

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. В. АЛЕКСЕЕВ

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование

САМАРА

Издательство Самарского университета
2021

УДК 531.01(075)+519.876(075)

ББК 22.21я7

А 471

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. А. В. Крамлих,
канд. техн. наук М. В. Борисов

Алексеев, Алексей Владимирович

А 471 Движение систем твердых тел с полостями, заполненными жидкостью: учебное пособие / *А.В. Алексеев.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2021 – 60 с.: 17 ил.

ISBN 978-5-7883-1634-5

В данном пособии рассмотрены основные методы построения математических моделей механических систем, состоящих из одного или нескольких твердых тел, содержащих полости, целиком заполненные жидкостью различной вязкости и плотности. Приводятся методы аналитического и численного исследования приведенных уравнений движения.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование, в рамках дисциплин по математическому моделированию и выполнения выпускной квалификационной работы.

Подготовлено на кафедре теоретической механики Самарского университета.

УДК 531.01(075)+519.876(075)

ББК 22.21я7

ISBN 978-5-7883-1634-5

© Самарский университет, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Основные обозначения	7
1. Проблема пространственного движения твердых тел с жидкостью	9
1.1. Состояние проблемы.....	9
1.2. Постановка задачи и методы исследования.....	13
2. Пространственное движение твердого тела с жидкостью малой вязкости	16
2.2. Плоские колебания маятника с жидкостью. Приближенное аналитическое решение уравнения движения	19
2.3. Движение космического аппарата с жидким топливом вокруг центра масс под действием гравитационного момента	25
3. Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости	30
3.1. Математическая модель движения	30
3.2. Уравнения движения системы двух тел с вязкой жидкостью.....	39
3.3. Приближенное аналитическое решение уравнений движения	41
4. Приведение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью, к системам твердых тел с вязким трением	45
4.1. Математические модели движения	45
4.2. Сопоставление и приведение математических моделей....	47
4.3. Численное моделирование движения систем твердых тел с жидкостью	50
Заключение.....	57
Библиографический список	58

ВВЕДЕНИЕ

Применение систем управления, высокоточных приборов и чувствительного оборудования требует исследования влияния на движение космических аппаратов (КА) малых возмущений. Подобные возмущения, в том числе, могут быть вызваны влиянием жидкого топлива, находящегося на борту КА с жидкостными ракетными двигателями. Влияние жидкости на поведение КА обусловлено рядом причин. Так в частично заполненном баке имеются колебания свободной поверхности жидкости, из-за которых происходит относительное перемещение центра масс аппарата, а также изменение других инерционно-массовых характеристик. Эта проблема может решаться с помощью подавливающих мембран, которые исключают свободную поверхность. Другим возмущающим фактором является само внутреннее движение жидкости в баке, оказывающее влияние на кинетический момент корпуса КА, а также изменяющее другие параметры движения в связи с наличием внутреннего вязкого трения. Возможны и другие факторы. В данном пособии предлагаются варианты исследования движения КА с жидким топливом, целиком заполняющем бак. Рассматривается пространственное движение КА с жидкостью большой и малой вязкости, при этом КА моделируется как одним твердым телом, так и системой тел.

Для исследования движения КА в качестве механической модели принимается твердое тело с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью. Пространственное движение КА, движущегося по орбите под действием гравитационного момента во многом подобно движению физического маятника. Поэтому большое внимание в настоящей работе уделяется изучению динамики плоских колебаний твердого тела с жидкостью.

Также приводится исследование движения гиростата с жидкостью, представляющего собой систему, состоящую из

основного твердого тела и массивных маховиков, использующихся для гироскопической стабилизации пространственного положения. В данной работе гириостат состоит из четырех твердых тел: несущего тела с жидкостью и трех роторов, вращающихся вокруг осей, совпадающих с главными осями инерции системы.

Проблеме исследования движения систем тел с жидкостью в научной литературе уделяется большое внимание ввиду ее практической важности и возможности непосредственного применения результатов исследования для анализа динамики соосных КА и спутников-гириостатов. основополагающие результаты, связанные с анализом движения тел с жидким наполнением, получены отечественными и зарубежными учеными, в том числе, Жуковским Н.Е. [2], Черноусько Ф.Л. [5], Моисеевым Н.Н., Румянцевым В.В., Рабиновичем Б.И., Наримановым Г.С., Докучаевым Л.В., Clebsch A., Halphen G., Kotter F., Liouville R., Minkowski H., Stekloff V.A., Weber H. и многими другими.

В первой главе осуществляется краткий обзор полученных к настоящему времени результатов, опубликованных различными учеными, описывается круг задач, рассматриваемых в диссертационной работе, и указываются методы их решения.

Во второй главе исследуется пространственное движение твердого тела с полостью, заполненной жидкостью малой вязкости. Для общего случая строится векторное интегро-дифференциальное уравнение движения, которое применяется для анализа движения физического маятника с полостью с жидкостью, а также для исследования движения спутника с жидким топливом на борту. Находятся аналитические зависимости параметров движения от времени. Проводится анализ влияния параметров жидкости малой вязкости на пространственное движение рассматриваемых систем.

В третьей главе исследуется движение спутника-гириостата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости. Спутник состоит из несущего тела с полостью и трех роторов, вращающихся

относительно несущего тела вокруг своих осей симметрии. На основе теоремы об изменении кинетического момента составляются уравнения движения системы относительно центра масс. Для случая вращения одного ротора уравнения приводятся к безразмерному виду, и определяется их приближенное аналитическое решение. Проводится анализ влияния жидкости большой вязкости.

В четвертой главе рассматривается пространственное движение вокруг центра масс спутника-гиростата с полостью, содержащей жидкость, при малых числах Рейнольдса. Математическая модель движения гиростата, содержащего полость с жидкостью, приводится к двум более простым: к модели гиростата с вязким трением между телом-носителем и роторами и к модели твердого тела, содержащего внутри сферический демпфер. Переход от гиростата с полостью, содержащей жидкость, имеющего бесконечное число степеней свободы, к указанным системам, обладающим шестью степенями свободы, важен с прикладной точки зрения, так как существенно облегчает анализ динамики движения спутников-гиростатов и космических аппаратов с двойным вращением, содержащих жидкостные ракетные двигатели, на пассивных участках их орбитального движения.

Разработанные математические модели могут применяться для описания движения простых и составных КА, содержащих жидкость различной вязкости, а найденные аналитические решения представлены в достаточно общем виде, что определяет возможность использования их в других областях науки и техники.

Основные обозначения

A, B, C – моменты инерции твердого тела относительно главных осей инерции;

\mathbf{J} – тензор инерции;

\mathbf{Q} – вектор количества движения;

\mathbf{K} – вектор кинетического момента;

\mathbf{F} – главный вектор внешних сил;

\mathbf{M} – главный момент внешних сил;

\mathbf{r} – радиус вектор какой-либо точки;

ρ – плотность жидкости;

ν – кинематическая вязкость жидкости;

\mathbf{v} – скорость какой-либо точки системы;

m – масса;

$\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости;

p, q, r – компоненты вектора угловой скорости в связанной системе координат;

ψ, θ, φ – углы Эйлера;

δ_i – угол относительного закручивания ротора;

σ_i – скорость относительного закручивания ротора;

D – параметр полости;

\mathbf{D} – тензор, задающий форму полости;

\mathbf{a}, \mathbf{b} – вспомогательные векторы, используемые для определения кинетического момента жидкости малой вязкости;

\mathbf{L} – кинетический момент жидкости большой вязкости;

t – время;

τ – безразмерное время;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – малые параметры;

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – величины, характеризующие гироскопические моменты;

I – момент инерции динамически симметричного ротора относительно оси симметрии или сферического демпфера относительно диаметра;

P, Q, R, Σ_i – безразмерные компоненты угловой скорости и скорости относительного закручивания;

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ – безразмерные моменты инерции;

$X^{<i>}$ – коэффициент при ε^i в разложении по степеням ε величины X ;

a, b, c, d – вспомогательные величины, используемые при решении дифференциальных уравнений.

1. ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ЖИДКОСТЬЮ

В данной главе осуществляется краткий обзор полученных к настоящему времени результатов, опубликованных различными учеными, описывается круг задач, рассматриваемых в пособии, и указываются методы их решения.

1.1. Состояние проблемы

Проблема исследования движения твердых тел с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью, была и остается одной из важных проблем теоретической механики, имеющей большое практическое значение для задач современной механики космического полета. Среди первых научных исследований в рамках указанной проблемы следует указать работы Жуковского Н.Е. [2], в которых, в основном, рассматривалось движение тел с идеальной невязкой жидкостью, целиком заполняющей полость. В работе [2] приведены уравнения пространственного движения твердого тела с идеальной жидкостью:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= A \frac{dp}{dt} + \frac{dK_x}{dt} + (C - B)qr + K_zq - K_yr, \\ M_y &= B \frac{dq}{dt} + \frac{dK_y}{dt} + (A - C)rp + K_xr - K_zp, \\ M_z &= C \frac{dr}{dt} + \frac{dK_z}{dt} + (B - A)pq + K_y p - K_x q, \end{aligned} \right\}$$

где A, B, C – моменты инерции относительно осей связанной с телом системы координат, M_x, M_y, M_z – проекции моментов внешних сил, p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела, K_x, K_y, K_z – проекции главного момента количества движения жидкости на оси связанной с телом системы координат. Для

некоторых форм полостей и частных случаев твердого тела получены аналитические решения уравнений движения.

Движение тел с жидкостью, имеющей свободную поверхность, рассматривалось в работах Моисеева Н.Н. и Румянцева В.В. В частности получены уравнения движения твердого тела с жидкостью:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} &= \mathbf{K}, \\ \frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{Q} &= \mathbf{M}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= \mathbf{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \end{aligned}$$

где \mathbf{Q} – вектор количества движения системы, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела, \mathbf{K} и \mathbf{L} – главный вектор и главный момент всех приложенных к системе активных сил, \mathbf{K} – кинетический момент системы, \mathbf{v}_0 – скорость центра подвижной системы отсчета, \mathbf{v} – скорость какой-либо точки системы, \mathbf{F}_m – вектор массовой силы, отнесенный к единице массы, p – гидродинамическое давление, ρ – плотность жидкости, кроме того, к последним уравнениям необходимо добавить уравнение несжимаемости (уравнение связи) и граничные условия. Также исследуются различные частные движения твердых тел с жидкостью на устойчивость. Например, для винтового движения получены условия устойчивости:

$$A_* > B_*, A_* > C_*,$$

то есть, ось вращения должна быть малой осью центрального эллипсоида инерции преобразованного тела.

В работах Нариманова Г.С., Докучаева Л.В. и Луковского И.А. рассмотрено движение симметричного гироскопа, полость которого частично заполнена жидкостью. Например, выводятся уравнения возмущенного движения системы тело-жидкость:

$$m(\dot{v} + i\omega_0 v) + m^* (\ddot{s} + 2i\omega_0 \dot{s} - \omega_0^2 s) = F,$$

$$A\dot{\omega} - i[(C - A)\omega_0 + C^0\Omega]\omega + iz_0 m^* (\ddot{s} + 2i\omega_0 \dot{s} - \omega_0^2 s) = M,$$

$$\ddot{s} + (\beta - i\chi)\omega_0 \dot{s} + k\chi(\Omega + \omega_0)^2 s + \dot{v} + i\omega_0 v - iz_0(\dot{\omega} + i\omega_0\Omega) = 0,$$

где m – суммарная масса твердого тела с жидкостью, m^* – присоединенная масса жидкости, равная половине ее физической массы, A – момент инерции тела с жидкостью, затвердевшей в невозмущенном состоянии, относительно поперечной оси, C – момент инерции той же системы относительно продольной оси, C^0 – момент инерции жидкости, затвердевшей в невозмущенном состоянии, относительно продольной оси, Ω – угловая скорость жидкости относительно тела, ω_0 – угловая скорость тела в инерциальном пространстве. Следующие величины заданы в комплексной плоскости своими компонентами: v – вектор скорости центра масс тела, ω – вектор абсолютной угловой скорости, s – вектор перемещения цилиндрической свободной поверхности жидкости, F – главный вектор системы внешних сил, M – главный момент системы внешних сил.

