

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**Кафедра радиофизики и компьютерного
моделирования радиосистем**

В.В. Зайцев, В.И. Занин, В.М. Трещев

**Электростатическое моделирование
полосковых линий**

Учебное пособие

Издательство «Универс-групп»
2005

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Самарского государственного университета*

УДК 621.37
ББК В331
3 12

Зайцев, В.В.

3 12 Электростатическое моделирование полосковых линий: Учебное пособие / В.В.Зайцев, В.И. Занин, В.М. Трещев – Самара: Изд-во «Универс-групп», 2005. 52 с.: ил.

ISBN 5-467-00059-4

Учебное пособие посвящено расчету волновых параметров линий передачи с поперечными электромагнитными волнами методом численного решения электростатической задачи. Основное внимание уделено полосковым линиям. Подробно рассмотрены вопросы разностной аппроксимации уравнения Лапласа и алгоритмы численного решения полученных при этом систем разностных уравнений. Приведены примеры программной реализации численных алгоритмов с использованием математического пакета MathCAD.

Пособие предназначено для использования в качестве методического руководства при выполнении практических работ в лаборатории компьютерного моделирования радиофизических систем, курсового и дипломного проектирования.

УДК 621.37
ББК В331

ISBN 5-467-00059-4

© В.В. Зайцев, В.И. Занин, В.М. Трещев, 2005

Введение

Линия передачи – это элемент радиотехнической системы, с помощью которого сигнал в форме электромагнитной волны передается из одной области пространства в другую. В настоящее время в радиотехнике используются самые различные линии передачи от простого двухпроводного кабеля до оптического волновода. Математические модели волновых процессов в этих линиях также имеют существенное различие. Если волноводы требуют описания в рамках строгой электродинамической теории, то к радиочастотным кабелям вполне применимо приближение телеграфных уравнений. Полосковые линии передачи в этом отношении занимают промежуточное положение. Основной волной, распространяющейся в полосковых линиях, является волна, которая очень близка к поперечной электромагнитной волне (ТЕМ-волне, Т-волне). Поэтому ее вполне можно описывать в рамках системы телеграфных уравнений. Однако расчет волновых параметров системы требует применения электродинамических методов. Естественно, что используемые методы различаются по степени сложности. Одним из наиболее простых методов расчета волновых параметров полосковых линий является электростатический метод.

В учебном пособии приведено изложение основ теории и практики электростатического моделирования полосковых линий передачи. Пособие предназначено для выполнения работ в лаборатории компьютерного моделирования радиофизических систем.

1. Полосковые линии передачи

К настоящему времени в технику СВЧ прочно вошел особый класс линий передачи с волнами типа Т, называемых полосковыми волноводами или полосковыми линиями. В этих волноводах токонесущие проводники представляют собой тонкие полоски металла, между которыми находится подложка – плоский слой диэлектрика с малыми потерями. Полосковые линии бывают симметричными и несимметричными; поперечные сечения их изображены на рис. 1.1. По многим конструктивным и технологическим соображениям на практике предпочитают несимметричные полосковые линии. Чтобы обеспечить высокие электрические и механические характеристики, в качестве материалов для подложки часто используют твердые диэлектрики на основе оксида алюминия – поликор ($\varepsilon = 9.6$) и лейкосапфир ($\varepsilon = 11.4$). Высокая диэлектрическая проницаемость этих материалов позволяет существенно уменьшить поперечные габариты полосковых линий. В технической литературе несимметричные полосковые линии для сантиметрового и миллиметрового диапазонов часто называют микрополосковыми линиями, подчеркивая этим термином миниатюрность конструкций.

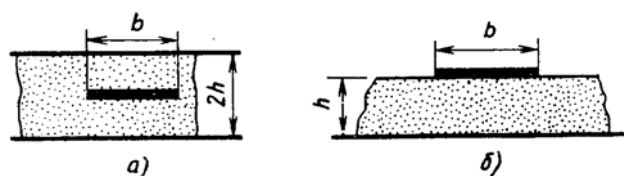


Рис. 1.1. Полосковые линии передачи:
а) симметричная, б) несимметричная

Строгий электродинамический анализ полей в несимметричной полосковой линии является достаточно сложной задачей и проводится в основном численными методами. Это связано с тем, что параметры заполняющей среды в полосковой линии неоднородны по сечению. Как

следствие, векторы электромагнитного поля в таком волноводе имеют все шесть декартовых проекций, и поэтому, строго говоря, волн Т-типа здесь не существует. Однако на практике обычно применяют линии, у которых толщина подложки существенно меньше ширины верхнего проводника. Поэтому электрическое поле в поперечном сечении линии распределено примерно так же, как и электростатическое поле в плоском конденсаторе. Достаточно высокое значение относительной диэлектрической проницаемости подложки снижает роль краевых эффектов, так что поле во внутренней области оказывается приблизительно однородным. Значит в этом случае можно обоснованно пренебречь сравнительно малыми продольными проекциями электрического и магнитного полей. Низший тип волны в таком полосковом волноводе, имеющий нулевое значение критической частоты, принято называть *квази-Т-волной*. Строгий анализ показывает, что фазовая скорость квази-Т-волны зависит от частоты. Дисперсионные явления выражены тем резче, чем выше относительная диэлектрическая проницаемость материала подложки.

2. Волновые параметры полосковых линий

Конструкция полосковой линии (ПЛ) чрезвычайно проста: металлический проводник (полоска) шириной w и толщиной t лежит на обеспечивающей жесткость конструкции подложке толщиной h , выполненной из однородного диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью ε . В качестве диэлектрика чаще всего используется керамика на основе окиси алюминия Al_2O_3 с $\varepsilon = 9.6 \div 9.8$ (поликор, сапфирит и др.). С внешней стороны подложка покрыта слоем металла (экраном). Поперечное сечение ПЛ приведено на рис. 1.2, где 1 – полоска, 2 – подложка, 3 – экран.

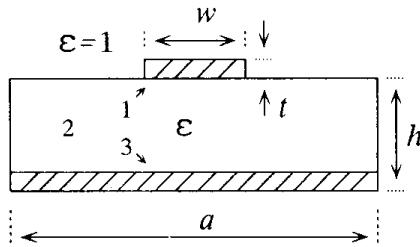


Рис. 1.2. Поперечное сечение полосковой линии

Структура электромагнитного поля в линии имеет достаточно сложный характер. Его теоретический анализ усложняется тем, что лишь часть поля концентрируется в диэлектрической подложке, а остальная – рядом и над полоской в воздухе. Поэтому в линии распространяется не чистая ТЕМ-мода, а кваз-ТЕМ. Термином "кваз-ТЕМ" подчеркивается, что приближенный анализ, выполненный в рамках ТЕМ-приближения дает вполне приемлемую точность расчетов параметров линии на относительно низких частотах, однако с повышением частоты становится все более заметным влияние продольных составляющих полей. Уточняющим моментом при этом является учет дисперсии при определении фазовой скорости волны в линии.

В литературе приводится множество аналитических выражений для расчета фазовой скорости V и волнового сопротивления Z ПЛ, полученных в путем аппроксимации результатов численного решения граничной задачи для поперечного сечения линии. Наиболее простая формула для волнового сопротивления получена в предположении, что все электрическое поле сосредоточено под полоской. Она имеет вид

$$Z = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{w}, \quad (2.1)$$

где $Z_0=120\pi$ Ом. Данная формула показывает, что волновое сопротивление падает с уменьшением толщины подложки и с увеличением ширины

полоски. Однако сравнение с экспериментом показывает, что точность расчетов по формуле (2.1) невелика. Поэтому ее можно использовать лишь для грубых оценок. Гораздо большую точность расчетов позволяет получить формула

$$Z = \frac{Z_0}{2\sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{w}{2h} + 0.441 + 0.082 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon} \left(1.451 + \ln \left(\frac{w}{2h} + 0.94 \right) \right) \right]^{-1}. \quad (2.2)$$

Она справедлива при условии, что $h/w < 1$, $\mu = 1$.

Еще одно выражение для волнового сопротивления, пригодное для широкой области вариаций геометрических размеров линий выглядят следующим образом:

$$Z\sqrt{\varepsilon_{eff}} = \frac{Z_0}{2\pi} \left[\ln(h/w) + 2.079 + 0.031(w/h)^2 \right] \text{ при } w/h \leq 2; \quad (2.3)$$

$$Z\sqrt{\varepsilon_{eff}} = Z_0 \left[(w/h) + 1.365 + 0.637 \ln(w/h + 1.84) \right]^{-1} \text{ при } w/h > 2. \quad (2.4)$$

Здесь эффективная диэлектрическая проницаемость ε_{eff} определяется выражением

$$\varepsilon_{eff} = \frac{\varepsilon + 1}{2} + \frac{\varepsilon - 1}{2\sqrt{1 + 10h/w}}. \quad (2.5)$$

Эти выражения получены в приближении $t = 0$ и $a \rightarrow \infty$ и позволяют проводить расчеты с погрешностью до 1%.

Величина ε_{eff} , связывает фазовую скорость волны в линии V со скоростью света c :

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}}.$$

В ПЛ с относительно широкой полоской ($w/h \gg 1$) практически вся энергия электрического поля концентрируется в подложке. Поэтому величина ε_{eff} весьма близка к ε и фазовая скорость слабо зависит от ширины w . Если же полоска узкая ($w/h \ll 1$), то энергия поля распределяется практически поровну между воздухом и подложкой. При этом ε_{eff} близка к полусумме диэлектрических проницаемостей воздуха и подложки. И в этом случае имеет место весьма слабая зависимость фазовой скорости от ширины полоски.

Для синтеза ПЛ с заданным волновым сопротивлением можно воспользоваться следующими выражениями:

$$\frac{w}{h} = \frac{2}{\pi} \left[B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \left(\ln(B - 1) + 0.293 - \frac{0.517}{\varepsilon} \right) \right] \text{ при } A \leq 2.1;$$

$$\frac{w}{h} = \frac{8}{\exp(A) - 2\exp(-A)}.$$

Здесь

$$A = 2\pi \frac{Z}{Z_0} \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{2}} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \left(0.226 + \frac{0.12}{\varepsilon} \right), \quad B = \frac{\pi Z_0}{2Z\sqrt{\varepsilon}}.$$

Влияние конечной толщины полоски можно учесть, введя в соответствующие формулы вместо физической ширины w эффективную ширину полоски:

$$\frac{w_e}{h} = \frac{w}{h} + \frac{t}{\pi h} \left(2 + \ln \left(\frac{2h}{t} \right) \right) \text{ при } \frac{w}{h} \geq \frac{1}{2\pi},$$

$$\frac{w_e}{h} = \frac{w}{h} + \frac{t}{\pi h} \left(1 + \ln \left(\frac{4\pi w}{t} \right) \right) \text{ при } \frac{w}{h} < \frac{1}{2\pi}.$$

Здесь предполагается, что $t < h$ и $t < w/2$.

Волновые сопротивления полосковых линий, изготавливаемых промышленно, обычно находятся в пределах от 20 до 120 Ом. При этом достигается компромисс между требованиями к потерям в линии передачи, ее пробивной прочности, а также удобству сочленения линии с СВЧ-узлами и приборами.

