x})=C$ – многомерная замкнутая кривая. При $C=0$ она находится в начале координат $\underline{x}=0$, а величина $v(\underline{x})$ непрерывно меняется от начала координат. Чем дальше от начала координат находится величина $v(\underline{x})$, тем больше ее значение (см. рис. П8.1). В случае трехмерного пространства $\underline{x}=(x_1 \ x_2 \ x_3)^T$. Условие (2) указывает на то, что $v(\underline{x})$ постепенно уменьшается со временем, а это означает, что кривая решения постепенно приближается к началу координат и, наконец, достигает его. Условия (3) и (4) исключают возможность наличия точек устойчивости вне начала координат.

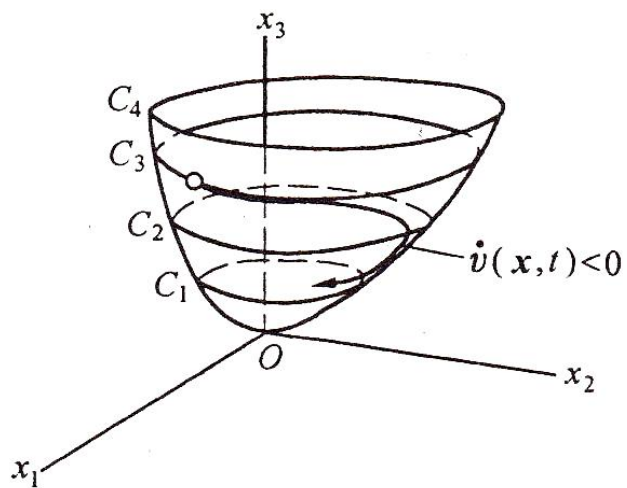


Рис. П8.1. Объяснение теоремы об устойчивости по Ляпунову

Приложение 9. Основные теоремы об устойчивости движения

Основным уравнением динамики углового движения космического аппарата является уравнение Эйлера твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. С учетом различных конфигураций космического аппарата и характеристик демпфера и управляющих органов можно составить несколько различных уравнений динамики углового движения.

Общий вид уравнения углового движения космического аппарата:

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + (\underline{D} + \underline{G})\dot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0}, \quad (\text{П9.1})$$

Здесь $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{D}^T = \underline{D} \neq 0$, $\underline{G}^T = -\underline{G}$, $\underline{K}^T = \underline{K}$ – матрицы размером $n \times n$ и принадлежат $R^{n \times n}$. \underline{M} – масса (момент инерции), \underline{D} – матрица затухания, \underline{G} – антисимметричная матрица, отражающая гироскопический эффект, \underline{K} – матрица жесткости; $\underline{x} \in R^n$ – переменная состояния.

Если существует такое $\underline{K} > 0$, система называется статически стабильной. Если $\underline{D} > 0$, система называется полностью затухающей.

Для различных вариантов формулы (П9.1) существуют следующие теоремы устойчивости. Прежде всего, если в уравнении есть только первый элемент, а именно $\underline{M}\dot{\underline{x}} = 0$, решение будет $\underline{x} = \underline{a}t + \underline{b}$, система будет неустойчива. Таким образом, существуют следующие теоремы.

Теорема 9.1. Система $\underline{M}\dot{\underline{x}} = 0$, $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{M} \in R^{n \times n}$, $\underline{x} \in R^n$ является неустойчивой, если уравнение динамики системы имеет вид

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0}, \quad (\text{П9.2})$$

где $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{K}^T = \underline{K}$, $\underline{M}, \underline{K} \in R^{n \times n}$, $\underline{x} \in R^n$, то существуют следующие теоремы.

Теорема 9.2. Система, представленная выражением (П9.2), тогда и только тогда при $\underline{K} > 0$ (статическая устойчивость) является устойчивой, если функция Ляпунова представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии:

$$v = \frac{1}{2}(\dot{\underline{x}}^T \underline{M} \dot{\underline{x}} + \underline{x}^T \underline{K} \underline{x}). \quad (\text{П9.3})$$

С учетом симметрии матриц \underline{M} , \underline{K} существует:

$$\dot{v} = \dot{\underline{x}}^T (\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x}).$$

Подставляя выражение (П9.2), получим $\dot{v} = 0$, это критерий устойчивости по Ляпунову. Согласно приложению 8, функция Ляпунова должна быть положительной, обе квадратичные формы в выражении (П9.3) должны быть положительно определенными. При $\underline{M} > 0$ первая квадратичная форма положительно определена и должна также быть $\underline{K} > 0$, а v должна быть положительно определенной.

