МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.А. ДЕНИСКИНА, О.Ю. СЕМЁНОВА

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве практикума для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика и специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов

САМАРА
Издательство Самарского университета
2021

УДК 517.5 (075)
ББК 22.161.5я7
Д33

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Д о р о ш и н,
канд. физ.-мат. наук, доц. Н. Н. Е в д ок и м о в а

***Денискина, Екатерина Александровна***

**Д33 Элементы теории функций комплексного переменного:** практикум / *Е. А. Денискина, О. Ю. Семёнова*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 64 с.

**ISBN 978-5-7883-1619-2**

Практикум содержит основные теоретические сведения, разбор типовых задач, а также задачи для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по одному из разделов высшей математики «Теория функций комплексного переменного». Все задачи снабжены ответами.

Практикум выполнен на кафедре высшей математики и предназначен для обучающихся по направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика и специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

УДК 517.5 (075)
ББК 22.161.5я7

ISBN 978-5-7883-1619-2 

## Содержание

## ВВЕДЕНИЕ

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) называется также теорией аналитических функций или комплексным анализом.

Начальные идеи комплексного анализа возникли во второй половине 18-го века, и связаны они, прежде всего, с именем Леонарда Эйлера. Основной массив теории был создан в 19-м веке, главным образом трудами Огюстена Коши, Бернарда Римана и Карла Вейерштрасса.

В дальнейшем большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли и отечественные ученые. Н.И. Мусхелишвили занимался её применением к теории упругости, Н.Н. Келдыш и М.А. Лаврентьев – к аэро- и гидродинамике, Н.Н. Боголюбов и В.С. Владимиров – к проблемам квантовой теории поля.

В настоящее время комплексные числа и функции комплексного переменного находят широкое применение в картографии, электротехнике, аэро – и гидродинамике, теории фильтрации почв, теоретической физике, теории упругости, в расчетах различных конструкций на прочность, в квантовой механике, при изучении движения спутников.

С помощью теории вычетов, являющейся частью теории функций комплексного переменного, вычисляются многие сложные интегралы от функций по замкнутым контурам. Кроме того, применение теории вычетов позволяет упрощать, а в некоторых случаях делает возможным, вычисление некоторых видов определённых и несобственных интегралов от функции действительной переменной.

Важным разделом приложений теории функций комплексного переменного является операционное исчисление, которое находит широкое применение в современной автоматике, телемеханике, теории автоматического регулирования и других областях. Методы операционного исчисления позволяют упростить алгоритм решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с помощью перехода к решению более простых алгебраических уравнений.

В предлагаемой работе рассматриваются основы теории функции комплексного переменного. Пособие содержит краткие теоретические сведения по всем ключевым разделам теории функции комплексного переменного. В каждом разделе приведены подробные решения основных типовых задач указанного курса и перечень задач для самостоятельного решения различного уровня сложности, снабжённых ответами. Кроме того, пособие содержит условия вариантов контрольных работ по ТФКП.

# 1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## Теоретический материал

Определение: Комплексная величина $w = f(z)$ называется функцией комплексного переменного $z = x + iy$, если каждому значению комплексного переменного $z \in D$ соответствует одно или несколько значений комплексной величины $w \in E$.

Определение: Если каждому значению комплексного переменного $z$ ставится в соответствие одно значение $w$, функция называется однозначной; если каждому значению комплексного переменного $z$ ставится в соответствие несколько значений $w$ – многозначной.

Каждая комплексная функция $w = f(z) = f(x + iy)$ может рассматриваться как пара действительных функций от двух действительных переменных $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, которые называются действительной и мнимой частями функции комплексного переменного $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Основные типы используемых элементарных функций комплексного переменного:

**1. Логарифмическая** функция является многозначной и определяется равенством $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i$, где $z \neq 0, k \in Z$.

Значение функции, которое получается при $k = 0$, называется главным значением и обозначается $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

**2. Степенная** функция в общем случае определяется соотношением $w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ $(z \neq 0)$, где $a$ – произвольное комплексное число.

Эта функция многозначна; значение $z^a = e^{a \ln z}$ $(z \neq 0)$ называется главным значением.

**3.** Значения **показательной** функции комплексного переменного $z = x + iy$ вычисляются по формуле:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Показательная функция является периодической с основным периодом $2\pi i$, т.е. $e^{z+2\pi k i} = e^z$, где $k \in Z$.

Также для вычисления значений показательной функции в общем случае может быть использована формула:

$$w = a^z = e^{\mathrm{Ln}\, a^z} = e^{z\, \mathrm{Ln}\, a}.$$

**4. Тригонометрические** функции комплексного переменного $w = \sin z$ и $w = \cos z$ выражаются через показательные функции и имеют действительный период $2\pi$:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Функции $w = \mathrm{tg}\, z$ и $w = \mathrm{ctg}\, z$ определяются так же, как и в теории функций действительной переменной:

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все известные формулы тригонометрии.

Заметим, что $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены в комплексной плоскости.

**5. Гиперболические** функции комплексного переменного определяются равенствами:

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \qquad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

Для гиперболических функций имеют место тождества:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

**6.** Все обратные **тригонометрические** функции комплексного переменного выражаются через логарифмическую функцию и являются многозначными:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{i - z}{i + z}\right), \text{где } z \neq \pm i,$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{z - i}{z + i}\right), \text{где } z \neq \pm i.$$

**7.** Функции, **обратные гиперболическим** функциям комплексного переменного, выражаются также через логарифмическую функцию и являются многозначными:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right), \text{где } z \neq \pm 1,$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right), \text{где } z \neq \pm 1.$$

## Примеры решения задач

**1. 1** Для функции $w = \frac{\bar{z}}{z}$ найти действительную и мнимую части.

$$w = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x - iy}{x + iy} = \frac{(x - iy)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x^2 - 2xyi + i^2y^2}{x^2 - i^2y^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2xyi - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} i.$$

Ответ: $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad v = -\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}.$

**1. 2** Представить результат вычисления значения функции $e^{2+3i}$ в алгебраической форме.

$$e^{2+3i} = e^2 \cdot e^{3i} = \begin{bmatrix} \text{воспользуемся формулой Эйлера} \\ e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= e^2(\cos 3 + i\sin 3) = e^2\cos 3 + i\,e^2\sin 3\,.$$

**1. 3** Представить результат вычисления значения функции $\operatorname{Ln} i$ в алгебраической форме.

$$\operatorname{Ln} i = \begin{bmatrix} \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi k i, \\ z \neq 0, \quad k \in Z \end{bmatrix} = \left[|z| = 1, \arg z = \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \ln 1 + \tfrac{\pi}{2} i + 2\pi k i = \tfrac{\pi}{2} i + 2\pi k i, k \in Z.$$

**1. 4** Представить результат вычисления значения функции $(-2)^i$ в алгебраической форме.

$$(-2)^i = e^{i\operatorname{Ln}(-2)} = [Ln(-2) = \ln 2 + \pi i + 2\pi k i] =$$

$$= e^{i(\ln 2 + \pi i + 2\pi k i\,)} = e^{i\ln 2 - \pi - 2\pi k} = e^{-\pi - 2\pi k} \cdot e^{i\ln 2} =$$

$$= e^{-\pi - 2\pi k}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2).$$

**1. 5** Представить результат вычисления значения функции $\operatorname{Arcsin} i$ в алгебраической форме.

$$\operatorname{Arcsin} i = \left[\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)\right] =$$

$$= -i\operatorname{Ln}\left(i^2 + \sqrt{1 - i^2}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(-1 + \sqrt{2}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \left|-1 + \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1 \\ arg\left(\sqrt{2} - 1\right) = 0 \end{bmatrix} = -i\left(\ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\pi k i\right) =$$

$$= 2\pi k - i\ln\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

## Задачи

Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

**1.6** $w = \bar{z} - iz^2$. Ответ: $u = x + 2xy,\ \ v = y^2 - x^2 - y$.

**1.7** $w = i - z^3$. Ответ: $u = 3xy^2 - x^3, v = 1 - 3x^2y + y^3$.

**1.8** $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$. Ответ: $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

**1.9** $w = \dfrac{iz + 1}{1 + \bar{z}}$.

Ответ: $u = \dfrac{x - 2xy - y + 1}{(x+1)^2 + y^2}, v = \dfrac{x^2 + y - y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$.

**1.10** $w = \sin z$. Ответ: $u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$.

**1.11** $w = e^{\bar{z}^2}$. Ответ: $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy,\ \ v = -e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$.