Подобная задача в приложении к космической технике рассматривается в работах Рабиновича Б.И., где исследуются стационарные вращения модели КА с полостью, частично заполненной жидкостью. Например, приводится уравнение вращательного движения твердого тела с жидкостью вокруг неподвижной оси:

$$\ddot{s} + (\beta - i\chi)\omega_0 \dot{s} + k\chi(\Omega + \omega_0)^2 s = 0.$$

В ряде работ исследуется влияние магнитогидродинамических (МГД) эффектов на движение КА с баками, заполненными жидким топливом. В частности, рассматривается возможность использования МГД-эффектов для создания гировертикали с маятниковой коррекцией. Предлагается использовать в качестве исполнительных элементов системы коррекции управляемые электромагниты. Показано, что математическая модель системы может быть сведена при некоторых упрощающих предположениях

к математической модели обычной гировертикали с маятниковой коррекцией. Рассмотрены некоторые динамические характеристики разомкнутой системы, включающей гироскоп с замагниченной жидкостью.

В трудах Румянцева В.В. и Соболева С.Л. рассматриваются вращательные движения твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, и исследуется устойчивость таких движений.

В некоторых работах описываются движения тел с жидкостью и жидкости внутри полости на основании подхода, основанного на вариационных методах. Предлагаются вариационные методы решения спектральной задачи, возникающей при свободных колебаниях (плесканиях) жидкости в усеченных конических баках кругового поперечного сечения. Приближенные решения найдены в аналитическом виде методом Ритца-Трефтца по двум типам координатного базиса. Для различных конфигураций усеченных конических баков (прямых и перевернутых) по обеим вариационным схемам проведены численные эксперименты по определению частотных параметров свободных колебаний жидкости.

В ряде работ исследуется движение твердых тел и расположенной в них жидкости при наличии упругих оболочек. В частности, Л.В. Докучаев составляет общие уравнения пространственного движения твердого и упругого тел с полостями, содержащими жидкость, исследует устойчивость некоторых стационарных режимов и представляет необходимые условия устойчивости.

Работы Черноусько Ф.Л. (например, [5]) посвящены исследованиям движений твердых тел с неидеальной жидкостью при больших и малых числах Рейнольдса. При этом методы составления уравнений пространственного движения тел с жидкостью разделены в зависимости от величины кинематической вязкости. При большой вязкости уравнения движения сводятся к обыкновенным дифференциальным, а при малой – к интегро-

дифференциальным. В частности, в работе [5] было получено уравнение плоского движения маятника с жидкостью большой вязкости:

$$J\ddot{\varphi} - M(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\rho D}{\nu J} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}} \frac{M}{J} + \frac{\partial M}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right),$$

где $M(\varphi, \dot{\varphi})$ – заданный момент внешних сил относительно оси подвеса маятника, ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости, заполняющей полость, D – параметр, задающий форму полости, J – момент инерции маятника относительно оси подвеса. В этой же работе получены уравнения движения твердого тела, содержащего демпфер, с вязким трением:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}^e, \quad \mathbf{K} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + I(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}), \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1 &= -k(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}), \end{aligned}$$

здесь \mathbf{K} – вектор кинетического момента всей системы, $\hat{\mathbf{J}}$ – тензор инерции твердого тела, \mathbf{M}^e – момент внешних сил, действующих на тело, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, $\boldsymbol{\omega}_1$ и I – угловая скорость демпфера и его момент инерции относительно диаметра, k – коэффициент, задающий момент трения, возникающий между телом и демпфером.

Как видно из вышесказанного, к настоящему времени решено много задач, касающихся вопросов пространственного движения твердых тел с жидкостью. Однако остается недостаточно исследованной проблема динамики движения систем твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, при наличии внутреннего взаимодействия между телами.

1.2. Постановка задачи и методы исследования

Несмотря на широкий спектр полученных к настоящему времени результатов исследования динамики пространственного движения твердых тел, проблема изучения движения систем

твердых тел с полостями с жидкостью еще далека от своего завершения. В особенности это касается моделирования и анализа движения систем нескольких тел с полостями с жидкостью при наличии внутреннего взаимодействия тел, образующих систему. Как показывает представленный выше обзор, указанные вопросы к настоящему времени проработаны недостаточно. В этой связи можно указать на следующие задачи, которые планируется рассмотреть:

- 1) исследование плоских колебаний маятника и КА с жидкостью малой вязкости;
- 2) построение и сопоставление математических моделей пространственного движения гиростата с полостью, целиком заполненной жидкостью, твердого тела с внутренним сферическим демпфером и гиростата с вязким трением в рабочих элементах;
- 3) определение асимптотических зависимостей для параметров движения гиростата.

Для разработки математических моделей используются классические методы теоретической механики. В частности используются теорема об изменении кинетического момента и уравнения Лагранжа второго рода. Для построения уравнений движения твердого тела с жидкостью также используется классическая теория потенциального течения в приложении к внутренним задачам гидродинамики. При аналитическом решении дифференциальных уравнений движения применяются известные асимптотические методы Пуанкаре, Ван-дер-Поля и усреднения. Для численного решения использовались классические методы Рунге-Кутты.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается основная сложность исследования динамики твердых тел с полостями, заполненными жидкостью?

2. Назовите ученых, которые являются основоположниками исследований динамики твердых тел с полостями, заполненными жидкостью?
3. Для каких случаев Ф.Л. Черноусько получил наибольшее количество аналитических результатов?
4. Какие параметры жидкости влияют на динамику твердого тела с полостью?
5. В чем заключаются особенности результатов, полученных Жуковским Н.Е., Моисеевым Н.Н., Румянцевым В.В., Наримановым Г.С., Рабиновичем Б.И. и др.?

2. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

В данной главе исследуется пространственное движение твердого тела с полостью, заполненной жидкостью малой вязкости. Для общего случая строится векторное интегро-дифференциальное уравнение движения, которое применяется для анализа движения физического маятника с полостью с жидкостью, а также для исследования движения спутника с жидким топливом на борту. Находятся аналитические зависимости параметров движения от времени. Проводится анализ влияния параметров жидкости малой вязкости на пространственное движение рассматриваемых систем.

2.1. Математическая модель движения твердого тела с жидкостью малой вязкости

Рассмотрим движение вокруг неподвижной точки твердого тела с односвязной полостью H , полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Пусть $Oy_1y_2y_3$ – неподвижная система координат, а подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ свяжем с твердым телом. Для получения уравнений движения системы воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента, выбирая в качестве полюса неподвижную точку O твердого тела:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}^e. \quad (2.1)$$

Кинетический момент системы относительно неподвижной точки согласно [5] запишется в следующем виде:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^*. \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{J}_0 – тензор инерции твердого тела относительно неподвижной точки; \mathbf{J} – тензор присоединенных масс; $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости твердого тела; \mathbf{K}^0 – кинетический момент,

характеризующий непотенциальность движения жидкости; \mathbf{K}^* – кинетический момент, характеризующий вязкость жидкости.

Кинетический момент, характеризующий непотенциальность движения жидкости внутри полости, определяется формулой

$$\mathbf{K}^0 = \rho \int_H \mathbf{r} \times \mathbf{a} dv, \quad (2.3)$$

где H – объем жидкости, \mathbf{r} – радиус вектор. Вектор-функция \mathbf{a} зависит от формы полости и от начального распределения скоростей частиц жидкости и однозначно находится из условий:

$$\text{rota} = \text{rot}\mathbf{u}_0; \text{div}\mathbf{a} = 0 \text{ в } H; \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } S,$$

где \mathbf{u}_0 – вектор начального распределения скоростей частиц жидкости, H – объем полости, S – граница полости, \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности.

Кинетический момент, характеризующий неидеальность жидкости, определяется следующим образом:

$$\mathbf{K}^* = \frac{\rho\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \left[2\mathbf{b}\sqrt{t-t_0} + \mathbf{D} \int_{t_0}^t \frac{\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right], \quad (2.4)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i + \nabla\Phi_i) \cdot \mathbf{a} ds, \quad (2.5)$$

где \mathbf{e}_i – орты, задающие систему координат, связанную с телом,

$\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$ – оператор Гамильтона, Φ_i – потенциалы Жуковского,

зависящие только от формы полости [2]. Компоненты тензора \mathbf{D} , характеризующего форму полости, вычисляются по формуле

$$D_{ij} = \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i + \nabla\Phi_i) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_j + \nabla\Phi_j) ds. \quad (2.6)$$

В силу симметрии подынтегрального выражения в интеграле (2.6) тензор \mathbf{D} также симметричен ($D_{ij} = D_{ji}$). Очевидно, что связанную систему координат $Ox_1x_2x_3$ можно выбрать так, что тензор \mathbf{D} будет диагональным, то есть $D_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Согласно работе [5], вектор \mathbf{b} и тензор \mathbf{D} инвариантны по отношению к выбору полюса O , то

есть не зависят от положения полости внутри тела. Тензор \mathbf{D} характеризует диссипацию энергии в вязкой жидкости, заключенной в полости, и зависит только от формы полости.

После подстановки формул (2.2)–(2.4) в уравнение (2.1) с учетом (2.5) и (2.6) и вычисления производных по времени получим интегро-дифференциальное векторное уравнение сферического движения тела с жидкостью малой вязкости:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{a} dv + \\ & + \frac{\rho \sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mathbf{b}}{\sqrt{t-t_0}} + \mathbf{D} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{\boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] = \mathbf{M}^e. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (2.7) справедливо с погрешностью порядка ν на интервале времени $(t - t_0) \sim 1$ [5].

Если в начальный момент течение потенциально всюду, кроме области пограничного слоя, а функции

$$\int_{t_0}^t \frac{\omega_i(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

ограничены величиной порядка угловой скорости ω вращения твердого тела при всех $t \geq t_0$, что означает отсутствие вращательного движения (то есть движение тела представляет собой колебания около некоторого среднего положения), тогда уравнение движения будет справедливо и при $t - t_0 \gg 1$. В этом наиболее важном случае имеем $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{K}^0 = 0$, $\mathbf{b} = 0$, а \mathbf{K}^* есть величина порядка $\nu^{1/2}$ по сравнению с $(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}) \cdot \boldsymbol{\omega}$ в (2.2) при всех $t \geq t_0$.

Отметим, что соотношение (2.7) справедливо не только для твердого тела с полостью, но и для системы тел с несколькими полостями. Для этого необходимо просуммировать кинетические моменты жидкости каждой полости. Уравнение (2.7) можно использовать для анализа плоских колебаний физического маятника с полостью, целиком заполненной жидкостью малой

вязкости, а также для исследования пространственного движения КА с жидким топливом в его орбитальном движении.

2.2. Плоские колебания маятника с жидкостью.

Приближенное аналитическое решение уравнения движения

Рассмотрим плоское движение маятника, состоящего из твердого шара радиусом R , подвешенного на невесомом стержне, под действием силы тяжести \mathbf{G} (рисунок 1). Внутри шара расположена сферическая полость, с центром, совпадающим с центром шара, и радиусом $r \leq R$. Полость заполнена жидкостью с плотностью ρ и кинематической вязкостью $\nu \ll 1$.

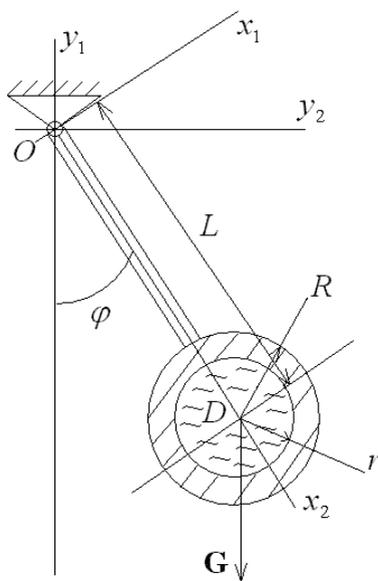


Рисунок 1 – Схема маятника с жидкостью

Пусть маятник совершает колебательные движения, а течение жидкости в начальный момент отсутствует, тогда $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{b} = 0$, а уравнение (2.7) приобретает вид:

$$(J_0 + J)\ddot{\varphi} + \frac{\rho\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}} D \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + GL \sin \varphi = 0, \quad (2.8)$$

где $D = 8\pi^4/3$ [5].

