МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.В. КИТАЕВА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 01.03.03 Механика и математическое моделирование

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 519 (075)
ББК 22.131я7
К 45

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Н о в и к о в,
канд. физ.-мат. наук, доц. Н. В. Д о б р о б о г

Китаева, Елена Викторовна

К 45 **Функциональные последовательности и ряды:** учебное пособие / *Е.В. Китаева.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 72 с.

ISBN 978-5-7883-1725-0

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий. Оно охватывает часть материала курса «Математический анализ».

Предназначено для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 01.03.03 Механика и математическое моделирование. Оно может пригодиться для сопровождения курса лекций, читаемого как в очной форме, так и дистанционной, а также для самостоятельного обучения.

Подготовлено на кафедре дифференциальных уравнений и теории управления.

УДК 519(075)
ББК 22.131я7

ISBN 978-5-7883-1725-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В данном пособии рассматриваются последовательности и ряды, членами которых являются не числа, а функции, определенные на некотором фиксированном множестве. Такие последовательности и ряды широко используются для представления и приближенного вычисления функций.

Вводятся понятия функциональной последовательности и функционального ряда, приводятся основные определения и теоретические факты, связанные с равномерной и неравномерной сходимостью функциональных последовательностей и рядов, рассмотрены теоремы о предельном переходе, о почленном интегрировании и дифференцировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов. В пособии также уделено внимание степенным рядам: приведены основные теоремы, связанные с их сходимостью, разобраны типовые задачи и методы их решения.

Пособие предназначено для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

1. Функциональные последовательности

1.1 Сходимость и равномерная сходимость функциональной последовательности

Определение. Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ определены на множестве E и пусть $x_0 \in E$. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится в точке x_0, если сходится числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке множества E, то будем говорить, что она сходится на множестве E. В этом случае на множестве E определена функция $f(x)$, заданная соотношением

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in E. \qquad (1.1)$$

На языке кванторов формула (1.1) означает, что $\forall x \in E$ выполняется следующее условие

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N_\varepsilon(x) : \forall n \geq N \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon. \qquad (1.2)$$

Функцию $f(x)$ называют предельной функцией последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E [1].

Определение. Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ определены на множестве E и пусть $f(x)$ – предельная функция последовательности $\{f_n(x)\}$. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции относительно $x \in E$, если выполняется следующее условие

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N_\varepsilon : \forall n \geq N,\, \forall x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon . \qquad (1.3)$$

В соотношении (1.3), в отличии от (1.1), номер N_ε не зависит от x .

Применяют обозначение $f_n(x) \underset{x \in E}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} f(x)$.

Теорема 1.1. Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ определены на множестве E и пусть $f(x)$ – предельная функция последовательности $\{ f_n(x) \}$. Для того чтобы последовательность $\{ f_n(x) \}$ сходилась равномерно к своей предельной функции относительно $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0 \qquad (1.4)$$

Доказательство необходимости.

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть выполнено условие (1.4). Введем в рассмотрение вспомогательную числовую последовательность $a_n = \sup\limits_{x \in E} \left| f_n(x) - f(x) \right|$. Тогда в силу условия (1.4) $\exists N = N_\varepsilon : \forall n \geq N \Rightarrow a_n < \varepsilon$.

В силу определения точной верхней грани выполняется условие $\forall x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq a_n$.

Тогда получим, что $\forall n \geq N, \forall x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq a_n < \varepsilon$.

Таким образом $f_n(x) \underset{x \in E}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} f(x)$.

Доказательство достаточности.

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть $f_n(x) \underset{x \in E}{\rightrightarrows} f(x)$.

Тогда $\exists N = N_\varepsilon : \forall n \geq N, \forall x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall n \geq N \Rightarrow \sup\limits_{x \in E} \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. То есть соотношение (1.4) выполняется.

Теорема доказана.

Теорема 1.2. (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности) [2]. Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ определены на множестве E. Для того чтобы последовательность функций $\{ f_n(x) \}$ сходилась равномерно к своей предельной функции относительно $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in E \Rightarrow \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon . \quad (1.5)$$

(Условие (1.5) называют условием Коши).

Доказательство необходимости. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть последовательность функций $\{ f_n(x) \}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x \in E$. Тогда

$$\exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Пусть $n \geq N_\varepsilon$, тогда одновременно выполняются неравенства

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left| f_{n+p}(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ сразу } \forall x \in E .$$

Тогда получим

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| = \left| f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x) \right| \le$$

$$\le \left| f_{n+p}(x) - f(x) \right| + \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon , \ \forall x \in E .$$

То есть условие (1.5) выполняется.

Доказательство достаточности. Пусть последовательность функций $\left\{ f_n(x) \right\}$ удовлетворяет условию Коши. Зафиксируем $\forall x_0 \in E$. В силу условия (1.5) числовая последовательность $\left\{ f_n(x_0) \right\}$ удовлетворяет условию Коши для числовых последовательностей, тогда, в силу критерия Коши для числовых последовательностей, последовательность $\left\{ f_n(x_0) \right\}$ сходится. То есть существует конечный придел $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. В силу произвольности точки x_0 на множестве E определена предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Осталось доказать, что $f_n(x) \underset{x \in E}{\rightrightarrows} f(x)$.

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Так как последовательность $\left\{ f_n(x) \right\}$ удовлетворяет условию Коши, то

$$\exists N_\varepsilon : \forall n \ge N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in E \Rightarrow \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Зафиксировав $x \in E$ и $n \ge N_\varepsilon$, перейдем в неравенстве $\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ к пределу при $p \to \infty$. Получим, что

$$\forall n \ge N_\varepsilon,\ \forall x \in E \Rightarrow \left| f(x) - f_n(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

То есть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x \in E$.
Достаточность доказана.
Теорема доказана.

1.2 Почленный переход к пределу, непрерывность предельной функции равномерно сходящихся функциональных последовательностей

Теорема 1.3. Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x \in E$. Пусть x_0 – предельная точка множества E. Пусть $\forall n$ существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = b_n. \tag{1.6}$$

Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} b_n. \tag{1.7}$$

Замечание. Нетрудно заметить, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

То есть при выполнении условий теоремы можно переставлять местами предельные переходы [3].

Доказательство теоремы.

Докажем сначала, что предел, стоящий в правой части формулы (1.7), существует. Для этого зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Так как последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно относительно $x \in E$, то в силу критерия Коши

$$\exists N_\varepsilon : \forall n \ge N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in E \Rightarrow \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксировав p и $n \ge N_\varepsilon$, перейдем в неравенстве $\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ к пределу при. $x \to x_0$. Получим, что

$$\forall n \ge N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}, \Rightarrow \left| b_{n+p} - b_n \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Тогда в силу критерия Коши для числовых последовательностей, последовательность $\{b_n\}$ имеет конечный предел. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A. \qquad (1.8)$$

Осталось доказать, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A. \qquad (1.9)$$

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Так как последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x \in E$, то

$$\exists N_\varepsilon^1 : \forall n \ge N_\varepsilon^1, \forall x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу (1.8) $\exists N_\varepsilon^2 : \forall n \ge N_\varepsilon^2, \Rightarrow \left| b_n - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $N_\varepsilon^3 = \max\left\{N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2\right\}$. Зафиксируем $N \ge N_\varepsilon^3$. Тогда

$$\left| f_N(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \left| b_N - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу (1.6)

$$\exists \delta > 0 : \forall x : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f_N(x) - b_N \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда получим, что

$$\forall x : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| = \left| f(x) - f_N(x) + f_N(x) - b_N + b_N - A \right| \le$$
$$\le \left| f(x) - f_N(x) \right| + \left| f_N(x) - b_N \right| + \left| b_N - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

То есть соотношение (1.9) выполняется.
Теорема доказана.

Теорема 1.4. Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ непрерывны на отрезке $\left[a, b\right]$. И пусть последовательность функций $\left\{ f_n(x) \right\}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x \in \left[a, b\right]$. Тогда $f(x)$ непрерывна на $\left[a, b\right]$.