**1.12** $w = \operatorname{ch}(z - i)$.

Ответ: $u = \operatorname{ch} x\ \cos(y - 1), v = \operatorname{sh} x\ \sin(y - 1)$.

Представить результат вычисления значений следующих функций в алгебраической форме:

**1.13** $e^{2 + \frac{\pi}{4} i}$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} e^2 + i\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^2$.

**1.14** $\operatorname{Ln}(-1 - i)$. Ответ: $\dfrac{1}{2} \ln 2 - \dfrac{3\pi}{4} i + 2\pi k i$.

**1.15** $\left(\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$. Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) e^{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}$.

**1.16** $3^{-i}$. Ответ: $e^{2\pi k}(\cos \ln 3 - i \sin \ln 3)$.

**1.17** $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2i\right)$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 2 - \dfrac{i}{2}\ \operatorname{sh} 2$.

$\mathbf{1.18}$ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}1+i\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}1$.

$\mathbf{1.19}$ $\operatorname{ch}(1+2i)$. Ответ: $\operatorname{ch}1\cos 2+i\operatorname{sh}1\sin 2$.

$\mathbf{1.20}$ $\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi}{4}i\right)$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}2+\frac{i}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}2$.

$\mathbf{1.21}$ $\operatorname{Arccos}(-3i)$. Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(\sqrt{10}-3\right)$.

$\mathbf{1.22}$ $\operatorname{Arcsin}4$. Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(\sqrt{15}+4\right)$.

$\mathbf{1.23}$ $\operatorname{Arctg}(2-i)$. Ответ: $\frac{3\pi}{8}+\pi k-\frac{i}{4}\ln 2$.

$\mathbf{1.24}$ $\operatorname{Arsh}(-4i)$. Ответ: $\ln\left(4-\sqrt{15}\right)-\frac{\pi i}{2}+\pi k i$

$\mathbf{1.25}$ $\operatorname{Arth}2$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\pi i}{2}+\pi k i$.

$\mathbf{1.26}$ Решить уравнение $\sin z=2$. Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$.

$\mathbf{1.27}$ Доказать, что $\operatorname{Arccos}z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$.

$\mathbf{1.28}$ Доказать, что $\operatorname{Arctg}z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{i-z}{i+z}\right),(z\neq\pm i)$.

$\mathbf{1.29}$ Доказать, что $\cos iz=\operatorname{ch}z$, $\sin iz=i\operatorname{sh}z$.

# 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## Теоретический материал

Теория функций комплексного переменного расширяет исчисление на комплексную область. При этом и дифференцирование и интегрирование приобретают некоторое новое значение. Их область применения существенно сужается и естественным образом возникает класс аналитических функций.

Пусть $w = f(z)$ некоторая однозначная функция комплексного переменного, определенная в точке $z$ и некоторой ее окрестности.

**Определение:** Если существует предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при любом стремлении приращения аргумента $\Delta z$ к нулю, то он называется производной от функции комплексного переменного $w = f(z)$ и обозначается $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$.

**Определение:** Функция комплексного переменного называется дифференцируемой в точке $z$, если она имеет производную в этой точке.

Поскольку определение производной функции комплексного переменного полностью аналогично определению производной функции действительной переменной, то, в случае дифференцируемости функции $f(z)$, все известные правила дифференцирования остаются в силе, в том числе правила дифференцирования сложных и обратных функций.

**Теорема:** Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ была дифференцируема в точке $z$ необходимо и достаточно, чтобы

1. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имели непрерывные частные производные первого порядка в точке $z$;
2. В точке $z$ выполнялись равенства, называемые условиями Коши-Римана или Эйлера-Даламбера

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

<u>**Определение:**</u> Если функция дифференцируема не только в самой точке $z$, но и в некоторой её окрестности, то она называется аналитической в этой точке.

<u>**Определение:**</u> Функция, аналитическая во всех точках некоторой области $D$, называется аналитической в этой области.

Если для функции $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ в области $D$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны, то выполнение условий Коши-Римана достаточно для того, что бы данная функция была аналитической в области $D$.

Производная аналитической функции может быть вычислена по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

<u>**Определение:**</u> Точки, в которых однозначная функция $w = f(z)$ является аналитической, называются правильными точками этой функция. А точки, в которых функция $w = f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $f(z)$ не определена), называются особыми точками этой функции.

<u>**Определение:**</u> Точка $z = \infty$ называется бесконечно удаленной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой области $|z| > R$ $(R > 0)$.

Все элементарные функции комплексного переменного аналитичны во всех точках комплексной плоскости, в которых они определены. Производные от них находятся по тем же формулам и правилам, что и для функций действительной переменной.

<u>**Определение:**</u> Функция двух действительных переменных $u(x, y)$ называется гармонической в области $D$, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ (\Delta u = 0).$$

Действительная и мнимая части аналитической в области $D$ функции $f(z)$ являются гармоническими функциями.

<u>**Определение:**</u> Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши—Римана, называются сопряженной парой гармонических функций.

Действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряженными гармоническими функциями.

### Примеры решения задач

**2.1** Исследовать функцию $w = z \operatorname{Re} z$ на дифференцируемость и аналитичность.

Известно, что $z = x + iy$, тогда

$w = f(z) = z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + i\,xy \implies u = x^2; v = xy.$

Проверим выполнение условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Следовательно, условия Коши–Римана не выполняются $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Однако, не исключено существование точек, в которых данные условия будут выполнены. Проверим есть ли такие точки у рассматриваемой функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \implies 2x = x \implies x = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \implies 0 = -y \implies y = 0.$$

Следовательно, условия Коши-Римана выполняются только в точке (0; 0), а тогда функция $w = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке (0; 0) и не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

**2.2** Найти действительную и мнимую части функции $w = e^z$, проверить выполнение условий Коши–Римана, сделать вывод о дифференцируемости и аналитичности, найти производную функции, если она существует.

Выделим действительную и мнимую части функции:

$$z = x + iy \implies w = e^z = e^{x+i\,y} = e^x \cdot e^{i\,y} = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$$
$$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y.$$

Проверим выполнение условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y\,, \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y\,, \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y.$$

Оба равенства условий Коши–Римана выполняются $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция дифференцируема и аналитична на всей комплексной плоскости.

Производную аналитической функции можно найти по одной из четырёх формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Воспользуемся первым равенством:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) =$$
$$= e^x \cdot e^{i\,y} = e^{x+i\,y} = e^z.$$

**2.3** Проверить, что данная функция является мнимой частью аналитической функции. Восстановить функцию $f(z)$, аналитическую в окрестности точки $z_0 = i$, по известной мнимой части $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 6y$ и значению $f(i) = 2$.

Рассмотрим два способа решения данной задачи.

**1 способ:**

Сначала убедимся, что функция $v(x, y)$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Так как искомая функция $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ аналитична, то выполняются условия Коши–Римана и верны равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 6.$$

Таким образом, для нахождения неизвестной функции $u(x, y)$ имеем два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 6, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy. \end{cases}$$

Проинтегрируем любое из уравнений, например, второе: $u(x, y) = -\int 6xy\,dy = -3xy^2 + C(x)$, где $C(x)$ – некоторая неизвестная функция.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + C'(x).$$

Подставим найденную производную в первое уравнение:
$-3y^2 + C'(x) = 3x^2 - 3y^2 + 6 \;\Rightarrow C'(x) = 3x^2 + 6 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow C(x) = \int (3x^2 + 6\,)\,dx = x^3 + 6x + C_1\,,$$

$u(x, y) = -3xy^2 + x^3 + 6x + C_1.$

$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + 6x + C_1 +$

$+i(3x^2y - y^3 + 6y\,) = x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x \cdot (iy)^2 + (iy)^3 +$

$+6(x + +iy) + C_1 = (x + iy)^3 + 6(x + iy) + C_1 = z^3 + 6z + C_1.$

По условию $f(i) = 2$, тогда

$$2 = i^3 + 6i + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 2 - 5i \;\Rightarrow\; f(z) = z^3 + 6z + 2 - 5i.$$

**2 способ:**

Отметим сразу, что этот способ применим, если читатель знаком с интегрированием функции комплексного переменного.