Пусть амплитуда колебаний маятника будет малой, тогда уравнение (2.8) можно переписать в виде:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = -\varepsilon_1 \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (2.9)$$

где

$$k^2 = \frac{GL}{J_0 + J}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho E \sqrt{v}}{(J_0 + J)\sqrt{\pi}}.$$

Учитывая, что величина $\rho D / ((J_0 + J)\sqrt{\pi}) \sim 1$, а вязкость $v \ll 1$, величина $\varepsilon_1 \ll 1$ является малой.

Выберем в качестве начальных условий движения: $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, тогда в соответствии с процедурой усреднения [4], в правую часть уравнения (2.9) подставим решение соответствующего однородного уравнения:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \quad \dot{\varphi} = -\varphi_0 k \sin kt. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = \varepsilon_1 \varphi_0 k F(t), \quad (2.11)$$

где

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (2.12)$$

Так как подынтегральная функция в (2.12) ограничена и интегрируема, то согласно [3] несобственный интеграл вычисляют по формуле,

$$\int_0^t \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \lim_{X \rightarrow t-0} \int_0^X \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{X-\tau}}.$$

Будем аппроксимировать функцию (2.12) интегралами Френеля [6]:

$$F(t) \approx k \left(C(kt) - \frac{1}{2} \right). \quad (2.13)$$

где

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du.$$

Разложим функцию (2.13) в асимптотический ряд [6]:

$$F(t) \approx k \left[\frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}} \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{(2kt)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2kt)^4} - \dots \right) - \frac{\cos kt}{\sqrt{2\pi kt}} \left(\frac{1}{2kt} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2kt)^3} + \dots \right) \right]$$

и будем учитывать только первое слагаемое:

$$F(t) \approx k \frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}}, \quad (2.14)$$

тогда уравнение (2.9) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = \varepsilon_1 \varphi_0 k^2 \frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}}. \quad (2.15)$$

На рисунке 2 показано соответствие функции (2.12) аппроксимации (2.14).

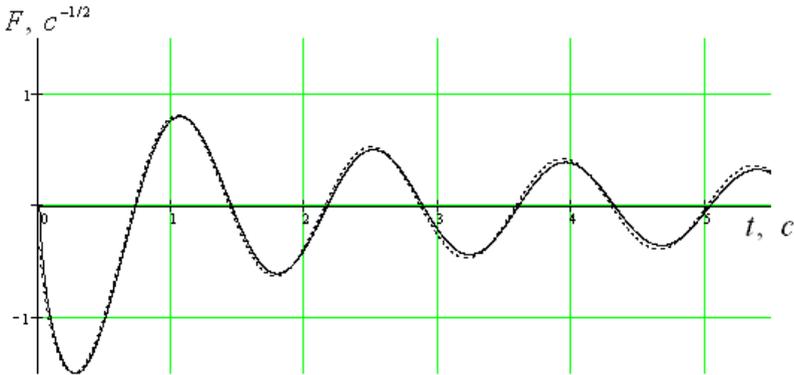


Рисунок 2 – Зависимость функции $F(t)$ от времени:

————— – численный расчет по формуле (2.12),

----- – аппроксимация (2.14)

Умножим уравнение (2.15) на $d\varphi$ и приведем его к виду:

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} + k^2 \varphi d\varphi = \varepsilon_1 A \frac{\sin kt}{\sqrt{t}} \dot{\varphi} dt,$$

где $A = \varphi_0 k^2 / \sqrt{2\pi k}$. Учитывая (2.10), заменим в правой части последнего уравнения $\dot{\varphi}$ и получим:

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} + k^2 \varphi d\varphi = -\varepsilon_1 A \varphi_0 k \frac{\sin^2 kt}{\sqrt{t}} dt.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим интеграл энергии:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + k^2 \frac{\varphi^2}{2} = E_0 - \varepsilon_1 A \varphi_0 k \left[\sqrt{t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} C \left(2 \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right]. \quad (2.16)$$

В силу малых возмущений в уравнении (2.11) будем считать амплитуду $\varphi_0 = \varphi_{\max}$ в (2.10) переменной величиной. Воспользуемся заменой переменных (2.10), в результате получим:

$$k^2 \frac{\varphi_{\max}^2}{2} = E_0 - \varepsilon_1 A \varphi_0 k \left[\sqrt{t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} C \left(2 \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right].$$

Возвращаясь к физическим величинам, выразим амплитуду колебаний:

$$\varphi_{\max}(t) = \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{\rho D \sqrt{v}}{(J_0 + J) \sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\frac{2kt}{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2}} C \left(2 \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right]}. \quad (2.17)$$

На рисунке 3 изображены зависимости угла отклонения маятника от времени, полученные путем численного интегрирования уравнения (2.8) – пунктирная линия, и используя формулу (2.17) – сплошная линия.

Из выражения (2.16) видно, что полная механическая энергия исследуемой системы со временем уменьшается, что свидетельствует о демпфирующих свойствах неидеальной жидкости.

Исследуем влияние параметров системы на ее движение. На рисунках 4 и 5 изображены зависимости амплитуды колебаний от

времени при различных значениях кинематической вязкости и плотности жидкости. Как видно из представленных результатов численного расчета, увеличение кинематической вязкости (при одной и той же плотности) приводит к более быстрому снижению амплитуды колебаний. Увеличение плотности жидкости (при одной и той же кинематической вязкости) также приводит к более быстрому снижению амплитуды колебаний.

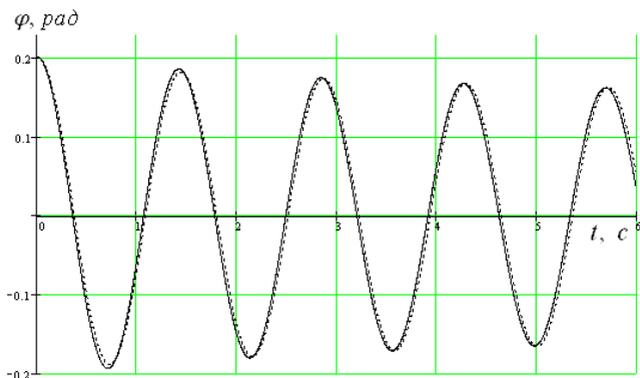


Рисунок 3 – Зависимость угла отклонения от времени:

————— – аналитическое решение, - - - - - – численное

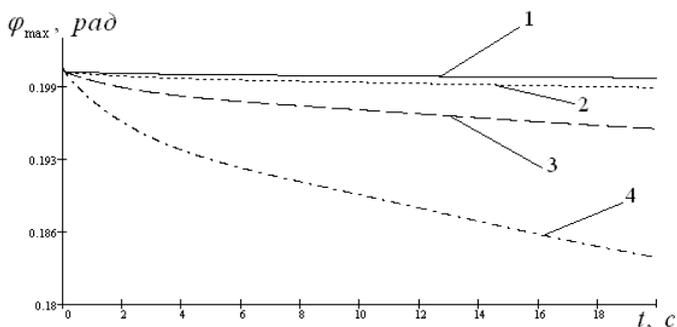


Рисунок 4 – Зависимость амплитуды колебаний маятника от времени

при разных вязкостях: 1) $\nu = 1.25 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$, 2) $\nu = 8 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$,

3) $\nu = 1 \times 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}$, 4) $\nu = 1 \times 10^{-3} \text{ м}^2 / \text{с}$

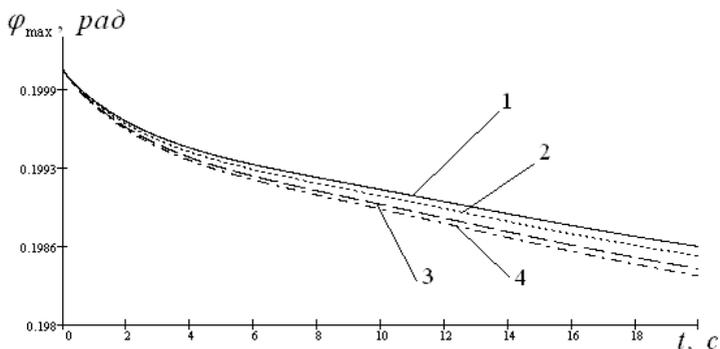


Рисунок 5 – Зависимость амплитуды колебаний маятника от времени при разных плотностях: 1) $\rho = 780 \text{ кг/м}^3$, 2) $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, 3) $\rho = 1500 \text{ кг/м}^3$, 4) $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$

На рисунке 6 изображены зависимости угла отклонения маятника от времени при большом начальном отклонении маятника $\varphi_0 = 1$ рад, полученные путем численного интегрирования уравнения (2.8) – пунктирная линия, и с помощью приближенного решения (2.17) – сплошная линия. Наблюдается хорошее соответствие результатов по амплитуде и расхождение по фазе колебаний.

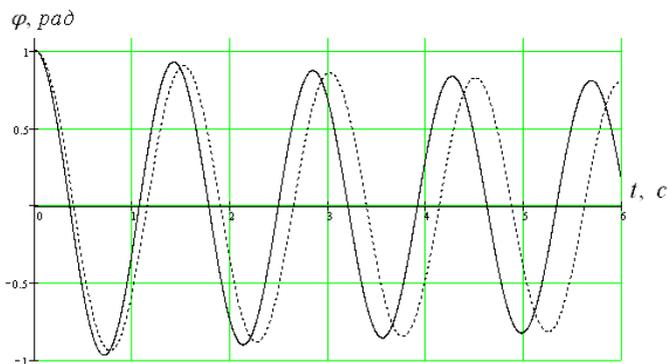


Рисунок 6 – Зависимость угла отклонения от времени при большом начальном отклонении: _____ – аналитическое решение, - - - - - численное

Для построения графиков принимались следующие значения параметров: масса твердого тела 6.6 кг, масса жидкости 31 кг, длина маятника $L = 0.5$ м, радиус сферы маятника $R = 0.2$ м, радиус полости $r = 0.195$ м, плотность жидкости $\rho = 700$ кг/м³, кинематическая вязкость $\nu = 1.25 \times 10^{-6}$ м²/с, $\varphi_0 = 0.2$ рад, ($\varphi_0 = 1$ рад), $\dot{\varphi}_0 = 0$ рад/с.

Поскольку плоское движение КА вокруг центра масс во многом подобно движению физического маятника результаты и методы, приведенные в данном пункте пособия, могут быть использованы для анализа динамики КА с жидким топливом, что и будет выполнено в следующей части.

2.3. Движение космического аппарата с жидким топливом вокруг центра масс под действием гравитационного момента

Рассмотрим плоское движение вокруг центра масс КА с баком, целиком заполненным жидким топливом (рисунок 7). Будем считать, что КА движется по круговой орбите под действием только силы тяжести и гравитационного момента, который зависит от инерционно-массовых характеристик спутника.