Доказательство.
Зафиксируем $\forall x_0 \in \left[a, b\right]$. В силу непрерывности функций $f_n(x)$ имеем $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$. Так как выполнены все условия предыдущей теоремы о предельном переходе, то получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

То есть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. В силу произвольности x_0 $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.
Теорема доказана.

1.3 Почленное интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся функциональных последовательностей

Теорема 1.5. Пусть функции $f_n(x), n=1,2,3,\cdots$ дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. И пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится в некоторой точке $\gamma\in[a,b]$. Пусть последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции относительно $x\in[a,b]$. Тогда последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x\in[a,b]$, $f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, и справедливо соотношение

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x). \tag{1.10}$$

Замечание. Нетрудно заметить, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}\left(f_n(x)\right).$$

То есть при выполнении условий теоремы можно переставлять местами предельный переход и операцию дифференцирования.

Доказательство теоремы.

Докажем сначала, что $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно относительно $x \in [a,b]$. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall p > 0$. Рассмотрим выражение $\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| = \left| f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\gamma) + f_{n+p}(\gamma) - f_n(\gamma) + f_n(\gamma) - f_n(x) \right|$.

Зафиксируем n и введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\varphi(t) = f_{n+p}(t) - f_n(t)$. Тогда

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| \le \left| \varphi(x) - \varphi(\gamma) \right| + \left| f_{n+p}(\gamma) - f_n(\gamma) \right|.$$

Так как $\{f_n(\gamma)\}$ сходится, то по критерию Коши

$$\exists N_1 : \forall n \ge N_1, \forall p \in \mathrm{N}, \Rightarrow \left| f_{n+p}(\gamma) - f_n(\gamma) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу условий теоремы функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа о среднем значении. Тогда существует точка ξ, лежащая строго между x и γ, такая что

$$\varphi(x) - \varphi(\gamma) = \varphi'(\xi)(x-\gamma) = (f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi))(x-\gamma).$$

Так как $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно, то по критерию Коши

$$\exists N_2 : \forall n \ge N_2, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left| f'_{n+p}(x) - f'_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда

$$\forall n \ge N, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left| x - \gamma \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, по критерию Коши $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно относительно $x \in [a,b]$. Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $\{f_n(x)\}$.

Зафиксируем $\forall x_0 \in (a,b)$. Пусть Δx – приращение точки x_0, причем $a < x_0 + \Delta x < b$. Введем в рассмотрение множество $\{\Delta x\} = \{\Delta x : a < x_0 + \Delta x < b\}$. Введем на множестве $\{\Delta x\}$ функциональную последовательность $\{\Phi_n(\Delta x)\}$, определяемую соотношением

$$\Phi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x}.$$

Покажем, что последовательность $\{\Phi_n(\Delta x)\}$ сходится равномерно относительно $\Delta x \in \{\Delta x\}$. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p > 0$. Рассмотрим выражение

$$\left|\Phi_{n+p}(\Delta x) - \Phi_n(\Delta x)\right| = \left|\frac{f_{n+p}(x_0 + \Delta x) - f_{n+p}(x_0)}{\Delta x} - \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x}\right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta x|}\left|(f_{n+p}(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0 + \Delta x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))\right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta x|}\left|\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)\right|$$

при фиксированном n.
Тогда по теореме Лагранжа о среднем значении

$$\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x =$$
$$= (f'_{n+p}(x_0 + \theta\Delta x) - f'_n(x_0 + \theta\Delta x))\Delta x,$$

где $\theta \in (0,1)$.

Так как $\left\{ f_n'(x) \right\}$ сходится равномерно, то по критерию Коши

$$\exists N_3 : \forall n \geq N_3, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left| f_{n+p}'(x) - f_n'(x) \right| < \varepsilon .$$

Очевидно, что

$$\forall \theta \in (0,1), \ \ \forall \Delta x \in \{\Delta x\} \Rightarrow x_0 + \theta \Delta x \in [a,b] .$$

Тогда

$$\forall n \geq N_3, \forall p \in \mathrm{N}, \forall \Delta x \in \{\Delta x\} \Rightarrow \left| \Phi_{n+p}(\Delta x) - \Phi_n(\Delta x) \right| =$$
$$= \left| f_{n+p}'(x_0 + \theta \Delta x) - f_n'(x_0 + \theta \Delta x) \right| < \varepsilon ,$$

то есть $\left\{ \Phi_n(\Delta x) \right\}$ сходится равномерно относительно $\Delta x \in \{\Delta x\}$.

По теореме о перестановке предельных переходов получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \lim_{n \to \infty} \Phi_n(\Delta x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\Delta x \to 0} \Phi_n(\Delta x) . \qquad (1.11)$$

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(\Delta x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} ,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Phi_n(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x} = f_n'(x_0) .$$

Тогда соотношение (11) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0) .$$

То есть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и справедливо равенство $f'(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x_0)$. В силу произвольности x_0 функция дифференцируема в интервале (a,b), и справедливо соотношение

(1.10). Случай, когда $x_0 = a$ или $x_0 = b$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 1.6. Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. И пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x \in [a,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, причем последовательность $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)dx\right\}$ сходится, и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx \qquad (1.12)$$

Замечание. Нетрудно заметить, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx .$$

То есть при выполнении условий теоремы можно переставлять местами предельный переход и операцию интегрирования.

Доказательство теоремы.

Покажем сначала, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть τ – разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. Обозначим через $\omega_i(f)$ – колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, то есть

$$\omega_i(f) = \sup_{x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]} \left| f(x_i') - f(x_i'') \right| .$$

Пусть $\omega_i(f_n)$ – колебание функции $f_n(x)$ на отрезке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Зафиксируем произвольные $x_i', x_i'' \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ и рассмотрим выражение $\left|f(x_i') - f(x_i'')\right|$.

По условию теоремы последовательность функций $\left\{f_n(x)\right\}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x \in \left[a, b\right]$. Тогда

$$\exists N : \forall n \geq N, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Зафиксируем номер $n \geq N$. Получим

$$\begin{aligned}\left|f(x_i') - f(x_i'')\right| &= \left|f(x_i') - f_n(x_i') + f_n(x_i') - f_n(x_i'') + f_n(x_i'') - f(x_i'')\right| \leq \\ &\leq \left|f(x_i') - f_n(x_i')\right| + \left|f_n(x_i') - f_n(x_i'')\right| + \left|f_n(x_i'') - f(x_i'')\right|.\end{aligned}$$

Тогда

$$\forall x_i', x_i'' \in \left[x_{i-1}, x_i\right], \forall i \Rightarrow \left|f(x_i') - f(x_i'')\right| < \left|f_n(x_i') - f_n(x_i'')\right| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Таким образом

$$\sup_{x_i', x_i'' \in \left[x_{i-1}, x_i\right]} \left|f(x_i') - f(x_i'')\right| \leq \sup_{x_i', x_i'' \in \left[x_{i-1}, x_i\right]} \left|f_n(x_i') - f_n(x_i'')\right| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

То есть $\omega_i(f) \leq \omega_i(f_n) + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Умножим последнее неравенство на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммируем по $i : 1 \leq i \leq m$. Получим

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i(f)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{m} \omega_i(f_n)\Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(f_n)\Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $l(\tau)$ – мелкость разбиения τ, то есть $l(\tau)=\max\limits_{i:1\ldots m}\Delta x_i$. Так как функции $f_n(x), n=1,2,3,\cdots$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то в силу критерия интегрируемости

$$\exists\delta>0:\forall\tau:l(\tau)<\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f_n)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\forall\tau:l(\tau)<\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

То есть по критерию интегрируемости $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Осталось доказать соотношение (1.12). Зафиксируем $\forall\varepsilon>0$ и рассмотрим выражение

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b(f_n(x)-f(x))dx\right|\le\int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx.$$

По условию теоремы последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ относительно $x\in[a,b]$. Тогда

$$\exists N:\forall n\ge N,\forall x\in[a,b]\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

В результате получим

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b\frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

То есть соотношение (1.12) справедливо.
Теорема доказана.