3. Некоторые свойства Т-волн

Пусть гармоническая электромагнитная волна Т-типа распространяется в пространстве, заполненном однородной средой с постоянными, не зависящими от частоты электродинамическими параметрами ε и μ , вдоль оси z прямоугольной декартовой системы координат. Так как, по определению $E_z = H_z = 0$, то первые два уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E} \text{ и } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu\mu_0 \mathbf{H}$$

принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -j\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= j\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= j\omega\mu\mu_0 H_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -j\omega\mu\mu_0 H_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Получим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять каждая из проекций векторов такого электромагнитного поля в силу уравнений (3.1) и (3.2). Для этого возьмем, например, второе уравнение из системы (3.2), продифференцируем обе его части по z , а затем подставим в них величину $\partial H_y / \partial z$ из первого уравнения системы (3.1). В результате получим

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -j\omega\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu E_x.$$

Иными словами, проекция комплексной амплитуды $\mathbf{E}(x,y,z)$ на ось x удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0, \quad (3.3)$$

в котором $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$ – волновое число (коэффициент фазы) однородной плоской волны с частотой ω , распространяющейся в рассматриваемой среде. Нетрудно показать, что такими же окажутся уравнения для других проекций электрического и магнитного полей, а именно E_y , H_x и H_y .

Путем прямой подстановки убеждаемся, что общее решение уравнения (3.3) имеет вид

$$E_x(x, y, z) = E_x(x, y) \exp(\pm jkz). \quad (3.4)$$

Данная функция описывает волновой процесс, который распространяется вдоль положительного или отрицательного направления оси z с постоянной, не зависящей от частоты фазовой скоростью $V_f = \omega/k = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, равной скорости света в заполняющей среде.

Таким образом, получен принципиальный результат – волны типа Т не имеют частотной дисперсии фазовой скорости. Для волн типа Т продольное волновое число γ совпадает с коэффициентом фазы k , а поэтому поперечное

волновое число $\beta = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$ равно нулю. Отсюда непосредственно следует, что критическая длина Т-волн $\lambda_c = 2\pi / \beta = \infty$. Следовательно, полосковый волновод с волной типа Т в равной мере пропускает колебания любых частот начиная с постоянного тока ($\omega=0$).

Задача об электромагнитном поле Т-волны будет полностью решена, если удастся найти функции $E_x(x, y)$ и $E_y(x, y)$, описывающие распределение амплитуды вектора напряженности электрического поля в поперечной плоскости полоскового волновода. После этого функции $H_x(x, y)$ и $H_y(x, y)$ находятся из уравнений Максвелла.

Обратимся к третьему уравнению из системы (3.2) и заметим, что оно будет удовлетворяться, если положить

$$\mathbf{E}(x, y) = -grad\phi(x, y)$$

Здесь $\phi(x, y)$ – вспомогательная функция – скалярный электрический потенциал.

Действительно, по правилам вычисления градиента в декартовой системе координат

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad (3.5)$$

и поэтому равенство

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

будет иметь место при любом выборе функции $\phi(x, y)$. Однако следует иметь в виду, что в однородной материальной среде без свободных зарядов электрический вектор должен удовлетворять уравнению третьему уравнению Максвелла $div\mathbf{E}=0$, которое в декартовых координатах записывается как

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись равенствами (3.5), получаем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно скалярного электрического потенциала – уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla_{\perp}^2 \phi = 0.$$

Проведенный здесь вывод относился к прямоугольной декартовой системе координат. Однако его можно применить к любой другой системе, так как во всех случаях должно выполняться равенство

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla_{\perp}^2 \phi = 0.$$

Конкретная запись оператора Лапласа ∇_{\perp}^2 , действующего в данном случае по поперечным координатам, зависит от выбора координатной системы.

В частности, при исследовании линий передачи, образованных цилиндрическими проводящими поверхностями, используются цилиндрические координаты. В этой системе координат оператор Лапласа ∇_{\perp}^2 принимает вид

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (3.6)$$

где r и φ – радиальная и азимутальная координаты.

4. Метод расчета волнового сопротивления

В линиях с модой TEM или квази-TEM погонная емкость не зависит от рабочей частоты. Поэтому волновое сопротивление любой такой линии можно найти, предварительно определив величину погонной емкости из решения соответствующей статической задачи.

Пусть линия передачи состоит из центрального проводника, находящегося под ненулевым потенциалом ϕ_c , и охватывающего его

замкнутого внешнего проводника с потенциалом $\phi = 0$. Форма поперечного сечения проводников произвольна. Если пространство между проводниками заполнено воздухом, то волновое сопротивление такой линии

$$Z_B^{\text{возд}} = (L / C_{\text{возд}})^{1/2} = cL = 1 / (cC_{\text{возд}}),$$

где $C_{\text{возд}}$ – погонная емкость, а L – погонная индуктивность линии; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Отсюда

$$L = Z_B^{\text{возд}} / c = 1 / (c^2 C_{\text{возд}}).$$

Погонные индуктивности в линии, заполненной диэлектриком с относительной проницаемостью ϵ_r , и в линии с воздушным заполнением равны. Тогда

$$Z_B = (L / C)^{1/2} = (1 / c)(C_{\text{возд}} C)^{-1/2} \quad (4.1)$$

где Z_B – волновое сопротивление линии с диэлектрическим заполнением и C – погонная емкость этой же линии. Следовательно, волновое сопротивление линии передачи произвольной формы с диэлектрическим заполнением однозначно связано с погонными емкостями этой линии и линии без диэлектрика, т.е. волновое сопротивление можно полагать известным, если определены обе эти емкости. И свою очередь, погонные емкости выражаются через решения уравнения Лапласа.

5. Решение уравнения Лапласа методом конечных разностей

5.1. Уравнения Пуассона и Лапласа

Запишем разность потенциалов между двумя точками, расположенными на расстоянии d друг от друга:

$$\Delta\phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}, \quad (5.1)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{d} – векторы, характеризующие электрическое поле и расстояние в пространстве. В декартовой системе координат

$$\mathbf{d} = \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y + \mathbf{k}\Delta z,$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z,$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Расписывая скалярное произведение двух векторов в правой части (5.1), получаем

$$\Delta\phi = -(E_x\Delta x + E_y\Delta y + E_z\Delta z). \quad (5.2)$$

Так как $\Delta\phi$ – функция координат x, y и z , то

$$\Delta\phi = (\partial\phi/\partial x)\Delta x + (\partial\phi/\partial y)\Delta y + (\partial\phi/\partial z)\Delta z. \quad (5.3)$$

Сравнение (5.2) и (5.3) показывает, что

$$E_x = -(\partial\phi/\partial x) \text{ и т. д.,}$$

т.е.

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{i}(\partial\phi/\partial x) + \mathbf{j}(\partial\phi/\partial y) + \mathbf{k}(\partial\phi/\partial z)). \quad (5.4)$$

Вектор электрической индукции \mathbf{D} связан с вектором \mathbf{E} известным соотношением $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$. Если индукция создается зарядом с объемной плотностью ρ , то в соответствии с третьим уравнением Максвелла

$$(\partial D_x/\partial x) + (\partial D_y/\partial y) + (\partial D_z/\partial z) = \rho,$$

а из (5.4) следует

$$\mathbf{D} = -\varepsilon(\mathbf{i}(\partial\phi/\partial x) + \mathbf{j}(\partial\phi/\partial y) + \mathbf{k}(\partial\phi/\partial z)). \quad (5.5)$$

Введем оператор

$$\nabla = \mathbf{i}(\partial/\partial x) + \mathbf{j}(\partial/\partial y) + \mathbf{k}(\partial/\partial z),$$

тогда равенства (5.4) и (5.5) примут вид

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \mathbf{D} = -\varepsilon\varepsilon_0\nabla\phi.$$

Так как из закона Гаусса $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, то $\nabla(-\varepsilon\varepsilon_0\nabla\phi) = \rho$, и при $\varepsilon = const$

$$\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0.$$

В декартовых координатах

$$\left(\partial^2 \phi / \partial x^2\right) + \left(\partial^2 \phi / \partial y^2\right) + \left(\partial^2 \phi / \partial z^2\right) = -\rho / \varepsilon \varepsilon_0. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6), устанавливающее связь между потенциалом, созданным произвольно распределенными зарядами, и объемной плотностью этих зарядов, известно как уравнение Пуассона.

В частном случае, когда в рассматриваемом объеме нет зарядов, например вне проводников линии передачи, уравнение (5.6) упрощается:

$$\left(\partial^2 \phi / \partial x^2\right) + \left(\partial^2 \phi / \partial y^2\right) + \left(\partial^2 \phi / \partial z^2\right) = 0, \quad (5.7)$$

или

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

Это уравнение широко известно как уравнение Лапласа. Именно оно и будет использовано для нахождения погонных емкостей линий передачи СВЧ. Задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения в частных производных (5.7) для двух- или трехмерного потенциала, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Затем, когда распределение потенциала найдено, по нему с помощью (5.4) находится структура электрического поля и емкость линии. Далее уже без особых трудностей определяются эффективная диэлектрическая проницаемость и волновое сопротивление линии.

Отметим, что уравнение (5.7) получено в предположении, что $\varepsilon_r = const$, т.е. заполняющий линию диэлектрик однороден. Уравнение для передающих систем с неоднородным заполнением приведено в п. 5.4.

5.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа для однородного диэлектрика

Первая проблема, с которой приходится сталкиваться при реализации конечно-разностного метода, – это вывод конечно-разностных уравнений в исследуемой пространственной области из соответствующего

дифференциального уравнения в частных производных. В случае, когда для анализа линии передачи используется уравнение Лапласа, распределение потенциала ищется в ограниченной области, которая разбивается координатными линиями на некоторое число элементарных ячеек. Каждая точка пересечения двух линий, являющихся сторонами ячейки, образует узел. Значения потенциала в узловых точках и являются искомыми величинами.

В двумерном случае простейшая равномерная сетка соответствует декартовой системе координат и состоит из прямоугольных ячеек. Из каждого узла сетки, двигаясь вдоль сторон ячеек, можно попасть в четыре соседних узла (см. рис 5.1). Такая сетка называется пятиточечной. Если бы рассматривалась трехмерная задача, то при движении по сетке из каждого узла можно было бы попасть в шесть соседних. В этом случае сетка семиточечная.