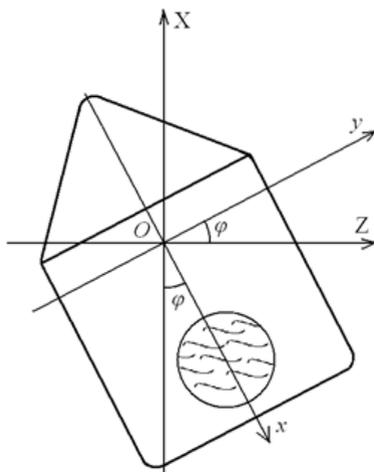


Рисунок 7 – Схема спутника

Пусть в связанной системе координат главные моменты инерции удовлетворяют неравенству $A > B > C$. Топливный бак имеет форму шара, а само топливо обладает малой кинематической вязкостью ($\nu \ll 1$). Применяя, как и в предыдущей части, подходы в составлении математических моделей движения спутников под действием гравитационного момента Белецкого В.В. [1] и движения тел с полостями, заполненными жидкостью, Черноусько Ф.Л. [5], получим уравнение плоского движения вокруг центра масс спутника с топливным баком:

$$\frac{d^2\alpha}{d\mathcal{G}^2} + 3\frac{A+J_x - B-J_y}{C+J_z} \sin\alpha + \frac{\rho\sqrt{\nu}Dn^2}{2(C+J_z)} \frac{d}{d\mathcal{G}} \int_{\mathcal{G}_0/n}^{\mathcal{G}/n} \frac{\alpha' d\tau}{\sqrt{\mathcal{G}/n - \tau}} = 0, \quad (2.18)$$

где $\alpha = 2\varphi$ – удвоенный угол между осями связанной и орбитальной систем координат (рисунок 7), $\mathcal{G} = nt$ – истинная аномалия, штрихом обозначено дифференцирование по истинной аномалии, $n = \sqrt{\gamma M} / R^{3/2}$, γ – универсальная гравитационная постоянная, M – масса Земли, R – радиус орбиты, ρ – плотность жидкости, J_x, J_y, J_z – моменты инерции присоединенных масс (жидкости), которые зависят от массы жидкости и от расстояния между центром масс топлива и осями связанной системы координат [5].

Параметр полости определяется по формуле

$$D = 8\pi r^4 / 3,$$

где r – радиус сферической полости.

Видно, что уравнение (2.18) является уравнением колебательных движений. Пусть амплитуда колебаний будет малой величиной, тогда уравнение (2.18) можно переписать в виде:

$$\alpha'' + k^2\alpha = -\varepsilon \frac{d}{d\mathcal{G}} \int_{\mathcal{G}_0/n}^{\mathcal{G}/n} \frac{\alpha' d\tau}{\sqrt{\mathcal{G}/n - \tau}}, \quad (2.19)$$

где $k^2 = 3 \frac{A + J_x - B - J_y}{C + J_z}$, $\varepsilon = \frac{\rho \sqrt{\nu} D n^2}{2(C + J_z)}$. Учитывая, что вязкость

топлива и величина n малы ($\nu \ll 1$, $n \ll 1$), величину $\varepsilon \ll 1$ также можно считать малым параметром.

Выберем в качестве начальных условий движения: $\vartheta = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\alpha' = 0$, тогда в соответствии с процедурой усреднения [4], в правую часть уравнения (2.19) подставим решение соответствующего однородного уравнения:

$$\alpha = \alpha_0 \cos k\vartheta, \quad \alpha' = -\alpha_0 k \sin k\vartheta. \quad (2.20)$$

Уравнение (2.19) примет вид:

$$\alpha'' + k^2 \alpha = \varepsilon \alpha_0 k F(\vartheta), \quad (2.21)$$

где

$$F(\vartheta) \approx k \frac{\sin k\vartheta}{\sqrt{2\pi k\vartheta}}, \quad (2.22)$$

тогда уравнение (2.21) примет вид:

$$\alpha'' + k^2 \alpha = \varepsilon \alpha_0 k^2 \frac{\sin k\vartheta}{\sqrt{2\pi k\vartheta}}. \quad (2.23)$$

Совершая процедуру, описанную в предыдущем пункте, получим выражение для амплитуды колебаний спутника:

$$\alpha_{\max}(\vartheta) = \alpha_0 \sqrt{1 - \frac{\rho D \sqrt{\nu} n^2}{(J_0 + J) \sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\frac{k\vartheta}{2\pi}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} C \left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{\vartheta} \right) \right]}. \quad (2.24)$$

Из выражения (2.24) видно, что из-за влияния жидкости амплитуда колебаний со временем уменьшается. Такие же выводы можно сделать и по графикам, приведенным на рисунках 8 и 9. На рисунке 8 представлены зависимости от истинной аномалии удвоенного угла отклонения спутника от местной вертикали, полученные аналитически и численно, при кинематической вязкости топлива $\nu = 1,25 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. На рисунке 9 показана

зависимость угловой скорости от истинной аномалии. На обоих рисунках видно уменьшение амплитуды колебаний.

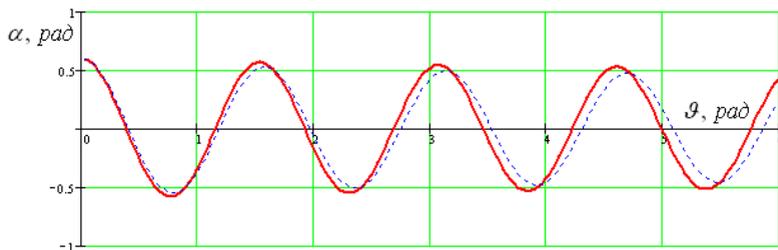


Рисунок 8 – Зависимость удвоенного угла отклонения:
—— аналитическая зависимость, ----- численное решение

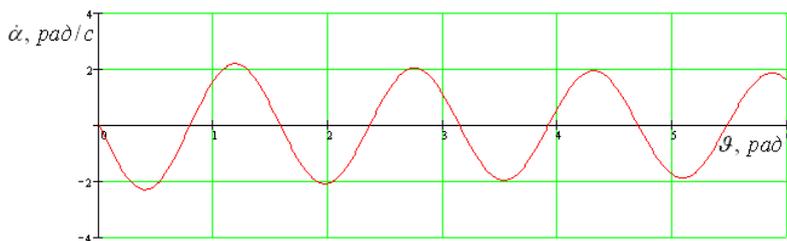


Рисунок 9 – Зависимость удвоенной угловой скорости
от истинной аномалии

Таким образом, в КА с гравитационной стабилизацией направления необходимо учитывать влияние жидкого топлива на движение вокруг центра масс. Особенно это важно при движении на пассивных участках, когда отключена система управления. Как было показано выше за счет жидкости происходит демпфирование колебаний. Однако, как видно из рисунков процесс уменьшения амплитуды происходит медленно.

Контрольные вопросы

1. Какие допущения вводятся при выводе уравнений движения твердого тела с жидкостью малой вязкости?
2. Назовите параметры, которые присутствуют в уравнениях движения твердого тела с жидкостью малой вязкости.
3. В чем преимущество предложенных уравнений движения твердого тела с жидкостью малой вязкости?
4. На каких интервалах времени поддерживается точность математической модели?
5. Какой эффект оказывает жидкость малой вязкости на колебания маятника?
6. Какие математические функции описывают влияние жидкости на движение твердого тела с жидкостью малой вязкости?

3. ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА, СОДЕРЖАЩЕГО ПОЛОСТЬ С ЖИДКОСТЬЮ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ

В настоящей главе исследуется движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости. Спутник состоит из несущего тела с полостью и трех роторов, вращающихся относительно несущего тела вокруг своих осей симметрии. На основе теоремы об изменении кинетического момента составляются уравнения движения системы относительно центра масс. Для случая вращения одного ротора уравнения приводятся к безразмерному виду, и определяется их приближенное аналитическое решение. Проводится анализ влияния жидкости большой вязкости. Отмечается возможность на основе полученных аналитических соотношений синтезировать начальные условия движения на пассивном участке траектории.

3.1. Математическая модель движения

Рассмотрим движение трехроторного гиростата с полостью в несущем теле, содержащей жидкость большой вязкости, который, в дальнейшем будем называть гиростатом с полостью с жидкостью. Введем следующие системы координат (рисунок 10): $OXYZ$ – кениговая система координат; $Ox_i y_i z_i$ и $Ox y z$ – системы координат, связанные с роторами 1–3 и несущим телом 4, соответственно. Оси Ox , Oy , Oz являются осями вращения роторов (тела 1–3). Положение несущего тела относительно системы $OXYZ$ будем характеризовать эйлеровыми углами: ψ , θ , φ .

Угловая скорость несущего тела $\omega = (p, q, r)$ представлена в проекциях на оси $Ox y z$, а векторы угловых скоростей роторов $\omega_i = (p_i, q_i, r_i)$ – на оси собственных связанных систем координат $Ox_i y_i z_i$ ($i = \overline{1,3}$). Относительное движение роторов характеризуется углами и скоростями относительного закручивания $\dot{\delta}_i = \sigma_i$ (рисунок 10).

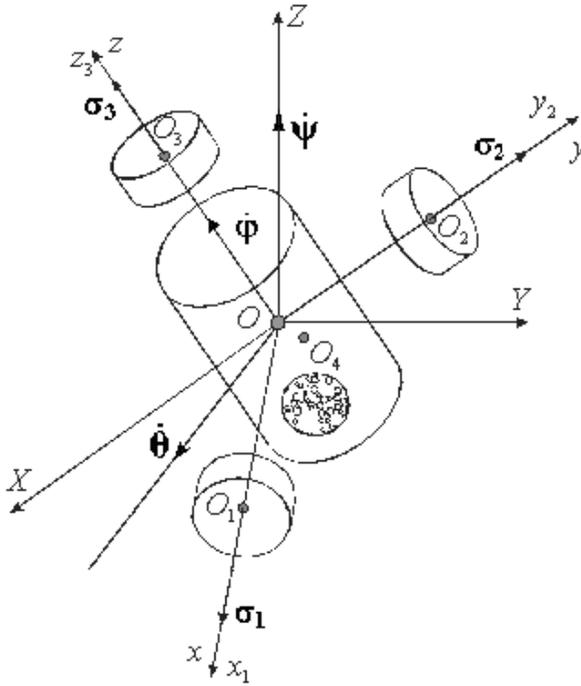


Рисунок 10 – Схема гиростата с полостью и используемые системы координат

Компоненты векторов угловых скоростей роторов ω_i , выраженные через компоненты p, q, r угловой скорости тела-носителя, имеют вид:

$$\begin{cases} p_1 = p + \sigma_1, \\ q_1 = q \cos \delta_1 + r \sin \delta_1, \\ r_1 = r \cos \delta_1 - q \sin \delta_1, \\ p_2 = p \cos \delta_2 - r \sin \delta_2, \\ q_2 = q + \sigma_2, \\ r_2 = r \cos \delta_2 + p \sin \delta_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} p_3 = p \cos \delta_3 + q \sin \delta_3, \\ q_3 = q \cos \delta_3 - p \sin \delta_3, \\ r_3 = r + \sigma_3. \end{cases}$$

Для получения уравнений движения системы тел воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента, выбирая в качестве полюса O центр масс системы:

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e. \quad (3.2)$$

Пусть рассматриваемая система включает в себя три одинаковых динамически симметричных ротора и динамически несимметричное тело-носитель с полостью с жидкостью. Главные моменты инерции роторов (тела 1–3), вычисленные в своих связанных системах координат $Ox_i y_i z_i$ ($i = \overline{1,3}$), обозначим A_i, B_i, C_i , а моменты инерции тела-носителя в системе координат $Oxyz$ – A_4, B_4, C_4 . Введенные моменты инерции не являются центральными, так как начала связанных с телами систем координат совпадают с центром масс системы четырех тел. Осевые моменты инерции роторов равны друг другу: $A_1 = B_2 = C_3 = I$.

Пусть жидкость внутри полости имеет большую кинематическую вязкость ν ($\nu \gg 1$), что соответствует малым числам Рейнольдса $Re \sim \nu^{-1} \ll 1$. Введем малый параметр, характеризующий величину числа Рейнольдса $\varepsilon_2 = \rho \nu^{-1} \ll 1$, где ρ – плотность жидкости. Полость с жидкостью характеризуется тензором $\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$ [5], который зависит лишь от ее формы и определяет диссипацию энергии за счет вязкости жидкости. Компоненты D_{ij} вычисляются в системе координат, связанной с несущим телом. Пусть полость является сферической, тогда указанный тензор записывается следующим образом: $\mathbf{D} = D\mathbf{E}$, где \mathbf{E} – единичная матрица, D – постоянная величина.