1.4 Примеры

Пример 1.1. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{x+n} \tag{1.13}$$

на равномерную сходимость на множестве $E = [1, +\infty]$.

Решение.

Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $f_n(x)$. Тогда

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{x+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\frac{x}{n}+1} = x^2.$$

Зафиксируем произвольный номер n и рассмотрим выражение $\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{nx^2}{x+n} - x^2 \right| = \frac{x^3}{x+n}, \forall x \in [1, +\infty]$.

Пусть $N = n, \tilde{x} = n$. Тогда

$$\left| f_N(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) \right| = \frac{\tilde{x}^3}{\tilde{x}+n} = \frac{n^3}{n+n} = \frac{n^2}{2} \geq 2, \forall n \geq 2.$$

Таким образом,

$$\exists \varepsilon_0 = 2 : \forall n \geq 2\ \exists N = n, \exists \tilde{x} = n : \left| f_N(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) \right| \geq 2,$$

то есть функциональная последовательность (1.13) сходится неравномерно относительно $x \in [1, +\infty]$.

Пример 1.2. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n} \tag{1.14}$$

на равномерную сходимость на множестве $E = [1, +\infty)$.

Решение.

Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $f_n(x)$. Тогда

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0 .$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим выражение

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{x+n} - 0\right| = \frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n}, \forall x \in [1,+\infty) .$$

Выберем N из условия $\frac{1}{N} < \varepsilon$, то есть $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Пусть $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда

$$\forall n \ge N, \forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon ,$$

то есть функциональная последовательность (1.14) сходится равномерно относительно $x \in [1, +\infty)$.

Пример 1.3. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \tag{1.15}$$

на равномерную сходимость на множестве $E = (0,1)$.

Решение.

Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $f_n(x)$. Тогда

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(x^n-x^{n+1}\right)=0 .$$

Рассмотрим выражение

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|x^n-x^{n+1}-0\right|=x^n-x^{n+1},\forall x\in(0,1) .$$

Введем в рассмотрение функцию $g(x)=\left|f_n(x)-f(x)\right|$, тогда $g(x)=x^n-x^{n+1}$. Найдем $\sup\limits_{x\in(0,1)} g(x)$. Найдем производную функции $g(x)$. Получим

$$g'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=x^{n-1}(n-(n+1)x) .$$

Имеем, что $g'(x)=0$ при $x=\dfrac{n}{n+1}$, $g'(x)>0$ при $x<\dfrac{n}{n+1}$, $g'(x)<0$ при $x>\dfrac{n}{n+1}$. Тогда $\tilde{x}=\dfrac{n}{n+1}$ – точка максимума функции $g(x)$. При этом

$$g(\tilde{x})=g\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1} .$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{e}\cdot 0=0 ,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(0,1)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$.

Тогда в силу теоремы 1.1 функциональная последовательность (1.15) сходится равномерно относительно $x\in(0,1)$.

Пример 1.4. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x)=x^n-x^{2n} \tag{1.16}$$

на равномерную сходимость на множестве $E=(0,1)$.

Решение.

Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $f_n(x)$. Тогда

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(x^n-x^{2n}\right)=0 .$$

Рассмотрим выражение

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|x^n-x^{2n}-0\right|=x^n-x^{2n},\forall x\in(0,1) .$$

Введем в рассмотрение функцию $g(x)=\left|f_n(x)-f(x)\right|$, тогда $g(x)=x^n-x^{2n}$. Найдем $\sup\limits_{x\in(0,1)}g(x)$. Найдем производную функции $g(x)$. Получим

$$g'(x)=nx^{n-1}-2n\cdot x^{2n-1}=nx^{n-1}(1-2x^n) .$$

Имеем, что $g'(x)=0$ при $x=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, $g'(x)>0$ при $x<\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, $g'(x)<0$ при $x>\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. Тогда $\tilde{x}=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ – точка максимума функции $g(x)$. При этом

$$g(\tilde{x}) = g\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n - \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4},$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4} \neq 0$.

Тогда в силу теоремы 1.1 функциональная последовательность (1.16) сходится неравномерно относительно $x \in (0,1)$.

Пример 1.5. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \tag{1.17}$$

на равномерную сходимость на множестве $E = [0,+\infty)$.

Решение.

Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $f_n(x)$. Тогда

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

Рассмотрим выражение

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \forall x \in [0,+\infty).$$

Введем в рассмотрение функцию $g(x)=\left|f_n(x)-f(x)\right|$, тогда $g(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$. Найдем $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} g(x)$. Найдем производную функции $g(x)$. Получим

$$g'(x)=\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)'=\frac{2n(1+n^2x^2)-2nx\cdot 2n^2x}{\left(1+n^2x^2\right)^2}=2n\cdot\frac{1-n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}.$$

Имеем, что $g'(x)=0$ при $x=\dfrac{1}{n}$, $g'(x)>0$ при $x<\dfrac{1}{n}$, $g'(x)<0$ при $x>\dfrac{1}{n}$.

Тогда $\tilde{x}=\dfrac{1}{n}$ – точка максимума функции $g(x)$. При этом

$$g(\tilde{x})=g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=1.$$

Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=1\neq 0.$$

Тогда в силу теоремы 1.1 функциональная последовательность (1.17) сходится неравномерно относительно $x\in[0,+\infty)$.

Пример 1.6. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x)=\frac{n^2}{2n^2+3x^2} \tag{1.18}$$

на равномерную сходимость на множестве $E=[-2,1]$.

Решение.

Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $f_n(x)$. Тогда $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2n^2+3x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим выражение

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{n^2}{2n^2+3x^2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{2n^2+3x^2}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 4}{2n^2}=\frac{3}{n^2},\ \forall x\in[-2,1].$$

Выберем N из условия $\dfrac{3}{N^2}<\varepsilon$, то есть $N>\sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon}}$. Пусть $N=\left[\sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon}}\right]+1$. Тогда

$$\forall n\ge N,\ \forall x\in[-2,1]\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|\le\frac{3}{n^2}\le\frac{3}{N^2}<\varepsilon,$$

то есть функциональная последовательность (1.18) сходится равномерно относительно $x\in[-2,1]$.

Пример 1.7. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x)=\frac{\sqrt{n^2x^2+1}}{n} \tag{1.19}$$

на равномерную сходимость на множестве ее сходимости.

Решение.

Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $f_n(x)$. Зафиксируем $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. Тогда

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2x^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = |x|.$$

При этом промежуток $(-\infty, +\infty)$ является множеством сходимости ряда (1.19).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим выражение

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sqrt{n^2x^2+1}}{n} - |x| \right| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \right| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \le \frac{1}{n}, \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

Выберем N из условия $\frac{1}{N} < \varepsilon$, то есть $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Пусть $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$. Тогда

$$\forall n \ge N, \forall x \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

то есть функциональная последовательность (1.19) сходится равномерно относительно $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 1.8. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{nx}{x^n + n} \tag{1.20}$$

на равномерную сходимость на множестве $E=(0,1)$.

Решение.

Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности $f_n(x)$. Тогда

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x^n+n}=x\ .$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим выражение

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{x^n+n}-x\right|=\frac{x^n}{x^n+n}\le\frac{1}{n},\ \forall x\in(0,1)\ .$$

Выберем N из условия $\frac{1}{N}<\varepsilon$, то есть $N>\frac{1}{\varepsilon}$. Пусть $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

Тогда

$$\forall n\ge N,\ \forall x\in(0,1)\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}<\varepsilon,$$

то есть функциональная последовательность (1.20) сходится равномерно относительно $x\in(0,1)$.

2. Функциональные ряды

2.1 Сходимость и равномерная сходимость функционального ряда

Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ определены на множестве E. Формально написанную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \qquad (2.1)$$

будем называть функциональным рядом [6].

Введем в рассмотрение функциональную последовательность $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, которую называют частичной суммой ряда (2.1).