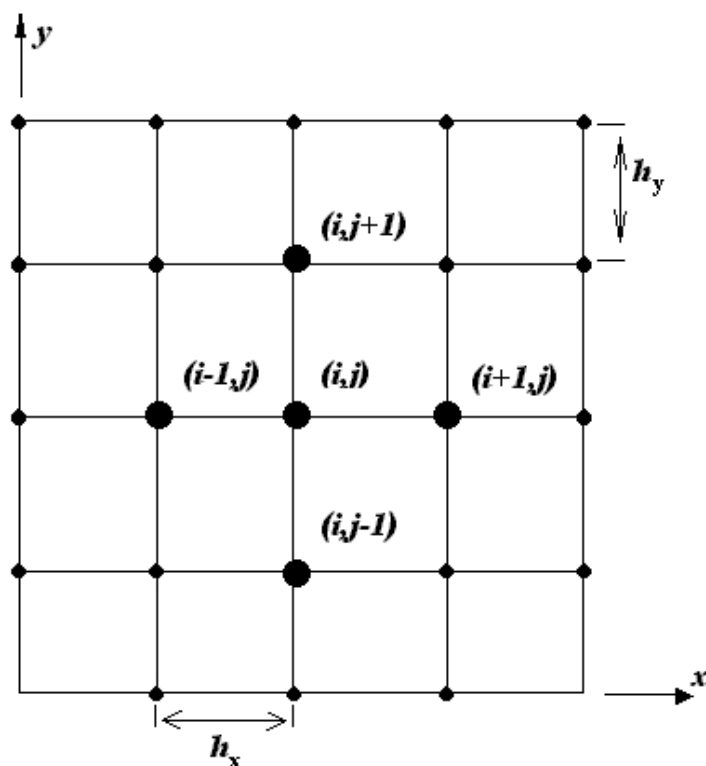


Рис. 5.1. Пятиточечная прямоугольная сетка

Используя обозначения, принятые в разд. 5.1, запишем двухмерное уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$(\partial^2 \phi / \partial x^2) + (\partial^2 \phi / \partial y^2) = 0.$$

Представим его в конечно-разностной форме, удобной для численного анализа. Для сетки, изображенной на рис. 5.1,

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= x_i - x_{i-1} = h_x, \\ y_{j+1} - y_j &= y_j - y_{j-1} = h_y. \end{aligned}$$

При этом сетка называется равномерной, т.к. ее шаг по обоим переменным не зависит от номера узла. В дальнейшем без существенного ограничения общности будем считать $h_x = h_y = h$. Неравномерные сетки рассмотрим в п. 5.3.

Обозначим через $\phi_{i,j}$ значение потенциала в узле (i, j) . Двигаясь по прямой от узла (i, j) к узлу $(i+1, j)$, находим

$$(\partial \phi / \partial x) \approx (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) / h,$$

а при движении по прямой от узла (i, j) к узлу $(i-1, j)$ получаем

$$(\partial \phi / \partial x) \approx (\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) / h.$$

Тогда для второй производной можно записать приближенное выражение

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) / h - (\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) / h}{h} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}}{h^2}.$$

Аналогично двигаясь вдоль координаты y , находим

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \approx \frac{(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j})}{h^2}.$$

Подставляя значения вторых производных в приведенное выше двухмерное уравнение Лапласа, получаем разностное представление

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0. \quad (5.8)$$

Равенство (5.8) есть искомая конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа в однородном диэлектрике. Записав это равенство для каждого не принадлежащего границе области узла сетки и учтя заданные значения потенциалов в узлах, находящихся на границах, мы получим систему линейных алгебраических уравнений для узловых потенциалов.

Рассмотрим теперь более общий подход, позволяющий не только переходить к неравномерным сеткам, но и включать в рассмотрение границы сложной формы. Метод проиллюстрируем примером равномерной сетки и двухмерного уравнения Лапласа в декартовой системе координат. Конечно-разностная аппроксимация основана на разложении функции в ряд Тейлора, который позволяет записать разложение функции $g(x)$ в окрестности точки a :

$$g(x) = g(a+h) = g(a) + h(\partial g(a)/\partial x)|_a + (h^2/2!)(\partial^2 g(a)/\partial x^2)|_a + (h^3/3!)(\partial^3 g(a)/\partial x^3)|_a + \dots$$

Рассматривая потенциал ϕ как функции координаты x , запишем ряд Тейлора

$$\phi(a+h) = \phi(a) + h(\partial\phi/\partial x)|_a + (h^2/2)(\partial^2\phi/\partial x^2)|_a + O(h^3).$$

Здесь символом $O(h)$ обозначены слагаемые, имеющие третий и высшие порядки по шагу сетки. Пусть точка a - центр пространственной равномерной квадратной сетки из пяти узлов, изображенной на рис. 5.1. Присвоим центральному узлу (i, j) нулевой номер, а остальным узлам - номера от 1 до 4. Тогда $\phi_1 = \phi(a-h)$ - потенциал в узле 1, $\phi_0 = \phi(a)$ - потенциал в узле 0 и

$$\phi_1 = \phi_0 - h(\partial\phi/\partial x)|_0 + (h^2/2)(\partial^2\phi/\partial x^2)|_0 - O(h^3). \quad (5.9)$$

Аналогично для $\phi_3 = \phi(a+h)$

$$\phi_3 = \phi_0 + h(\partial\phi/\partial x)|_0 + (h^2/2)(\partial^2\phi/\partial x^2)|_0 + O(h^3). \quad (5.10)$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\phi_1 + \phi_3 = 2\phi_0 + h^2 (\partial^2 \phi / \partial x^2)|_0 + O(h^4) .$$

В этом выражении, когда величина h достаточно мала, слагаемыми с h^4 и всеми последующими можно пренебречь ввиду их малости. Однако при этом возникает погрешность расчета как потенциала, так и напряженности поля. Следует всегда помнить, что получаемое по методу конечных разностей решение является приближенным, а степень приближения зависит от величины шага сетки и способа аппроксимации производных.

Легко видеть, что из последнего выражения следует соотношение

$$(\partial^2 \phi / \partial x^2)|_0 \approx (\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0) / h^2 . \quad (5.11)$$

Аналогично

$$(\partial^2 \phi / \partial y^2)|_0 \approx (\phi_2 + \phi_4 - 2\phi_0) / h^2 . \quad (5.12)$$

Суммируя два последних три равенства, получаем конечно-разностную аппроксимацию двухмерного уравнения Лапласа в декартовой системе координат:

$$\nabla^2 \phi = (1/h^2)(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0) = 0 .$$

Следовательно

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 = 0 ,$$

что совпадает с полученным ранее уравнением (5.8).

Отметим, что аппроксимация производных (5.11), (5.12) и всего уравнения Лапласа (5.8) имеет второй порядок точности по шагу h . Для дальнейшего полезно записать имеющие такой же порядок точности разностные аппроксимации первых производных. Вычтя из разложения (5.10) разложение (5.9) и проведя элементарные преобразования, получим

$$(\partial \phi / \partial x)|_0 \approx (\phi_3 - \phi_1) / 2h \quad (5.13)$$

и, аналогично,

$$(\partial\phi/\partial y)|_0 \approx (\phi_4 - \phi_2)/2h. \quad (5.14)$$

Полученные выражения для производных потенциала по координатам легко обобщаются на случай, когда шаг сетки по координате x отличается от шага по y . В этом случае в формулах (5.11) и (5.13) следует положить $h = h_x$, а в формулах (5.12) и (5.14) – $h = h_y$. При этом разностная аппроксимация уравнения Лапласа примет вид

$$\phi_1 + \alpha^2\phi_2 + \phi_3 + \alpha^2\phi_4 - 2(1 + \alpha^2)\phi_0 = 0, \quad (5.15)$$

где введено обозначение $\alpha = h_x/h_y$.

5.3. Неравномерные сетки для однородных диэлектриков

Описанный выше метод, опирающийся на разложение в ряд Тейлора, является весьма гибким и позволяет получать конечно-разностную аппроксимацию для неравномерных сеток. Такие сетки особенно полезны, когда возникает необходимость более тщательного исследования полей в отдельных подобластях. С точки зрения вычислений во внутренних краевых задачах целесообразнее уменьшать размер ячейки именно в тех подобластях, информация о которых должна быть более детальной. Поэтому необходимо уметь переходить от редкой сетки к более густой. Переходная область между сетками состоит из ячеек различных размеров.

Предположим, что в сетке, изображенной на рис. 5.2, расстояние между узлами равно: 0-1 – h_x , 0-3 – H_x , 0-2 – h_y , 0-4 – H_y . Представим с помощью ряда Тейлора потенциал ϕ_1 , используя разложение по координате x :

$$\phi_1 = \phi_0 - h_x \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_0 + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_0 - O(h_x^3). \quad (5.16)$$

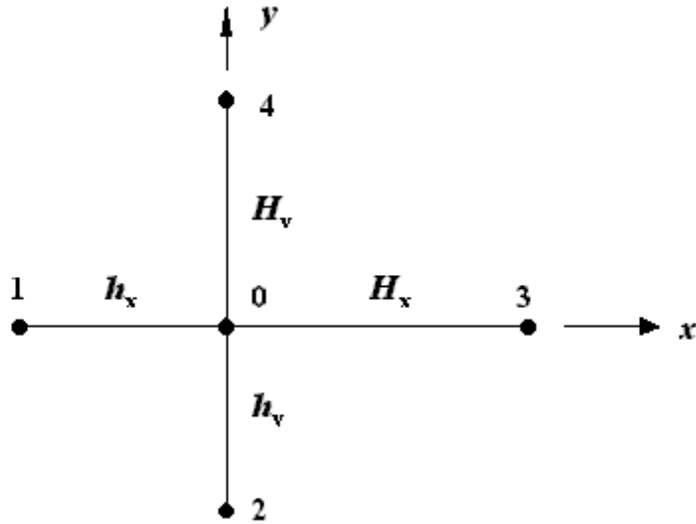


Рис. 5.2. Неравномерная пятиточечная сетка

Аналогичное разложение можно записать для потенциала ϕ_3 :

$$\phi_3 = \phi_0 + H_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_0 + \frac{H_x^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_0 + O(H_x^3). \quad (5.17)$$

Умножим обе части равенств (5.16) и (5.17) на некоторые постоянные A и B соответственно и сложим полученные выражения:

$$A(\phi_1 - \phi_0) + B(\phi_3 - \phi_0) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_0 (BH_x - Ah_x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_0 (BH_x^2 + Ah_x^2) + O(H_x^3) - O(h_x^3).$$

Второе слагаемое в этом выражении равно нулю, если $A = -BH_x^2 / h_x^2$. При этом находим

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_0 \approx \frac{h_x^2(\phi_3 - \phi_0) - H_x^2(\phi_1 - \phi_0)}{h_x H_x (h_x + H_x)}. \quad (5.18)$$

Аналогичное выражение для производной по координате y имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_0 \approx \frac{h_y^2(\phi_4 - \phi_0) - H_y^2(\phi_2 - \phi_0)}{h_y H_y (h_y + H_y)}. \quad (5.19)$$

Если теперь в рассматриваемом выражении положить $A = BH_x / h_x$, то можно определить

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_0 \approx 2 \frac{H_x (\phi_1 - \phi_0) + h_x (\phi_3 - \phi_0)}{h_x H_x (h_x + H_x)}. \quad (5.20)$$

Если в этой формуле считать $h_x = H_x = h$, что соответствует равномерной сетке, то получим ранее уже найденную аппроксимацию

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_0 \approx \frac{\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0}{h^2}.$$

Отметим, что погрешность этой аппроксимации на равномерной сетке имеет порядок h^2 . Поэтому аппроксимация (5.20), имеющая порядок H_x , менее точна.