Функция $f(z)$ является аналитической в окрестности точки $z_0$, а следовательно она дифференцируема в указанной точке и производная может быть найдена по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Воспользуемся четвертой формулой:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 6 + i\,6xy =$$

$$= 3(x^2 + 2xy\,i + (iy)^2) + 6 = 3(x + iy)^2 + 6 = 3z^2 + 6.$$

Проинтегрируем найденную производную по переменной $z$:

$$f(z) = \int (3z^2 + 6)\,dz = z^3 + 6z + C.$$

По условию $f(i) = 2$, тогда

$$2 = i^3 + 6i + C \;\Rightarrow\; C = 2 - 5i \;\Rightarrow\; f(z) = z^3 + 6z + 2 - 5i.$$

## Задачи

Найти действительную и мнимую части следующих функций, проверить выполнение условий Коши-Римана, сделать вывод о дифференцируемости и аналитичности, найти производные функций, если они существуют:

**2. 4** $w = z^2 \cdot \overline{z}$.

Ответ: Функция дифференцируема только в точке $(0, 0)$, т.е. при $z = 0$, $w'(0) = 0$. Функция не является аналитической ни в одной точке.

**2. 5** $w = \dfrac{1}{z}$.

Ответ: Функция дифференцируема и аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением $z = 0$; $w' = -\frac{1}{z^2}$.

**2. 6** $w = z^2 + 3z - 2$.

Ответ: Функция дифференцируема и аналитична на всей комплексной плоскости; $w' = 2z + 3$.

**2. 7** $w = |z| \cdot \overline{z}$.

Ответ: Функция не является дифференцируемой и аналитической ни в одной точке.

**2. 8** $w = \sin 2z$.

Ответ: Функция дифференцируема и аналитична на всей комплексной плоскости; $w' = 2\cos 2z$.

**2. 9** $w = |z| \operatorname{Re} \overline{z}$.

Ответ: Функция не является дифференцируемой и аналитической ни в одной точке.

**2. 10** $w = (z - 1)\operatorname{Re}(z + 1)$.

Ответ: Функция дифференцируема только в точке $(1,0)$, т.е. при $z=1$, $w'(1)=2$. Функция не является аналитической ни в одной точке.

Найти аналитическую функцию комплексного переменного $f(z)$ по её известной действительной или мнимой части.

**2.11** $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y$.
Ответ: $f(z)=z^2+5z-iz+C$.

**2.12** $v(x,y)=arctg\ \dfrac{y}{x}$. Ответ: $f(z)=\ln z+C$.

Проверить, что данная функция является действительной или мнимой частью аналитической функции. Восстановить функцию $f(z)$ аналитическую в окрестности точки $z_0$ по известной действительной или мнимой части и значению $f(z_0)$.

**2.13** $u(x,y)=x^2-y^2+3x+y, f(0)=i$.
Ответ: $f(z)=z^2+(3-i)z+i$.

**2.14** $v(x,y)=e^x\sin y+2xy+5y, f(0)=10$.
Ответ: $f(z)=e^z+z^2+5\mathrm{z}+9$.

**2.15** $v(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, f(0)=0$.
Ответ: $f(z)=(2+i)z^3$.

**2.16** $u(x,y)=2e^x\,cos\,y\,, f(0)=2+2i$
Ответ: $f(z)=2e^z+2i$.

**2.17** $v(x,y)=e^{-y}\sin x+y, f(0)=1$.
Ответ: $f(z)=e^{iz}+z$.

**2.18** $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}, f(1)=1+i$.

Ответ: $f(z)=\dfrac{1}{z}+i$.

$\mathbf{2.19}\ v(x,y) = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}, f(1) = 2.$

Ответ: $f(z) = \dfrac{1}{z} + z.$

$\mathbf{2.20}\ u(x,y) = 2\sin x\,\mathrm{ch}y - x, f(0) = 0.$

Ответ: $f(z) = 2\sin z - z.$

# 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## Теоретический материал

**Определение:** Область называется односвязной, если для любой замкнутой кривой, лежащей в этой области, множество точек, ограниченных этой кривой, также принадлежит данной области (Рисунок 1).

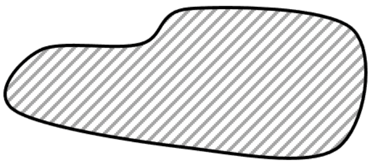

Рисунок 1 – Односвязная область

Область, не обладающая этим свойством, называется многосвязной (Рисунок 2).

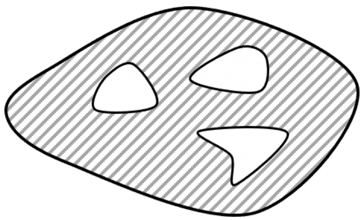

Рисунок 2 – Многосвязная область

Пусть на комплексной плоскости задана гладкая кривая $L$ и в каждой точке этой кривой определена и непрерывна однозначная функция $w = f(z)$. Причем, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, где $u(x, y), v(x, y)$ – действительные функции переменных $x, y$. Вычисление интеграла от функции $w = f(z)$ сводится к вычислению криволинейных интегралов 2-го рода от функций действительных переменных:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L \big(u(x,y) + i\,v(x,y)\big) \cdot (dx + i\,dy) =$$

$$= \int_L u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i \int_L v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy.$$

Если гладкая кривая $L$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям $t = t_1, t = t_2$ $(x(t_1) = a, x(t_2) = b)$, то

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big) \cdot z'_t\,dt.$$

Если $w = f(z)$ —аналитическая функция в односвязной области $D$, то интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной конечной точек. В этом случае для вычисления интеграла применяется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1),$$

где $F(z)$ – какая-либо первообразная функции $f(z)$.

**Основная теорема Коши:** Если $w = f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области $D$, то интеграл по любому замкнутому контуру $L \subset D$ равен нулю:

$$\oint_L f(z)\,dz = 0.$$

Основная теорема Коши справедлива и для многосвязной области.

**Интегральная теорема Коши:** Если $w = f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области $D$, ограниченной замкнутым контуром $L$, то для любой точки $z_0$, расположенной внутри контура $L$, справедливо:

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

Обобщением интегральной теоремы Коши является формула:

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0).$$

## Примеры решения задач

**3.1** Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Im} z\,dz$, где $L$ — полуокружность $|z| = 1, 0 \le \arg z \le \pi$.

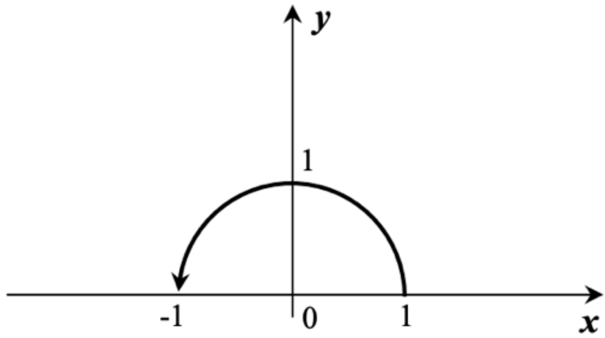


Рисунок 3 – Иллюстрация к задаче 3.1

Из условия $L$ – верхняя полуокружность с центром в начале координат радиуса 1 (Рисунок 3). В зависимости от способа задания окружности, задача может быть решена двумя способами:

**1 способ:**

$$\int_L \operatorname{Im} z\, dz = \begin{bmatrix} \operatorname{Im} z = y \\ dz = dx + i\, dy \end{bmatrix} = \int_L y \cdot (dx + i\, dy) =$$

$$= \begin{bmatrix} L\colon y = \sqrt{1-x^2} \\ dy = -\dfrac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} = \int_1^{-1} \sqrt{1-x^2} \left( dx - i\, \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) =$$

$$= \int_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\, dx - i \int_1^{-1} x\, dx = \int_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\, dx - i\, \frac{x^2}{2}\bigg|_1^{-1} =$$

$$= \int_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} \text{Тригонометрическая подстановка:} \\ x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t\, dt\,, t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right] \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = \left( \frac{1}{2}\, t + \frac{\sin 2t}{4} \right)\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}.$$

2 способ:

$$\int_L \operatorname{Im} z\, dz = \begin{bmatrix} \operatorname{Im} z = y \\ dz = dx + i\, dy \end{bmatrix} = \int_L y \cdot (dx + i\, dy) =$$

$$= \begin{bmatrix} L\colon \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \\ \begin{cases} dx = -\sin t\, dt \\ dy = \cos t\, dt \end{cases} \end{bmatrix} = \int_0^{\pi} \sin t\,(-\sin t + i \cos t)\, dt =$$

$$= -\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt + i \int_0^{\pi} \cos t \sin t\, dt = -\left(\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+i\, \frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

**3.2** Вычислить $\int_0^{i} e^z dz$.

Функция $f(z) = e^z$ аналитична на всей комплексной плоскости, тогда справедлива формула Ньютона – Лейбница.

$$\int_0^{i} e^z dz = e^z|_0^i = e^i - 1 = \cos 1 + i \sin 1 - 1 = \cos 1 - 1 + i \sin 1.$$

**3.3** Вычислить $\oint_L z\, e^z\, dz$.

Функция $f(z) = z\, e^z$ аналитична на всей комплексной плоскости, тогда по теореме Коши для любого замкнутого контура

$$\oint_L z\, e^z\, dz = 0.$$

**3.4** Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{2z+1}{z^2-2z}dz$, где $L$– окружность $|z|=1$.

Уравнение $|z|=1$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом 1 (Рисунок 4).