Кинетический момент системы относительно центра масс равен векторной сумме кинетических моментов несущего тела \mathbf{K}_4 , роторов \mathbf{K}_i ($i = \overline{1,3}$) и гиростатического момента жидкости \mathbf{L} относительно точки O :

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_i + \mathbf{L}.$$

Вычисляя производную кинетического момента системы как суммы кинетических моментов тел и жидкости, используя при этом локальные производные в связанных системах $Ox_i y_i z_i$, и $Oxyz$, уравнение (3.2) можно записать в системе $Oxyz$:

$$\sum_{i=1}^4 \hat{\delta}_i \left[\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_i}{dt} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_i \right] = - \left[\frac{\tilde{d}\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \right], \quad (3.3)$$

где знак “ \sim ” обозначает локальную производную в соответствующей подвижной системе координат, $\mathbf{K}_i = (A_i p_i, B_i q_i, C_i r_i)$, $\mathbf{K}_4 = (A_4 p, B_4 q, C_4 r)$ – кинетические моменты твердых тел, $\hat{\delta}_i$ ($i = \overline{1,3}$) – матрицы перехода от систем координат $Ox_i y_i z_i$ к системе $Oxyz$ (поворот на угол δ_i вокруг соответствующей оси), $\hat{\delta}_4 = \mathbf{E}$, $\boldsymbol{\omega}_4 = \boldsymbol{\omega}$.

С учетом (3.1) система (3.3) в скалярном виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr + I\dot{\sigma}_1 + I(q\sigma_3 - r\sigma_2) &= m_x, \\ B\dot{q} + (A - C)pr + I\dot{\sigma}_2 + I(r\sigma_1 - p\sigma_3) &= m_y, \\ C\dot{r} + (B - A)pq + I\dot{\sigma}_3 + I(p\sigma_2 - q\sigma_1) &= m_z, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $A = \sum_{i=1}^4 A_i$, $B = \sum_{i=1}^4 B_i$, $C = \sum_{i=1}^4 C_i$. Правые части уравнений (3.4) представляют собой проекции момента сил, действующих на несущее тело со стороны полости с жидкостью:

$$\mathbf{m} = - \left[\frac{\tilde{d}\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \right]. \quad (3.5)$$

Ги­ро­ста­ти­че­ский мо­мент жид­ко­сти, сле­дуя ра­бо­те [5], бу­дем оп­ре­де­лять по фор­му­ле

$$\mathbf{L} = -\frac{\rho}{\nu} \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\varepsilon_2 D \mathbf{E} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}},$$

где $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$ – вектор углового ускорения несущего тела. В этом случае выражение (3.5) можно переписать в виде:

$$\mathbf{m} = -\varepsilon_2 D \mathbf{g}, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)^T$, а

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \ddot{p} + q\dot{r} - r\dot{q} \\ \ddot{q} + r\dot{p} - p\dot{r} \\ \ddot{r} + p\dot{q} - q\dot{p} \end{bmatrix}.$$

Уравнения относительного движения роторов, соответствующие углам относительного закручивания δ_i также могут быть получены из теоремы об изменении кинетического момента каждого из роторов:

$$I(\dot{p} + \dot{\sigma}_1) = M_x, \quad I(\dot{q} + \dot{\sigma}_2) = M_y, \quad I(\dot{r} + \dot{\sigma}_3) = M_z, \quad (3.7)$$

где M_w ($w = x, y, z$) – момент, действующий со стороны несущего тела на ротор, установленный вдоль соответствующей оси. Будем рассматривать движение при отсутствии указанных моментов взаимодействия тел. Тогда система (3.7) приводится к следующему виду:

$$\dot{\sigma}_1 = -\dot{p}, \quad \dot{\sigma}_2 = -\dot{q}, \quad \dot{\sigma}_3 = -\dot{r}. \quad (3.8)$$

Для определения момента действия жидкости на несущее тело (3.6) поступим аналогично процедуре, указанной в работе [5]. В силу малости числа Рейнольдса будем искать указанные моменты с точностью до величины порядка ε_2 . Из уравнений (3.4) выразим компоненты углового ускорения $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$ с учетом соотношений (3.8):

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -(A-I)^{-1}[(C-B)qr + I(q\sigma_3 - r\sigma_2)] - \varepsilon_2 Dg_1; \\
\dot{q} &= -(B-I)^{-1}[(A-C)pr + I(r\sigma_1 - p\sigma_3)] - \varepsilon_2 Dg_2; \\
\dot{r} &= -(C-I)^{-1}[(B-A)pq + I(p\sigma_2 - q\sigma_1)] - \varepsilon_2 Dg_3.
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Продифференцировав выражения (3.9), запишем вторые производные угловой скорости:

$$\begin{aligned}
\ddot{p} &= (A-I)^{-1}[(B-C)(\dot{q}r + q\dot{r}) + I(\dot{q}\sigma_3 + q\dot{\sigma}_3 - \dot{r}\sigma_2 - r\dot{\sigma}_2)] - \varepsilon_2 D\dot{g}_1, \\
\ddot{q} &= (B-I)^{-1}[(C-A)(\dot{p}r + p\dot{r}) + I(\dot{r}\sigma_1 + r\dot{\sigma}_1 - \dot{p}\sigma_3 - p\dot{\sigma}_3)] - \varepsilon_2 D\dot{g}_2, \\
\ddot{r} &= (C-I)^{-1}[(A-B)(\dot{p}q + p\dot{q}) + I(\dot{p}\sigma_2 + p\dot{\sigma}_2 - \dot{q}\sigma_1 - q\dot{\sigma}_1)] - \varepsilon_2 D\dot{g}_3.
\end{aligned} \quad (3.10)$$

Проинтегрируем уравнения относительного движения (3.8) и получим следующие общие решения:

$$\begin{aligned}
p(t) + \sigma_1(t) &= p_0 + \sigma_{10}, \\
q(t) + \sigma_2(t) &= q_0 + \sigma_{20}, \\
r(t) + \sigma_3(t) &= r_0 + \sigma_{30},
\end{aligned} \quad (3.11)$$

где $p_0, q_0, r_0, \sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}$ – начальные значения проекций угловой скорости несущего тела и относительных угловых скоростей роторов. Подставляя (3.9), (3.10) и (3.11) в (3.6) и отбрасывая члены порядка ε_2^2 , получим проекции вектора момента сил, действующих со стороны жидкости на несущее тело, выражаемые в виде алгебраических функций третьего порядка от относительных угловых скоростей роторов:

$$m_w = \varepsilon_2 D \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 m_{ijk}^w \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k, \quad (w = x, y, z). \quad (3.12)$$

В выражениях для моментов (3.12) коэффициенты m_{ijk}^w являются постоянными и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
m_{000}^x &= (p_0 + \sigma_{10}) \left[\frac{(B-C-A)(C-A)(r_0 + \sigma_{30})^2}{(A-I)(B-I)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(B-C+A)(A-B)(q_0 + \sigma_{20})^2}{(A-I)(C-I)} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{100}^x &= \frac{(B-C-A)(A-C-I)(r_0 + \sigma_{30})^2}{(B-I)(A-I)} + \\
&\quad + \frac{(B-C+A)(B-A+I)(q_0 + \sigma_{20})^2}{(C-I)(A-I)}, \\
m_{010}^x &= -(p_0 + \sigma_{10})(q_0 + \sigma_{20}) \times \\
&\quad \times \frac{(B-C+A-I)(2(A-B)+I) - I(A-B+I)}{(A-I)(C-I)}, \\
m_{001}^x &= -(p_0 + \sigma_{10})(r_0 + \sigma_{30}) \times \\
&\quad \times \frac{(B-C-A+I)(2(C-A)-I) - I((C-A)-I)}{(A-I)(B-I)}, \\
m_{020}^x &= (p_0 + \sigma_{10}) \frac{(B-C+A-I)(A-B+I)}{(C-I)(A-I)}, \\
m_{002}^x &= (p_0 + \sigma_{10}) \frac{(A-I-B+C)(A-C+I)}{(B-I)(A-I)}, \\
m_{110}^x &= (q_0 + \sigma_{20}) \frac{(2(A-B)-I)(A+B-C-I) + I(A-B)}{(C-I)(A-I)}, \\
m_{101}^x &= (r_0 + \sigma_{30}) \frac{(2(C-A)+I)(B-C-A+I) - I(C-A)}{(B-I)(A-I)}, \\
m_{120}^x &= -\frac{A-B}{C-I} \left(\frac{B-C}{A-I} + 1 \right), \quad m_{102}^x = \frac{C-A}{B-I} \left(1 - \frac{B-C}{A-I} \right), \\
m_{210}^y &= \frac{A-B}{C-I} \left(1 - \frac{C-A}{B-I} \right), \quad m_{012}^y = -\frac{B-C}{A-I} \left(1 + \frac{C-A}{B-I} \right), \\
m_{110}^y &= (p_0 + \sigma_{10}) \frac{(C-A-B+I)(2(A-B)+I) - I(A-B)}{(C-I)(B-I)}, \\
m_{011}^y &= (r_0 + \sigma_{30}) \frac{(C-A+B-I)(2(B-C)-I) + I(B-C)}{(A-I)(B-I)}, \\
m_{200}^y &= (q_0 + \sigma_{20}) \frac{(B-I-C+A)(B-A+I)}{(B-I)(C-I)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{002}^y &= (q_0 + \sigma_{20}) \frac{(B-I+C-A)(B-C+I)}{(A-I)(B-I)}, \\
m_{100}^y &= -(p_0 + \sigma_{10})(q_0 + \sigma_{20}) \times \\
&\quad \times \frac{(C-A-B+I)(2(A-B)-I) - I((A-B)-I)}{(B-I)(C-I)}, \\
m_{010}^y &= -\frac{(C-A+B)((B-C)-I)(r_0 + \sigma_{30})^2}{(A-I)(B-I)} \\
&\quad - \frac{(C-A-B)((A-B)+I)(p_0 + \sigma_{10})^2}{(B-I)(C-I)}, \tag{3.13} \\
m_{001}^y &= -(q_0 + \sigma_{20})(r_0 + \sigma_{30}) \times \\
&\quad \times \frac{(C-A+B-I)(2(B-C)+I) + I(B-C+I)}{(B-I)(A-I)}, \\
m_{000}^y &= (q_0 + \sigma_{20}) \frac{1}{B-I} \times \\
&\quad \times \left[\frac{(C-A+B)(B-C)(r_0 + \sigma_{30})^2}{(A-I)} + \frac{(C-A-B)(A-B)(p_0 + \sigma_{10})^2}{(C-I)} \right], \\
m_{201}^z &= -\frac{C-A}{B-I} \left(1 + \frac{A-B}{C-I} \right), \quad m_{021}^z = \frac{B-C}{A-I} \left(1 - \frac{A-B}{C-I} \right), \\
m_{101}^z &= (p_0 + \sigma_{10}) \frac{(A-B+C-I)(2(C-A)+I) + I(C-A)}{(C-I)(B-I)}, \\
m_{011}^z &= (q_0 + \sigma_{20}) \frac{(A-B-C+I)(2(B-C)+I) - I(B-C)}{(C-I)(A-I)}, \\
m_{200}^z &= (r_0 + \sigma_{30}) \frac{(C-I+A-B)(C-A+I)}{(B-I)(C-I)}, \\
m_{020}^z &= (r_0 + \sigma_{30}) \frac{(C-I-A+B)((C-B)+I)}{(C-I)(A-I)},
\end{aligned}$$

$$m_{100}^z = (p_0 + \sigma_{10})(r_0 + \sigma_{30}) \times \frac{(A - B + C - I)(2(A - C) - I) + I((A - C) - I)}{(B - I)(C - I)},$$

$$m_{010}^z = (q_0 + \sigma_{20})(r_0 + \sigma_{30}) \times \frac{(A - B - C + I)(2(C - B) + I) - I(C - B + I)}{(A - I)(C - I)},$$

$$m_{001}^z = \frac{(B - A + C)((B - C) + I)(q_0 + \sigma_{20})^2}{(A - I)(C - I)} + \frac{(A - B + C)((A - C) + I)(p_0 + \sigma_{10})^2}{(B - I)(C - I)},$$

$$m_{000}^z = (r_0 + \sigma_{30}) \frac{1}{C - I} \times \left[\frac{(A - B - C)(B - C)(q_0 + \sigma_{20})^2}{(A - I)} + \frac{(A - B + C)(C - A)(p_0 + \sigma_{10})^2}{(B - I)} \right].$$

Остальные коэффициенты в выражении моментов m_x , m_y и m_z тождественно равны нулю. Необходимо отметить, что в выражениях (3.12) присутствуют свободные члены $\varepsilon_2 Dm_{000}^w$, соответствующие постоянным моментам, зависящим только от начальных абсолютных угловых скоростей роторов. Отметим также, что ни один знаменатель в (3.13) не равен нулю, так как $A, B, C > I$.