Записав выражение, аналогичное (5.20), для второй производной по координате y

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right|_0 \approx 2 \frac{H_y (\phi_2 - \phi_0) + h_y (\phi_4 - \phi_0)}{h_y H_y (h_y + H_y)}, \quad (5.21)$$

можно получить искомую конечно-разностную аппроксимацию уравнения Лапласа на неравномерной сетке:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_x (h_x + H_x)} \phi_1 + \frac{1}{h_y (h_y + H_y)} \phi_2 + \frac{1}{H_x (h_x + H_x)} \phi_3 + \frac{1}{H_y (h_y + H_y)} \phi_4 - \\ - \left(\frac{1}{h_x H_x} + \frac{1}{h_y H_y} \right) \phi_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Эта аппроксимация имеет первый порядок точности по максимальному из шагов H_x и H_y , в то время как аппроксимация (5.8) - порядок h^2 . Поэтому в областях с быстрым изменением полей предпочтение следует отдать густым равномерным сеткам; а там, где изменение полей более медленное, - также

равномерным, но редким. Тогда неравномерная сетка с низким порядком точности появляется лишь в переходных областях.

Неравномерные сетки часто используются также при аппроксимации граничных условий в областях с криволинейными (некоординатными) границами.

5.4. Линии передачи с неоднородным диэлектриком

Задача о решении уравнения Лапласа в области с однородным диэлектриком, является достаточно распространенной, но все же представляет собой частный случай более общей задачи о расчете электрического поля в области с неоднородным диэлектрическим заполнением. Для линий передачи СВЧ типична ситуация, когда область концентрации электрического поля содержит слои материалов с различными диэлектрическими проницаемостями. Такой системой, в частности, является описанная выше полосковая линия.

Если относительная диэлектрическая проницаемость среды может быть задана непрерывной функцией координат $\varepsilon_r = \varepsilon_r(x, y)$, то из уравнения Максвелла для вектора электрической индукции $\vec{D} = -\varepsilon_r(x, y)\varepsilon_0\nabla\phi(x, y)$ в отсутствие свободных зарядов нетрудно получить соответствующее уравнение для потенциала ϕ :

$$\nabla^2\phi(x, y) + \nabla\ln(\varepsilon_r(x, y))\nabla\phi(x, y) = 0, \quad (5.23)$$

которое при $\varepsilon_r = const$ переходит в стандартное уравнение Лапласа (5.7). Аппроксимация производных потенциала в уравнении (5.23) по формулам (5.11)-(5.14) позволяет получить систему конечно-разностных уравнений для узловых потенциалов на равномерной сетке:

$$\left(1 - \frac{1}{2}h\chi_0\right)\phi_1 + \left(1 - \frac{1}{2}h\theta_0\right)\phi_2 + \left(1 + \frac{1}{2}h\chi_0\right)\phi_3 + \left(1 + \frac{1}{2}h\theta_0\right)\phi_4 - 4\phi_0 = 0$$

где χ_0 и θ_0 - значения производных от логарифма относительной диэлектрической проницаемости по x и y в центральной узловой точке. Аппроксимацию уравнения (5.23) на неравномерной сетке можно получить, воспользовавшись выражениями для производных (5.18)-(5.21).

При многослойном заполнении линия передачи содержит несколько сред с постоянными диэлектрическими проницаемостями. В пределах каждого из однородных диэлектриков распределение потенциала описывается уравнением Лапласа (5.7) и, следовательно, для узловых потенциалов внутри однородных подобластей справедлива система уравнений (5.8) (или система (5.22), если используются неравномерные сетки). Однако для потенциалов точек, лежащих на границах раздела подобластей, необходимо использовать уравнение (5.23), причем второе слагаемое в его левой части содержит дельта-функции, возникающие на разрывах ε_r . Совершенно очевидно, что уравнения с дельта-функциями непригодны для построения конечно-разностных схем. Поэтому для узловых точек на границах раздела диэлектриков воспользуемся интегральной формулировкой третьего уравнения Максвелла (теоремой Гаусса).

В двухмерной области без свободных зарядов из теоремы Гаусса следует, что

$$\int_L \varepsilon_r (\nabla \phi) \mathbf{n} dl = 0. \quad (5.24)$$

Здесь интегрирование ведется по ограничивающему исследуемую область замкнутому контуру L ; \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к контуру интегрирования.

Рассмотрим наиболее общую ситуацию, когда центральная узловая точка пятиточечной сетки лежит на границе раздела четырех областей. Значения

относительных диэлектрических проницаемостей и параметры сетки приведены на рис. 5.3. Там же пунктиром отмечен контур интегрирования L , состоящий из отрезков четырех прямых линий, каждая из которых параллельна одной из координатных осей. Тогда

$$\int_L \varepsilon_r (\nabla \phi) \mathbf{n} dl = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 .$$

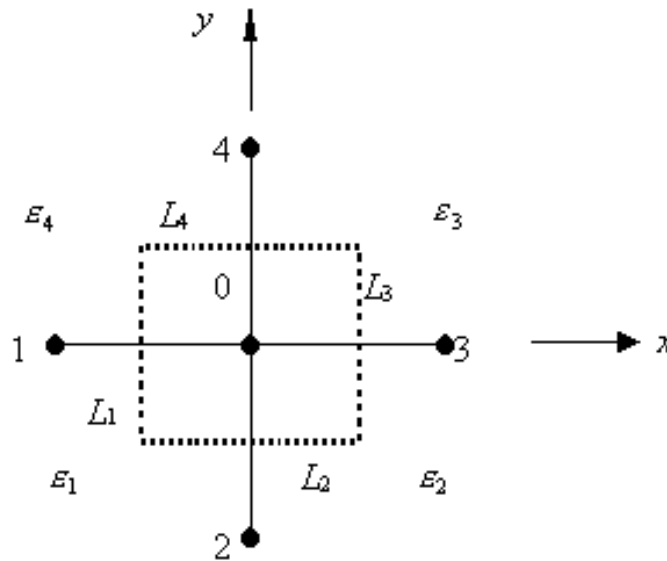


Рис. 5. 3. Сетка с узловыми точками, лежащими на границах диэлектриков

Нетрудно вычислить вклад каждого из отрезков в контурный интеграл:

$$I_1 = \int_{L_1} \varepsilon_r (\partial \phi / \partial x) dy = -\frac{1}{2} (\varepsilon_1 h_y + \varepsilon_4 H_y) \frac{\phi_0 - \phi_1}{h_x},$$

$$I_2 = \int_{L_2} \varepsilon_r (\partial \phi / \partial y) dx = -\frac{1}{2} (\varepsilon_1 h_x + \varepsilon_2 H_x) \frac{\phi_0 - \phi_2}{h_y},$$

$$I_3 = \int_{L_3} \varepsilon_r (\partial \phi / \partial x) dy = \frac{1}{2} (\varepsilon_2 h_y + \varepsilon_3 H_y) \frac{\phi_3 - \phi_0}{H_x},$$

$$I_4 = \int_{L_4} \varepsilon_r (\partial \phi / \partial y) dx = \frac{1}{2} (\varepsilon_4 h_x + \varepsilon_3 H_x) \frac{\phi_4 - \phi_0}{H_y}.$$

Тогда после суммирования вкладов в соответствии с (5.24) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x}(\varepsilon_1 h_y + \varepsilon_4 H_y)\phi_1 + \frac{1}{h_y}(\varepsilon_1 h_x + \varepsilon_2 H_x)\phi_2 + \frac{1}{H_x}(\varepsilon_2 h_y + \varepsilon_3 H_y)\phi_3 + \frac{1}{H_y}(\varepsilon_4 h_x + \varepsilon_3 H_x)\phi_4 - \\ & - \left[\varepsilon_1 \left(\frac{h_x}{h_y} + \frac{h_y}{h_x} \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{H_x}{h_y} + \frac{h_y}{H_x} \right) + \varepsilon_3 \left(\frac{H_x}{H_y} + \frac{H_y}{H_x} \right) + \varepsilon_4 \left(\frac{h_x}{H_y} + \frac{H_y}{h_x} \right) \right] \phi_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Данное выражение является достаточно общим и применимо для всех наиболее распространенных вариантов границ раздела однородных диэлектриков. В частности, если узловые точки расположены на параллельной оси x границе двух сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_3 , а сетка является равномерной, то в (5.25) следует положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, $H_x = h_x$, $H_y = h_y$. В результате получим следующее уравнение связи узловых потенциалов:

$$\varepsilon_{13}\phi_1 + \varepsilon_1\alpha^2\phi_2 + \varepsilon_{13}\phi_3 + \varepsilon_3\alpha^2\phi_4 - 2\varepsilon_{13}(1 + \alpha^2)\phi_0 = 0. \quad (5.26)$$

Здесь введено обозначение $\varepsilon_{13} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/2$.

Аналогично, для параллельной оси y границы раздела диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2 имеем

$$\varepsilon_1\phi_1 + \varepsilon_{12}\alpha^2\phi_2 + \varepsilon_2\phi_3 + \varepsilon_{12}\alpha^2\phi_4 - 2\varepsilon_{12}(1 + \alpha^2)\phi_0 = 0, \quad (5.27)$$

где $\varepsilon_{12} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$.

Из общего уравнения связи узловых потенциалов (5.25), как частные случаи, следуют также все приведенные выше конечно-разностные аппроксимации уравнения Лапласа в однородных областях с равномерными и неравномерными сетками.

5.5. Конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа в цилиндрических координатах

Формально методика аппроксимации оператора Лапласа в цилиндрических координатах (3.6) не отличается от рассмотренной выше методики для декартовых координат. Нетрудно показать, что на равномерной пятиточечной сетке для линии передачи с однородным диэлектриком радиальная часть оператора Лапласа аппроксимируется выражением

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{(\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j})}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})}{2h_r}, \quad (5.28)$$

а азимутальная – выражением

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{(\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1})}{h_\varphi^2}. \quad (5.29)$$

В формулах (5.28) и (5.29), имеющих второй порядок точности по h_r и h_φ , индекс i указывает на номер узловой точки по координате r , а индекс j – по координате φ .

На основе аппроксимаций (5.28) и (5.29) конечно-разностный аналог уравнения Лапласа в цилиндрических координатах записывается в виде

$$\left(1 - \frac{h_r}{r_i} \right) \phi_{i-1,j} - 2(1 + \gamma_i^2) \phi_{i,j} + \left(1 + \frac{h_r}{r_i} \right) \phi_{i+1,j} + \gamma_i^2 (\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}) = 0. \quad (5.30)$$

Здесь $\gamma_i = h_r / r_i h_\varphi$, а индексы i, j принимают все значения, соответствующие внутренним узлам сетки: $i = 1, \dots, I$; $j = 1, \dots, J$. Значения $\phi_{i+1,j}$ в узлах, лежащих на внешней границе области, задаются граничными условиями. Если внутри области находятся проводники с заданными потенциалами, то, как и в случае декартовых координат, уравнения для узловых точек,

принадлежащих этим проводникам, исключаются из системы (5.30), а потенциалы проводников входят в уравнения для соседних узлов.

