ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

А.Н. Панов

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА»

Учебное пособие

Самара
Издательство «Универс групп»
2007

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

УДК 512
ББК 22.143
П 16

Рецензент: к.ф.-м.н. доцент В.Н.Кокарев

Панов, А.Н.
П 16 **Геометрические задачи по курсу «Геометрия и алгебра»**: учеб. пособие / А.Н. Панов. – Самара: Изд-во «Универс групп», 2007. – С. 28.

ISBN 978–5–467–00–137–1

Данное пособие предназначено для студентов 1 курса специальности «Прикладная математика». Набор задач соответствует программе практических занятий по курсу «Геометрия и алгебра». В сборник включены задачи по следующим разделам программы: алгебра геометрических векторов, прямая на плоскости, плоскость и прямая в пространстве, теория кривых и поверхностей второго порядка. Задачи помогают студентам понять взаимосвязь линейной алгебры и аналитической геометрии, научиться прилагать свои знания по линейной алгебре на практике. Эти знания и умения будут использованы в курсах математического и функционального анализов, вычислительной математики и теоретической механики.

УДК 517.9
ББК 22.143

ISBN 978–5–467–00–137–1

§1. Векторы на плоскости и в пространстве

1.1. Доказать, что если M – точка пересечения медиан в треугольнике ABC, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$.

1.2. Доказать, что если M – точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, то $\overrightarrow{MA}+$ $+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\mathbf{0}$.

1.3. Точки E и F являются серединами диагоналей четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что

$$\overrightarrow{EF}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}{2}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}}{2}.$$

1.4. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$

1.5. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $AK=$ $=\frac{1}{3}AD$, а на диагонали AC – отрезок $AL=\frac{1}{6}AC$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны и найти отношение KL/LB.

1.6. Установить, какие из следующих троек векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно зависимы; если тройка векторов линейно зависима, то представить (если это возможно) вектор $\mathbf{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

1) $\mathbf{a}=\{1,2,5\}$, $\mathbf{b}=\{2,4,-1\}$, $\mathbf{c}=\{6,-1,-1\}$.

2) $\mathbf{a}=\{2,3,-4\}$, $\mathbf{b}=\{4,-3,3\}$, $\mathbf{c}=\{8,-15,17\}$.

3) $\mathbf{a}=\{4,6,-12\}$, $\mathbf{b}=\{-6,-9,18\}$, $\mathbf{c}=\{2,5,-1\}$.

1.7. Доказать, что, каковы бы ни были три числа α, β, γ и три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, векторы $\alpha\mathbf{a}-\beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{b}-\alpha\mathbf{c}$, $\beta\mathbf{c}-\gamma\mathbf{a}$ компланарны.

1.8. Даны четыре вектора $\mathbf{a}=\{1,2,3\}$, $\mathbf{b}=\{2,-2,1\}$, $\mathbf{c}=\{4,0,3\}$ и $\mathbf{d}=\{16,10,18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора $\mathbf{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при направлении проектирования, параллельном вектору $\mathbf{c}$.

§2. Скалярное произведение векторов

2.1. Дано $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=2$ и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти

a) длину вектора $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$;

b) угол между векторами $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$.

2.2. Дано $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=3$ и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\frac{\pi}{4}$. Вычислить скалярное произведение $(\mathbf{a}-\mathbf{b},3\mathbf{a}-2\mathbf{b})$.

2.3. В треугольнике ABC даны длины его сторон $|\overrightarrow{BC}| = 5$, $|\overrightarrow{CA}| = 6$, $|\overrightarrow{AB}| = 7$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

2.4. Даны три вектора **a**, **b**, **c**. Известно, что $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 1$, $\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b} = \frac{\pi}{4}$, $\mathbf{a}\hat{}\mathbf{c} = \frac{\pi}{3}$, $\mathbf{b}\hat{}\mathbf{c} = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{4})$. Вычислить $(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}-\mathbf{c})$.

2.5. Даны три вектора **a**, **b**, **c**. Известно, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b} = \frac{\pi}{3}$, $\mathbf{a}\hat{}\mathbf{c} = \frac{2\pi}{3}$, $\mathbf{b}\hat{}\mathbf{c} = \arccos(-\frac{1}{4})$. Вычислить $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}-2\mathbf{c})$.

2.6. Определить внутренние углы треугольника с вершинами $A = (1,2,3)$, $B = (3,0,4)$, $C = (2,1,3)$.

2.7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $A = (0,1,1)$, $B = (1,1,1)$, $D = (1,3,2)$, $A' = (-2,2,1)$. Точка E делит отрезок BC в отношении 1:2, а точка F – отрезок $A'D'$ в отношении 2:1. Найти длину отрезка EF и угол между векторами $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{AC'}$.