Подынтегральная функция имеет две особые точки: $z_1=0$ и $z_2=2$ . Из них только одна попадает внутрь контура – $z_1=0$, следовательно, в интегральной формуле Коши в роли $z_0$ будет выступать $z_1=0$.

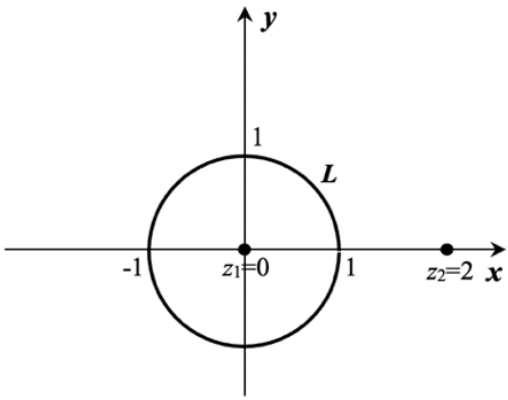


Рисунок 4 – Иллюстрация к задаче 3.4

$$\oint\limits_L \frac{2z+1}{z^2-2z}\,dz = \oint\limits_L \frac{2z+1}{z(z-2)}\,dz = \oint\limits_L \frac{\left(\frac{2z+1}{z-2}\right)}{z}dz =$$

$$= \left[\begin{matrix} f(z)=\dfrac{2z+1}{z-2} - \text{аналитична внутри } L; \\ z_0=0 \end{matrix}\right] = 2\pi i\cdot f(0) =$$

$$= 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

## Задачи

Вычислить следующие интегралы:

**3.5** $\int\limits_L \operatorname{Re} z\, dz$, $L -$ отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

Ответ: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$.

**3.6** $\int\limits_L (z + 2\overline{z}\,)\, dz$, $L -$ дуга кривой $y = \cos x$ от точки $A(0,1)$ до точки $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Ответ: $\frac{3\pi^2}{8} - \frac{1}{2} - 4i$.

**3.7** $\int\limits_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $L$ – полуокружность $|z| = 1, 0 \le \arg z \le \pi$.

Ответ: $-2 + 2i$.

**3.8** $\int\limits_L \frac{1 + 2z}{\overline{z}}\, dz$, где $L$ – дуга кривой $|z| = 2, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{14}{3} - \frac{8}{3} i$.

**3.9** $\int\limits_1^i z^4\, dz$. Ответ: $-\frac{1}{5} + \frac{1}{5} i$.

**3.10** $\int\limits_L z \cos z\, dz$, $L -$ прямая $y = 5x$ от точки $A(-1, -5)$ до точки $B(0,0)$.

Ответ: $-\sin 1 \cdot \operatorname{ch} 5 + 5 \cos 1 \cdot \operatorname{sh} 5 + 1 - \cos 1 \cdot \operatorname{ch} 5 +$
$+i\,(-5 \sin 1 \operatorname{ch} 5 - \cos 1 \cdot \operatorname{sh} 5 + \sin 1 \cdot \operatorname{sh} 5)$.

**3.11** $\int\limits_L z\cdot\overline{z}\,dz$, где $L$– дуга окружности $|z|=1$ от точки $A(-1{,}0)$ до точки $B(1{,}0)$.

Ответ: 2.

**3.12** $\int\limits_L \frac{dz}{z}$, где $L$ – окружность $|z|=1$.

Ответ: $2\pi i$.

**3.13** $\int\limits_L \operatorname{Re}\overline{z}\,dz$, где $L$ – дуга параболы $y=2x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+2i$.

Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}i$.

**3.14** $\oint\limits_L z\operatorname{Re} z\;dz$, где $L$ – окружность $|z|=1$ (обход против часовой стрелки).

Ответ: 0.

**3.15** $\int\limits_L \overline{z}\operatorname{Re} z\,dz$, $L$ — отрезок прямой от точки $z_1=-2-i$ до точки $z_2=1+2i$.

Ответ: $\frac{9}{2}+\frac{3}{2}i$.

**3.16** $\int\limits_1^{1+i}\frac{dz}{z^3}$. Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$.

**3.17** $\int\limits_0^{\pi i}\sin z\;dz$. Ответ: $1-\operatorname{ch}\pi$.

**3.18** $\int\limits_0^{\ln 2} z\,e^z dz$. Ответ: $2\ln 2 - 1$.

**3.19** $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)\,dz$. Ответ: $-2-2i$.

**3.20** $\int\limits_L \frac{z}{\overline{z}}\,dz$, где $L$ – дуга кривой $|z| = 3, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-1+i$.

**3.21** $\int\limits_L \frac{dz}{z^2}$, $L -$ отрезок прямой $y = 1 - x, x \in [0,1]$.

Ответ: $1+i$.

**3.22** $\int\limits_L (2z + 3\overline{z})\,dz$, где $L$– верхняя полуокружность $|z-2| = 3$ от точки $z_1 = 5$ до точки $z_2 = -1$.

Ответ: $-60 + 27\pi i$.

**3.23** $\int\limits_0^i (z-i)\,e^{-z}dz$. Ответ: $1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$.

**3.24** $\int\limits_L z\,\mathrm{Im}\,z\,dz$, $L -$ отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$.

Ответ: $\frac{2}{3}i$.

$\mathbf{3.25}$ $\oint\limits_{L} \dfrac{dz}{z-4}$, $L-$ эллипс $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

Ответ: 0.

$\mathbf{3.26}$ $\oint\limits_{|z-2|=1} \dfrac{\sin 2z}{z^2+4}\,dz$. Ответ: 0

$\mathbf{3.27}$ $\oint\limits_{|z-3i|=2} \dfrac{\sin 2z}{z^2+4}\,dz$. Ответ: $\dfrac{\pi \cdot \operatorname{sh} 4}{2} i$.

$\mathbf{3.28}$ $\oint\limits_{L} \dfrac{z^2}{z-4}\,dz$, $L-$ эллипс $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$. Ответ: $32\pi i$.

$\mathbf{3.29}$ $\oint\limits_{L} \dfrac{\cos \pi z}{z^2 - z}\,dz$, где $L$ – окружность $|z| = \dfrac{1}{2}$. Ответ: $-2\pi i$.

$\mathbf{3.30}$ $\oint\limits_{L} \dfrac{\cos \pi z}{z^2 - z}\,dz$, где $L$ – окружность $|z-1| = \dfrac{1}{2}$. Ответ: $-2\pi i$.

$\mathbf{3.31}$ $\oint\limits_{L} \dfrac{\cos z}{z^2}\,dz$, где $L-$ контур четырёхугольника с вершинами в точках $1, 2i, -1, i$.

Ответ: 0.

$\mathbf{3.32}$ $\oint\limits_{L} \dfrac{e^{\pi z}}{z^2+9}\,dz$, где $L$ – окружность $|z-3i| = 1$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}$.

**3.33** $\oint\limits_L \frac{\sin z}{4z-\pi}dz$, где а) $L: \left|z-\frac{\pi}{4}\right| = 1;$ б) $L: \left|z-\frac{\pi}{4}+2i\right| = 1.$

Ответ: а) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}i;$ б) 0.

**3.34** $\oint\limits_L \frac{z}{z^2-4}dz$, где а) $L$: $|z-2| = 1$; б) $|z+2i| = 1$;

в) $L$: $|z+3| = 2$.

Ответ: а) $\pi i$; б) 0; в) $\pi i$.

**3.35** $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin\frac{\pi i z}{2}}{z^2+1}dz$. Ответ: $-\pi$.

**3.36** $\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{2z^4+3}{(z+1)^3}dz$. Ответ: $24\pi i$.

**3.37** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{ze^z}{z^2+4z+3}dz$. Ответ: $-\frac{\pi}{e}i$.

**3.38** $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{2z^2+3}{z(z+1)^2}dz$. Ответ: $-2\pi i$.

**3.39** $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz$. Ответ: $-\frac{\pi^2}{2}i$.

**3.40** $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{2z-e^z}{z^2(z-3)}dz$. Ответ: $-\frac{4\pi}{9}i$.

**3.41** $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$. Ответ: $-\frac{\pi}{3}i$.

**3.42** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$. Ответ: $-\frac{\pi}{45}i$.

## 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В РЯД ЛОРАНА

### Теоретический материал

Определение: Рядом Лорана для однозначной и аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ (по степеням двучлена $(z-z_0)$) называется ряд вида:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\,(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$$

или

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n.$$

Теорема: Любая функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r < |z-z_0| < R$ $(0 < r < R)$, разлагается в этом кольце в ряд Лорана. Коэффициенты ряда Лорана определяются формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Здесь $L$ – произвольная окружность с центром в точке $z_0$, лежащая внутри заданного кольца. Разложение в ряд Лорана единственно.