Систему уравнений (5.30) следует дополнить условиями периодичности по угловой координате: $\phi_{i,J+1} = \phi_{i,0}$.

Отдельного рассмотрения требует узловая точка, находящаяся на оси цилиндрической системы координат, если она принадлежит исследуемой области. Во-первых, для нее имеют место вполне очевидные равенства: $\phi_{0,0} = \phi_{0,1} = \phi_{0,2} = \dots = \phi_{0,J} = \Phi_0$. А, во-вторых, используя теорему Гаусса и проводя интегрирование по боковой поверхности цилиндра радиуса $h/2$, получим

$$\frac{h_r h_\varphi}{2} \sum_{j=0}^J E_r(h/2, \varphi_j) = \frac{h_r h_\varphi}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{1,j} - \Phi_0}{h_r} = 0.$$

Предполагается, что на оси нет точечных зарядов. Отсюда находим приближенное значение потенциала на оси цилиндрических координат:

$$\Phi_0 = \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^J \phi_{1,j}. \quad (5.31)$$

Соотношение (5.31) совместно с условиями периодичности и граничными условиями обеспечивает полноту системы уравнений (5.30).

5.6. Методы решения систем конечно-разностных уравнений

Конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа приводит к системе линейных алгебраических уравнений для значений потенциала во внутренних узловых точках. Систему можно записать в матричной форме, если от двухиндексных обозначений узловых потенциалов перейти к одноиндексным по правилу

$$u_k = \phi_{i,j}; \quad k = iJ + j; \quad i = 0, 1, \dots, I+1; \quad j = 0, 1, \dots, J+1;$$

где I и J – количество внутренних узлов прямоугольной области по координатам x и y . Тогда вектор узловых потенциалов $\mathbf{u}^T = (u_0, u_1, \dots, u_N)$, $N = (I + 2)(J + 2)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{w}, \quad (5.32)$$

где вектор \mathbf{w} составлен из граничных значений потенциала, а матрица \mathbf{A} является пятидиагональной, т.е. имеет ненулевые элементы на пяти диагоналях. Одна из диагоналей – основная, две других – примыкают к ней. Еще по одной диагонали расположено выше и ниже главной. Конкретный вид матрицы \mathbf{A} определяется типом аппроксимации уравнения Лапласа (равномерные или неравномерные сетки), формой границ диэлектриков и проводящих поверхностей, а также числом узловых точек по координатным осям. Например, при аппроксимации уравнения Лапласа на равномерной сетке в однородной области по формуле (5.8) элементы главной диагонали матрицы имеют значение -4 , а элементы всех остальных диагоналей равны единице.

Отметим, что в вектор узловых потенциалов \mathbf{u} можно включать также значения потенциала в граничных точках. Например, если граничное значение соответствует элементу вектора u_m , то строка матрицы \mathbf{A} с номером m имеет единственный отличный от нуля элемент, который расположен на главной диагонали и равен единице. При этом в вектор правой части уравнения (5.28) записывается элемент $w_m = \phi_b$, где ϕ_b – заданное граничное значение.

Формальным решением уравнения (5.32) является решение вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w},$$

где \mathbf{A}^{-1} – матрица, обратная матрице \mathbf{A} . Стандартным определением обратной матрицы порядка n в алгебре является правило Крамера:

$$(\mathbf{A}^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{A^{j,i}}{\det(\mathbf{A})},$$

где $A^{j,i}$ – определитель матрицы $n-1$ порядка, полученной вычеркиванием j строки и i столбца в исходной матрице. При этом определитель матрицы вычисляется по формуле

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A^{i,j} a_{i,j}.$$

Простой анализ этого общепринятого метода расчета показывает, что его практическая реализация требует очень большого числа арифметических операций. Например, только для вычисления определителя матрицы порядка n необходимо выполнить $n!$ умножений. Между тем при решении конечно-разностных уравнений приходится иметь дело с матрицами, порядок которых достигает десятков и сотен тысяч. Очевидно, что для решения таких задач не может быть и речи о непосредственном применении правила Крамера.

Более эффективным алгоритмом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод исключения Гаусса. Существует много видоизменений метода Гаусса, которые предельно уменьшают число необходимых для решения арифметических операций, однако во всех методах это число пропорционально кубу размерности искомого вектора. Для больших пространственных сеток время вычислений по методу Гаусса также становится неприемлемо большим.

Правило Крамера и метод Гаусса относятся к прямым или "точным" методам решения систем линейных алгебраических уравнений. Их погрешность определяется лишь ошибками округления (усечения) при выполнении арифметических операций. Существуют и другие прямые методы, например, разложение Холесского, **QR**-разложение, **LDL^T**-факторизация. Наиболее эффективные из них учитывают свойственную методу конечных разностей разреженность матрицы **A**. При этом

используются специальные методы упаковки и хранения матрицы, что значительно усложняет компьютерные программы. Их составление каждым отдельным пользователем требует значительных затрат времени и высокой квалификации программиста. Поэтому при необходимости целесообразно использовать профессионально отработанные алгоритмы и программы, включенные в библиотеки научных программ.

Альтернативой прямому решению систем линейных алгебраических уравнений являются итерационные методы. По сравнению с прямыми методами итерационные имеют следующие преимущества: они 1) значительно проще для программирования; 2) эффективно работают с разреженными матрицами, сохраняя и обрабатывая только ненулевые элементы; 3) требуют меньше оперативной памяти.

Рассмотрение итерационных методов проведем на примере системы конечно-разностных уравнений (5.8). Формально уравнение (5.8) можно разрешить относительно потенциала в узле (i, j) сетки:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}). \quad (5.33)$$

Следовательно, если значения потенциала в правой части равенства (5.33) известны либо могут быть каким-либо образом определены, то потенциал в узле (i, j) находится как среднее арифметическое всех значений. На этом основан один из возможных итерационных методов решения системы уравнений (5.8). Идея метода заключается в следующем: задаются некоторые, достаточно произвольные, начальные значения потенциала во всех внутренних узлах сетки. Затем по (5.33) в каждом из узлов эти значения потенциала пересчитываются в новые. Найденные таким образом значения еще раз подставляются в (5.33), и так до тех пор, пока изменения потенциала от итерации к итерации в каждом из узлов не будут меньше некоторого заданного уровня. При этом во всех узлах, расположенных на границах,

потенциал на каждой итерации задается постоянным, что гарантирует выполнение граничных условий. Такой метод достаточно часто применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений и носит название метода Якоби.

Применяя локальные обозначения узлов пятиточечной сетки итерационный процесс Якоби можно представить в виде

$$\phi_0^{(p+1)} = \frac{1}{4}(\phi_1^{(p)} + \phi_2^{(p)} + \phi_3^{(p)} + \phi_4^{(p)}), \quad (5.34)$$

где верхний индекс указывает на номер итерации. Скорость сходимости итераций удастся повысить, используя в формуле (5.34) уже вычисленные уточненные значения двух узловых потенциалов. Действительно, если на каждой итерации перемещаться по сетке, например, слева направо и снизу вверх, то к моменту расчета $\phi_0^{(p+1)}$ уже определены значения $\phi_2^{(p+1)}$ и $\phi_1^{(p+1)}$. А так как они уточняют значения $\phi_2^{(p)}$ и $\phi_1^{(p)}$, то представляется естественным использовать в итерационной процедуре именно новые, уточненные величины. В таком случае итерационная формула принимает вид

$$\phi_0^{(p+1)} = \frac{1}{4}(\phi_1^{(p+1)} + \phi_2^{(p+1)} + \phi_3^{(p)} + \phi_4^{(p)}), \quad (5.35)$$

и мы приходим к методу, известному под названием метода Зейделя.

Дальнейшим обобщением процедуры Зейделя является метод последовательной верхней релаксации (SOR-метод). В нем для ускорения сходимости итерации проводятся по формуле

$$\phi_0^{(p+1)} = (1 - \lambda)\phi_0^{(p)} + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^{(p+1)} + \phi_2^{(p+1)} + \phi_3^{(p)} + \phi_4^{(p)}) \quad (5.36)$$

со значением параметра релаксации λ из интервала $1 < \lambda < 2$. При $\lambda = 1$ метод последовательной верхней релаксации переходит в метод Зейделя, а, если в

формуле (5.36) использовать значения $0 < \lambda < 1$, то такой итерационный процесс получил название метода последовательной нижней релаксации.

Среди всех рассмотренных итерационных процедур метод последовательной верхней релаксации сходится наиболее быстро. При этом в рамках самого метода наибольшая скорость сходимости достигается при некотором оптимальном значении параметра релаксации λ_{opt} , которое зависит от элементов матрицы \mathbf{A} в уравнении (5.32). Часто близкие к λ_{opt} значения параметра могут быть выбраны на основе предыдущего опыта решения аналогичных задач. Обычно также считается, что при $\lambda=1,5$ достигается достаточно быстрая сходимость, что приводит к эффективной численной реализации метода для широкого круга проблем.

В итерационную формулу метода последовательной релаксации вносится соответствующая корректировка для неравномерных сеток и для точек, принадлежащих границам раздела слоев диэлектрика. Например, если шаг сетки по координате x не равен шагу по y , то, исходя из конечно-разностного уравнения (5.14), нетрудно заключить, что итерации следует проводить по формуле

$$\phi_0^{(p+1)} = (1 - \lambda)\phi_0^{(p)} + \frac{\lambda}{2(1 + \alpha^2)} (\phi_1^{(p+1)} + \alpha^2 \phi_2^{(p+1)} + \phi_3^{(p)} + \alpha^2 \phi_4^{(p)}).$$

Потенциалы лежащих на границе раздела двух диэлектриков узловых точек, для которых справедливо разностное уравнение (5.26), методом последовательной верхней релаксации уточняются по формуле

$$\phi_0^{(p+1)} = (1 - \lambda)\phi_0^{(p)} + \frac{\lambda}{2\varepsilon_{13}(1 + \alpha^2)} (\varepsilon_{13}\phi_1^{(p+1)} + \varepsilon_1\alpha^2\phi_2^{(p+1)} + \varepsilon_{13}\phi_3^{(p)} + \varepsilon_3\alpha^2\phi_4^{(p)}).$$

Популярность метода последовательной верхней релаксации весьма велика, поскольку он достаточно быстро сходится и просто реализуется на ЭВМ. Однако, если количество узлов сетки настолько велико, что

вычислительные затраты даже для этого метода неприемлемо велики, то следует обратиться к одному из блочных итерационных методов, разработанных специально для решения очень больших систем уравнений. Можно также еще несколько повысить скорость сходимости метода последовательной верхней релаксации, если проводить расчеты с параметром релаксации, изменяющимся в процессе итераций. Например, в методе Чебышева итерационный процесс начинается со значением $\lambda = 1$, а затем λ последовательно увеличивается вплоть до значения λ_{opt} . Таким способом удастся улучшить сходимость на ранней стадии итерационного процесса.

6. Расчет погонной емкости линии

В предыдущих разделах рассматривались методы построения конечно-разностных уравнений для различных поперечных сечений линий передачи и различных видов их заполнения диэлектриком. Были описаны методы численного решения полученных уравнений, позволяющие определить распределение потенциала в поперечном сечении линии. Граничные условия заданы величиной потенциала на каждом из проводников, и эти значения потенциала вошли в конечно-разностные уравнения. Предположим, что система конечно-разностных уравнений решена. Теперь необходимо определить погонную емкость линии.