Если для каждого $x \in E$ последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится, то будем говорить, что функциональный ряд (2.1) сходится на множестве E.

Если $S(x)$ – предельная функция последовательности $\{S_n(x)\}$, то будем говорить, что $S(x)$ – сумма ряда (2.1).

Множество всех точек, для которых ряд (2.1) сходится, называют множеством сходимости ряда (2.1).

Определение. Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ определены на множестве E и $S(x)$ – предельная функция последовательности $\{S_n(x)\}$. Будем говорить, что функциональный ряд (2.1) сходится равномерно на множестве E, если последовательность функций $\{S_n(x)\}$ сходится равномерно к $S(x)$ относительно $x \in E$.

На языке кванторов это означает, что выполняется следующее условие

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N=N_{\varepsilon}:\forall n\geq N,\,\forall x\in E\Rightarrow\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon\,,\qquad(2.2)$$

которое может быть записано в виде

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N=N_{\varepsilon}:\forall n\geq N,\,\forall x\in E\Rightarrow\left|\sum_{k=n}^{\infty}f_k(x)\right|<\varepsilon\,.$$

Если ряд (2.1) сходится, но условие (2.2) не выполняется, то говорят, что ряд сходится неравномерно.

Теорема 2.1. (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).
Пусть функции $f_n(x),\, n=1,2,3,\cdots$ определены на множестве E. Для того, чтобы функциональный ряд (2.1) сходился равномерно относительно $x\in E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N_{\varepsilon}:\forall n\geq N_{\varepsilon},\,\forall p\in\mathrm{N},\forall x\in E\Rightarrow\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)\right|<\varepsilon\,.\qquad(2.3)$$

(Условие (2.3) называют условием Коши равномерной сходимости функционального ряда).

Доказательство необходимости. Пусть ряд (2.1) сходился равномерно относительно $x\in E$, тогда последовательность частичных сумм $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$ сходится равномерно относительно $x\in E$, то есть выполняется условие Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N_\varepsilon:\forall n\geq N_\varepsilon,\forall p\in\mathrm{N},\forall x\in E\Rightarrow\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon\,. \quad (2.4)$$

Нетрудно заметить, что условие (2.4) эквивалентно условию (2.3).
Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть выполняется условие (2.3), значит выполняется (2.4), тогда, в силу критерия Коши для функциональных последовательностей, последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится равномерно к своей предельной функции относительно $x\in E$, то есть выполняется условие (2.2), а значит, что ряд (2.1) сходился абсолютно и равномерно относительно $x\in E$.
Теорема доказана.

2.2 Достаточные признаки равномерной сходимости функционального ряда

Теорема 2.2. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда).
Пусть функции $f_n(x), n=1, 2, 3,\cdots$ определены на множестве E и существует числовая последовательность $\{c_n\}$, такая, что $\forall n=1, 2, 3,\cdots$ выполняется условие

$$\left|f_n(x)\right|\leq c_n,\forall x\in E\,, \quad (2.5)$$

и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ сходится.
Тогда функциональный ряд (2.1) сходился равномерно относительно $x\in E$.

Доказательство.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то в силу критерия Коши сходимости числового ряда

$$\exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon \qquad (2.6)$$

Тогда, в силу условий (2.5), (2.6), получим

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in E \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon .$$

То есть ряд (2.1) сходится равномерно относительно $x \in E$ в силу критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда.

В процессе доказательства было получено условие

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in E \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| < \varepsilon ,$$

которое означает абсолютную сходимость ряда (2.1).
Теорема доказана.

Теорема 2.3. (Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда).
Пусть функции $a_n(x), b_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ определены на множестве E и удовлетворяют следующим условиям

1) $\exists C > 0 : \forall n, \forall x \in E \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \right| \leq C$;

2) $\forall x \in E$ последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна;

3) $a_n(x) \underset{x \in E}{\rightrightarrows} 0$.

Тогда функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \qquad (2.7)$$

сходился равномерно относительно $x \in E$.

Доказательство.

Покажем, что ряд (2.7) удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Введем в рассмотрение функциональную последовательность $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$. Нетрудно заметить, что

$$b_k(x) = B_k(x) - B_{k-1}(x) \text{ при } k > 1.$$

Получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)(B_k(x) - B_{k-1}(x)) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) B_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) B_{k-1}(x) =$$

Рассмотрим вторую сумму

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) B_{k-1}(x) = a_{n+1}(x) B_n(x) + \sum_{k=n+2}^{n+p} a_k(x) B_{k-1}(x).$$

Введем замену индекса $s = k-1, k = s+1$. Получим

$$\sum_{k=n+2}^{n+p} a_k(x) B_{k-1}(x) = \sum_{s=n+1}^{n+p-1} a_{s+1}(x) B_s(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1}(x) B_k(x)$$

Тогда $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x))B_k(x) +$

$+a_{n+p}(x)B_{n+p}(x) - a_{n+1}(x)B_n(x)$.

В силу условия 1)

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)||B_k(x)| + |a_{n+p}(x)||B_{n+p}(x)| +$$

$$+|a_{n+1}(x)||B_n(x)| \le C\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| + |a_{n+p}(x)| + |a_{n+1}(x)|\right).$$

В силу условия 2) последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна, для определенности будем считать, что она монотонно убывает.

Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) = a_{n+1}(x) - a_{n+1}(x)\,.$$

Получим $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le 2C\left(|a_{n+p}(x)| + |a_{n+1}(x)|\right)$.

Так как $a_n(x) \underset{x \in E}{\rightrightarrows} 0$, то $\exists N = N_\varepsilon : \forall n \ge N, \forall x \in E \Rightarrow |a_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4C}$.

Тогда

$$\forall n \ge N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}, \forall x \in E \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)b_k(x)| < 2C\left(\frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{4C}\right) = \varepsilon\ .$$

То есть ряд (2.7) сходится равномерно относительно $x \in E$ в силу критерия Коши.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. (Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда).

Пусть функции $a_n(x), b_n(x), n=1, 2, 3,\cdots$ определены на множестве E и удовлетворяют следующим условиям

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно относительно $x \in E$;

2) $\forall x \in E$ последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна;

3) $\exists C>0 : \forall n, \forall x \in E \Rightarrow |a_n(x)| \le C$.

Тогда функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \qquad (2.8)$$

сходится равномерно относительно $x \in E$.

Доказательство.

Покажем, что ряд (2.8) удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Введем в рассмотрение функциональную последовательность $B_j^n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{n+j} b_k(x)$, $B_0^n(x) = 0$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно, то в силу критерия Коши равномерной сходимости выполняется условие

$$\exists N_\varepsilon : \forall n \ge N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Рассмотрим сумму $\sigma = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)$. Введя замену индекса $j = k - n$, получим $\sigma = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{n+j}(x) b_{n+j}(x)$.

Так как $b_{n+j}(x) = B_j^n(x) - B_{j-1}^n(x)$, где $j = 1,\ldots, p$, то

$$\sigma = \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x)) B_j^n(x) + a_{n+p}(x) B_p^n(x) .$$

Тогда получим

$$|\sigma| \le \left| \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x)) B_j^n(x) \right| + \left| a_{n+p}(x) B_p^n(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{p-1} \left| a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x) \right| \cdot \left| B_j^n(x) \right| + \left| a_{n+p}(x) \right| \cdot \left| B_p^n(x) \right| \le$$

$$< \frac{\varepsilon}{3C} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \left| a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x) \right| + \left| a_{n+p}(x) \right| \right).$$

Для определенности положим, что последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонно убывает. Тогда

$$|\sigma| \le \frac{\varepsilon}{3C} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \left(a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x) \right) + \left| a_{n+p}(x) \right| \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3C} \left(a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x) + \left| a_{n+p}(x) \right| \right) \le \frac{\varepsilon}{3C} \left(\left| a_{n+1}(x) \right| + 2 \left| a_{n+p}(x) \right| \right) \le \varepsilon .$$

Таким образом

$$\forall n \ge N_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon ,$$

тогда ряд (2.8) сходится равномерно по критерию Коши.
Теорема доказана.