Действительно, поскольку $\underline{M} > 0$, его можно разложить на $\underline{M} = \underline{T}^T \underline{T}$, $\underline{T} \in R^{n \times n}$, \underline{T} также должно быть обратным, примем $\underline{T}^{-1} = \underline{P}$. Если $\underline{T} \underline{x} = \underline{q}$, то существует $\underline{x} = \underline{T}^{-1} \underline{q} = \underline{P} \underline{q}$. Подставим это выражение в (П9.2), умножим на $(\underline{T}^{-1})^T = \underline{P}^T$, получим:

$$\ddot{\underline{q}} + \underline{P}^T \underline{K} \underline{P} \underline{q} = \underline{0}. \quad (\text{П9.4})$$

Если $\underline{B} = \underline{P}^T \underline{K} \underline{P} \in R^{n \times n}$ и если $\underline{K} > 0$, то должно быть $\underline{B} > 0$. Можно заметить, что должна существовать ортогональная

матрица $\underline{Q}^T = \underline{Q}^{-1} \in R^{n \times n}$, такая что ортогональное преобразование \underline{B} имеет вид $\underline{Q}^T \underline{B} \underline{Q} = \underline{\Lambda}$, где $\underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$, которая состоит из n элементов $\lambda_j (j=1, 2, \dots, n)$, диагональная матрица $\underline{q} = \underline{Q} \underline{\eta}$, $\underline{\eta} \in R^n$. Пусть $\underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{Q}^{-1} \underline{Q} \in \underline{E}_n$, тогда

$$\ddot{\underline{\eta}} + \underline{\Lambda} \underline{\eta} = 0. \quad (\text{П9.5})$$

Решение уравнения (П9.5) устойчиво только при $\lambda_j > 0$. Т.е. требуется, чтобы $\underline{\Lambda} > 0$, а это возможно только при $\underline{K} > 0$. Поэтому сформулируем следующий вывод: если некоторое $\lambda_j = 0$ из-за пропорционально возрастающего со временем решения, система будет неустойчивой; если $\lambda_j < 0$, то решение будет экспоненциально возрастать, а система также будет неустойчивой.

Лемма 1. Если $\lambda \underline{M} \underline{u} = \underline{G} \underline{u}$, $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{G}^T = \underline{G}$, $\underline{M}, \underline{G} \in R^{n \times n}$, $\underline{u} \in R^n$, собственное решение является сопряженным мнимым комплексным числом с нулевой вещественной частью.

Доказательство:

Пусть собственные значения являются сопряженными комплексными числами λ и λ^* с соответствующими им векторами \underline{u} и \underline{u}^* . Таким образом, существует

$$\lambda \underline{M} \underline{u} = \underline{G} \underline{u}, \quad \lambda^* \underline{M} \underline{u}^* = \underline{G} \underline{u}^*.$$

Если можно записать конъюгатную транспозицию $\underline{u}^H = \underline{u}^{*T}$, то

$$\underline{u}^H \underline{M} \underline{u} = (\underline{M} \underline{u}^*)^T \underline{u} = \left(\frac{\underline{G}^* \underline{u}}{\lambda^*} \right)^T \underline{u} = -\frac{\underline{u}^H \underline{G} \underline{u}}{\lambda^*} = -\frac{\lambda}{\lambda^*} \underline{u}^H \underline{M} \underline{u}.$$

Видно, что $\lambda^* = -\lambda$ являются сопряженными комплексными числами с нулевыми вещественными частями, т.е. сопряженными мнимыми числами.

Вывод 1. Согласно лемме 1, при $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, \dots$ по крайней мере одно из значений функции будет равно нулю.

Это следует из того, что значения сопряженных переменных находятся в парах, а дополнительные могут быть равны нулю.

Если система обладает гироскопическим эффектом, уравнение принимает вид:

$$\underline{M}\ddot{x} + \underline{G}\ddot{x} = \underline{0}. \quad (\text{П9.6})$$

Здесь $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{G}^T = \underline{G}$, $\underline{M}, \underline{G} \in R^{n \times n}$, $\underline{u} \in R^n$. Прежде чем сформулировать теорему об устойчивости для уравнения вида, исследуем характеристики этих уравнений.