6.1. Энергетический метод расчета погонной емкости

В общем случае емкость проводника связана с величиной имеющегося на нем заряда равенством

$$C_c = Q / \phi_c,$$

где ϕ_c – потенциал проводника, при расчете емкости обычно принимаемый равным +1 В. Полная энергия, запасенная в системе,

$$W = \frac{1}{2} C_c \phi_c^2.$$

С другой стороны, полную энергию можно выразить через электрическое поле в объеме V :

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon |E|^2 dV.$$

Так как оба выражения определяют одно и то же значение энергии, то имеет место выражение для емкости вида

$$C_c = \frac{\varepsilon_0}{\phi_c^2} \int_V \varepsilon |E|^2 dV.$$

В двумерном случае это выражение преобразуется в формулу для погонной емкости, т.е. емкости на единицу длины линии

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\phi_c^2} \int_S \varepsilon |E|^2 dS. \quad (6.1)$$

где S – область интегрирования в плоскости поперечного сечения.

Из формул (6.1) и (4.1) следует, что погонную емкость и волновое сопротивление линии можно определить, если известна поперечная структура электрического поля.

Напряженность электрического поля рассчитывается по известному потенциалу в соответствии с выражением (5.4). На двумерной пятиточечной сетке конечно-разностная аппроксимация выражения (5.4) в полужелтых точках для составляющей E_x может быть записана в виде

$$\begin{aligned} (E_x)_{i+1/2, j+1/2} &\approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{i+1, j} - \phi_{i, j}}{h_x} + \frac{\phi_{i+1, j+1} - \phi_{i, j+1}}{h_x} \right) = \\ &= -\frac{1}{2h_x} (\phi_{i+1, j+1} + \phi_{i+1, j} - \phi_{i, j+1} - \phi_{i, j}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Аналогично

$$(E_y)_{i+1/2, j+1/2} \approx -\frac{1}{2h_y} (\phi_{i+1, j+1} + \phi_{i, j+1} - \phi_{i+1, j} - \phi_{i, j}). \quad (6.3)$$

Энергия, запасенная в элементарной ячейке размером $h_x \times h_y$, охватывающей точку $(i + 1/2, j + 1/2)$, равна

$$\Delta W_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \left((E_x)_{i+1/2, j+1/2}^2 + (E_y)_{i+1/2, j+1/2}^2 \right) h_x h_y \quad (6.4)$$

Полная энергия, запасенная в электрическом поле, вычисляется как сумма энергий элементарных ячеек:

$$W = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \Delta W_{i+1/2, j+1/2} \cdot$$

Так как погонная емкость $C = 2W / \phi_c^2$, то при $\phi_c = +1B$

$$C = 2 \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \Delta W_{i+1/2, j+1/2} \cdot \quad (6.5)$$

На основе выражений (6.5), (6.4) с использованием аппроксимационных формул (6.2), (6.3) и результатов расчета распределения потенциала электрического поля в поперечном сечении линии передачи нетрудно разработать компьютерную программу для расчета погонной емкости.

6.2. Расчет погонной емкости на основе теоремы Гаусса

Еще один метод расчета погонной емкости линии передачи основан на использовании теоремы Гаусса. Общая формулировка теоремы – поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен полному электрическому заряду в объеме, ограниченном данной поверхностью – в двумерном случае приводит к выражению

$$\varepsilon_0 \oint_L \varepsilon E_n dL = Q,$$

где E_n – нормальная к контуру L составляющая напряженности электрического поля, Q – погонный заряд проводника, охваченного

контуром. Тогда, учитывая, что погонная емкость линии определяется отношением $C = Q/\phi_c$, получим расчетную формулу

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\phi_c} \oint_L \varepsilon E_n dL. \quad (6.6)$$

Для численной реализации метода, опирающегося на формулу (6.6), следует аппроксимировать выражение $E_n = -\partial\phi/\partial n$ конечными разностями и воспользоваться одной из квадратурных формул для интеграла. Например, в декартовой системе координат для контура, изображенного на рис. 6.1, формулу (6.6) можно заменить приближенным выражением

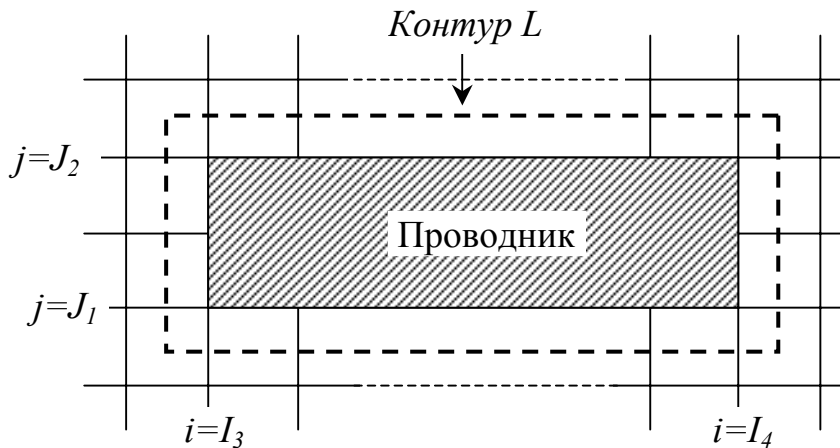


Рис. 6.1. Прямоугольная сетка в окрестности проводника

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4, \quad (6.7)$$

где

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0}{\phi_c} \frac{h_x}{2h_y} \left(\frac{\varepsilon_{I_3-1/2, J_1-1/2}}{2} (\phi_{I_3-1, J_1} + \phi_{I_3, J_1} - \phi_{I_3-1, J_1-1} - \phi_{I_3, J_1-1}) + \frac{\varepsilon_{I_4+1/2, J_1-1/2}}{2} (\phi_{I_4+1, J_1} + \phi_{I_4, J_1} - \phi_{I_4+1, J_1-1} - \phi_{I_4, J_1-1}) + \sum_{i=I_3}^{I_4-1} \varepsilon_{i+1/2, J_1-1/2} (\phi_{i, J_1} + \phi_{i+1, J_1} - \phi_{i, J_1-1} - \phi_{i+1, J_1-1}) \right),$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{\varepsilon_0}{\phi_c} \frac{h_x}{2h_y} \left(\frac{\varepsilon_{I_3-1/2, J_2+1/2}}{2} (\phi_{I_3-1, J_2} + \phi_{I_3, J_2} - \phi_{I_3-1, J_2+1} - \phi_{I_3, J_2+1}) + \right. \\
&\quad + \frac{\varepsilon_{I_4+1/2, J_2+1/2}}{2} (\phi_{I_4+1, J_2} + \phi_{I_4, J_2} - \phi_{I_4+1, J_2+1} - \phi_{I_4, J_2+1}) + \\
&\quad \left. + \sum_{i=I_3}^{I_4-1} \varepsilon_{i+1/2, J_2+1/2} (\phi_{i, J_2} + \phi_{i+1, J_2} - \phi_{i, J_2+1} - \phi_{i+1, J_2+1}) \right), \\
C_3 &= \frac{\varepsilon_0}{\phi_c} \frac{h_y}{2h_x} \left(\frac{\varepsilon_{I_3-1/2, J_1-1/2}}{2} (\phi_{I_3, J_1-1} + \phi_{I_3, J_1} - \phi_{I_3-1, J_1-1} - \phi_{I_3-1, J_1}) + \right. \\
&\quad + \frac{\varepsilon_{I_3-1/2, J_2+1/2}}{2} (\phi_{I_3, J_2+1} + \phi_{I_3, J_2} - \phi_{I_3-1, J_2+1} - \phi_{I_3-1, J_2}) + \\
&\quad \left. + \sum_{j=J_1}^{J_2-1} \varepsilon_{I_3-1/2, j+1/2} (\phi_{I_3, j+1} + \phi_{I_3, j} - \phi_{I_3-1, j+1} - \phi_{I_3-1, j}) \right), \\
C_4 &= \frac{\varepsilon_0}{\phi_c} \frac{h_y}{2h_x} \left(\frac{\varepsilon_{I_4+1/2, J_1-1/2}}{2} (\phi_{I_4, J_1-1} + \phi_{I_4, J_1} - \phi_{I_4+1, J_1-1} - \phi_{I_4+1, J_1}) + \right. \\
&\quad + \frac{\varepsilon_{I_4+1/2, J_2+1/2}}{2} (\phi_{I_4, J_2+1} + \phi_{I_4, J_2} - \phi_{I_4+1, J_2+1} - \phi_{I_4+1, J_2}) + \\
&\quad \left. + \sum_{j=J_1}^{J_2-1} \varepsilon_{I_4+1/2, j+1/2} (\phi_{I_4, j+1} + \phi_{I_4, j} - \phi_{I_4+1, j+1} - \phi_{I_4+1, j}) \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что в отличие от формулы (6.5) формула (6.7) для расчета емкости не требует вычисления потенциала электрического поля во всем поперечном сечении линии передачи – необходимо определить потенциал только в дискретном множестве точек, принадлежащих контуру интегрирования L . Это можно сделать, используя, например, метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

6.3. Емкости многопроводных линий

Если линия передачи содержит несколько проводников, например, представляет собой связанную полосковую линию, то можно пользоваться следующей методикой расчета взаимных емкостей.

Допустим, что заряды проводников известны; требуется рассчитать потенциалы.

Потенциал первого проводника равен:

$$\phi_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \dots + a_{1n}Q_n + \dots \quad (6.8)$$

Первое слагаемое правой части выражает потенциал, обусловленный зарядом самого первого проводника; второе – потенциал, приобретаемый первым проводником благодаря наличию заряда Q_2 на втором проводнике и т.д.

Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots$ называются потенциальными коэффициентами. Их величины зависят только от формы взаимного расположения проводников. Коэффициент a_{11} численно равен потенциалу первого проводника, когда его заряд $Q_1 = 1 Кл$, а заряды всех остальных проводников равны нулю. Коэффициент a_{12} численно равен потенциалу первого проводника, когда заряд $Q_2 = 1 Кл$, а все прочие заряды отсутствуют: $Q_1 = Q_3 = \dots = Q_n = \dots = 0$, и т.д.

Уравнения, аналогичные (6.8), могут быть составлены и для всех остальных проводников. В результате получается система уравнений

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \dots + a_{1n}Q_n + \dots; \\ \phi_2 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \dots + a_{2n}Q_n + \dots; \\ &\dots\dots\dots; \\ \phi_n &= a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \dots + a_{nn}Q_n + \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

Задача расчета сводится, таким образом, к определению потенциальных коэффициентов a_{kn} .

Чаще приходится решать обратную задачу – находить заряды по известным величинам разностей потенциалов между проводниками. Для этого система (6.9) может быть решена относительно зарядов и решение представлено в форме:

м проводнике появится наведенный заряд $Q_{k(n)} = C_{kn} \cdot 1B$; такой же величины наведенный заряд $Q_{n(k)} = C_{nk} \cdot 1B$ появится и на n -м проводнике, если потенциал k -го проводника сделать равным $1B$, а потенциалы всех остальных проводников – равными 0; следовательно, $C_{kn} = C_{nk}$.