В частном случае, когда функция $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z - z_0| < R$, то ее разложение в ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора.

<u>**Определение:**</u> Главной частью ряда Лорана называется часть ряда, содержащая отрицательные степени двучлена $(z - z_0)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

<u>**Определение:**</u> Правильной частью ряда Лорана называется часть ряда, содержащая неотрицательные (нулевую и положительные) степени двучлена $(z - z_0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

На практике для нахождения коэффициентов $c_n$, если это возможно, используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

<u>**Определение:**</u> Рядом Лорана для однозначной и аналитической функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной особой точки $z = \infty$ называется ряд вида:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

При этом часть ряда, состоящая из членов с неотрицательными степенями называется главной, а часть ряда с отрицательными степенями – правильной.

При решении задач рекомендуется использовать следующие разложения элементарных функций:

1. $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$

2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}.$$

3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$

4. $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1.$

5. $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1.$

6. $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, |z| < 1.$$

7. $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \cdots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, |z| < 1.$$

## Примеры решения задач

**4. 1** Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$.

Функция является аналитической в области $|z| < \infty$, поэтому используем известное табличное разложение:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4} e^z = \frac{1}{z^4}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{1!\,z^3} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n!}, |z| < \infty.$$

Выделим главную и правильную части в полученном разложении:

$\frac{1}{z^4} + \frac{1}{1!\,z^3} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z}$ – главная часть;

$\frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \frac{z^3}{7!} + \cdots$ – правильная часть.

Заметим, что у данного ряда главная часть имеет конечное число слагаемых, а правильная – бесконечное.

**4. 2** Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ по степеням $z$.

Разложение в ряд Лорана необходимо провести по степеням $z$, это равносильно разложению по степеням двучлена $(z - z_0)$, где $z_0 = 0$.

Представим $f(z)$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1}.$$

Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1 = 2, z_2 = 1$. Проведем через каждую особую точку окружность с центром в точке $z_0 = 0$. Мы получим три области, в которых функция аналитична: $|z| < 1,\ 1 < |z| < 2,\ |z| > 2$ (Рисунок 5). В каждой из этих областей функция будет иметь свое разложение в ряд Лорана.

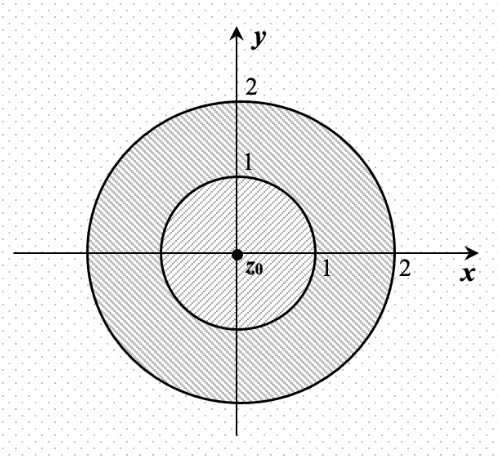


Рисунок 5 – Иллюстрация к задаче 4.2

Запишем разложение функции в ряд для каждой области.

**1.** $|\boldsymbol{z}| < \mathbf{1}$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно, используя известное разложение:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ |z| < 1.$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, |z| < 2;$$

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1;$$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,$$

$$|z|<1.$$

Область сходимости итогового ряда получена путем пересечения областей сходимости промежуточных рядов.

**2.** $\mathbf{1<|z|<2}$:

Разложение первого слагаемого $\frac{1}{z-2}$ не изменится, т.к. область сходимости $|z|<2$ ряда, полученного в пункте 1, соответствует кольцу $1<|z|<2$. Этот ряд перепишем без изменений.

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},|z|<2;$$

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},|z|>1;$$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},1<|z|<2.$$

$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$ – главная часть ряда Лорана;

$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ – правильная часть ряда Лорана.

Область сходимости итогового ряда получена путем пересечения областей сходимости промежуточных рядов.

**3.** $|z| > 2$ **:**

В данной области второе слагаемое в разложении будет совпадать с рядом, полученным в кольце (пункт 2). Запишем его без изменений:

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\, |z| > 1;$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\cdots\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},$$

$$|z| > 2.$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}},$$

$$|z| > 2.$$

Разложение функции в ряд Лорана во внешности круга содержит только главную часть.

## Задачи

**4. 3** Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = z^3\cos\frac{1}{z^2}$. Указать область сходимости ряда, главную и правильную части.

Ответ: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{4n-3}(2n)!},\, |z| < \infty.$

**4. 4** Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$

функцию $f(z) = ze^{-\frac{2}{z}}$. Указать область сходимости ряда, главную и правильную части.

Ответ: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n-1} n!}, |z| < \infty.$

**4.5** Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = \frac{\sin 2z}{z^3}$. Указать область сходимости ряда, главную и правильную части.

Ответ: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} z^{2n-2}}{(2n+1)!}, |z| < \infty.$

**4.6** Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = -1$ функцию $f(z) = \frac{1}{z-4}$. Указать область сходимости ряда, главную и правильную части.

Ответ: $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{5^{n+1}}, 0 < |z+1| < 5;$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(z+1)^{n+1}}, |z+1| > 5.$

**4.7** Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$ функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Указать область сходимости ряда, главную и правильную части.

Ответ: $f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, 0 < |z-1| < 1;$

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}}, |z-1| > 1.$

**4.8** Разложить в ряд Лорана в кольце $1 < |z+2| < 3$ функцию $f(z) = \dfrac{2}{z^2-1}$. Указать область сходимости ряда, главную и правильную части.

Ответ: $f(z) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(z+2)^n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+2)^n}{3^{n+1}}, 1 < |z+2| < 3.$

**4.9** Разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки функцию $f(z) = \dfrac{4z-3}{3z^2-5z+2}$. Указать область сходимости ряда, главную и правильную части.

Ответ: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^{n+1}z^{n+1}}, |z| > 1.$

**4.10** Найти все лорановские разложения функциии $f(z) = \dfrac{3z+1}{z^2+5z+6}$ в окрестности точки $z = 1$. Указать область сходимости, главную и правильную части.

Ответ: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2}{4^n} - \dfrac{5}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n, 0 < |z-1| < 3;$

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(z-1)^n - 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(z-1)^{n+1}}, 3 < |z-1| < 4;$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (8\cdot 4^n - 5\cdot 3^n)}{(z-1)^{n+1}}, |z-1| > 4.$$

# 5. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## Теоретический материал

**Определение:** Точка $z_0$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z_0$, т.е. существует число $R > 0$ такое, что функция $f(z)$ аналитична в круге $0 < |z - z_0| < R$ с выколотой точкой $z_0$.

**Определение:** Изолированная особая точка $z_0$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = const.$$

Ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности устранимой особой точки $z_0$ имеет нулевые коэффициенты перед отрицательными степенями двучлена $(z - z_0)$ (не содержит главной части).

**Определение:** Изолированная особая точка $z_0$ называется полюсом функции $f(z)$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

**Определение:** Число $k$ называется порядком полюса $z_0$ функции $f(z)$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^k = const \neq 0.$$

Если $k = 1$, то полюс называется простым.

Ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности полюса $z_0$ содержит конечное число ненулевых членов в главной части. При этом номер члена с высшей отрицательной степенью определяет порядок полюса.

__Определение:__ Изолированная особая точка $z_0$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \text{ не существует.}$$

Ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности существенно особой точки $z_0$ содержит бесконечное число ненулевых членов в главной части.

Бесконечно удаленные особые точки разделяются по типам так же, как и изолированные особые точки:

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = const \Rightarrow z = \infty$ – устранимая особая точка;

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty \Rightarrow z = \infty$ – полюс;

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \nexists \Rightarrow z = \infty$ – существенная особая точка.