Выражения (3.4) и (3.8) представляют собой динамические уравнения движения свободного гиростата (моменты внешних сил равны нулю), состоящего из несущего тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, и трех свободно вращающихся роторов. Система динамических уравнений (3.4), (3.8) замыкается известными кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= r - ctg\theta(p \sin \varphi + q \cos \varphi); \\
\dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi; \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi); \\
\dot{\alpha} &= \sigma_1, \dot{\beta} = \sigma_2, \dot{\gamma} = \sigma_3.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

На основании уравнений (3.4), (3.8) и (3.14) можно проводить анализ пространственного движения трехроторных гироскопов с полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости. В следующих пунктах получены приближенные аналитические зависимости для параметров движения.

3.2. Уравнения движения системы двух тел с вязкой жидкостью

Рассмотрим систему двух соосных динамически симметричных тел, в одном из которых находится сферическая полость, заполненная вязкой жидкостью. Внутренний момент, действующий на ротор, отсутствует. Уравнения движения такой системы получаются из уравнений движения системы с тремя роторами и полостью (3.4) и (3.7), полученных ранее:

$$\begin{aligned}
A\dot{p} - (A - C)qr + Iq\sigma &= \frac{\rho}{\nu} D \frac{s}{A} (Cr + I\sigma)p, \\
A\dot{q} + (A - C)pr - Ip\sigma &= \frac{\rho}{\nu} D \frac{s}{A} (Cr + I\sigma)q, \\
I(\dot{r} + \dot{\sigma}) + C_2\dot{r} &= -\frac{\rho}{\nu} Ds(p^2 + q^2), \\
I(\dot{r} + \dot{\sigma}) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где $s = [(A - C)r - I\sigma]A^{-1}$ – новая переменная.

Систему (3.15) после интегрирования последнего уравнения и алгебраических преобразований можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
\dot{p} - sq &= \frac{\rho}{\nu} \frac{1}{A} \frac{D}{A - C_2} ps [C_2 s - I(r_0 + \sigma_0)], \\
\dot{q} + sp &= \frac{\rho}{\nu} \frac{1}{A} \frac{D}{A - C_2} qs [C_2 s - I(r_0 + \sigma_0)], \\
\frac{C_2}{A - C_2} \dot{s} &= -\frac{\rho}{\nu} \frac{D}{A} s (p^2 + q^2).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Перейдем к безразмерным величинам и обозначим малую величину $\varepsilon_2 = \frac{\rho D C_2 \omega_0}{\nu A A - C_2} \ll 1$:

$$\begin{aligned}
\dot{P} - SQ &= \varepsilon_2 PS \left[S - \frac{I}{C_2} (R_0 + X_0) \right], \\
\dot{Q} + SP &= \varepsilon_2 QS \left[S - \frac{I}{C_2} (R_0 + X_0) \right], \\
\dot{S} &= -\varepsilon_2 \left(\frac{A - C_2}{C_2} \right)^2 S (P^2 + Q^2),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

где каждая безразмерная величина (P, Q, R, S, X) – есть отношение соответствующей размерной к начальной угловой скорости несущего тела $\omega_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$, например $P = p \omega_0^{-1}$ – безразмерная компонента угловой скорости, $\tau = t \omega_0$ – безразмерный параметр времени. Отметим, что символ “ $\dot{\cdot}$ ” означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = t \omega_0$: $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$.

Уравнения (3.17) позволяют проводить анализ пространственного движения гиростата с топливом. В дальнейшем для данной системы получено приближенное аналитическое решение.

3.3. Приближенное аналитическое решение уравнений движения

Проведем анализ пространственного движения гиростата с вязкой жидкостью, для чего найдем аналитическое решение уравнений (3.17). В системе дифференциальных уравнений (3.17) присутствует малый параметр ε_2 , следовательно, для нахождения приближенного аналитического решения применимы асимптотические методы. Воспользуемся методом Пуанкаре [4]. Согласно методу точное решение системы аппроксимируется своим разложением в ряд по степеням малого параметра:

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_2^i P^{<i>}, Q = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_2^i Q^{<i>}, S = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_2^i S^{<i>}. \quad (3.18)$$

В данном случае ограничимся точностью аппроксимации порядка ε , то есть оставим в (3.18) только первые два слагаемых. Подставим разложения (3.18) в систему (3.17) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Получим порождающую систему и систему для поправок.

Порождающая система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{P}^{<0>} - S^{<0>} Q^{<0>} &= 0, \\ \dot{Q}^{<0>} + S^{<0>} P^{<0>} &= 0, \\ \dot{S}^{<0>} &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

решение которой можно записать в виде:

$$\begin{aligned} P^{<0>} &= P_0 \cos S_0 \tau + Q_0 \sin S_0 \tau, \\ Q^{<0>} &= Q_0 \cos S_0 \tau - P_0 \sin S_0 \tau, \\ S^{<0>} &= S_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Система для поправок принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{P}^{<1>} - S^{<0>} Q^{<1>} - S^{<1>} Q^{<0>} &= \\ = P^{<0>} S^{<0>} \left[S^{<0>} - IC_2^{-1} (R_0 + X_0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{Q}^{<1>} + S^{<0>} P^{<1>} + S^{<1>} P^{<0>} = \\
& = Q^{<0>} S^{<0>} \left[S^{<0>} - IC_2^{-1} (R_0 + X_0) \right] \\
& \dot{S}^{<1>} = -(A - C_2)^2 C_2^{-2} S^{<0>} \left[(P^{<0>})^2 + (Q^{<0>})^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

С учетом порождающего решения последнее уравнение системы (3.21) запишется следующим образом:

$$\dot{S}^{<1>} = -(A - C_2)^2 C_2^{-2} S_0 (P_0^2 + Q_0^2),$$

а его решение с начальными условиями $S^{<1>}(0) = 0$:

$$S^{<1>} = -(A - C_2)^2 C_2^{-2} S_0 (P_0^2 + Q_0^2) t. \tag{3.22}$$

С учетом (3.22) первые два уравнения системы (3.21) образуют систему неоднородных дифференциальных уравнений со специальной правой частью, решение которой при начальных условиях $P^{<1>}(0) = 0$, $Q^{<1>}(0) = 0$ легко найти.

Приближенное решение системы (3.16) для двух компонент угловой скорости и новой переменной s примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
p(t) &= p_0 \cos s_0 t + q_0 \sin s_0 t + \\
& + \varepsilon_2 \frac{s_0 t}{\omega_0^2} \left[\left[s_0 - \frac{I}{C_2} (r_0 + \sigma_0) \right] (p_0 \cos s_0 t + q_0 \sin s_0 t) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} t (p_0^2 + q_0^2) \left(\frac{A - C_2}{C_2} \right)^2 (q_0 \cos s_0 t - p_0 \sin s_0 t) \right], \\
q(t) &= q_0 \cos s_0 t - p_0 \sin s_0 t + \\
& + \varepsilon_2 \frac{s_0 t}{\omega_0^2} \left[\left[s_0 - \frac{I}{C_2} (r_0 + \sigma_0) \right] (q_0 \cos s_0 t - p_0 \sin s_0 t) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} t (p_0^2 + q_0^2) \left(\frac{A - C_2}{C_2} \right)^2 (p_0 \cos s_0 t + q_0 \sin s_0 t) \right], \\
s(t) &= s_0 - \varepsilon_2 \frac{s_0 t}{\omega_0} \left(\frac{A - C_2}{C_2} \right)^2 (p_0^2 + q_0^2).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Для проверки правильности полученного приближенного аналитического решения сравним его с результатами численного интегрирования системы (3.15). На рисунке 11 показано соответствие численного и аналитического решений для проекции p угловой скорости несущего тела. Сплошной линией изображено аналитическое решение, прерывистой – численное. По графикам видно, что метод Пуанкаре обеспечивает погрешность порядка ε_2 на промежутке времени порядка 1.

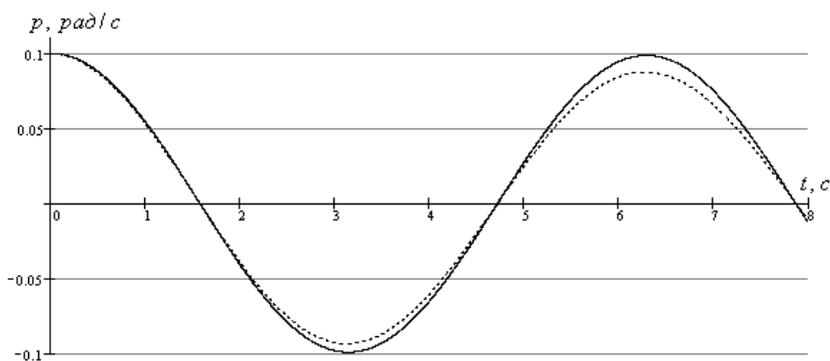


Рисунок 11 – Зависимость проекции p угловой скорости:

————— – аналитическое решение, - - - - - – численное

В данной части работы принимались следующие начальные условия и инерционно-массовые характеристики: $A = 10 \text{ кгм}^2$, $C = 6 \text{ кгм}^2$, $C_2 = 3 \text{ кгм}^2$, $I = 2 \text{ кгм}^2$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 10000 \text{ м}^2/\text{с}$, $p_0 = 0.1 \text{ рад/с}$, $q_0 = 0 \text{ рад/с}$, $r_0 = 3 \text{ рад/с}$, $\sigma_0 = 1 \text{ рад/с}$.

На основе аналитических решений (3.23) возможно подобрать начальные условия движения КА на пассивном участке траектории. В определенный момент времени пассивного участка КА должен иметь определенные компоненты угловой скорости. Подставляя значения этого времени и требуемых величин угловой скорости в выражения (3.23), получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных начальных условий. Решая полученную

систему, можно определить начальные условия движения КА на пассивном участке, которые обеспечиваются системой управления на предшествующем активном участке.

Процесс аналитического решения системы дифференциальных уравнений движения гиростата с жидкостью оказался довольно сложным и длительным даже для некоторого частного случая. В связи с этим возникает необходимость приведения рассмотренной системы к другим моделям, позволяющим проводить анализ движения систем твердых тел с жидкостью. Решение данной задачи приводится в следующей главе пособия.

Контрольные вопросы

1. Какие допущения вводятся при выводе уравнений движения твердого тела с жидкостью большой вязкости?
2. Назовите параметры, которые присутствуют в уравнениях движения твердого тела с жидкостью большой вязкости.
3. В чем преимущество предложенных уравнений движения твердого тела с жидкостью большой вязкости?
4. На каких интервалах времени поддерживается точность предложенной математической модели?
5. Какой эффект оказывает жидкость большой вязкости на колебания маятника?
6. Какие приближенные методы решения рекомендуется применять при исследовании движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью?
7. В чем заключается суть метода Пуанкаре?
8. В чем заключается суть метода Ван-дер-Поля?
9. В чем заключается суть метода усреднения?
10. Назовите преимущества и недостатки предложенных асимптотических методов решения дифференциальных уравнений движения с малыми параметрами.

4. ПРИВЕДЕНИЕ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА, СОДЕРЖАЩЕГО ПОЛОСТЬ С ЖИДКОСТЬЮ, К СИСТЕМАМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

В данной главе рассматривается пространственное движение вокруг центра масс спутника-гиростата с полостью, содержащей жидкость, при малых числах Рейнольдса. Математическая модель движения гиростата, содержащего полость с жидкостью, приводится к двум более простым: к модели гиростата с вязким трением между телом-носителем и роторами и к модели твердого тела, содержащего внутри сферический демпфер. Переход от гиростата с полостью, содержащей жидкость, имеющего бесконечное число степеней свободы, к указанным системам, обладающим шестью степенями свободы, важен с прикладной точки зрения, так как существенно облегчает анализ динамики движения спутников-гиростатов и космических аппаратов с двойным вращением, содержащих жидкостные ракетные двигатели, на пассивных участках их орбитального движения.