2.3 Почленный переход к пределу, непрерывность суммы функционального ряда, почленное интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов

Теорема 2.5. Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно относительно $x \in E$, а $S(x)$ – сумма ряда. Пусть x_0 – предельная точка множества E. Пусть $\forall n$ существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = b_n .$$

Тогда функция $S(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел, причем

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Замечание. Нетрудно заметить, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) . \tag{2.9}$$

То есть при выполнении условий теоремы можно переставлять местами операцию суммирования и предельный переход.

Доказательство теоремы.

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Тогда для последовательности $S_n(x)$ выполнены все условия теоремы о перестановке предельных переходов, и справедливо соотношение

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} S_n(x) . \tag{2.10}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. То есть левая часть формулы (2.10) совпадает с левой частью формулы (2.9).

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to x_0} f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) .$$

Теорема доказана.

Теорема 2.6. Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. И пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно относительно $x \in [a,b]$, а $S(x)$ – сумма ряда. Тогда $S(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство.

Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ – частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, то есть $S(x)$ – предельная функция последовательности $S_n(x)$.

Тогда для последовательности $S_n(x)$ выполнены все условия теоремы о непрерывности предельной функции, то есть $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Теорема доказана.

Теорема 2.7. Пусть функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. И пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится в некоторой точке $\gamma \in [a,b]$. Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно относительно $x \in [a,b]$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно к своей сумме $S(x)$ относительно $x \in [a,b]$, функция $S(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, и справедливо соотношение

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \ .$$

Замечание. Нетрудно заметить, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(f_n(x) \right).$$

То есть при выполнении условий теоремы можно переставлять местами сумму и операцию дифференцирования [6].

Доказательство теоремы.

Доказательство следует из аналогичной теоремы для функциональных последовательностей.

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, то есть $S(x)$ – предельная функция последовательности $S_n(x)$.

Тогда для последовательности $S_n(x)$ выполнены все условия теоремы 1.5, то есть $S(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и справедливо соотношение

$$S'(x)=\lim_{n\to\infty}S_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f_k'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.8. Пусть функции $f_n(x), n=1, 2, 3,\cdots$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. И пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ сходится равномерно относительно $x\in[a,b]$ к своей сумме $S(x)$. Тогда функция ряда $S(x)$ интегрируема на $[a,b]$, причем справедливо равенство

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Замечание. Нетрудно заметить, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx\,.$$

То есть при выполнении условий теоремы можно интегрировать функциональный ряд почленно.

Доказательство теоремы.

Доказательство следует из аналогичной теоремы для функциональных последовательностей.

Пусть $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$ – частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, то есть $S(x)$ – предельная функция последовательности $S_n(x)$.

Тогда для последовательности $S_n(x)$ выполнены все условия теоремы 1.6, то есть $S(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и справедливо соотношение

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx .$$

Теорема доказана.

2.4 Примеры

Пример 2.1. Исследовать функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}} \qquad (2.11)$$

на равномерную сходимость на множестве $E=[-1,1]$ с помощью признака Вейерштрасса.

Решение.

Очевидно, что $\left|\dfrac{x^n}{n\sqrt{n}}\right| \le \dfrac{1}{n^{3/2}}$, $\forall x\in[-1,1]$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится, тогда по теореме Вейерштрасса ряд (2.11) сходится равномерно относительно $x\in[-1,1]$.

Пример 2.2. Исследовать функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n} \qquad (2.12)$$

на равномерную сходимость на множестве $E=[-1,1]$ с помощью признака Вейерштрасса.

Решение.

Очевидно, что $\left|\dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}\right| \le \dfrac{1}{2^n}, \forall x \in [-1,1]$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится, тогда по теореме Вейерштрасса ряд (2.12) сходится равномерно относительно $x \in [-1,1]$.

Пример 2.3. Исследовать функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1} \tag{2.13}$$

на равномерную сходимость на множестве $E=[-1,1]$ с помощью признака Абеля или Дирихле.

Решение.

Пусть $a_n(x) = x^{2n}$, $b_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$.

Очевидно, что $\left|x^{2n}\right| \le 1, \forall x \in [-1,1], \forall n$, при этом последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонно убывает при $x \in [-1,1]$.

Последовательность $\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\}$ монотонно убывает и стремится к нулю, тогда по признаку Лейбница знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ сходится. Так как члены ряда не зависят от x, то данную сходимость можно считать равномерной относительно $x \in [-1,1]$. Тогда ряд (2.13) сходится равномерно относительно $x \in [-1,1]$ по признаку Абеля.

Пример 2.4. Исследовать функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n+3x+1}} \tag{2.14}$$

на равномерную сходимость на множестве $E=[1,+\infty)$.

Решение. Пусть $b_n(x)=\left(-1\right)^n$, $a_n(x)=\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n+3x+1}}$.

Введем в рассмотрение вспомогательную последовательность $B_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k$. Рассмотрим члены последовательности B_n.

Нетрудно заметить, что

$$B_n(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } n-\text{четное}\\ 0, & \text{если } n-\text{нечетное}\end{cases},$$

тогда $\left|B_n(x)\right|\le 1, \forall n, \forall x\in[1,+\infty)$.

При фиксированном x введем в рассмотрение вспомогательную функцию $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{y+3x+1}}$. Найдем производную.

$$f'(y)=-\frac{1}{2}(y+3x+1)^{-3/2}\le 0, \forall x\in[1,+\infty], \forall y\in[1,+\infty)$$

Таким образом, функция $f(y)$ монотонно убывает при $y\in[1,+\infty)$, тогда убывает последовательность $a_n(x)$.

Нетрудно заметить, что $\left|a_n(x)\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \forall x\in[1,+\infty], \forall n$. Числовая последовательность $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ сходится, тогда функциональная последовательность $\{a_n\}$ сходится равномерно на множестве $E=[1,+\infty)$.

Таким образом, ряд (2.14) сходится равномерно относительно $x\in[1,+\infty)$ по признаку Дирихле.

Пример 2.5. Исследовать функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \tag{2.15}$$

на равномерную сходимость на множестве $E=[0,+\infty)$.

Решение.

Пусть $f_n(x)=x^2e^{-nx}$. Найдем $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} f_n(x)$. Найдем производную функции $f_n(x)$. Получим

$$f_n'(x)=2xe^{-nx}+x^2e^{-nx}\cdot(-n)=xe^{-nx}\cdot(2-nx).$$

Имеем, что $f_n'(x)=0$ при $x=\dfrac{2}{n}$, $f_n'(x)>0$ при $x<\dfrac{2}{n}$, $f_n'(x)<0$ при $x>\dfrac{2}{n}$. Тогда $\tilde{x}=\dfrac{2}{n}$ – точка максимума функции $f_n(x)$. То есть

$$f_n(x)\le f_n\left(\frac{2}{n}\right), \forall n, \forall x\in[0,+\infty).$$

При этом числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$ сходится. Тогда функциональный ряд (2.15) сходится равномерно относительно $x\in[0,+\infty)$ по признаку Вейерштрасса.

Пример 2.6. Исследовать функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(nx)^3} \tag{2.16}$$

на равномерную сходимость на множестве $E=(0,1)$.

Решение.