2.8. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $A = (0,1,0)$, $C = (1,2,1)$, $D = (0,2,2)$, $A' = (-1,2,1)$. Точка G делит диагональ AC' в отношении 1:3. Найти длину отрезка GA' и угол между векторами $\overrightarrow{GA'}$ и $\overrightarrow{BD'}$.

2.9. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M (которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и все его). Доказать, что 1) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$; 2) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

2.10. Доказать, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве имеет место равенство

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0.$$

2.11 Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора **v** на прямую с направляющим вектором **f**:

1) $\mathbf{v} = \{-14, 2, 5\}$, $\mathbf{f} = \{2, -2, 1\}$;

2) $\mathbf{v} = \{4, 5, 6\}$, $\mathbf{f} = \{2, 3, -1\}$.

2.12. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора **v** на плоскость, перпендикулярную к вектору **n**:

1) $\mathbf{v} = \{8, 4, 1)\}$, $\mathbf{n} = \{2, -2, 1\}$;

2) $\mathbf{v} = \{1, 2, 5)\}$, $\mathbf{n} = \{1, 4, 8\}$.

2.13. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{v} = \{11, -3, 7\}$ на плоскость, компланарную векторам $\mathbf{a} = \{2, -1, 3\}$ и $\mathbf{b} = \{1, -1, 1\}$.

2.14. Используя определитель Грама, найти

1) площадь треугольника ABC, где $A = (2,3)$, $B = (3,5)$, $C = (5,2)$;

2) объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, где $A = (2,1,1)$, $B = (1,-1,1)$, $C = (-2,1,0)$, $A' = (-3,1,1)$.

§3. Векторное и смешанное произведения векторов

3.1. Найти векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, где 1) $\mathbf{a} = \{2, 3, -5\}$ и $\mathbf{b} = \{4, -1, 3\}$; 2) $\mathbf{a} = \{-3, 4, 6\}$ и $\mathbf{b} = \{5, 1, -2\}$.

3.2. Даны два вектора $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{2, -2, 1\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\mathbf{b}$ тупой угол.

3.3. Используя векторное произведение, вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках

1) $A = (-1, 0, -1)$, $B = (0, 2, -3)$, $C = (4, 4, 1)$;

2) $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 5)$, $C = (3, 2, 3)$.

3.4. Найти объем пирамиды $ABCD$ и длину высоты из вершины D на основание ABC, где

1) $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (-1, 1, 1)$, $D = (2, 3, 5)$;

2) $A = (2, 2, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (-2, 1, 2)$, $D = (4, 1, 1)$.

3.5. Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ находится в точке $A = (1, 2, 3)$, а концы выходящих из нее ребер — в точках $B = (9, 6, 4)$, $D = (3, 0, 4)$, $A' = (5, 2, 6)$. Найти угол ϕ между диагональю AC' и плоскостью грани $ABCD$ этого параллелепипеда.

3.6. Найти угол наклона ребра AD пирамиды $ABCD$ к основанию ABC, где

1) $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, -1, -1)$, $C = (2, -1, -2)$, $D = (1, 4, 3)$;

2) $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$, $C = (2, -1, -1)$, $D = (3, 1, 2)$.

3.7. Даны два вектора $\mathbf{a} = \{0, 1, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, 1, 0\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$ длины 1, перпендикулярный к $\mathbf{a}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ угол $\frac{\pi}{4}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имела положительную ориентацию.

3.8. Даны два вектора $\mathbf{a} = \{1, 1, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, 0, 0\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$ длины 1, перпендикулярный к $\mathbf{a}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ угол $\frac{\pi}{3}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имела положительную ориентацию.

3.9. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, 2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$. Найти вектор $\mathbf{d}$ длины 1, образующий с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равные углы, перпендикулярный к $\mathbf{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию.

3.10. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$. Найти вектор $\mathbf{d}$ длины 1, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный к

$\mathbf{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}$ имели противоположную ориентацию.

3.11. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{4, 0, 3\}$. Найти вектор $\mathbf{d}$ длины 1, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию.

3.12. Доказать тождество Якоби

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = \mathbf{o}.$$

3.13. Доказать тождество

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

3.14. Доказать тождества:

$$1) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{a}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{z}) \end{vmatrix};$$

$$2) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

§4. Уравнение прямой на плоскости

4.1. Определить взаимное расположение прямых:
1) $2x + 3y - 1 = 0$; $\quad 4x + 6y - 7 = 0$;
2) $x = 5 + 4t$, $y = -2 - 2t$; $\quad x = 1 - 2t$, $y = 7 + t$;
3) $3x + 9y + 5 = 0$; $\quad x = 2 + 3t$, $y = -t$.