## Примеры решения задач

**5.1** Найти особые точки функций $f(z) = \dfrac{2z+3}{(z+2)(z-1)^2}$ и определить их тип.

У данной функции изолированные особые точки – нули знаменателя, т.е. $z_1 = -2$, $z_2 = 1$. Определим характер особых точек.

$$\lim_{z\to-2} f(z) = \lim_{z\to-2} \frac{2z+3}{(z+2)(z-1)^2} = \left[\frac{-1}{\text{б. м.}} = \text{б. б.}\right] = \infty;$$

$$\lim_{z\to1} f(z) = \lim_{z\to1} \frac{2z+3}{(z+2)(z-1)^2} = \left[\frac{5}{\text{б. м.}} = \text{б. б.}\right] = \infty.$$

Следовательно, $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$ – полюсы. Определим их порядок:

$$\lim_{z\to-2} f(z)(z-z_0)^k = [k=1] = \lim_{z\to-2} \frac{2z+3}{(z+2)(z-1)^2}(z+2) =$$

$$= \lim_{z\to-2} \frac{2z+3}{(z-1)^2} = -\frac{1}{9} = const \neq 0 \Rightarrow z_1 = -2 \text{ – простой полюс;}$$

$$\lim_{z\to 1} f(z)(z-z_0)^k = [k=2] = \lim_{z\to 1} \frac{2z+3}{(z+2)(z-1)^2}(z-1)^2 =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{2z+3}{z+2} = \frac{5}{3} = const \neq 0 \Rightarrow z_2 = 1 - \text{полюс } 2 - \text{го порядка.}$$

**5.2** Найти особые точки функций $f(z) = \dfrac{e^{2z}-1}{z}$ и определить их тип.

$z = 0$ – особая точка. Вычислим предел функции при $z \to 0$.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}-1}{z} = \begin{bmatrix} e^{2z}-1 \sim 2z \\ z \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{z} = 2 = const \neq 0.$$

Следовательно, $z = 0$ – устранимая особая точка.

**5.3** Найти особые точки функций $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ и определить их тип.

$z = 0$ – особая точка. Вычислим предел функции при $z \to 0$. В зависимости от того, с какой стороны идет стремление к 0, предел имеет разные значения, следовательно, в общем случае, он не существует. Тогда $z = 0$ – существенно особая точка.

Проверим данное утверждение с помощью разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$, используя известное разложение:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n}.$$

Этот ряд содержит бесконечное число ненулевых членов, содержащих отрицательные степени $z$. Значит, точка $z = 0$ – действительно, существенно особая точка.

## Задачи

Найти особые точки следующих функций, определить их тип.

**5.4** $f(z) = \dfrac{3+4z}{z^3+2z^2+z}$.

Ответ: $z = 0 -$ простой полюс; $z = -1 -$ полюс $2 -$ го порядка.

**5.5** $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^4+9z^2}$.

Ответ: $z = 0 -$ устранимая особая точка; $z = \pm 3i -$ простые полюсы.

**5.6** $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^5+9z^3}$.

Ответ: $z = 0, z = \pm 3i -$ простые полюсы.

**5.7** $f(z) = ze^{\frac{1}{z^2}}$.

Ответ: $z = 0 -$ существенно особая точка.

**5.8** $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4z+5}$.

Ответ: $z = -2 \pm i -$ простые полюсы.

**5.9** $f(z) = \dfrac{1}{z-1}\cos\dfrac{1}{z-1}$.

Ответ: $z = 1 -$ существенно особая точка.

**5.10** $f(z) = \dfrac{6+z}{z^2(z^2+4)^3}$.

Ответ: $z = 0 -$ полюс $2 -$ го порядка; $z = \pm 2i -$ полюсы $3 -$ го порядка.

**5.11** $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$.

Ответ: $z = 0 -$ устранимая особая точка.

**5.12** $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Ответ: $z = 0$ – устранимая особая точка.

**5.13** Определить тип бесконечно удаленной особой точки функции $f(z) = e^{-z}$.

Ответ: $z = \infty$ – существенно особая точка.

**5.14** $f(z) = \frac{3z+2}{(z-1)^3(3z^2+2z-1)^2}$.

Ответ: $z = 1$ – полюс 3 – го порядка; $z = -1$ и $z = \frac{1}{3}$ – полюсы 2 – го порядка.

**5.15** $f(z) = \frac{2\sin z - 3\sin^2 z}{z(z^2+4)^2}$.

Ответ: $z = 0$ – устранимая особая точка; $z = \pm 2i$ – полюсы 2 – го порядка.

**5.16** $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

Ответ: $z = 0$ – существенно особая точка.

**5.17** $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$.

Ответ: $z = 0$ – устранимая особая точка.

**5.18** $f(z) = \frac{1}{z^2+5z+4}$.

Ответ: $z = -1, z = -4$ – простые полюсы.

**5.19** $f(z) = \frac{\cos z}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)(z^2+1)^2}$.

Ответ: $z = -\frac{\pi}{2}$ – устранимая особая точка; $z = \pm i$ – полюсы 2 – го порядка.

**5.20** $f(z) = \dfrac{2 - \cos z}{z^2}$.

Ответ: $z = 0$ — полюс 2 — го порядка.

**5.21** $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^3 + 2z^2 - 3z}$.

Ответ: $z = 0$ — устанимая особая точка; $z = 1, z = -3$ — простые полюсы.

**5.22** $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z^3}$.

Ответ: $z = 0$ — существенно особая точка.

## 6. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

### Теоретический материал

<u>**Определение:**</u> Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0$ называется комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)\, dz,$$

взятого в положительном направлении по окружности $L$ с центром в точке $z_0$, лежащей в области аналитичности функции:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)\, dz.$$

Вычет функции совпадает с коэффициентом $c_{-1}$ разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = c_{-1}.$$

Кроме определения, существуют дополнительные способы вычисления вычетов, в зависимости от типа изолированной особой точки.

Если $z_0$ – простой полюс функции $f(z)$, то вычет в точке $z_0$ может быть вычислен по формуле:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)\,(z - z_0).$$

Если $z_0$ – полюс k-го порядка функции $f(z)$, то вычет в точке $z_0$ может быть вычислен по формуле:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}[f(z)(z - z_0)^k]}{dz^{k-1}}.$$

Если $z_0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$, то вычет в точке $z_0$ равен нулю:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = 0.$$

Если $z_0$ – существенно особая точка функции $f(z)$, то вычет в точке $z_0$ может быть найден только по определению:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = c_{-1}.$$

Если $z_0$ – бесконечно удаленная особая точка функции $f(z)$, то вычет в точке $z_0$ может быть найден по формуле:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = -c_{-1}.$$

**Теорема:** Если функция $f(z)$ имеет в комплексной плоскости конечное число изолированных особых точек, то сумма вычетов в этих точках, включая бесконечно удаленную точку, равна нулю.

## Примеры решения задач

**6. 1** Вычислить вычеты функци $f(z)=\dfrac{3z+1}{(z-2)(z+1)^2}$ во всех изолированных особых точках.

У данной функции две изолированных особых точки: $z_1=-1$ и $z_2=2$. Определим характер этих особых точек.

$$\lim_{z\to-1} f(z)=\lim_{z\to-1}\frac{3z+1}{(z-2)(z+1)^2}=\left[\frac{-2}{\text{б. м.}}=\text{б. б.}\right]=\infty.$$

$$\lim_{z\to2} f(z)=\lim_{z\to2}\frac{3z+1}{(z-2)(z+1)^2}=\left[\frac{7}{\text{б. м.}}=\text{б. б.}\right]=\infty.$$

Следовательно, $z_1=-1$ и $z_2=2$ – полюсы. Определим их порядок:

$$\lim_{z\to-1} f(z)(z-z_0)^k=[k=2]=\lim_{z\to-1}\frac{3z+1}{z-2}=\frac{2}{3}=const\neq 0$$
$\Rightarrow z_1=-1-$ полюс $2-$ го порядка;

$$\lim_{z\to2} f(z)(z-z_0)^k=[k=1]=\lim_{z\to2}\frac{3z+1}{(z+1)^2}=\frac{7}{9}=const\neq 0\Rightarrow$$
$\Rightarrow z_1=2-$ простой полюс.

$$\operatorname{Res}(f(z),-1)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{k-1}[f(z)(z-z_0)^k]}{dz^{k-1}}=$$

$$=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-1}\frac{d\left[\frac{3z+1}{(z-2)(z+1)^2}(z+1)^2\right]}{dz}=\lim_{z\to-1}\left(\frac{3z+1}{z-2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{3(z-2)-(3z+1)}{(z-2)^2}=\lim_{z\to-1}-\frac{7}{(z-2)^2}=-\frac{7}{9}.$$

$$\operatorname{Res}(f(z),2)=\lim_{z\to2} f(z)\,(z-z_0)=\lim_{z\to2}\frac{3z+1}{(z-2)(z+1)^2}(z-2)=$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{3z+1}{(z+1)^2} = \frac{7}{9}.$$

**6.2** Вычислить вычеты функци $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z^2+1)}$ во всех изолированных особых точках.