Если решение уравнения (П9.6) имеет вид $\underline{x} = \underline{u}e^{i\omega t}$, после замены получим $\lambda \underline{M}\underline{u} + \underline{G}\underline{u} = 0$, что как раз и является проблемой значений леммы 1. Поэтому будем считать, что собственными значениями сопряженного мнимого числа являются $i\omega_r$ и $-i\omega_r$, а соответствующие векторы \underline{u}_r и \underline{u}_r^* , которые являются сопряженными комплексными числами:

$$\underline{u}_r = \underline{y}_r + i\underline{z}_r, \quad \underline{u}_r^* = \underline{y}_r - i\underline{z}_r.$$

Выше обозначено $i = \sqrt{-1}$, $\underline{u}_r, \underline{y}_r, \underline{z}_r \in R^n$. Во-первых, мы получили взаимосвязь собственными значениями и характеристическим векторно-ортогональным условием. Можно видеть, что они выполнены.

$$i\omega_r \underline{M}(\underline{y}_r + i\underline{z}_r) + \underline{G}(\underline{y}_r + i\underline{z}_r) = \underline{0}, \quad r = 1, 2, \dots, n/2,$$

$$-i\omega_r \underline{M}(\underline{y}_r - i\underline{z}_r) + \underline{G}(\underline{y}_r - i\underline{z}_r) = \underline{0}, \quad r = 1, 2, \dots, n/2.$$

Следует отметить, что r возрастает от 1 до $n/2$, а приведенные выше два уравнения составляют n , что определяется их размерностью. Если n нечетное число, то приведенная выше запись будет сложнее. В то же время имеет место вывод 1. Приведенные выше две формулы можно переписать, выделив в них действительную и мнимую части:

$$\omega_r \underline{M}\underline{y}_r + \underline{G}\underline{z}_r = \underline{0}, \quad r = 1, 2, \dots, n/2, \quad (\text{П9.7})$$

$$-\omega_r \underline{M}\underline{z}_r + \underline{G}\underline{y}_r = \underline{0}, \quad r = 1, 2, \dots, n/2. \quad (\text{П9.8})$$

Выражение (П9.7) умножим на \underline{y}_k^\top , тогда в (П9.8) $r = k$ и умножим это выражение на \underline{z}_r справа, а затем снова (П9.8) на \underline{z}_k^\top , получим при $r = k$ выражение (П9.8) после умножения на \underline{y}_r , в итоге получим 4 выражения:

$$\omega_r \underline{y}_k^\top \underline{M}\underline{y}_r + \underline{y}_k^\top \underline{G}\underline{z}_r = \underline{0}, \quad r, k = 1, 2, \dots, n/2, \quad (\text{П9.9})$$

$$-\omega_k \underline{z}_k^\top \underline{M}\underline{z}_r + \underline{y}_k^\top \underline{G}\underline{z}_r = \underline{0}, \quad r, k = 1, 2, \dots, n/2, \quad (\text{П9.10})$$

$$-\omega_r \underline{z}_k^\top \underline{M}\underline{z}_r + \underline{z}_k^\top \underline{G}\underline{y}_r = \underline{0}, \quad r, k = 1, 2, \dots, n/2, \quad (\text{П9.11})$$

$$\omega_k \underline{y}_k^\top \underline{M}\underline{y}_r + \underline{z}_k^\top \underline{G}\underline{y}_r = \underline{0}, \quad r, k = 1, 2, \dots, n/2. \quad (\text{П9.12})$$

Вычтем из выражения (П9.9) выражение (П9.12), а из (П9.10) вычтем (П9.11), получим:

$$(\omega_r - \omega_k)(\underline{y}_k^\top \underline{M}\underline{y}_r - \underline{z}_k^\top \underline{M}\underline{z}_r) = 0. \quad (\text{П9.13})$$

При условии равенства нулю:

$$\underline{y}_k^T \underline{M} \underline{y}_r = \underline{z}_k^T \underline{M} \underline{z}_r = 0, \quad r \neq k, \quad (\text{П9.14})$$

$$\underline{y}_k^T \underline{M} \underline{y}_r = \underline{z}_k^T \underline{M} \underline{z}_r = 1, \quad r = k. \quad (\text{П9.15})$$