4.2.. Через точку M провести прямую L_1, параллельную прямой L, и прямую L_2, перпендикулярную L, где
1) $M = (2, 3)$ и $L: \ 4x - 7y + 6 = 0$;
2) $M = (-3, 5)$ и $L: \ 6x - 2y - 5 = 0$;

4.3.. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x - 3y = 0$ и $2x + 5y + 6 = 0$ и одну из его вершин $C = (4, -1)$, составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

4.4. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y - 10 = 0$ и точка пересечения диагоналей $M = (3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

4.5. Дан треугольник ABC: $A = (6, -4)$, $B = (-1, -3)$, $C = (9, -1)$. Написать уравнения сторон.

4.6. Дан треугольник ABC: $A = (6, -4)$, $B = (-1, -3)$, $C = (9, -1)$. Написать уравнения

a) медианы m_B из вершины B,

b) высоты h_C из вершины C,

c) биссектрисы δ_A из вершины A;

d) найти площадь треугольника ABC.

e) положительную или отрицательную ориентацию имеет треугольник ABC?

4.7. Дан треугольник ABC: $A = (-3, -5)$, $B = (1, -13)$, $C = (8, -3)$. Написать уравнения

a) медианы m_B из вершины B,

b) высоты h_C из вершины C,

c) биссектрисы δ_A из вершины A;

d) найти площадь треугольника ABC.

e) положительную или отрицательную ориентацию имеет треугольник ABC?

4.8. Дан треугольник ABC: $A = (2, -9)$, $B = (-3, 6)$, $C = (11, -12)$. Написать уравнения

a) медианы m_B из вершины B,

b) высоты h_C из вершины C,

c) биссектрисы δ_A из вершины A;

d) найти площадь треугольника ABC.

e) положительную или отрицательную ориентацию имеет треугольник ABC?

4.9. Найти проекцию точки M на прямую, если

1) $M = (-5, 6)$, $L:\ 7x - 13y - 105 = 0$;

2) $M = (26, -4)$, $L:\ 7x - 4y - 3 = 0$.

4.10. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой L, где

1) $M = (-2, 9)$, $L: 2x - 3y + 18 = 0$;

2) $M = (19, 18)$, $L: 5x + 7y + 1 = 0$.

4.11. Даны две соседние вершины квадрата $A = (-3, 2)$ и $B = (2, 4)$. Найти две другие вершины.

4.12. Даны две противоположные вершины квадрата $A = (-3, 2)$ и $C = (5, -4)$. Найти две другие вершины.

4.13. Даны две точки $A = (-3, 1)$ и $B = (5, 4)$ и прямая $x - 2y + 1 = 0$. Установить, пересекает ли эта прямая отрезок AB или его продолжение за точку A или B.

4.14. Дан треугольник ABC: $A = (3, 1)$, $B = (-2, 4)$, $C = (1, 0)$ и прямая $x - 7y + 5 = 0$. Установить, пересекает ли прямая стороны треугольника или их продолжения.

4.15. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A = (1, 2)$, $B = (-3, 1)$, $C = (-1, -5)$, $D = (3, -1)$ выпуклый.

4.16. Найти расстояние между параллельными прямыми $12x - 16y - 48 = 0$, $3x - 4y + 43 = 0$.

4.17. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $x + 2y = 0$ и $2x - 11y + 30 = 0$.

4.18. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x + 7y = 0$, $x - y - 4 = 0$, внутри которого лежит точка $(1, 1)$.

4.19. 1) Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 3y = 0, 3x - y + 5 = 0$;

2) Составить уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y + 15 = 0$.

4.20. Через точку $M = (4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника образованного этой прямой и осями координат, была равна 3.

4.21. Через точку $M = (2, 5)$ провести прямую, равноудаленную от точек $P = (-1, 2)$ и $Q = (5, 4)$.

4.22. Луч света направлен по прямой $x - 2y + 5 = 0$. Дойдя до прямой $3x - 2y + 7 = 0$, луч от нее отражается. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

4.23. Даны две вершины треугольника $A = (-6, 2)$, $B = (2, -2)$ и точка $H = (1, 2)$ пересечения его высот. Вычислить координаты третьей вершины C.

4.24 Даны уравнения двух сторон треугольника $2x - y = 0$, $5x - y = 0$ и уравнение $3x - y = 0$ одной из медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3, 9)$, и найти координаты его вершин.

4.25. Даны уравнения двух сторон треугольника $3x - 2y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ и уравнение $2x - y - 1 = 0$ его медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

4.26. Дано уравнение $x - 2y + 7 = 0$ стороны треугольника и уравнения $x+y-5 = 0$, $2x+y-11 = 0$ медиан, выходящих из вершин треугольника, лежащих на данной прямой. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

4.27. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если даны одна из его вершин $A = (-4, -5)$ и уравнения двух высот $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + 8y + 13 = 0$.

4.28. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если даны одна из его вершин $A = (4, -1)$ и уравнения двух биссектрис $x - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

4.29. Зная уравнение стороны треугольника $x + 7y - 6 = 0$ и уравнения биссектрис $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$, выходящих из концов этой стороны, найти координаты вершины, противолежащей данной стороне.