7. Программы электростатического моделирования полосковых линий

Текст MathCAD-программы численного решения уравнения Лапласа в двумерной области, заполненной двумя слоями диэлектрика и содержащей металлические проводники, приведен на рис. 7.1. Она имеет структуру программного модуля с заголовком

$$\mathbf{Relax}(\alpha, \lambda, \varepsilon 1, \varepsilon 2, D, \delta),$$

где $\alpha = h_x / h_y$ – отношение шагов сетки по координатам x и y (см. п. 5.2), λ – параметр релаксации, $\varepsilon 1$ и $\varepsilon 2$ – значения относительных диэлектрических проницаемостей диэлектриков, расположенных ниже и выше плоскости раздела $y = Y_{12} = const$, δ – точность. Элементам $d_{i,j}$, где $i, j = 0, 1, \dots, N$, вспомогательной матрицы D присваивается значение “ D ”, если соответствующая узловая точка лежит внутри диэлектрика; значение “ $D1D2$ ”, если узловая точка попадает на границу раздела диэлектриков, или значение потенциала того проводника, на котором находится узловая точка.

На рис. 7.2 приведен пример использования модуля **Relax** для расчета пространственного распределения потенциала электрического поля в экранированной полосковой линии с параметрами: $b/a = 1$, $h/a = 0.2$, $w/h = 1$, $\varepsilon = 9.6$ (см. рис. 1.2).

```

Relax( $\alpha, \lambda, \varepsilon 1, \varepsilon 2, D, \delta$ ) := Решение_уравнения_Лапласа_в_двумерной_прямоугольной_области ← %
методом_последовательной_верхней_релаксации ← %
N ← rows(D) - 1
 $\alpha \leftarrow \alpha^2$ 
for i ∈ 0.. N
  for j ∈ 0.. N
    U0i,j ← 0 if Di,j = "D"
    otherwise
      U0i,j ← 0 if Di,j = "D1D2"
      U0i,j ← Di,j otherwise
  U ← U0
  K ←  $\frac{\varepsilon 1 + \varepsilon 2}{2}$ 
  m ← 500
  while m
    for i ∈ 1.. N - 1
      for j ∈ 1.. N - 1
        if Di,j = "D"
          Ui,j ← (1 -  $\lambda$ ) · Ui,j
          Ui,j ← Ui,j +  $\frac{\lambda \cdot (U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + \alpha \cdot U_{i,j+1} + \alpha \cdot U_{i,j-1})}{2 \cdot (1 + \alpha)}$ 
        otherwise
          if Di,j = "D1D2"
            Ui,j ← (1 -  $\lambda$ ) · Ui,j
            Ui,j ← Ui,j +  $\frac{\lambda \cdot (K \cdot U_{i+1,j} + K \cdot U_{i-1,j} + \varepsilon 2 \cdot \alpha \cdot U_{i,j+1} + \varepsilon 1 \cdot \alpha \cdot U_{i,j-1})}{2 \cdot K \cdot (1 + \alpha)}$ 
          Ui,j ← U0i,j otherwise
         $\mu_{i,j} \leftarrow |U_{i,j} - U0_{i,j}|$ 
      Emax ← max( $\mu$ )
    return U if Emax ≤  $\delta$ 
  U0 ← U
  m ← m - 1

```

Рис. 7.1. Программа Relax

Программа расчета потенциала

1. Формируем равномерную сетку

$N := 100$ $\alpha := 1$ $i := 0..N$ $j := 0..N$ $D_{i,j} := "D"$

2. Задаем координаты Y12 плоскости раздела диэлектриков

$Y := 20$ $D_{i,Y} := "D1D2"$ $\varepsilon 1 := 9.6$ $\varepsilon 2 := 1$

3. Заданем координаты металлической полоски

$k := 40..60$ $D_{k,Y} := 1$

4. Рассчитываем потенциал

$\lambda := 1.9$ $\phi := \text{Relax}(\alpha, \lambda, \varepsilon 1, \varepsilon 2, D, 0.001)$

5. Эквипотенциальные линии

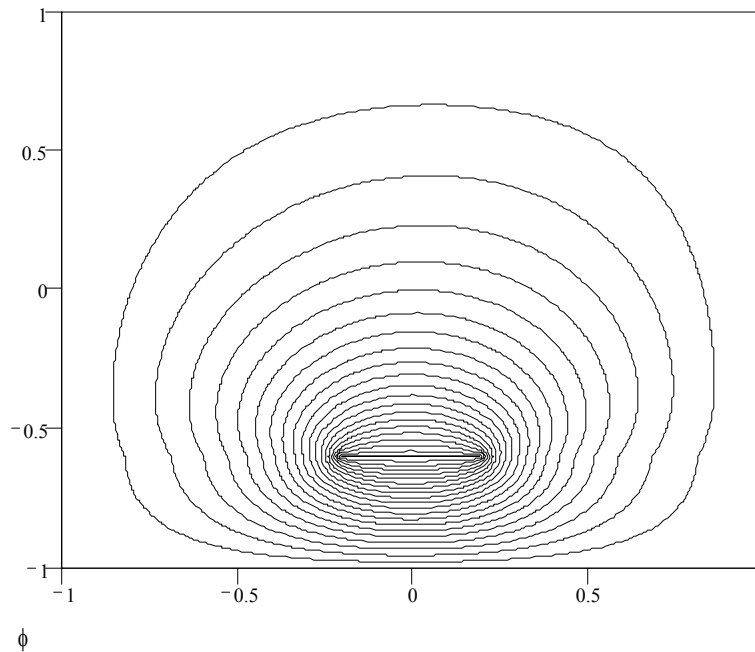


Рис. 7.2. Программа расчета распределения потенциала электрического поля в поперечном сечении экранированной полосковой линии

После того, как проведен расчет распределения потенциала электрического поля в поперечном сечении полосковой линии, для нахождения напряженности поля можно воспользоваться процедурой *EField*, текст которой приведен на рис. 7.3.

```

EField(φ , α ) := Процедура_расчета_компонент_вектора ← %
напряженности_электрического_поля ← %
I ← rows(φ ) - 1
J ← cols(φ ) - 1
for i ∈ 0.. I - 1
  for j ∈ 0.. J - 1
    Exi,j ←  $\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i+1,j+1}}{2}$ 
    Eyi,j ←  $\alpha \cdot \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i+1,j+1}}{2}$ 
    Ei,j ← Exi,j + 1j·Eyi,j
  E

```

Рис. 7.3. Процедура расчета составляющих вектора напряженности электрического поля

Процедура возвращает комплексную матрицу, действительные части элементов которой содержат значения составляющих E_x напряженности поля в полуцелых точках, а мнимые – составляющих E_y . Значения возвращаются в нормированной форме. Для того чтобы получить напряженность в «вольтах на метр», результат, возвращаемый *EField*, следует поделить на значение шага сетки h_x , выраженное в метрах.

Значения напряженности поля, определенные с помощью процедуры *EField*, позволяют рассчитать погонную емкость линии. Для этого можно использовать процедуру *Cap*. Ее текст приведен на рис. 7.4.

```

Cap(E, J12, ε1, ε2, α) := Процедура_расчета_погонной_емкости ← %
I ← rows(E)
J ← cols(E)
C ← 0
for i ∈ 0.. I - 1
  for j ∈ 0.. J - 1
    C ← C + ε1 · (| Ei,j |)2 if j < J12
    C ← C + ε2 · (| Ei,j |)2 otherwise
C ← C / α

```

Рис. 7.4. Процедура расчета погонной емкости линии

После обращения к ней процедура **Cap** возвращает нормированное на электрическую постоянную $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м значение погонной емкости C_{nor} .

Результаты двукратного вычисления погонной емкости позволяют рассчитать волновое сопротивление линии по формуле (4.1), которую в данном случае удобно преобразовать к виду

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{C_{nor} C_{o_{nor}}}},$$

Здесь погонные емкости C_{nor} и $C_{o_{nor}}$ рассчитываются, соответственно, для линии с диэлектриком и без него; $Z_0 = 120\pi$ – волновое сопротивление вакуума. Текст программы расчета волнового сопротивления представлен на рис. 7.5. Как показывают результаты расчетов, значение $Z = 47.59 \text{ Ом}$, полученное для рассматриваемой конфигурации поперечного сечения линии методом электростатического моделирования, и значение $Z = 49.29 \text{ Ом}$, определенное с помощью приближенной формулы (2.3), вполне соответствуют друг другу.

Программа расчета волнового сопротивления

1. Формируем равномерную сетку

$$N := 100 \quad \alpha := 1 \quad \lambda := 1.9 \quad i := 0..N \quad j := 0..N \quad D_{i,j} := "D"$$

2. Задаем координаты Y12 плоскости раздела диэлектриков

$$Y := 20 \quad D_{i,Y} := "D1D2" \quad \varepsilon_2 := 1$$

3. Заданем координаты металлической полоски

$$I_{min} := 40 \quad I_{max} := 60 \quad k := I_{min}..I_{max} \quad D_{k,Y} := 1$$

4. Рассчитываем потенциал, напряженность поля и емкость линии с диэлектриком

$$\varepsilon_1 := 9.6 \quad \phi := \text{Relax}(\alpha, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, D, 0.001) \quad E := \text{EField}(\phi, \alpha) \quad C := \text{Cap}(E, Y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha)$$

5. Рассчитываем эффективную диэлектрическую проницаемость по формуле (2.5) и волновое сопротивление по формуле (2.3)

$$w := I_{max} - I_{min} \quad h := Y \quad \varepsilon_{eff} := \frac{\varepsilon_1 + 1}{2} + \frac{\varepsilon_1 - 1}{2} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}} \right] \quad \varepsilon_{eff} = 6.596$$

$$Z_{an} := \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}} \cdot \left[\ln\left(\frac{h}{w}\right) + 2.079 + 0.031 \cdot \left(\frac{w}{h}\right)^2 \right] \quad Z_{an} = 49.29$$

6. Рассчитываем потенциал, напряженность поля и емкость линии без диэлектрика

$$\varepsilon_1 := 1 \quad \phi_0 := \text{Relax}(\alpha, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, D, 0.001) \quad E_0 := \text{EField}(\phi_0, \alpha) \quad C_0 := \text{Cap}(E_0, Y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha)$$

7. Рассчитываем волновое сопротивление по формуле (4.1)

$$Z := \frac{120 \cdot \pi}{\sqrt{C \cdot C_0}} \quad C = 19.546 \quad C_0 = 3.21 \quad Z = 47.59$$

Рис. 7.5. Программа расчета волнового сопротивления полосковой линии

8. Задачи для электростатического моделирования

1. Определите волновое сопротивление экранированной полосковой линии передачи с поперечным сечением, изображенным на рис. 8.1 (все геометрические размеры даны в сантиметрах). Полоску считайте бесконечно тонкой. Сравните результат электростатического моделирования с результатом расчетов по формулам п.2. Чему равна фазовая скорость волны в линии?