В выражения (П9.14) и (П9.15) подставим выражения (П9.9) и (П9.12):

$$\underline{y}_k^T \underline{G} \underline{z}_r = \underline{z}_k^T \underline{G} \underline{y}_r = 0, \quad r \neq k, \quad (\text{П9.16})$$

$$\underline{y}_k^T \underline{G} \underline{z}_r = -\underline{z}_k^T \underline{G} \underline{y}_r = -\omega_r, \quad r = k. \quad (\text{П9.17})$$

В выражениях (П9.13) – (П9.17) $r, k = 1, 2, \dots, n/2$.

Аналогично можно получить:

$$(\omega_r + \omega_k) (\underline{z}_k^T \underline{M} \underline{y}_r + \underline{y}_k^T \underline{M} \underline{z}_r) = 0. \quad (\text{П9.18})$$

Таким образом:

$$\underline{z}_k^T \underline{M} \underline{y}_r = \underline{y}_k^T \underline{M} \underline{z}_r = 0, \quad r, k = 1, 2, \dots, n/2, \quad (\text{П9.19})$$

$$\underline{y}_k^T \underline{G} \underline{y}_r = \underline{z}_k^T \underline{G} \underline{z}_r = 0, \quad r, k = 1, 2, \dots, n/2. \quad (\text{П9.20})$$

Выражения (П.14) – (П9.17) и (П9.19), выражение (П9.20) является условием ортогональности вектора, если массив \underline{U} определяется как:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 & \underline{z}_1 & \underline{y}_2 & \underline{z}_2 & \dots & \underline{y}_{n/2} & \underline{z}_{n/2} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}. \quad (\text{П9.21})$$

Условие ортогональности может быть также записано в более компактной форме:

$$\underline{U}^T \underline{M} \underline{U} = \underline{E}_n, \quad (\text{П9.22})$$

$$\underline{U}^T \underline{G} \underline{U} = \text{diag}(\underline{s}_1 \quad \underline{s}_2 \quad \dots \quad \underline{s}_{n/2}). \quad (\text{П9.23})$$

Здесь \underline{E}_n – единичная матрица размером $n \times n$.

$$s_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{П9.24})$$

Решение уравнения (П9.6) также можно найти, используя матрицу и условие ортогональности:

$$\underline{X} = \underline{U} \underline{\eta}. \quad (\text{П9.25})$$

Здесь $\underline{\eta} \in R^n$ – новая переменная. Выражение (П9.25) заменим выражением (П9.6), а затем умножим на \underline{U}^T , учитывая выражение (П9.22) и (П9.23), получим:

$$\ddot{\underline{\eta}} + \text{diag}(\underline{s}_1 \quad \underline{s}_2 \quad \dots \quad \underline{s}_{n/2}) \dot{\underline{\eta}} = \underline{0}. \quad (\text{П9.26})$$

Запишем двумерное уравнение, соответствующее \underline{s}_1 из (П9.26):

$$\ddot{\eta}_1 - \omega_1 \eta_2 = 0, \quad \ddot{\eta}_2 + \omega_1 \eta_1 = 0.$$

Его решения:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a \sin \omega_1 t + b \cos \omega_1 t, \\ \eta_2 &= c \sin \omega_1 t + d \cos \omega_1 t. \end{aligned}$$

Здесь a, b, c, d – константы интегрирования, определяемые из начальных условий. Приведенные выше два уравнения показывают, что если $\underline{s}_1 \quad \underline{s}_2 \quad \dots \quad \underline{s}_{n/2}$ ненулевые матрицы, то система уравнений (П9.6) устойчива по Ляпунову. Или ранг \underline{G} является n -мерным и система является устойчивой. Тогда существует следующая теорема.

Теорема 9.3. Система $\underline{M}\ddot{x} + \underline{G}\dot{x} = 0 \quad \underline{M}^T = \underline{M} > 0, \quad \underline{G}^T = \underline{G},$
 $\underline{M}, \underline{G} \in R^{n \times n}, \quad \underline{x} \in R^n$ тогда и только тогда является устойчивой, если $\text{rank } \underline{G} = n$.