4.30. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $B = (2, 6)$, а также уравнения высоты $x - 7y + 15 = 0$ и биссектрисы $7x + y + 5 = 0$, проведенных из одной вершины.

4.31. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $B = (2, -1)$, а также уравнения высоты $3x - 4y + 27 = 0$ и биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$, проведенных из различных вершин.

4.32. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $C = (4, -1)$, а также уравнения высоты $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы $2x + 3y = 0$, проведенных из одной вершины.

4.33. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $B = (2, -7)$, а также уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из различных вершин.

4.34. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $C = (4, 3)$, а также уравнения биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$ и медианы $4x + 13y - 10 = 0$, проведенных из одной вершины.

4.35. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $A = (3, -1)$, а также уравнения биссектрисы $x - 4y + 10 = 0$ и медианы $6x + 10y - 59 = 0$, проведенных из различных вершин.

4.36. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(1, 7)$ и уравнения $2x + 3y - 10 = 0$ $x - 2y + 3 = 0$ перпендикуляров восстановленных в серединах сторон, выходящих из этой вершины.

4.37. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x + 3y = 0$; его вершина находится в точке $(2, 6)$; тангенс угла при основании равен $\frac{3}{2}$. Написать уравнения боковых сторон.

4.38. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7, 15)$, а середина его основания в точке $(1, 3)$. Составить уравнения сторон треугольника, зная, что тангенс угла при основании равен 4.

4.39. Составить уравнения сторон параллелограмма $ABCD$, зная, что его диагонали пересекаются в точке $M = (1, 6)$, а стороны AB, BC, CD и DA проходя соответственно через $P = (3, 0)$, $Q = (6, 6)$, $R = (5, 9)$, $S = (-5, 4)$).

4.40. Дана уравнение $3x+4y-12$ стороны AB параллелограмма $ABCD$, уравнение $x + 12y - 12$ диагонали AC и середина $E = (-2, \frac{13}{6})$ стороны BC. Найти уравнения сторон BC, CD, AD.

4.41. Составить уравнения прямых, которые проходят через точку $P = (2, -1)$ и вместе с прямыми $2x - y + 5 = 0$, $3x + 6y - 1 = 0$ образуют равнобедренные треугольники.

4.42. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку $(-1, 3)$ и касающейся прямых $7x + y = 0$, $x - y + 8 = 0$.

4.43. Найти центр и радиус круга, вписанного в треугольник со сторонами $3x - 4y - 2 = 0$, $4x - 3y - 5 = 0$, $5x + 12y + 27 = 0$.

4.44. Составить уравнения сторон ромба, зная точку $M = (1, 6)$ пересечения его диагоналей и по точке на трех его сторонах $P = (3, 0)$ на стороне AB, $Q = (6, 6)$ на стороне BC, $R = (5, 9)$ на стороне CD.

4.45. Составить уравнения сторон квадрата, зная его центр $(1, 6)$ и по точке на двух непараллельных сторонах $(4, 9)$ на стороне AB, $(-5, 4)$ на стороне BC. (Ответ: **4.45**. Два решения: $A_1B_1 : \ 3x + 5y - 57 = 0$, $B_1C_1 : \ 5x - 3y + 37 = 0$; $C_1D_1 : \ 3x + 5y - 9 = 0$, $D_1A_1 : \ 5x - 3y - 11 = 0$; $A_2B_2 : \ 9x - y - 27 = 0$, $B_2C_2 : \ x + 9y - 31 = 0$; $C_2D_2 : \ 9x - y + 21 = 0$, $D_2A_2 : \ x + 9y - 79 = 0$).

4.46. Составить уравнение прямой, которая проходит через начало координат и вместе с прямыми $x - y + 12 = 0$, $2x + y + 9 = 0$ образует треугольник с площадью, равной $\frac{3}{2}$.

4.47. Среди прямых, проходящих через точку $P = (3, 0)$, найти такую, отрезок которой, заключенный между прямыми $2x - y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$ делится в точке P пополам.

4.48. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, зная, что длина ее отрезка, заключенного между прямыми $2x - y + 5 = 0$, $2x - y + 10 = 0$, равна $\sqrt{10}$.

4.49. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C = (-5, 4)$, зная, что длина ее отрезка, заключенного между прямыми $x+2y+1=0$, $x+2y-1=0$, равна 5.

4.50. Вершина треугольника находится в точке $(2,9)$, а биссектрисами двух его углов служат прямые $2x-3y+18=0$, $y+2=0$. Написать уравнение стороны треугольника, противолежащей вершине.

4.51. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований $(1,1)$, $(2,8)$ и точки $(4,-3)$, $(-15,14)$ на ее боковых сторонах.

4.52. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Написать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $(-9,-1)$ лежит на стороне, параллельной данной.