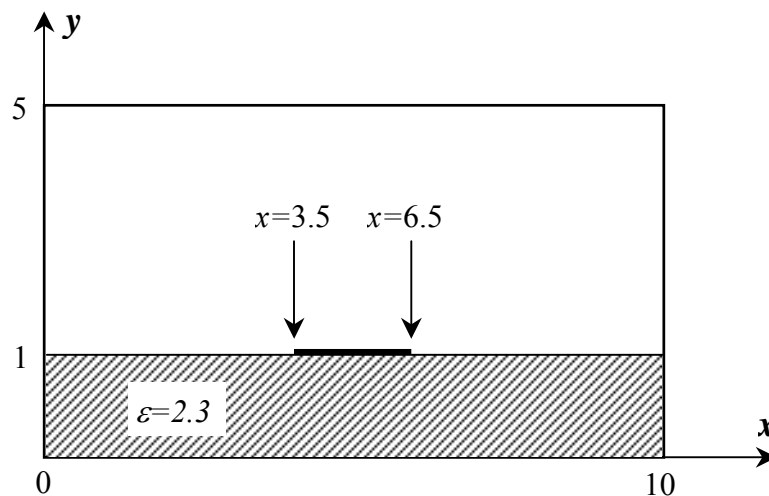


Рис. 8.1. Поперечное сечение экранированной полосковой линии

2. В условиях задачи 1 положите толщину полоски равной 0.3 см. Проведите электростатическое моделирование линии в этом случае.

3. В условиях задачи 2, используя связь между нормальной к проводнику составляющей напряженности электрического поля E_n и поверхностной плотностью заряда σ – $E_n = \epsilon\epsilon_0\sigma$, определите распределение заряда по поверхности полоски.

4. Разработайте программу моделирования линий передачи в цилиндрических координатах.

5. Проведите электростатическое моделирование коаксиальной линии передачи с комбинированным диэлектрическим заполнением (рис. 8.2). Радиус экрана $R_{sc} = 10 \text{ мм}$, радиус внутреннего проводника $R_c = 3 \text{ мм}$.

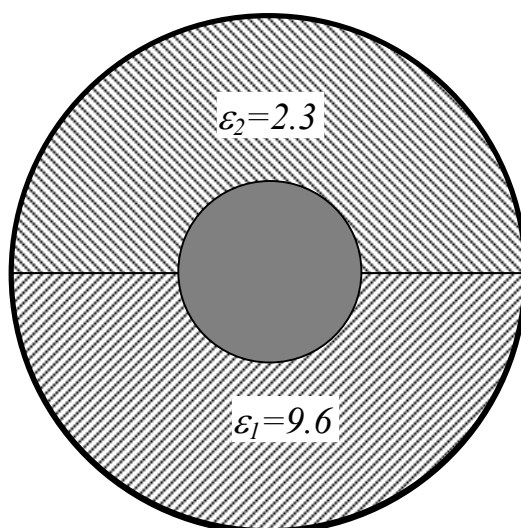


Рис. 8.2. Поперечное сечение коаксиальной линии с комбинированным диэлектриком

6. На рис. 8.3 изображено поперечное сечение коаксиальной линии со сложным экраном, состоящим из частей цилиндрических поверхностей с радиусами $R_{sc1} = 20 \text{ мм}$ и $R_{sc2} = 10 \text{ мм}$.

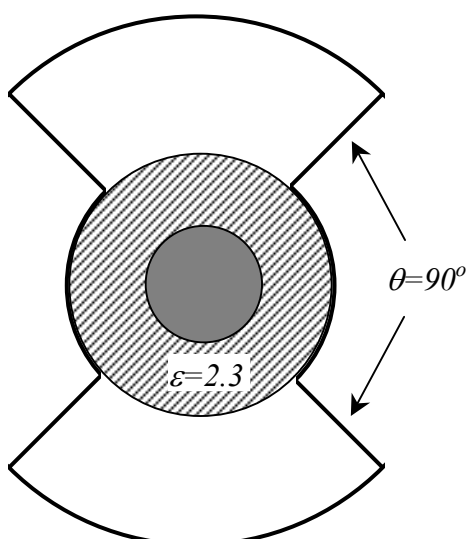


Рис. 8.3. Поперечное сечение коаксиальной линии со сложным экраном

Радиус внутреннего проводника $R_c = 3 \text{ мм}$. Рассчитайте волновое сопротивление и фазовую скорость волны в линии.

7. Рассчитайте волновое сопротивление и фазовую скорость волны в секториально-полосковой линии (рис. 8.4).

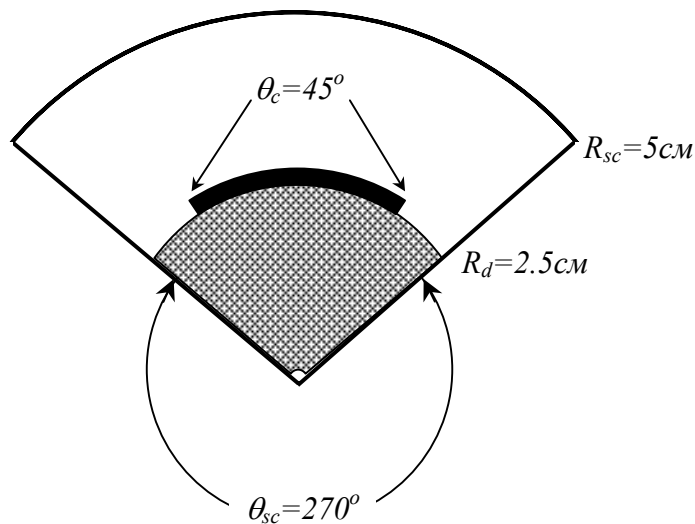


Рис. 8.4. Поперечное сечение секториально-полосковой линии

Рассмотрите линии с углами раскрытия экрана $\theta_{sc} = 270^\circ$, $\theta_{sc} = 180^\circ$, $\theta_{sc} = 90^\circ$ и $\theta_{sc} = 0^\circ$. Полоску считайте бесконечно тонкой; диэлектрическая проницаемость подложки $\epsilon = 2.3$.

7. Проведите электростатическое моделирование экранированной системы двух связанных полосковых линий с поперечным сечением, изображенным на рис. 8.5 (все геометрические размеры даны в сантиметрах).

Рассмотрите режимы синфазного и противофазного возбуждения полосок.

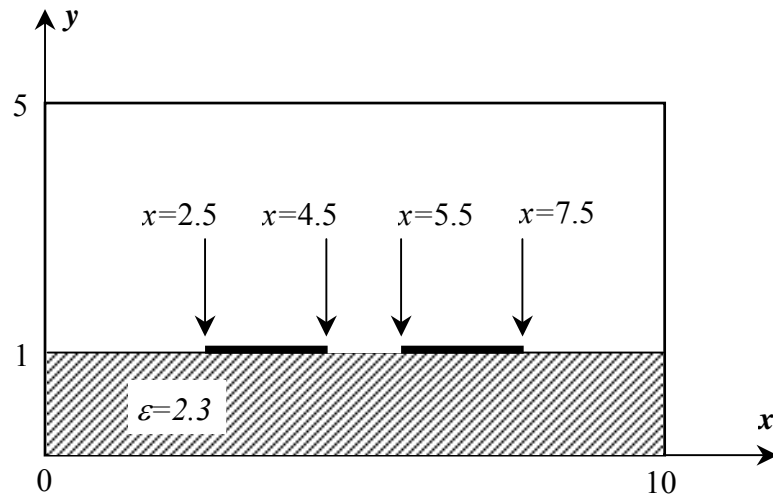


Рис. 8.5. Поперечное сечение системы связанных полосковых линий

8. Модифицируйте программу *Relax* так, чтобы с ее помощью можно было исследовать линии с трехслойным диэлектриком.

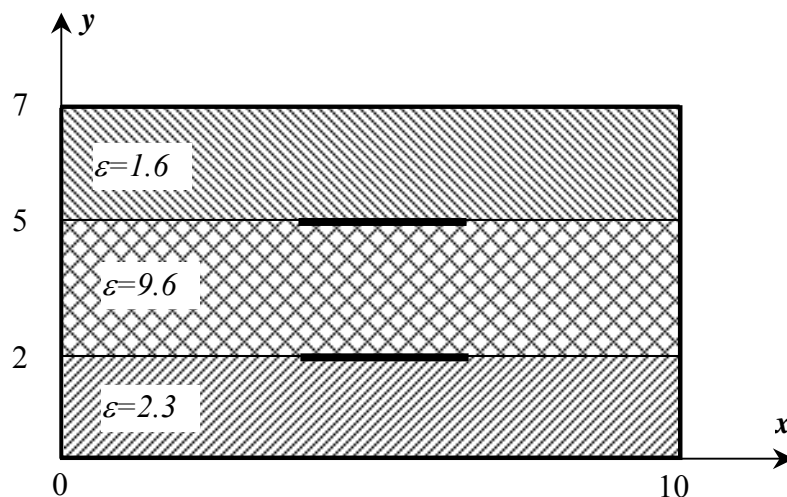


Рис. 8.6. Поперечное сечение системы полосковых линий с трехслойным диэлектриком

Проведите расчет волновых параметров экранированной системы связанных полосковых линий с поперечным сечением, показанным на рис. 8.6. Полоски расположены строго друг под другом и имеют нулевую толщину. Левый край полосок имеет координату $x = 4\text{ см}$, правый — $x = 6\text{ см}$. Все остальные размеры также указаны в сантиметрах.

Литература

1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1992. – 416 с.
2. Фуско В. СВЧ цепи. Анализ и автоматизированное проектирование. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
3. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. – М.: Изд. МГУ; Наука, 2004. – 416 с.
4. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. – М.: Физматлит, 2002. – 304с.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 636 с.
6. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1975. – 392 с.
7. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн. – М.: Радио и связь, 2002. – 416с.

Содержание

Введение	3
1. Полосковые линии передачи	4
2. Волновые параметры полосковых линий	5
3. Некоторые свойства Т-волн	9
4. Метод расчета волнового сопротивления	12
5. Решение уравнения Лапласа методом конечных разностей	13
5.1. Уравнения Пуассона и Лапласа	13
5.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа для однородного диэлектрика	15
5.3. Неравномерные сетки для однородных диэлектриков	20
5.4. Линии передачи с неоднородным диэлектриком	23
5.5. Конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа в цилиндрических координатах	27
5.6. Методы решения систем конечно-разностных уравнений	28
6. Расчет погонной емкости линии	34
6.1. Энергетический метод расчета погонной емкости	34
6.2. Расчет погонной емкости на основе теоремы Гаусса	36
6.3. Емкости многопроводных линий	38
7. Программы электростатического моделирования полосковых линий	41
8. Задачи для электростатического моделирования	47
Литература	51

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет И.К. Зайцева

Подписано в печать 06.10.05

Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Усл.-печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,37. Тираж 100 экз. Заказ № 348

Издательство «Универс-групп», 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано ООО «Универс-групп»