4.1. Математические модели движения

Как видно из предыдущей главы, исследование движения спутника-гиростата с полостью, заполненной жидкостью, представляет собой трудную задачу даже для частного случая вращения только одного ротора. Поэтому возникает необходимость приведения математической модели трехроторного гиростата с жидкостью к другим более простым для исследования, в частности далее будет показано, что эффект действия полости с жидкостью может быть описан динамически эквивалентным вязким трением в рабочих элементах, что существенно упрощает анализ движения гиростата.

Динамические уравнения, описывающие движение гиростата с жидкостью большой вязкости, имеют вид:

$$\begin{aligned}
A\dot{p} + (C - B)qr + I\dot{\sigma}_1 + I(q\sigma_3 - r\sigma_2) &= m_x, \\
B\dot{q} + (A - C)pr + I\dot{\sigma}_2 + I(r\sigma_1 - p\sigma_3) &= m_y, \\
C\dot{r} + (B - A)pq + I\dot{\sigma}_3 + I(p\sigma_2 - q\sigma_1) &= m_z, \\
I(\dot{p} + \dot{\sigma}_1) &= M_x, \quad I(\dot{q} + \dot{\sigma}_2) = M_y, \quad I(\dot{r} + \dot{\sigma}_3) = M_z.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\tag{4.2}$$

Рассмотрим вторую механическую систему, состоящую из несущего тела и трех роторов, вращающихся при действии внутренних моментов от сил вязкого трения в подшипниках крепления к несущему телу. Эта механическая система отличается от предыдущей отсутствием полости с жидкостью и наличием моментов внутреннего взаимодействия тел. Указанную систему будем называть гиростатом с вязким трением. Для моделирования движения гиростата с трением будем использовать те же кинематические параметры, что и для гиростата с полостью. Уравнения движения аналогичны уравнениям (4.1), (4.2) предыдущей модели при отсутствии в них моментов сил от жидкости в полости:

$$\begin{aligned}
A\dot{p} + (C - B)qr + I\dot{\sigma}_1 + I(q\sigma_3 - r\sigma_2) &= 0, \\
B\dot{q} + (A - C)pr + I\dot{\sigma}_2 + I(r\sigma_1 - p\sigma_3) &= 0, \\
C\dot{r} + (B - A)pq + I\dot{\sigma}_3 + I(p\sigma_2 - q\sigma_1) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$I(\dot{p} + \dot{\sigma}_1) = M_x, \quad I(\dot{q} + \dot{\sigma}_2) = M_y, \quad I(\dot{r} + \dot{\sigma}_3) = M_z, \tag{4.4}$$

где $M_w = M_w(\boldsymbol{\sigma})$ ($\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T$, $w = \{x, y, z\}$) – внутренние моменты сил вязкого трения, действующих между несущим телом и соответствующим ротором.

Рассмотрим третью механическую систему, состоящую из твердого тела со сферической полостью, в которой находится твердое тело сферической формы [5]. Между телами имеется узкий зазор, в котором действуют вязкие силы (смазочный слой). Данную механическую систему ввел в рассмотрение М.А. Лаврентьев и, следуя за ним, будем называть ее телом с демпфером.

Математическая модель пространственного движения тела с демпфером приведена в [5] и в векторном виде имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}^e, \quad \mathbf{K} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + I(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}), \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1 &= \mathbf{M}^i, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\hat{\mathbf{J}}$ – тензор инерции тела с демпфером, I – диаметральный момент инерции демпфера, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, $\boldsymbol{\omega}_1$ – угловая скорость демпфера, \mathbf{M}^e – момент внешних сил, действующий на систему, $\mathbf{M}^i = (M_x, M_y, M_z)$ – момент внутреннего взаимодействия тела и демпфера, в том числе момент сил вязкого трения. Запишем скалярный вид уравнений (4.5) для свободной системы ($\mathbf{M}^e = 0$), используя привычные обозначения:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + I\dot{\sigma}_1 + (C - B)qr + I(q\sigma_3 - r\sigma_2) &= 0, \\ B\dot{q} + I\dot{\sigma}_2 + (A - C)pr + I(r\sigma_1 - p\sigma_3) &= 0, \\ C\dot{r} + I\dot{\sigma}_3 + (B - A)pq + I(p\sigma_2 - q\sigma_1) &= 0, \\ I(\dot{p} + \dot{\sigma}_1) + I(q\sigma_3 - r\sigma_2) &= M_x, \\ I(\dot{q} + \dot{\sigma}_2) + I(r\sigma_1 - p\sigma_3) &= M_y, \\ I(\dot{r} + \dot{\sigma}_3) + I(p\sigma_2 - q\sigma_1) &= M_z, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}$ – есть относительная скорость вращения демпфера.

Как видно, математические модели разных систем, приведенные в данном пункте во многом похожи. Далее определим условия при которых указанные математические модели могут быть приведены друг к другу.

4.2. Сопоставление и приведение математических моделей

Проведем сопоставление и приведение трех математических моделей, полученных в предыдущем пункте. Прежде всего, отметим полную эквивалентность динамических уравнений (4.3) и (4.6), что относит обе механические системы к классу гиристов.

Если рассматривать уравновешенные гиростаты, когда $\sigma_i = const$, динамика движения систем будет идентична. Покажем соответствие друг другу моделей гиростата с полостью и гиростата с вязким трением. В уравнения гиростата с полостью (4.1) подставим уравнения (4.2):

$$\begin{aligned}(A - I)\dot{p} + (C - B)qr + I(q\sigma_3 - r\sigma_2) &= m_x, \\ (B - I)\dot{q} + (A - C)pr + I(r\sigma_1 - p\sigma_3) &= m_y, \\ (C - I)\dot{r} + (B - A)pq + I(p\sigma_2 - q\sigma_1) &= m_z,\end{aligned}\tag{4.8}$$

а в уравнения гиростата с трением (4.3) подставим (4.4):

$$\begin{aligned}(A - I)\dot{p} + (C - B)qr + I(q\sigma_3 - r\sigma_2) &= -M_x, \\ (B - I)\dot{q} + (A - C)pr + I(r\sigma_1 - p\sigma_3) &= -M_y, \\ (C - I)\dot{r} + (B - A)pq + I(p\sigma_2 - q\sigma_1) &= -M_z.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Из сравнения систем (4.8) и (4.9), следует их полное соответствие при условии, что внутренний момент сил вязкого трения \mathbf{M} противоположен моменту \mathbf{m} действия жидкости в полости на несущее тело: $\mathbf{M} = -\mathbf{m}$. Традиционно моменты сил вязкого трения в подшипниках приближенно задают в виде линейных, либо квадратичных функций относительных скоростей (при малых и больших величинах скоростей, соответственно), то есть алгебраических функций второго порядка. Однако, если обобщить эти зависимости до алгебраических функций третьего порядка, то систему с вязким трением в подшипниках роторов можно рассматривать как динамически эквивалентную системе с полостью с жидкостью. Отметим, что при этом коэффициенты аппроксимации алгебраических функций (3.12) должны иметь вид (3.13), либо приближаться к нему с необходимой степенью адекватности.

В работе [5] показана возможность моделирования движения твердого тела с полостью с жидкостью большой вязкости как движение системы твердых тел: несущего тела и нескольких осесимметричных демпферов, вращающихся внутри несущего тела

и взаимодействующих с ним только посредством вязкого трения. Определим теперь возможность моделирования движения гиростата с полостью с жидкостью большой вязкости так же, как системы тел с демпфером.

Проведем сопоставление математических моделей гиростата с полостью и твердого тела с демпфером. В динамические уравнения (4.6) подставим уравнения относительного движения демпфера (4.7), после чего получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (A - I)\dot{p} + (C - B)qr &= -M_x, \\ (B - I)\dot{q} + (A - C)pr &= -M_y, \\ (C - I)\dot{r} + (B - A)pq &= -M_z. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Уравнения (4.8) и (4.10) совпадут, если задать моменты внутреннего взаимодействия в расширенном виде, учитывающем вязкое трение при добавлении гироскопических сил:

$$\mathbf{M}^i = \mathbf{M}_{\text{тр}} + \mathbf{M}_{\text{гир}}, \quad (4.11)$$

$$\text{где } \mathbf{M}_{\text{тр}} = \begin{bmatrix} -m_x \\ -m_y \\ -m_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\text{гир}} = I \begin{bmatrix} q\sigma_3 - r\sigma_2 \\ r\sigma_1 - p\sigma_3 \\ p\sigma_2 - q\sigma_1 \end{bmatrix}.$$

Добавление момента гироскопических сил возможно либо посредством внутренних двигателей, подкручивающих демпфер, либо использованием системы трех осесимметричных демпферов. Осевая симметрия демпфера отличается от сферической тем, что позволяет ему вращаться внутри содержащей его полости только в направлении оси симметрии. Очевидно, что система трех осесимметричных демпферов, установленных вдоль главных осей инерции несущего тела, будет механически эквивалентна трехроторному гиростату, поэтому динамические уравнения движения указанных систем будут идентичны. Отметим также, что, если моменты сил вязкого трения выбирать в виде (3.12), то будет иметь место полное соответствие всех трех рассмотренных в настоящем пункте математических моделей.

Таким образом, показано определенное соответствие друг другу всех трех рассмотренных моделей и определены условия, приводящие одну из них к другой, что наиболее важно при переходе от бесконечномерной системы – гиростата с полостью к более простым шестистепенным механическим системам. Более того, если рассматривать движение с малыми угловыми скоростями, когда кубические и квадратичные члены в выражении (3.12) могут быть отброшены, эффект действия полости с жидкостью может быть описан динамически эквивалентным вязким трением в рабочих элементах (подшипники, демпферы), что существенно упрощает анализ движения гиростата.

4.3. Численное моделирование движения систем твердых тел с жидкостью

Проведем численное интегрирование уравнений движения различных систем, приведенных в предыдущих пунктах. Значения инерционно-массовых характеристик несущего тела и роторов, начальных условий, параметров полости и жидкости, принятые для численных экспериментов приведены в таблице 1.

Рассмотрим движение спутника-гиростата в пространстве угла и скорости нутации ($\theta, \dot{\theta}$). Нутационные колебания характеризуют наиболее значимые процессы в динамике движения КА, так как описывают отклонения продольной оси от заданного направления. На рисунке 12 изображены фазовые траектории движения гиростата с полостью: а) на начальном промежутке времени, б) – на завершающем этапе. С течением времени видна определенная стабилизация фазовой траектории.