§5. Уравнение прямой и плоскости в пространстве

5.1. Написать уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки:

1) $A=(2,5,3)$ и $B=(3,1,-2)$;
2) $A=(2,1,4)$ и $B=(4,1,-1)$

5.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $C=(2,1,-2)$ и компланарной векторам $\mathbf{a}=\{1,5,2\}$ и $\mathbf{b}=\{3,5,5\}$.

5.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

1) $A=(2,1,1)$, $B=(3,-1,2)$, $C=(-1,1,2)$;
2) $A=(3,2,3)$, $B=(1,-1,-2)$, $C=(3,1,0)$.

5.4. Найти каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x-3y+z-6=0 \\ 3x+4y-2z=0 \end{cases}$$

5.5. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая L в плоскости Π, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $L:\ \frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, $\Pi:\ 3x+5y-z-2=0$;
2) $L:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$, $\Pi:\ 3x-3y+2z-5=0$;
3) $L:\ \frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$, $\Pi:\ x+2y-4z+1=0$;
4) $L:\ \frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$, $\Pi:\ 3x-y+2z-5=0$.

5.6. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая L в плоскости Π, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $L: \begin{cases} 3x-5y-7z+16=0 \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$, $\Pi: \ 5x-z-4=0;$

2) $L: \begin{cases} 2x+3y+6z-10=0 \\ x+y+z+5=0 \end{cases}$, $\Pi: \ y+4z+17=0;$

3) $L: \begin{cases} x+2y+3z+8=0 \\ 5x+3y+z-16=0 \end{cases}$, $\Pi: \ 2x-y-4z-24=0.$

5.7. Установить какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны или пересекаются , то написать уравнение содержащей их плоскости; если прямые пересекаются, то найти точку пересечения:

1) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=7+t \\ z=3+4t \end{cases}$, $\begin{cases} x=6+3t \\ y=-1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=-t \end{cases}$, $\begin{cases} x=-2t \\ y=-5+3t \\ z=4 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1-8t \end{cases}$, $\begin{cases} x=7-6t \\ y=2+9t \\ z=12t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=1+9t \\ y=2+6t \\ z=3+3t \end{cases}$, $\begin{cases} x=7+6t \\ y=6+4t \\ z=5+2t \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x=t \\ y=-8-4t \\ z=-3-3t \end{cases}$, $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-1 \\ z=4-t \end{cases}$, $\begin{cases} 2y-z+2=0 \\ x-7y+3z-17=0 \end{cases}$.

5.8. Даны две плоскости $2x+z=0$,$x+y+3z-5=0$ и точки $A=(2,1,1)$, $B=(1,0,3)$, $C=(0,0,1)$, $D=(-1,5,1)$, $E=(1,4,3)$. Установить какие из точек B, C, D, E лежат в одном двугранном угле с точкой A, какие в смежных с ним углах и какие в углу к нему вертикальном.

5.9. Даны две точки $A=(-3,1,5)$, $B=(5,4,2)$ и плоскость $2x-4y+z+14=0$. Установить пересекает ли данная плоскость отрезок AB, его продолжение за точку A или за точку B?

5.10. Найти ортогональную проекцию точки M на плоскость Π:

1) $M=(1,2,-3)$, $\Pi=6x-y+3z-41=0;$

2) $M=(-7,-5,16)$, $\Pi=4x+3y-z+7=0.$

5.11. Найти точку симметричную точке M относительно прямой L:

1) $M=(1,2,3)$, $L=\frac{x-8}{1}=\frac{y-11}{3}=\frac{z-4}{-1};$

2) $M=(4,-5,6)$, $L=\frac{x-6}{5}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-4}{1}.$

5.12. В пучке, определяемом плоскостями $3x + y - 2z - 6 = 0$, $x - 2y + 5z - 1 = 0$, найти плоскость,

1) проходящую через точку $(2, 3, -1)$;
2) перпендикулярную первой плоскости;
3) перпендикулярную второй плоскости.

5.13. Найти расстояние от точки $(1, 2, 5)$ до прямой $x = t, y = 1 - 2t, z = 3 + t$.

5.14. Найти расстояние от точки $(1, 3, 5)$ для прямой

$$\begin{cases} 2x + t + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

5.15. Найти расстояние между двумя прямыми:

1) $L1 := \{x = 3 + t, y = 1 - t, z = 2 + 2t\}$, $L2 := \{x = -t, y = 2 + 3t, z = 3t\}$.

2) $L1 := \{x + 2y - z + 1 = 0, 2x - 3y + z - 4 = 0\}$, $L2 = \{x + y + z - 9 = 0, 2x - y - z = 0\}$.

5.16. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$$

5.17. Найти центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $11x - 10y - 2z - 57 = 0$.

5.18. Найти расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

5.19. Составить уравнение прямой , проходящей через точку $(1, 0, 0)$, отстоящей от оси $0Z$ на расстояние $1/\sqrt{5}$ и образующий с осью $0Z$ угол $\arccos(2/3)$.