У данной функции три изолированных особых точки: $z_1 = 0$ и $z_{2,3} = \pm i$. Определим характер этих особых точек.

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z(z^2+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{matrix} \sin z \sim z \\ z \to 0 \end{matrix}\right] = \lim_{z \to 0} \frac{z}{z(z^2+1)} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{z^2+1} = 1 = const \neq 0 \Rightarrow z_1 = 0 -$$ устранимая особая точка.

$$\lim_{z \to \pm i} f(z) = \lim_{z \to \pm i} \frac{\sin z}{z(z^2+1)} = \left[\frac{\sin(\pm i)}{\text{б. м.}} = \text{б. б.}\right] = \infty \Rightarrow z = \pm i -$$

полюсы. Несложно убедиться, что это простые полюсы.

$\operatorname{Res}(f(z), 0) = 0;$

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z \to i} f(z)\,(z-i) = \lim_{z \to i} \frac{\sin z}{z(z+i)(z-i)}(z-i) =$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{\sin z}{z(z+i)} = \frac{\sin i}{i \cdot 2i} = \frac{i \operatorname{sh} 1}{-2} = -\frac{\operatorname{sh} 1}{2} i;$$

$$\operatorname{Res}(f(z), -i) = \lim_{z \to -i} f(z)\,(z+i) = \lim_{z \to -i} \frac{\sin z}{z(z+i)(z-i)}(z+i) =$$

$$= \lim_{z \to -i} \frac{\sin z}{z(z-i)} = \frac{\sin i}{i \cdot (-2i)} = \frac{\operatorname{sh} 1}{2} i.$$

**6.3** Вычислить вычеты функци $f(z) = (z-2)^5 \sin \dfrac{1}{(z-2)^2}$ во всех изолированных особых точках.

У данной функции одна изолированная особая точка: $z = 2$. Определим характер этой точки.

При вычислении предела $\lim\limits_{z \to 2} f(z)$ возникают трудности, поэтому воспользуемся другим способом определения типа особой точки – разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$.

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C};$$

$$f(z) = (z-2)^5 \sin \frac{1}{(z-2)^2} =$$

$$= (z-2)^5 \left( \frac{1}{1!\,(z-2)^2} - \frac{1}{3!\,(z-2)^6} + \frac{1}{5!\,(z-2)^{10}} - \cdots \right) =$$

$$= \frac{(z-1)^3}{1!} - \frac{1}{3!\,(z-2)} + \frac{1}{5!\,(z-2)^5} - \cdots$$

Из разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$ видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, а значит $z = 2$ – существенно особая точка и вычет функции $f(z)$ в этой точке равен коэффициенту $c_{-1}$ разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$.

$$\operatorname{Res}(f(z), 2) = c_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

## Задачи

Вычислить вычеты следующих функций во всех изолированных особых точках.

**6.4** $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)(z+1)^3}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 2) = \dfrac{e^2}{27}$; $\operatorname{Res}(f(z), -1) = -\dfrac{17}{54\,e}$.

**6.5** $f(z) = z^3 \sin\frac{3}{z^2}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = 0$.

**6.6** $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = e - 1;\ \operatorname{Res}(f(z), 1) = -e$.

**6.7** $f(z) = z^2\, e^{\frac{1}{z}}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{6}$.

**6.8** $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3 - \pi z^2}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = 0;\ \operatorname{Res}(f(z), \pi) = \frac{2}{\pi^2}$.

**6.9** $f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = 0;\ \operatorname{Res}(f(z), i) = \frac{i}{2};\ \operatorname{Res}(f(z), -i) = -\frac{i}{2}$.

**6.10** $f(z) = \frac{2z - 5}{z^2 - 2z + 1}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 1) = 2$.

**6.11** $f(z) = \frac{z}{(z - 1)(z - 2)^2}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 1) = 1;\ \operatorname{Res}(f(z), 2) = -1$.

**6.12** $f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{1 - z}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = \sin 1;\ \operatorname{Res}(f(z), 1) = -\sin 1$.

**6.13** $f(z) = \sin\frac{1}{z^2}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = 0$.

**6.14** $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-i)^4}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), i) = \dfrac{1}{6}(\cos 1 + i \sin 1)$.

**6.15** $f(z) = e^{\frac{z-2}{z}}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = -2e$.

Вычислить вычеты следующих функций в бесконечно удаленных особых точках.

**6.16** $f(z) = z - \dfrac{1}{z^2} \sin z$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), \infty) = 1$.

**6.17** $f(z) = z \cos^2 \dfrac{\pi}{z}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), \infty) = \pi^2$.

**6.18** $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z+1)}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), \infty) = \sin 1 - 1$.

**6.19** $f(z) = z^2 \cos \dfrac{1}{z-1}$.

Ответ: $\operatorname{Res}(f(z), \infty) = 1$.

# 7. ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**Теорема (основная теорема о вычетах):** Если функция $w = f(z)$ аналитична в замкнутой области $D$, ограниченной контуром $L$, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих внутри области $D$, то при условии обхода контура в положительном направлении справедлива формула:

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), z_k).$$

## Примеры решения задач

**7. 1** Вычислить интеграл $\oint_L \frac{z}{(z^2+1)(z-1)^2}dz$, где $L-$ окружность $|z-(1+i)| = 2$.

Уравнение $|z-(1+i)| = 2$ определяет на комплексной плоскости окружность с центром в точке $z_0 = 1+i$ радиуса $R = 2$.

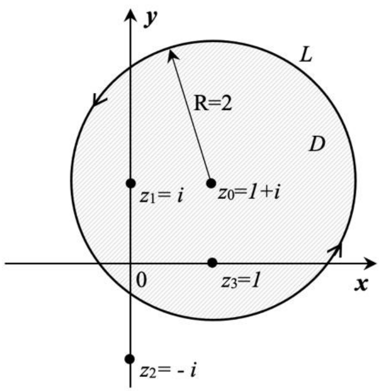


Рисунок 6 – Иллюстрация к задаче 7.1

Подынтегральная функция не является аналитической в точках $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1$. В область $D$, ограниченную контуром $L$, попадают точки $z_1 = i$ и $z_3 = 1$ (Рисунок 6).

Согласно основной теореме о вычетах, данный по условию интеграл может быть вычислен по формуле:

$$\oint_L \frac{z}{(z^2+1)(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f(z),i) + \operatorname{Res}(f(z),1)\right).$$

Определим характер изолированных особых точек:

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)^2} = \left[\frac{i}{\text{б. м.}} = \text{б. б.}\right] = \infty;$$

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)^2} = \left[\frac{1}{\text{б. м.}} = \text{б. б.}\right] = \infty.$$

Следовательно, $z_1 = i$ и $z_3 = 1$ – полюсы. Определим их порядок:

$$\lim_{z\to i} f(z)(z-z_0)^k = [k=1] = \lim_{z\to i}\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)^2}(z-i) =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{z}{(z+i)(z-1)^2} = \frac{i}{4} = const \neq 0 \Rightarrow z_1 = i - \text{простой полюс;}$$

$$\lim_{z\to 1} f(z)(z-z_0)^k = [k=2] = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)^2}(z-1)^2 =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2} = const \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_3 = 1 - \text{полюс 2 порядка.}$$

Вычислим вычеты в этих изолированных особых точках:

$$\operatorname{Res}(f(z),i) = \lim_{z\to i} f(z)\,(z-i) = \lim_{z\to i}\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)^2}(z-i)$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{z}{(z+i)(z-1)^2} = \frac{i}{2i\,(i-1)^2} = -\frac{1}{8}.$$

$$\mathrm{Res}(f(z),1)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}(f(z)(z-1)^2)'=$$

$$=\lim_{z\to1}\left(\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)^2}(z-1)^2\right)'=\lim_{z\to1}\left(\frac{z}{(z-i)(z+i)}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to1}\left(\frac{z}{z^2+1}\right)'=\lim_{z\to1}\frac{z^2+1-2z^2}{(z^2+1)^2}=\lim_{z\to1}\frac{1-z^2}{(z^2+1)^2}=\frac{0}{4}=0.$$

$$\oint\limits_L\frac{z}{(z^2+1)(z-1)^2}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{8}+0\right)=-\frac{\pi i}{4}.$$

**7. 2** Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} z^2\cos\frac{2}{z}dz.$

Контур представляет собой окружность с центром в точке $z_0=0$ радиуса $R=1$.