Пусть $f_n(x)=\dfrac{1}{1+(nx)^3}$. Очевидно, что $\forall x\in(0,1)$ ряд (2.16) сходится. С помощью критерия Коши докажем, что сходимость неравномерная. Для этого докажем, что выполняется условие:

$$\exists\varepsilon_0>0:\forall n\ \exists N\ge n,\exists\tilde{p},\exists\tilde{x}\in(0,1):\left|\sum_{k=N+1}^{N+\tilde{p}}f_k(\tilde{x})\right|\ge\varepsilon_0.$$

Зафиксируем $\forall n$ и рассмотрим выражение

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{1+(kx)^3}\right|\ge\frac{p}{1+((n+p)x)^3}.$$

Пусть $N=n,\ \tilde{p}=n,\ \tilde{x}=\dfrac{1}{n}$. Тогда

$$\left|\sum_{k=N+1}^{N+\tilde{p}}f_k(\tilde{x})\right|=\frac{\tilde{p}}{1+((N+\tilde{p})\tilde{x})^3}=\frac{n}{1+\left(2n\cdot\dfrac{1}{n}\right)^3}=\frac{n}{9}\ge\frac{1}{9},\forall n.$$

То есть

$$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{9}:\forall n\ \exists N=n,\exists\tilde{p}=n,\exists\tilde{x}=\frac{1}{n}:\left|\sum_{k=N+1}^{N+\tilde{p}}f_k(\tilde{x})\right|\ge\varepsilon_0.$$

Тогда в силу критерия Коши функциональный ряд (2.16) сходится неравномерно в множестве $E=(0,1)$.

Пример 2.7. Определить область определения функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \qquad (2.17)$$

и исследовать ее на непрерывность.

Решение.

Нетрудно заметить, что ряд (2.17) сходится при любом фиксированном $x \in (-\infty, +\infty)$. То есть областью определения функции является промежуток $(-\infty, +\infty)$.

Так как

$$\frac{1}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2}, \forall n, \forall x \in (-\infty, +\infty),$$

а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то функциональный ряд (2.17) сходится равномерно относительно $x \in (-\infty, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса.

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

Очевидно, что

$$\exists r > 0 : -\infty < -r < x_0 < r < +\infty .$$

Так как функциональный ряд (2.17) сходится равномерно относительно $x \in [-r, r]$, то по теореме 2.6 функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-r, r]$, а значит, $f(x)$ непрерывна и в точке x_0. В силу произвольности точки x_0 функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2.8. Определить область определения функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \tag{2.18}$$

и исследовать ее на непрерывность.

Решение.
Нетрудно заметить, что ряд (2.18) сходится при любом фиксированном $x\in[0,+\infty)$. То есть областью определения функции является промежуток $[0,+\infty)$. В примере 2.5 было показано, что функциональный ряд (2.18) сходится равномерно относительно $x\in[0,+\infty)$.

Зафиксируем произвольную точку $x_0\in[0,+\infty)$. Очевидно, что

$$\exists r>0 : 0\le x_0<r<+\infty .$$

Так как функциональный ряд (2.18) сходится равномерно относительно $x\in[0,r]$, то по теореме 2.6 функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,r]$, а значит, $f(x)$ непрерывна и в точке x_0. В силу произвольности точки x_0 функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0,+\infty)$.

Пример 2.9. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5x^n+1}{2^n\sqrt{1+xn^2}} . \tag{2.19}$$

Решение.
Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5x^n + 1}{2^n \sqrt{1 + xn^2}} \qquad (2.20)$$

при $x \in [-1,1]$.

Так как

$$\frac{5x^n + 1}{2^n \sqrt{1 + xn^2}} \le \frac{6}{2^n}, \forall n, \forall x \in [-1,1],$$

а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{2^n}$ сходится, то функциональный ряд (2.20) сходится равномерно относительно $x \in [-1,1]$ по признаку Вейерштрасса. Тогда по теореме 2.5 о почленном переходе к пределу получим

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5x^n + 1}{2^n \sqrt{1 + xn^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 0} \frac{5x^n + 1}{2^n \sqrt{1 + xn^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

3. Степенные ряды

3.1 Степенной ряд и множество его сходимости

Определение. Пусть x_0 – вещественное число, $\{a_n\}$ – числовая последовательность. Степенным рядом с центром в точке x_0 называется функциональный ряд вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{, то есть}$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

где числа $a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$ – коэффициенты ряда [5]·

Нетрудно заметить, что каждый степенной ряд сходится в точке x_0. При $x_0 = 0$ получим ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \,, \qquad (3.1)$$

с которым для удобства будем работать далее.

Составим с помощью коэффициентов a_n следующую числовую последовательность

$$\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\},\ n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad (3.2)$$

Возможны две ситуации: 1) последовательность (3.2) является неограниченной; 2) последовательность (3.2) является ограниченной.

В случае 2) последовательность (3.2) имеет конечный верхний предел, который мы обозначим через L. Нетрудно заметить, что данный предел неотрицателен, так как все члены последовательности (3.2) неотрицательны.

Таким образом, могут представиться следующие три случая [5]: I) последовательность (3.2) является неограниченной; II) последовательность (3.2) является ограниченной и $L > 0$; III) последовательность (3.2) является ограниченной и $L = 0$.

Теорема 3.1 (Коши-Адамара).

I. Если последовательность (3.2) является неограниченной, то степенной ряд (3.1) сходится лишь в точке $x = 0$.

II. Если последовательность (3.2) ограничена и имеет верхний предел $L > 0$, то ряд (3.1) абсолютно сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| < \dfrac{1}{L}$ и расходится при $|x| > \dfrac{1}{L}$.

III. Если последовательность (3.2) ограничена и имеет верхний предел $L = 0$, то ряд (3.1) абсолютно сходится для всех значений x.

Доказательство теоремы.

I. Пусть последовательность (3.2) является неограниченной. Тогда при $x \neq 0$ последовательность

$$|x|\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

также является неограниченной, то есть у данной последовательности присутствуют члены со сколь угодно большими номерами, удовлетворяющими неравенству

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \text{ или } |a_n x^n| > 1.$$

Это означает, что для ряда (3.1) не выполняется необходимое условие сходимости, то есть ряд (3.1) расходится при $x \neq 0$.

II. Пусть последовательность (3.2) ограничена и имеет верхний предел $L>0$. Докажем, что ряд (3.1) абсолютно сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|<\dfrac{1}{L}$ и расходится при $|x|>\dfrac{1}{L}$.

а) Зафиксируем произвольное число x, удовлетворяющее неравенству $|x|<\dfrac{1}{L}$. В силу свойства плотности вещественных чисел существует $\varepsilon>0$ такое, что $|x|<\dfrac{1}{L+\varepsilon}$. По свойству верхнего предела

$$\exists N:\forall n\geq N\Rightarrow\sqrt[n]{|a_n|}<L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\forall n\geq N\Rightarrow\sqrt[n]{|a_n x^n|}=|x|\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{L+\dfrac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}<1,$$

то есть ряд (3.1) абсолютно сходится по признаку Коши.

б) Зафиксируем произвольное число x, удовлетворяющее неравенству $|x|>\dfrac{1}{L}$. В силу свойства плотности вещественных чисел существует $\varepsilon>0$ такое, что $|x|>\dfrac{1}{L-\varepsilon}$. По определению верхнего предела из последовательности (3.2) можно выделить подпоследовательность $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}, k=1,2,\ldots$, сходящуюся к L. Это означает, что

$$\exists k_0:\forall k\geq k_0\Rightarrow L-\varepsilon<\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}<L+\varepsilon.$$

Тогда

$$\forall k \ge k_0 \Rightarrow \sqrt[n_k]{\left|a_{n_k} x^{n_k}\right|} = |x| \sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|} > \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1,$$

Тогда $\forall k \ge k_0 \Rightarrow \left|a_{n_k} x^{n_k}\right| > 1$, то есть не выполнено необходимое условие сходимости ряда (3.1) и этот ряд расходится.

III. Пусть последовательность (3.2) ограничена и имеет верхний предел $L = 0$. Докажем, что ряд (3.1) абсолютно сходится для всех значений x.

Зафиксируем произвольное число $x \ne 0$. Так как верхний предел $L = 0$ и последовательность (3.2) не может иметь отрицательных предельных точек, то число $L = 0$ является единственной предельной точкой последовательности (3.2), а значит является пределом данной последовательности.

Тогда для положительного числа $\frac{1}{2|x|}$

$$\exists N : \forall n \ge N \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|},$$

то есть

$$\forall n \ge N \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

а значит ряд (3.1) абсолютно сходится по признаку Коши.
Теорема доказана.