5.20. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x + y - 4z + 5 = 0$ и отстоящей от точки $(1, 2, 0)$ на расстоянии $\sqrt{(21)}$.

5.21. Найти тот угол между плоскостями $8x + 4y + z + 1 = 0$, $2x - 2y + z + 1 = 0$, в котором лежит точка $(1, 1, 1)$.

5.22. Найти косинусы углов между прямыми: $L1 := \{3x + y - z + 1 = 0, 3x - y + z = 0\}$, $L2 := \{x - y + 1 = 0, 2x + 2y - 5z + 1 = 0\}$.

5.23. Найти угол между прямой $L := \{x + y - z = 0, 2x - 3y + z = 0\}$ и плоскостью $3x + 5y - 4z + 2 = 0$.

5.24. Провести через точку пересечения плоскости $x + y + z - 1 = 0$ и с прямой $y = 1, z + 1 = 0$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

5.25. Написать уравнение и найти длину d перпендикуляра, опущенного из точки $(-3, 13, 7)$ на прямую

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{1}$$

5.26. Написать уравнение общего перпендикуляра к двум прямым

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

5.27. Определить взаимное расположение трех плоскостей в каждом из следующих случаев:
1). $x + 2y - 3z = 0$, $3x + 6y - 9z + 10 = 0$, $2x + 4y - 6z - 1 = 0$;
2). $5x - 2y + 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$, $8x - 2y + z + 7 = 0$;
3). $6x + 2y + 12z - 3 = 0$, $5y - 7z - 10 = 0$, $3x + y + 6z + 12 = 0$.

5.28. Через точку $(1, 2, 3)$ провести плоскость , перпендикулярную к плоскости $5x-2y+5z-10 = 0$ и образующую с плоскостью $x-4y-8z+ +12 = 0$ угол $\pi/4$.

5.29. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+7}{-2} = = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1}$ и образующей угол $\pi/3$ с прямой $L := \{x - y + z = 0, x - y + + 2z = 0\}$.

5.30. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между плоскостями $x - z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, в котором лежит начало координат.

5.31. Написать уравнение биссектрисы тупого угла между прямой $\{x - 2y - 5 = 0, y - 4z + 14 = 0\}$ и ее ортогональной проекцией на плоскость $x + y + 1 = 0$.

5.32. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 2, 3)$ и пересекающей прямые

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}.$$

5.33. Найти уравнение проекции прямой

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

из точки $(1, 2, 1)$ на плоскость $y - 2z + 4 = 0$.

5.34. Составить уравнение плоскости , проходящей через точку $(2, 3, 1)$

и пересекающей прямые $L1 := \{x+y=0, x-y+z+4=0\}$, $L2 := \{x+$ $+3y-1=0, y+z-2=0\}$.

5.35. Через линию пересечения плоскостей $6x-y+z=0$, $5x+3z-10=$ $=0$ провести плоскость, параллельную оси $0X$.

5.36. Даны уравнения граней тетраэдра $x+2y-3z-6=0$, $2y+5z-4=0$, $3x+z+1=0$, $x+2y=0$. Написать уравнение плоскости проходящей через линию пересечения двух первых плоскостей параллельно линии пересечения третьей и четвертой плоскости.

§6. Канонические уравнения кривых и поверхностей второго порядка

6.1. Найти центр C и радиус r каждой из следующих окружностей:
1) $x^2+y^2+3y=0$;
2) $x^2+y^2+2x-4y=0$;
3) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$.

6.2. Определить тип кривой и ее расположение на плоскости:
1) $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$;
2) $4x^2-y^2-16x-6y+3=0$;
3) $3x^2-12x-6y+11=0$;
4) $25x^2+9y^2-100x+54y-44=0$;
5) $4x^2-y^2-16x+6y+23=0$;
6) $3x^2+12x+16y-12=0$;
7) $9x^2-4y^2+36x-16y+20=0$;
8) $x^2+x-6=0$.

6.3. Найти фокусы и соответствующие директрисы следующих линий:
1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$;
2) $\frac{x^2}{4}-2y^2+8=0$;
3) $y=\frac{3}{4}x^2$.

6.4. Найти фокус и директрису параболы $3x^2+12x+16y-12=0$.

6.5. Найти фокус и директрису параболы $y=ax^2$.

6.6. Написать уравнение эллипса, оси которого параллельны осям координат, касающегося осей $0X$ и $0Y$ в точках $(5,0)$, $(0,3)$.

6.7. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1,2)$, асимптотами которой служат прямые $y=\pm\frac{1}{2}x$.

6.8. Написать уравнение параболы , вершина которой находится в точке $(2,6)$, а ось параллельна оси $0Y$, зная, что на оси $0X$ эта парабола высекает хорду длины 6.

6.9. Составить уравнение окружности проходящей через точки $(1,1)$, $(0,2)$ и касающейся окружности $(x-5)^2+(y-5)^2=16$.