Изолированная особая точка одна – $z=0$, и она находится внутри замкнутого контура. Тогда

$$\oint\limits_{|z|=1} z^2\cos\frac{2}{z}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),0).$$

Выясним характер особой точки. Вычисление предела функции при $z\to0$ вызывает определенные трудности, поэтому воспользуемся разложением функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$.

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},|z|<\infty.$$

$$z^2\cos\frac{2}{z}=z^2\left(1-\frac{2^2}{2!\,z^2}+\frac{2^4}{4!\,z^4}-\frac{2^6}{6!\,z^4}+\cdots\right)=$$

$$=z^2-2+\frac{2}{3z^2}-\frac{4}{45z^4}+\cdots.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, следовательно, $z = 0$ – существенно особая точка и вычет функции в этой точке равен коэффициенту $c_{-1} = 0$.

$$\oint\limits_{|z|=1} z^2 \cos\frac{2}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

**7. 3** Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^9}{z^5 - 1} dz$.

Подынтегральная функция является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точек, в которых знаменатель обращается в ноль. Все пять корней уравнения $z^5 - 1 = 0$ лежат на окружности радиусом 1 и, следовательно, являются внутренними точками области $D$, ограниченной контуром
$L$: $|z| = 2$.

Возможны два способа решения задачи: определить все изолированные особые точки и вычислить вычеты в них или определить только вычет в бесконечно удаленной особой точке.

Воспользуемся теоремой о том, что если функция $f(z)$ имеет в комплексной плоскости конечное число изолированных особых точек, то сумма вычетов в этих точках, включая бесконечно удаленную точку, равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{5} \operatorname{Res}(f(z), z_k) + \operatorname{Res}(f(z), \infty) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{5} \operatorname{Res}(f(z), z_k) = -\operatorname{Res}(f(z), \infty);$$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^9}{z^5-1}dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \infty).$$

Вычислим вычет подынтегральной функции в бесконечно удаленной особой точке, для этого разложим функцию в ряд Лорана.

$$\frac{z^9}{z^5-1} = \frac{z^9}{z^5\left(1-\frac{1}{z^5}\right)} = z^4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^5}} = z^4\left(1+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}+\cdots\right) =$$

$$= z^4 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^6} + \cdots$$

$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = -c_{-1} = -1.$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^9}{z^5-1}dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \infty) = -2\pi i \cdot (-1) = 2\pi i.$$

### Задачи

Вычислить следующие интегралы:

**7.4** $\oint\limits_L \frac{2z-3}{(z^2-1)(z-1)^2}dz$, где $L-$ окружность $|z-1| = 3$.

Ответ: 0.

**7.5** $\oint\limits_L \frac{\sin(z-1)}{z^3-3z^2+2z}dz$, где $L-$ окружность $|z-i| = 2$.

Ответ: $-\pi i \sin 1$.

**7.6** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz.$

Ответ: $\pi i$.

**7.7** $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{dz}{(z^2+4)^2}$.

Ответ: 0.

**7.8** $\oint\limits_{L} \dfrac{z^2}{(z^2-1)(z+3)}dz$, где $L$ — окружность $|z|=2$.

Ответ: $-\dfrac{\pi i}{4}$.

**7.9** $\oint\limits_{L} \dfrac{\cos z}{z^2(z-2)}dz$, где $L$ — окружность $|z|=1$.

Ответ: $-\dfrac{\pi i}{2}$.

**7.10** $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{\cos(z-i)}{z^2-(1+i)z+i}dz$.

Ответ: $\pi(1-i)$.

**7.11** $\oint\limits_{|z|=1/2} z^2 \sin\dfrac{1}{z}dz$.

Ответ: $-\dfrac{\pi i}{3}$.

**7.12** $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\cos z}{(z^2+1)(z+4)}dz$.

Ответ: $-\dfrac{2\pi i}{17}\operatorname{ch} 1$.

**7.13** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz.$

Ответ: $2\pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right).$

**7.14** $\oint\limits_{L} \frac{2z - e^z}{z^2(z-3)} dz,$ где $L -$ окружность $|z+1| = 2.$

Ответ: $-\frac{4\pi i}{9}.$

**7.15** $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10} - 1} dz.$

Ответ: $2\pi i.$

**7.16** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1 + z^{12}}.$

Ответ: 0.

**7.17** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^{19}}{(z^5 - 2)(z-1)^5} dz.$

Ответ: $2\pi i.$

**7.18** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z+3)} dz.$

Ответ: $2\pi i \left(\frac{1}{3} + \frac{3e^2}{16}\right).$

**7.19** $\oint\limits_{|z|=1} \sin\frac{2}{z} \cdot e^{-\frac{1}{z}}\, dz.$

Ответ: $4\pi i$.

**7.20** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1-\cos 2z}{z^3}\, dz.$

Ответ: $4\pi i$.

**7.21** $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{(25z^2+1)^4}\,.$

Ответ: $\frac{\pi}{16}$.

**7.22** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^6+5z^3}{z^4+16}\, dz.$

Ответ: $10\pi i$.

## Варианты для подготовки к контрольной работе

## Вариант 1

**1.** Представить результат вычисления значения функции $\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$ в алгебраической форме.

Ответ: $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

**2.** Восстановить функцию $f(z)$, аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$, по известной мнимой части $v(x, y) = x^2 - y^2 - x$ и значению $f(0) = 0$.

Ответ: $f(z) = iz^2 - iz$.

**3.** Вычислить интеграл $\int\limits_L \overline{z} \cdot z\, dz$, где $L$ — окружность $|z| = 1$ и $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Ответ: $-2$.

**4.** Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{2 + \sin z}{z(z + 3i)}\, dz$, где $L$ — окружность $|z| = 2$.

Ответ: $\frac{4\pi}{3}$.

**5.** Найти все особые точки и указать их тип для функции $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3 + 3z^2}$.

Ответ: $z = 0$ — устранимая особая точка; $z = -3$ — простой полюс.

**6.** Найти вычет функции $f(z) = z^4 e^{\frac{3}{z}}$ в особой точке.

Ответ: $\mathrm{Res}(f(z), 0) = \frac{243}{5!}$.

**7**. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)^2}\,dz.$

Ответ: $\dfrac{e^2\pi}{2}i.$

## Вариант 2

**1.** Представить результат вычисления значения функции $\operatorname{Arctg}\left(-\frac{i}{3}\right)$ в алгебраической форме.

Ответ: $-\dfrac{\ln 2}{2}i+\pi k.$

**2.** Восстановить функцию $f(z)$, аналитическую в окрестности точки $z_0=0$, по известной действительной части и $(x,y)=1-e^x\cdot\sin y$ и значению $f(0)=1+i.$

Ответ: $f(z)=-ie^z+1+2i.$

**3**. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_L (2-\overline{z})\,dz$, где $L$ – отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+2i.$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}+4i.$

**4**. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_L \frac{z^2+2}{(z+1)(z^2-1)}dz$, где $L$ – окружность $|z+1|=1.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}i.$

**5**. Найти все особые точки и указать их тип для функции

$f(z) = \dfrac{\ln(1+3z^2)}{z^3 - 2z^2}$.

Ответ: $z = 2$ – простой полюс; $z = 0$ – устранимая особая точка.

**6**. Найти вычет функции $f(z) = z^3\left(1 - \cos\dfrac{2}{z}\right)$ в особой точке.

Ответ: $\mathrm{Res}(f(z), 0) = -\dfrac{2}{3}$.

**7**. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^5}\, dz$.

Ответ: $-\pi\, i$.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Краснов М.А., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981, 312 с.

2. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича* – М.: Наука, 1981. – 366 с.

3. *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (Типовые расчеты): Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1999, 126 с.

*4. Апайчева Л.А.* Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление*/ Л.А. Апайчева, А.Г. Багоутдинова, Л.Е. Шувалова.* – Нижнекамск: Изд-во НХТИ, 2009. – 216 с.

*5. Толстых О.Д., Гозбенко В.Е.* Основы теории функций комплексного переменного. Учебное пособие для студентов технических специальностей / *О.Д. Толстых, В.Е. Гозбенко*. – Иркутск: ИрГУПС, 2008. – 136 с.

*6. Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ*/ Б.В. Шабат.* Ч.1. – М.,Наука,1985.

Учебное издание

*Денискина Екатерина Александровна,*
*Семенова Ольга Юрьевна*

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

*Практикум*

Текст печатается в авторской редакции
Техническое редактирование А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 31.05.2021. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. 4,0 п. л.
Тираж 100 экз. Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА» (САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.