Если система не содержит \underline{G} , то выражение (П9.1) описывает систему с затухающими колебаниями.

$$\underline{M}\ddot{x} + \underline{D}\dot{x} + \underline{K}x = 0. \quad (\text{П9.27})$$

Здесь $\underline{M}^T = \underline{M}, \quad \underline{D}^T = \underline{D}, \quad \underline{K}^T = \underline{K}, \quad \underline{M}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n \times n}, \quad \underline{x} \in R^n$.
 Получим следующую теорему.

Теорема 9.4. Если система динамики системы имеет вид (П9.27), где $\underline{M}^T = \underline{M}, \quad \underline{D}^T = \underline{D}, \quad \underline{K}^T = \underline{K}, \quad \underline{M}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n \times n}$ и она статически устойчива (т. е. $\underline{K} > 0$) и имеет полное затухание (т. е. $\underline{D} > 0$), то система асимптотически устойчива.

Рассмотрим выражение (П9.3) как функцию Ляпунова, которую можно получить по предыдущей методике:

$$\dot{v} = -\dot{x}^T \underline{D} \dot{x}.$$

Очевидно, что только при $\underline{D} > 0$ указанное выше выражение будет отрицательно, а система асимптотически устойчивой. Однако когда выражение (П9.3) есть функция Ляпунова, то добавляется условие $\underline{K} > 0$ (см. Приложение 8, раздел 1) ($\underline{M} > 0$).

Требования $\underline{D} > 0$ и $\underline{K} > 0$ часто не могут быть удовлетворены полностью. Однако системы, которые не удовлетворяют этому требованию полностью, иногда устойчивы, а теорема 9.4 является лишь достаточным условием устойчивости системы. Другая теорема об устойчивости системы (П9.27) может быть описана следующим образом.

Теорема 9.5. Система, описываемая выражением (П9.27), где $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{D}^T = \underline{D}$, $\underline{K}^T = \underline{K}$, $\underline{M}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n \times n}$, тогда и только тогда устойчива, если $\underline{D} \neq 0$ и

$$\text{rank} \left[\underline{D} \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{D} (\underline{K} \underline{M}^{-1})^2 \underline{D} \dots (\underline{K} \underline{M}^{-1})^{n-1} \underline{D} \right] = n. \quad (\text{П9.28})$$

Если $\underline{D} = 0$, выражение (П9.1) является консервативной гироскопической системой.

$$\underline{M}\ddot{x} + \underline{G}\dot{x} + \underline{K}x = \underline{0}. \quad (\text{П9.29})$$

В то же время мы можем получить следующую теорему.

Теорема 9.6. Если система описывается выражением (П9.29) и $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{G}^T = \underline{G}$, $\underline{K}^T = \underline{K}$, $\underline{M}, \underline{G}, \underline{K} \in R^{n \times n}$, $\underline{K} > 0$, то она статически устойчива при $\underline{K} > 0$ (статическая устойчивость). Если выражение (П9.3) является функцией Ляпунова, то можно считать, что выражение (П9.29) имеет вид

$$\dot{v} = -\dot{x}^T (\underline{M}\ddot{x} + \underline{K}x) = -\dot{x}^T \underline{G}\dot{x}. \quad (\text{П9.30})$$

Так как $\underline{G}^T = -\underline{G}$, то $\dot{v} = 0$.

Это означает, что система вида (П9.29) будет устойчива, когда она устойчива по Ляпунову.

Действительно, теорема (П9.6) является лишь достаточным условием устойчивости выражения (П9.29). Система, удовлетворяющая этой теореме, устойчива и не всегда неустойчива, если она не удовлетворяет ее условию. Но эта форма проста в применении. Достаточность теоремы 9.6 иллюстрируется простым примером.

Пример двумерной системы.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{П9.31})$$

Его характеристическое уравнение:

$$s^4 + (k_1 + k_2 + g^2)s^2 + k_1k_2 = 0. \quad (\text{П9.32})$$

Если записать его в следующем виде

$$s^4 + b_1s^2 + b_0 = 0. \quad (\text{П9.33})$$

тогда условие устойчивости системы будет иметь вид:

$$b_1 > 0, \quad b_0 > 0, \quad b_1^2 - 4b_0 > 0. \quad (\text{П9.34})$$

Условие устойчивости параметра в выражении (П9.32) становится:

$$b_1 = k_1 + k_2 + g^2 > 0, \quad (\text{П9.35a})$$

$$b_2 = k_1k_2 > 0, \quad (\text{П9.35б})$$

$$s_1 = (k_1 - k_2)^2 + 2g(k_1 + k_2) + g^4 > 0. \quad (\text{П9.35в})$$

Если k_1 и k_2 – соответственно горизонтальная и вертикальная оси, то с помощью уравнений (П9.35) можно построить области устойчивости, представленные на рис. П9.1. Здесь $k_1 + k_2 + g^2 = 0$ – уравнение прямой с углом наклона -45° . Область над наклонной линией – область устойчивости; $k_1 k_2 > 0$ означает, что первый и третий квадранты являются устойчивыми областями; $s_1 = 0$ – парабола в третьем квадранте, а через точки касания горизонтальной и вертикальной осей параболы проходит наклонная. В целом, область устойчивости – области в первом и третьем квадрантах. В третьем квадранте – треугольник вблизи начала координат.

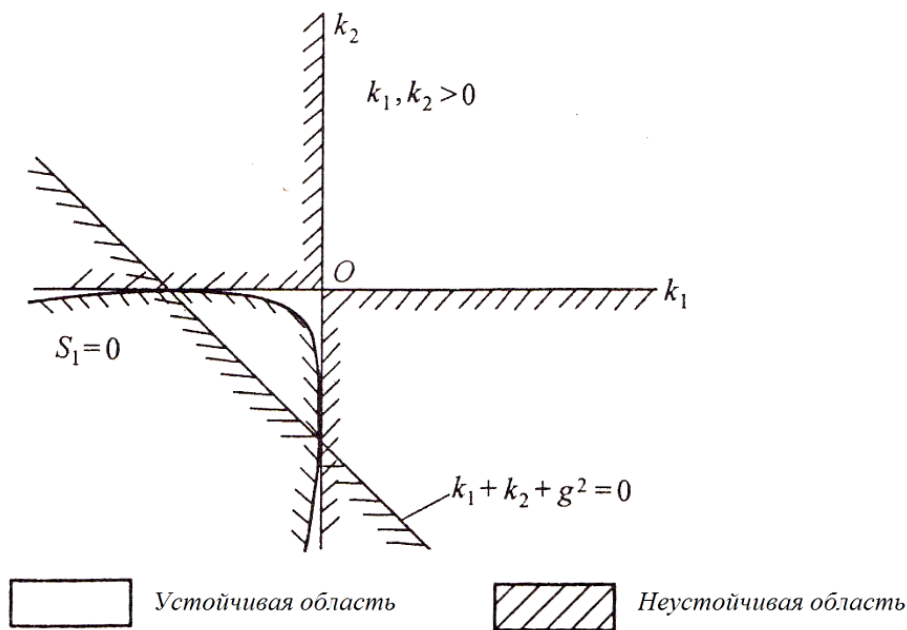


Рис. П9.1. Пример разбиения пространства на устойчивые и неустойчивые области

Однако если использовать теорему П9.5, добавляется условие устойчивости $\underline{K} > 0$ или в данном примере:

$$k_1 > 0, k_2 > 0. \quad (\text{П9.36})$$

Теорема П9.6 дает лишь достаточные условия устойчивости. В таком случае на рис. П9.1 только первый квадрант является областью устойчивости и не включает третий квадрант.

Применение же теоремы Штурма для выражения (П9.29) дает необходимые и достаточные условия устойчивости для двумерных систем.

Теорема 9.7. Для системы вида $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{G}^T = -\underline{G}$, $\underline{K}^T = \underline{K}$, $\underline{M}, \underline{G}, \underline{K} \in R^{n \times n}$, $\underline{K} > 0$ тогда и только тогда, если

$$V(-\infty) = n, \quad (\text{П9.37})$$

$$V(0) = 0. \quad (\text{П9.38})$$

Здесь $V(\mu)$ имеет следующий вид:

$$\{f_n(\mu), f_n'(\mu), r_1(\mu), \dots, r_v(\mu)\}. \quad (\text{П9.39})$$

$f_n(\mu)$ является характеристическим уравнением выражения (П9.29) $\det(s^2 \underline{M} + s \underline{G} + \underline{K})$, заменим в нем s^2 на μ , получим:

$$f_n(\mu) = \det(\mu \underline{M} + \sqrt{\mu} \underline{G} + \underline{K}). \quad (\text{П9.40})$$

Обозначим $f_n'(\mu)$ — производная от $f_n(\mu)$ по μ , т. е. $f_n'(\mu) = df_n(\mu)/d\mu$; $-r_1(\mu)$, $f_n(\mu)/f_n'(\mu)$, $f_n'(\mu)/r_1(\mu)$ и так далее: $-r_v(\mu)$, $r_{v-2}(\mu)/r_{v-1}(\mu)$.