Таблица 1. Значения параметров системы

Параметр		Значение	Параметр	Значение
Моменты инерции, $кг \cdot м^2$	A	7	Параметр сферической полости $P, м^7$	30
	B	8		
	C	5	Плотность жидкости $\rho, кг/м^3$	1000
	I	2	Вязкость жидкости $\nu, м^2/с$	100000
Компоненты угловой скорости несущего тела, $рад/с$	p	0,1	Угол прецессии $\psi, рад$	0,5
	q	0,2	Угол нутации $\theta, рад$	1,3
	r	0,1	Угол собственного вращения $\varphi, рад$	0,5

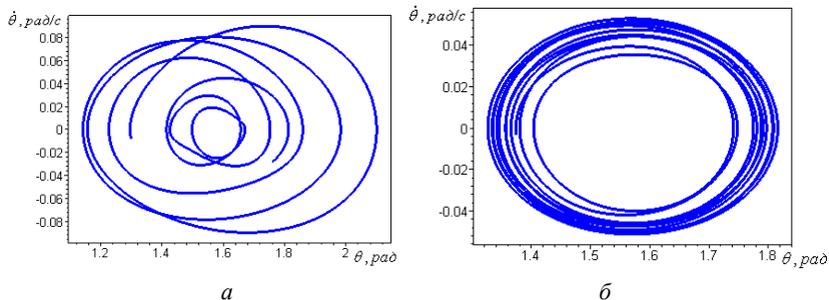


Рисунок 12 – Фазовые траектории движения гиростата с полостью с жидкостью

При малых скоростях σ_i кубические и квадратичные члены в (3.12) становятся пренебрежимо малыми, и их учет в этом случае является несущественным, что подтверждается результатами численного расчета. На рисунке 13–а представлена фазовая траектория, соответствующая полной модели гиростата с полостью, когда момент сил от действия жидкости в полости имеет вид (3.12), а на рисунках 13–б и 13–в – гиростата и тела с демпфером при

линейном вязком трении, то есть компоненты векторов \mathbf{M} в (4.9) и $\mathbf{M}_{\text{Тр}}$ в (4.11) приняты равными линейной части алгебраической функции относительных угловых скоростей (3.12) с обратными знаками. Фазовая траектория, представленная на рисунке 13–в, построена для случая, когда гироскопический момент в (4.11) отсутствует, и имеет место неполное соответствие модели тела с демпфером и гиростата с трением. При наличии гироскопического момента в (4.11) динамические уравнения движения тела с демпфером совпадают с уравнениями движения гиростата с вязким трением, и, следовательно, движение систем будет эквивалентным.

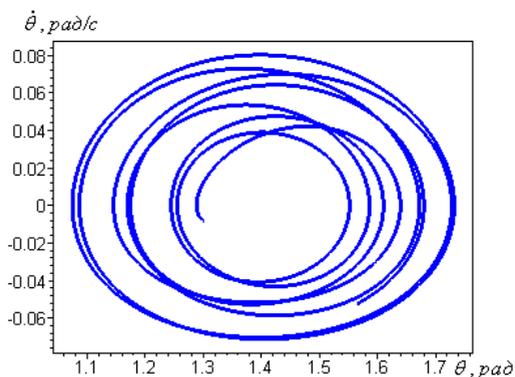


Рисунок 13, а – Фазовая траектория гиростата с жидкостью

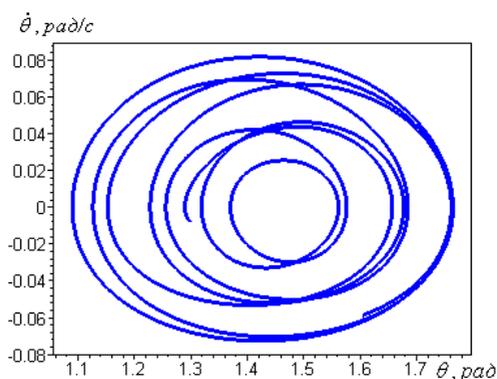


Рисунок 13, б – Фазовая траектория гиростата с трением

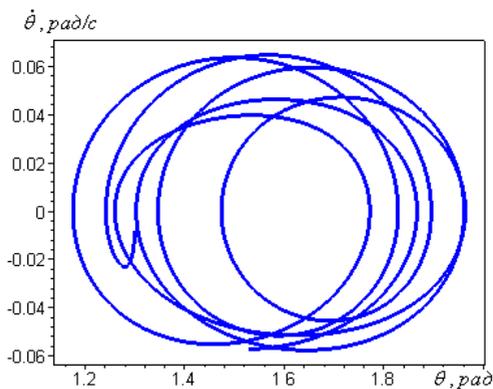


Рисунок 13, в – Фазовая траектория твердого тела с демпфером

На рисунке 14 представлены годографы вектора угловой скорости тела-носителя: а) в случае гиростата с полостью, б) – гиростата с вязким трением, в) – твердого тела с демпфером. Во всех трех случаях годографы иллюстрируют стремление мгновенной оси вращения несущего тела к определенному положению в его связанной системе координат. Инерционно-массовые характеристики и начальные условия для всех численных расчетов даны в таблицах 1 и 2.

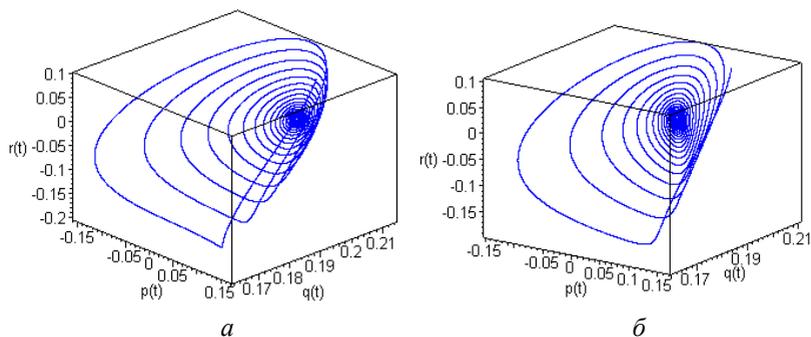
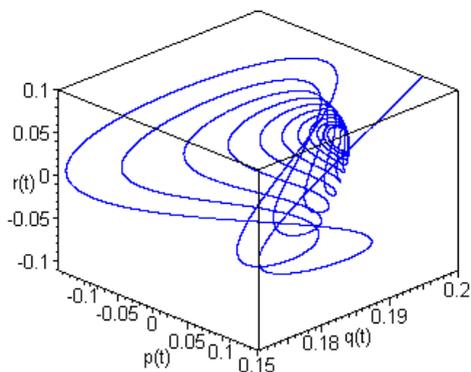


Рисунок 14 – Окончание рис. на стр. 55



6

Рисунок 14 – Годографы угловых скоростей рассматриваемых систем

Результаты численного интегрирования, приведенные на рисунках 12 – 14, получены при параметрах, приведенных в таблице 1. Относительные угловые скорости и интервалы времени интегрирования приведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры численного интегрирования систем

Рисунок, соответствующий графику	Механическая модель*	Относительные угловые скорости, rad/c			Интервал интегрирования, c	
		σ_1	σ_2	σ_3	t_0	t_k
12 – а	П	-0,1	-0,05	-0,1	0	200
12 – б	П	-0,1	-0,05	-0,1	300	600
13 – а	П	-0,01	-0,005	-0,01	0	200
13 – б	Т	-0,01	-0,005	-0,01	0	200
13 – в	Д	-0,01	-0,005	-0,01	0	200
14 – а	П	-0,1	-0,05	-0,2	0	800
14 – б	Т	-0,1	-0,05	-0,2	0	800
14 – в	Д	-0,1	-0,05	-0,2	0	800

*П – гиригат с полостью, содержащей вязкую жидкость, Т – гиригат с вязким трением, Д – твердое тело с демпфером.

Для сравнения динамики движения гиригастата с полостью и гиригастата с трением проведен численный эксперимент. По истечении 100 секунд ($T \sim 1/\varepsilon$, $\varepsilon = 0,01$) разница между модулями векторов угловых скоростей несущих тел составила $|\omega_{\Pi}| - |\omega_{\Gamma P}| = 0,002 < \varepsilon |\omega_{\Pi}|$, а угол между этими векторами $\omega_{\Pi} \wedge \omega_{\Gamma P} \approx 3,5^{\circ}$. Дополнительные фазовые портреты движения гиригастата с полостью, заполненной жидкостью, гиригастата с вязким трением в рабочих элементах и твердого тела с внутренним сферическим демпфером приведены на рисунках 15, 16 и 17. В каждой паре приведенных фазовых портретов первый для начального интервала времени (0-300 с), второй – для более позднего (200-500 с). Результаты численного эксперимента показывают совпадение с требуемой точностью приведенных моделей.

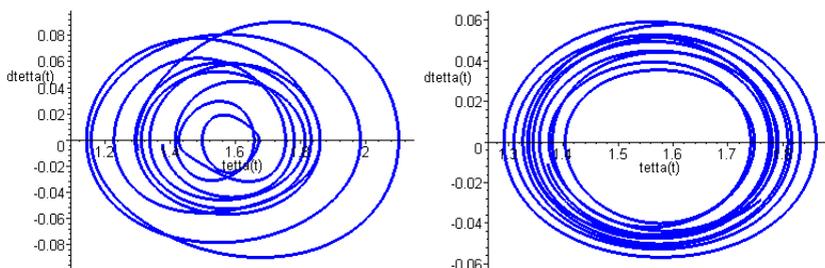


Рисунок 15 – Фазовые траектории гиригастата с жидкостью

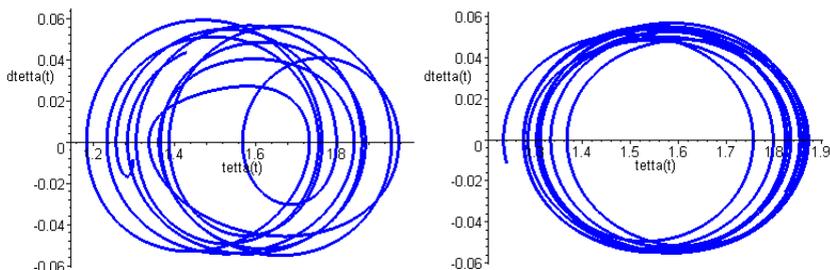


Рисунок 16 – Фазовые траектории гиригастата с трением

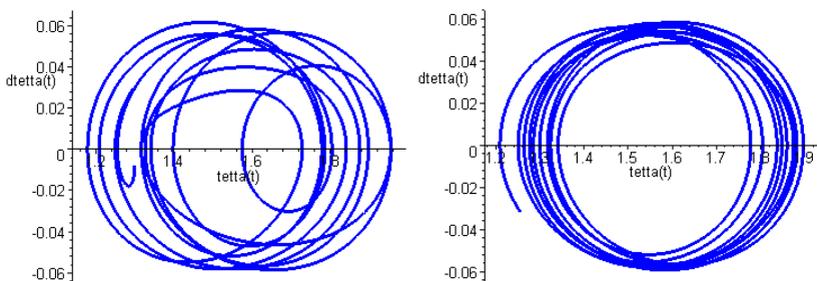


Рисунок 17 – Фазовые траектории твердого тела с демпфером

Контрольные вопросы

1. Какие системы сравниваются при исследовании движения?
2. При каких условиях движения различных систем схожи?
3. На каких интервалах времени движение различных систем сравниваются?
4. Можно ли при исследованиях заменять математические модели различных систем более простыми?
5. Каким эффектом в гиростате заменяется эффект воздействия жидкости на полость твердого тела?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии приведена методика исследования движения твердых тел и систем твердых тел с полостями, заполненными жидкостью различной вязкости. Решен ряд самостоятельных задач с использованием классических и современных методов механики, теории колебаний, решения дифференциальных уравнений, а также проведено численное моделирование движений.

К основным элементам пособия можно отнести следующие.

1. Построение математической модели движения и получение аналитических зависимостей для параметров плоских колебаний физического маятника с жидкостью малой вязкости.

2. Разработка и сопоставление математических моделей пространственного движения трехроторного гиростата с полостью с жидкостью, твердого тела с внутренним сферическим демпфером и трехроторного гиростата с вязким трением между несущим телом и вращающимися роторами.

3. Получение асимптотических решений для параметров свободного пространственного движения трехроторного гиростата с полостью с жидкостью.

Приведенные методики позволяют производить исследование движения летательных аппаратов, имеющих на борту запас жидкого топлива, осуществлять выбор начальных условий движения, инерционно-массовых, кинематических и других параметров КА, обеспечивающих реализацию тех или иных режимов движения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белецкий, В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс / В.В. Белецкий. – Москва: Наука, 1965.
2. Жуковский, Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью: Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика / Н.Е. Жуковский. – Москва: Гостехиздат, 1949.
3. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва: Наука, 1974.
4. Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – Москва: Наука, 1969.
5. Черноушко, Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость / Ф.Л. Черноушко. – Москва: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
6. Янке, Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – Москва: Наука, 1968.

Учебное издание

Алексеев Алексей Владимирович

**ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ,
ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ**

Учебное пособие

Редактор А.В. Ярославцева
Компьютерная верстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 30.06.2021. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 3,75.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 22(Р1У)/2021.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