Замечание. Теорема Коши-Адамара справедлива и для ряда

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n . \tag{3.3}$$

Введем обозначение $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$, причем, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то положим $R = +\infty$, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то положим $R = 0$.

Число R называют радиусом сходимости степенного ряда. Из теоремы Коши-Адамара следует, что

1) при $R = 0$ ряд (3.3) сходится только в точке x_0;

2) при $0 < R < +\infty$ ряд (3.3) сходится в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$;

3) при $R = +\infty$ ряд (3.3) сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называют интервалом сходимости степенного ряда.

На концах интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$ ряд (3.3) может как сходиться, так и расходиться. В данных точках ряд нужно исследовать отдельно.

3.2 Непрерывность суммы степенного ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 3.2. Пусть степенной ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \tag{3.4}$$

имеет радиус сходимости $R > 0$.

Каково бы ни было положительное число r, удовлетворяющее неравенству $r < R$, ряд (3.4) сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$.

Доказательство.
По теореме 3.1 ряд (3.4) сходится абсолютно при $x = r$, то есть сходится ряд

$$\left|a_0\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right| r^n .$$

Нетрудно заметить, что

$$\forall x \in [-r, r] \Rightarrow \left|a_n x^n\right| \le \left|a_n\right| r^n .$$

Тогда ряд (3.4) сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.
Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполнены все условия теоремы 3.2, тогда сумма ряда (3.4) непрерывна на отрезке $[-r, r]$.

Доказательство.
Утверждение следствия вытекает из теорем 3.2 и 2.6.

Теорема 3.3. Пусть степенной ряд (3.4) имеет радиус сходимости $R > 0$. Тогда сумма ряда (3.4) непрерывна в интервале $(-R, R)$.

Доказательство теоремы.
Пусть $S(x)$ – сумма ряда (3.4). Зафиксируем произвольную точку $\tilde{x} \in (-R, R)$. В силу свойства плотности вещественных чисел

$$\exists r : \left|\tilde{x}\right| < r < R .$$

По следствию из теоремы 3.2 функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-r, r]$, а значит, $S(x)$ непрерывна и в точке $\tilde{x}$. В силу произвольности точки $\tilde{x}$ функция $S(x)$ непрерывна в интервале $(-R, R)$.
Теорема доказана.

Теорема 3.4. Пусть степенной ряд (3.4) имеет радиус сходимости $R>0$, а x удовлетворяет условию $|x|<R$, тогда ряд (3.4) можно интегрировать почленно на отрезке $[0,x]$. Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.

Доказательство теоремы.
Нетрудно заметить, что для любого x, удовлетворяющего условию $|x|<R$

$$\exists r : |x| < r < R .$$

Согласно теореме 3.2 ряд (3.4) сходится равномерно на отрезке $[-r,r]$, а значит, и на отрезке $[0,x]$. Тогда в силу теоремы 2.8 данный ряд можно почленно интегрировать на $[0,x]$.

Проинтегрируем ряд (3.4) почленно, получим степенной ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots . \qquad (3.5)$$

Пусть $\tilde{R}$ – радиус сходимости ряда (3.5). Тогда

$$\tilde{R} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{a_{n-1}}{n}\right|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}}} .$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, а $\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n-1}|}} = R$ [5], то $\tilde{R} = R$.

Теорема доказана.

Теорема 3.5. Пусть степенной ряд (3.4) имеет радиус сходимости $R>0$, тогда ряд (3.4) внутри интервала сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный в результате почленного дифференцирования, имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.

Доказательство теоремы.
В силу теорем 3.2, 2.7 и свойства плотности вещественных чисел ряд (3.4) можно дифференцировать почленно.

Продифференцируем ряд (3.4) почленно, получим степенной ряд

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (n+1)a_{n+1}x^n + \ldots . \tag{3.6}$$

Пусть $\tilde{R}$ – радиус сходимости ряда (3.6). Тогда

$$\tilde{R} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}} .$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = 1$, а $\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = R$ [5], то $\tilde{R} = R$.

Теорема доказана.

Теорема 3.6. Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. Ряд, полученный в результате n – кратного почленного дифференцирования, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.
Доказательство теоремы.
Доказательство следует из теоремы 3.5.
Теорема доказана.

3.3 Ряды Тейлора

Пусть степенной ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n . \tag{3.7}$$

имеет радиус сходимости $R>0$ и $f(x)$ – его сумма, то есть в интервале (x_0-R, x_0+R) справедливо равенство

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots.$$

Вычислим коэффициенты a_n. Подставим в соотношение выше $x=x_0$, получим

$$a_0=f(x_0).$$

Продифференцировав соотношение выше, получим

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots. \quad (3.8)$$

Подставим в (3.8) $x=x_0$, получим

$$a_1=\frac{f(x_1)}{1!}.$$

Продифференцировав соотношение (3.8), получим

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots. \quad (3.9)$$

Подставим в (3.9) $x=x_0$, получим

$$a_2=\frac{f'(x_2)}{2!}.$$

Продифференцировав соотношение (3.9), получим

$$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0)+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}+\cdots$$

Подставим $x=x_0$, тогда $a_3=\dfrac{f(x_3)}{3!}$.

Продолжая данный процесс, получим

$$a_n=\frac{f(x_n)}{n!}, n=1,2,\ldots. \quad (3.10)$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема сколько угодно раз в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$. Степенной ряд

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (3.11)$$

называют рядом Тейлора функции $f(x)$ с центром в точке x_0.

Пусть $\{S_n(x)\}$ – последовательность частичных сумм ряда (3.11), а $\{R_n(x)\}$ – остаток ряда (3.11), то есть

$$S_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k ,$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Нетрудно заметить, что $S_n(x)$ – это формула Тейлора функции $f(x)$ с центром в точке x_0, а $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ в интервале представима своим рядом Тейлора, то справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n ,$$

тогда $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ и из свойств числовых рядов вытекает следующая теорема.

Теорема 3.7. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема сколько угодно раз в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$. Для того, чтобы

$f(x)$ в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ была представима своим рядом Тейлора (3.11), необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Теорема 3.8. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема сколько угодно раз в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$. Если

$$\exists L > 0 : \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow \left| f(x) \right| \le L, \left| f^{(n)}(x) \right| \le L, n = 1, 2, \dots,$$

то $f(x)$ в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ была представима своим рядом Тейлора (3.11).

Доказательство теоремы.

Пусть $R_n(x)$ – остаточный член в форме Лагранжа, то есть

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Пусть $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Тогда получим

$$\left| R_n(x) \right| = \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \le L \cdot \frac{\left| x - x_0 \right|^{n+1}}{(n+1)!} \le L \cdot \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$. Исследуем его на сходимость с помощью признака Даламбера.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{R^{n+2}}{(n+2)!}}{\dfrac{R^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{R}{(n+2)} = 0 < 1,$$

тогда по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится, а значит, его n-й член стремится к нулю. Тогда $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, и по теореме 3.7 функция $f(x)$ в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ представима своим рядом Тейлора (3.11).
Теорема доказана.

Замечание. Ряд Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$, то есть ряд

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n ,$$

называют рядом Маклорена.

Далее найдем разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.

1) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Нетрудно заметить, что

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \qquad (3.12)$$

тогда $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)\right| \le 1, \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$.