6.10. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $(1,-2)$ и точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью x^2+y^2-2x+ $+4y-20=0$.

6.11. Написать уравнение линии второго порядка, фокус которой находится в точке $(2,0)$, соответствующая ему директриса имеет уравнение уравнение $x=8$ и эксцентриситет $e=\frac{1}{2}$. Найти второй фокус и вторую директрису этой линии.

6.12. Написать уравнение линии второго порядка, фокус которой находится в точке $(2,0)$, соответствующая ему директриса имеет уравнение уравнение $x=5$, зная, что эта линия проходит через точку $(10,6)$. Найти второй фокус и вторую директрису этой линии.

6.13. Написать уравнение линии второго порядка, фокус которой находится в точке $(2,0)$, соответствующая ему директриса имеет уравнение уравнение $x=6$, зная, что эта линия проходит через точку $(-4,8)$.

6.14. Написать уравнение гиперболы, зная четыре точки $(\pm 4,\pm 2)$ пересечения ее директрис и асимптот.

6.15. Написать уравнение гиперболы, зная ее фокус $(-2,0)$, уравнение $x=7$ директрисы, соответствующей другому фокусу, угол между асимптотами $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, содержащий фокус гиперболы.

6.16. определить центр C и радиус r каждой из следующих сфер:

1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$;
2) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$.

6.17. Определить вид поверхности и ее расположение в пространстве:

1) $3x^2+3y^2+3z^3-6x+4y-1=0$;
2) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$;
3) $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$;
4) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;
5) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$;
6) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;
7) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$.

6.18. Написать уравнение касательных к эллипсу $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$, проведенных из точки $(12,-3)$.

6.19. Написать уравнение касательных к гиперболе $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, проведенных из точки $(1, 4)$.

6.20. Найти кратчайшее расстояние параболы $y^2 = 64x$ от прямой $4x + 3y + 46 = 0$.

6.21. Найти уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ параллельных прямой $x + y - 1 = 0$.

6.22. Гипербола, оси которой совпадают с осями координат, касается прямой $x - y - 2 = 0$ в точке $M(4, 2)$. Составить уравнение гиперболы.

6.23. Доказать, что луч света, выпущенный из фокуса эллипса после отражения от эллипса пройдет через другой фокус.

6.24. Доказать, что луч света, выпущенный из фокуса гиперболы после отражения от гиперболы пойдет по прямой, соединяющей точку касания и другой фокус.

6.25. Доказать, что луч света, выпущенный из фокуса параболы после отражения от параболы пойдет параллельно оси параболы.

6.26. Линия второго порядка определяется уравнением $x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$. Определить тип линии при изменении параметра λ и найти ее расположение относительно данной системы координат.

§7. Классификация кривых и поверхностей второго порядка

7.1. Определить тип кривой, найти ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
2) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;
4) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$;
5) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;
6) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;
7) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$;
8) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
9) $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$;
10) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.
11) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;
12) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$;
13) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$;

14) $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0$;

15) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0$.

7.2. Определить тип кривой $x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 1$ в зависимости от значения параметра α.

7.3. Определить вид поверхности и ее расположение в пространстве:

1) $z^2 = 2xy$;

2) $z = xy$;

3) $x^2 + 2x + 3y + 4z + 5 = 0$.

7.4. Доказать, что каждая из следующих поверхностей является поверхностью вращения, определить тип, написать каноническое уравнение, найти ось вращения:

1) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8zx - 14x - 4y + 14z + 18 = 0$;

2) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 4yz + 8zx - 6x + 6y + 6z + 10 = 0$;

3) $2xy + 2yz + 2zx + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$;

4) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$;

5) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xy - 4x - 8y + 3 = 0$;

6) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 2zx + 10x - 4y + 2z + 4 = 0$;

7) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1 = 0$;

8) $4xy + yz + 4zx + 4x + 4y + 4z + 3 = 0$.

7.5. Определить вид каждой из следующих поверхностей второго порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$;

2) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;

3) $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$;

4) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$;

5) $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$;

6) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;

7) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$;

8) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$;

9) $x^2 + 5x^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$;

10) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$;

11) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0$.

§8. Разные задачи по кривым и поверхностям второго порядка

8.1. Найти фокусы и директрисы гиперболы $2xy = a^2$.

8.2. Написать уравнение эллипса, для которого прямые $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ суть соответственно большая и малая оси и длины полуосей которого равны $a = 2$, $b = 1$.

8.3. Написать уравнение гиперболы, зная ее ось $2x - y + 2 = 0$, асимптоту $y = 0$ и точку $(1, 1)$.

8.4. Написать уравнение параболы, осью которой является прямая $x + y + 1 = 0$ и которая проходит через точки $(0, 0)$, $(0, 1)$.