Критерий устойчивости системы (П9.29), следующий из теоремы П9.7, представлен в таблице П9.1.

Таблица П9.1. Критерии устойчивости для гироскопических систем

n	$f_n(\mu)$	
2	$b_2\mu^2 + b_1\mu + b_0$	$(b_2 > 0)b_1, b_0, s_1 > 0$ $s_1 = b_1^2 - 4b_0b_2$
3	$b_3\mu^3 + b_2\mu^2 + b_1\mu + b_0$	$(b_1 > 0)b_1, b_0, s_2, s_3, s_4 > 0$ $s_2 = b_1b_2 - 9b_2b_3$ $s_3 = b_2^2 - 3b_1b_3$ $s_4 = b_1^2b_2^2 - 4b_2^3b_0 - 4b_3b_1^3 - 27b_0^2b_3^2 + 18b_1b_2b_3$
		$(b_3 > 0)b_0, b_2, s_3, s_4, s_5 > 0$ $s_5 = b_1b_2^2 - 4b_1^2b_3 + 3b_1b_2b_3$
		$(b_3 > 0)b_0, b_1, b_2, s_4 > 0$

Если в уравнение (П9.29) добавить демпфирующий член, то получим общее уравнение, обычно используемое в динамике углового движения (П9.1). Для анализа его устойчивости существуют следующие теоремы.

Теорема 9.8. Система вида $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{G}^T = -\underline{G}$, $\underline{K}^T = \underline{K}$, $\underline{D}^T = \underline{D}$, $\underline{M}, \underline{G}, \underline{D}, \underline{K} \in R^{n \times n}$, асимптотически устойчива тогда и только тогда, если $\underline{D} > 0$, $\underline{K} > 0$.

В теореме выражение (П9.3) рассматривается как функция Ляпунова, тогда:

$$\dot{v} = -\dot{x}^T (\underline{M}\ddot{x} + \underline{K}x) = -\dot{x}^T (\underline{G} + \underline{D})\dot{x} = -\dot{x}^T \underline{D}\dot{x}.$$

Видно, что в приведенном выше выражении требуется, чтобы $\underline{D} > 0$, а в выражении функции Ляпунова требуется $\underline{K} > 0$.

Теорема 9.8 является достаточным условием устойчивости системы (П9.1). Однако Хьюз и Гарднер, рассмотрев необходимые условия, получили следующую теорему.

Теорема 9.9. Система вида $\underline{M}^T = \underline{M} > 0$, $\underline{D}^T = \underline{D}$, $\underline{G}^T = -\underline{G}$, $\underline{K}^T = \underline{K}$, при $\underline{K} > 0$, $\underline{D} \nlessgtr \in R^{n \times n}$ и

$$\text{rank} \left[\underline{C}^T \underline{A}^T \underline{C}^T (\underline{A}^T)^2 \underline{C}^T \dots (\underline{A}^T)^{n-1} \underline{C}^T \right] = n. \quad (\text{П9.41})$$

является асимптотически устойчивой (доказательство теоремы опустим).

$$\begin{aligned} \underline{A} &\in R^{2n \times 2n}, \quad \underline{C} \in R^{n \times 2n}. \\ \underline{A} &= \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{E} \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} (\underline{D} + \underline{G}) \end{bmatrix}, \\ \underline{C} &= [\underline{0} \quad \underline{D}]. \end{aligned}$$

Здесь \underline{E} – единичная матрица размером $n \times n$.

Учебное издание

*Лю Дунь,
Чжао Цзюнь*

**ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО
ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

Учебное пособие

Под общей редакцией
Заслуженного деятеля науки Российской Федерации,
доктора технических наук, профессора В. В. Салмина

Перевод с китайского
канд. техн. наук, доцент К. В. Петрухина;
канд. техн. наук, доцент Е. И. Сомов

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 17.10.2023. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 36,25.

Тираж 50 экз. Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.