По теореме 3.8 функция $f(x) = \sin x$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ представима своим рядом Маклорена. Так как $f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, то справедливо соотношение

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} .$$

2) Аналогичным образом можно получить, что функция $f(x)=\cos x$ в интервале $(-\infty, x_0+\infty)$ представима своим рядом Маклорена и справедливо соотношение

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} .$$

3) Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$. Нетрудно заметить, что

$$f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x . \qquad (3.13)$$

Зафиксируем произвольную точку $\tilde{x}\in(-\infty,+\infty)$. Очевидно, что

$$\exists R>0:-R<\tilde{x}<R .$$

Нетрудно заметить, что тогда $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|e^x\right|\le e^R,\ \forall x\in(-R,+R)$. По теореме 3.8 функция $f(x)=e^x$ представима своим рядом Маклорена в интервале $(-R,R)$, а значит в точке $\tilde{x}$. В силу произвольности точки $\tilde{x}$ $f(x)=e^x$ представима своим рядом Маклорена в интервале $(-\infty,+\infty)$. Так как $f^{(n)}(0)=1$, то справедливо соотношение

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} .$$

4) Рассмотрим функцию $f(x)=\ln(1+x)$, которая определена при $x>-1$. Нетрудно заметить, что

$$f^{(n)}(x)=(\ln(1+x))^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, \qquad (3.14)$$

тогда $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$ и разложение в ряд Маклорена имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} . \qquad (3.15)$$

Ряд (3.15) сходится для $x \in (-1,1]$, что легко проверяется по признаку Даламбера, поэтому функцию $f(x)$ имеет смысл исследовать только на промежутке $(-1,1]$.

Пусть сначала $x \in [0,1]$. Рассмотрим остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \theta \in (0,1),$$

то есть

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)}, \theta \in (0,1).$$

Так как $x \in [0,1]$, то $\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)} \le 1$, а значит $|r_n(x)| \le \frac{1}{n+1}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, и по теореме 3.8 функция $f(x) = \ln(1+x)$ в интервале $[0,1]$ представима своим рядом Маклорена.

Пусть теперь $x \in (-1,0)$. Рассмотрим остаточный член формулы Тейлора в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \theta \in (0,1),$$

то есть

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}, \theta \in (0,1).$$

Тогда

$$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n.$$

Так как $x \in (-1,0)$, то $1+\theta x > 1-\theta$, а значит

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, и по теореме 3.8 функция $f(x) = \ln(1+x)$ в интервале $(-1,0)$ представима своим рядом Маклорена и справедливо соотношение

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

5) Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^m$, где m – любое вещественное число, отличное от натуральных чисел (при натуральном m получается конечное разложение по формуле бинома Ньютона). Нетрудно заметить, что

$$f^{(n)}(x) = ((1+x)^m)^{(n)} = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

тогда $f^{(n)}(0) = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(m-n)$ и разложение в ряд Маклорена имеет вид [1]

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots; \quad (3.16)$$

его называют биномиальным рядом. Ряд (3.16) сходится абсолютно для $x \in (-1,1)$ и расходится для $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, что легко проверяется по признаку Даламбера, поэтому функцию $f(x)$ имеет смысл исследовать только на промежутке $(-1,1)$.

Рассмотрим остаточный член формулы Тейлора в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\ \theta \in (0,1),$$

то есть

$$r_n(x)=\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{n!}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot x^{n+1}.$$

Представим его в виде

$$r_n(x)=\frac{(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-1-n+1)}{n!}\cdot x^n mx\cdot(1+\theta x)^{m-1}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Выражение

$$\frac{(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-1-n+1)}{n!}\cdot x^n$$

представляет собой член биномиального ряда (3.16), но для показателя $m-1$. Так как биномиальный ряд сходится для $x\in(-1,1)$, то в силу необходимого условия сходимости числового ряда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-1-n+1)}{n!}\cdot x^n=0.$$

Нетрудно заметить, что выражение $mx\cdot(1+\theta x)^{m-1}$ содержится между значениями $|mx|\cdot(1-|x|)^{m-1}$ и $|mx|\cdot(1+|x|)^{m-1}$, не зависящими от n. При этом

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$, и по теореме 3.8 функция $f(x)=(1+x)^m$ в интервале $(-1,1)$ представима своим рядом Маклорена

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи последней формулы:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1,1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, x \in (-1,1),$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1}, x \in (-1,1),$$

Здесь $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$.

3.4 Примеры

Пример 3.1. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3n-2}. \tag{3.17}$$

Решение. Пусть $a_n = \frac{2^n}{3n-2}$. Радиус сходимости степенного ряда (3.17) обозначим через R. По теореме Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3n-2}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3n-2}} = 2,$$

тогда $R = \frac{1}{2}$.

Пример 3.2. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}. \tag{3.18}$$

Решение. Пусть $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$. Радиус сходимости степенного ряда (3.18) обозначим через R. По теореме Коши-Адамара

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}=1,$$

тогда $R=1$.

Пример 3.3. Найти множество сходимости степенного ряда [3].

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot(x+1)^n. \tag{3.19}$$

Решение. Пусть $a_n=\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$. Радиус сходимости степенного ряда (3.19) обозначим через R. По теореме Коши-Адамара

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}\cdot\left(1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)}=3,$$

тогда $R=\frac{1}{3}$.

Решая неравенство $|x+1|<\frac{1}{3}$, получим $x\in\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$. Таким образом, интервалом сходимости степенного ряда (3.19) является промежуток $\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$. Исследуем ряд (3.19) на концах интервала сходимости.

Пусть $x=-\frac{4}{3}$, подставляя в (3.19), получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right). \tag{3.20}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ сходится по признаку сравнения, так как мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда ряд (3.20) сходится, как сумма сходящихся рядов.

Пусть $x=\frac{2}{3}$, подставляя в (3.19), получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right). \tag{3.21}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^n$ сходится по признаку сравнения, так как мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда ряд (3.21) расходится, как сумма сходящегося и расходящегося рядов.

Таким образом, множеством сходимости степенного ряда (3.19) является промежуток $\left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Пример 3.4. Найти множество сходимости степенного ряда.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}. \tag{3.22}$$

Решение. Пусть $a_n = \frac{1}{2^n}$. Радиус сходимости степенного ряда (3.22) обозначим через R. По теореме Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

тогда $R = 2$.

Таким образом, интервалом сходимости степенного ряда (3.22) является промежуток $(-2, 2)$. Исследуем ряд (3.22) на концах интервала сходимости.

Пусть $x = -2$, подставляя в (3.22), получим числовой ряд

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n,$$

который расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $x = 2$, подставляя в (3.22), получим числовой ряд

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

который тоже расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Таким образом, множеством сходимости степенного ряда (3.22) является промежуток $(-2, 2)$.

Пример 3.5. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = e^{2x+1}$;

а) по степеням x;

б) по степеням $x-1$.

Решение.

а)

$$f(x) = e^{2x+1} = e \cdot e^{2x} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

б)

$$f(x) = e^{2x+1} = e^{2(x-1+1)+1} = e^{2(x-1)+3} = e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(x-1))^n}{n!} =$$

$$= e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (x-1)^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

Пример 3.6. Используя методы дифференцирования и интегрирования степенного ряда, разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = arctg(x)$.

Решение. Продифференцируем $f(x)$, получим $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Так как

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1,1),$$

то

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ x\in(-1,1). \qquad (3.23)$$

Проинтегрируем почленно соотношение (3.23), тогда

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1),$$

то есть

$$arctg(x)-arctg(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$arctg(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Пример 3.7. Используя методы дифференцирования и интегрирования степенного ряда, разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)-x$.

Решение. Продифференцируем $f(x)$, получим

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}-1=\ln(x+1).$$

Так как

$$\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\, x\in(-1,1]\,, \tag{3.24}$$

то, проинтегрировав почленно соотношение (3.24), получим

$$\int_0^x \ln(t+1)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^n}{n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\,.$$

То есть

$$\left((t+1)\cdot\ln(t+1)-t\right)\Big|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\,,$$

$$(x+1)\cdot\ln(x+1)-x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\,.$$

Список литературы

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1970. – Т. 2. – 800 с.

2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – Москва: Высшая школа, 1981.

3. Виноградова, Н.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / Н.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – Москва: Высшая школа, 2002.

4. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. – Москва: Физматлит, 2002. – 480 с.

5. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Часть 2. / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – Москва: Физматлит, 2002. – 464 с.

6. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – Москва: Дрофа, 2004. – 640 с.

Учебное издание

Китаева Елена Викторовна

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Учебное пособие

Редактор И. П. Ведмидская
Компьютерная верстка И. П. Ведмидской

Подписано в печать 25.04.2022. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,5.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 4(Р1У)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.