8.5. Написать уравнение гиперболы, зная что ее асимптоты параллельны осям координат и что гипербола проходит через точки $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$.

8.6. Составить уравнение равносторонней гиперболы ,зная ее фокус $(2, 0)$ и асимптоту $x = 1$.

8.7. Составить уравнение гиперболы, зная, один из ее фокусов $(-2, 2)$ и асимптоты $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$.

8.8. Найти асимптоты гиперболы:

1) $3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$;

2) $2x^2 + 6xy - 12x - 18y + 5 = 0$.

8.9. Написать уравнение эллипсоида с полуосями 4,2,1, для которого плоскости $x + y + z - 1 = 0$, $x - y - 2z = 0$, $x - y + 1 = 0$, служат плоскостями симметрии, причем большая полуось лежит на линии пересечения первой и второй плоскостей; средняя ось лежит на линии пересечения первой и третьей плоскостей, малая ось лежит на линии пресечения второй и третьей плоскостей.

8.10. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точки $(0, 0, 0)$, $(1, 1, -1)$, $(0, 0, 1)$, для которой плоскости $x + y + z = 0$, $2x - y - z = 0$, $y - z + 1 = 0$ являются плоскостями симметрии. Найти каноническое уравнение поверхности.

8.11. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точки $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 1, -1)$, для которой плоскости $x + y + z = 0$, $2x - y - z - 2 = 0$, $y - z + 1 = 0$ являются плоскостями симметрии.

8.12. Написать уравнение кругового цилиндра, проходящего через точку M, осью которого служит прямая L:

1) $M = (1, -2, 1)$, $L:\ \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}$;

2) $M=(1,1,3)$, $L:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{1}$.

8.13. Составить уравнение кругового конуса, вершина которого находится в точке A, направляющий вектор оси $\mathbf{e}$, а угол образующих конуса с его осью равен φ:

1) $A=(1,2,3)$, $\mathbf{e}=\{2,2,-1\}$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$;

2) $A=(2,1,-1)$, $\mathbf{e}=\{1,2,1\}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

8.14. Написать уравнение параболического цилиндра с параметром $p=\frac{2}{3}$, зная вершину $O'=(2,1,-1)$ параболы, получающейся при пересечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной его образующим, направляющий вектор $\mathbf{e}_1'=\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}$ оси этой параболы и направляющий вектор $\mathbf{e}_2'=\{\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\}$ касательной к ее вершине.

8.15. Написать уравнение

1) параболоида вращения с параметром $p=\frac{1}{3}$, вершиной $(1,0,-1)$ и направляющим вектором оси вращения $\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\}$;

2) эллипсоида вращения с полуосями $1,2,2$, центром $(1,2,0)$ и направляющим вектором оси вращения $\{2,1,-1\}$.

8.16. Найти каноническое уравнение линии пересечения поверхности с плоскостью:

1) $x^2+y^2-z^2=0$, $x-z+1=0$;

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$, $x+z+\frac{4\sqrt{5}}{3}=0$;

3) $x^2+2y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+2x-6z=0$, $x-z=0$;

4) $y^2=2x$, $x+y+z-1=0$;

5) $x^2+y^2-z^2=1$, $2x+2y+z-1=0$.

8.17. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-13}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{4}$ и касающейся сферы $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$.

8.18. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность $x^2+y^2=11$, $z=0$ и касающейся плоскости $x+y+z-5=0$.

8.19. Написать уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{5}=1$, проходящей через точку $(12,-3,-1)$ и параллельной оси Oz.

8.20. Написать плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$ и касающейся эллипсоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$.

8.21. Написать плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-15}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-11}{-1}$ и касающейся гиперболического параболоида $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$.

8.22. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6yz-4x-y-2z=0$, проходящей через прямую $\{4x-5y=0,\ z-1=0\}$.

8.23. Найти касательную плоскость к поверхности $4x^2+6y^2+4z^2+$

$+4xz-8y-4z+3=0$, параллельную $x+2y+2=0$.

8.24. Найти прямолинейные образующие поверхности S в заданной точке M:

1) $S := x^2-y^2=2z, \quad M=(1,1,0)$;

2) $S := x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1, \quad M=(1,4,8)$.

8.25. Дан гиперболический параболоид $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=2z$ и плоскость $2x+3y-z=0$. Написать уравнение плоскости, параллельной данной и пересекающей параболоид по паре прямых; найти эти прямые.

8.26. Найти точку пересечения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, по которым его пересекает плоскость, параллельная $x+y-z=0$, и определить угол между ними.

8.27. Дан однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$. Через его образующую $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ и точку $(0,3,0)$ проведена плоскость. Найти вторую прямую линии пересечения этой плоскости с гиперболоидом.

8.28. Дан гиперболический параболоид $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$. Через его образующую $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{0}$ и точку $(1,1,1)$ проведена плоскость. Найти вторую прямую линии пересечения этой плоскости с гиперболоидом.

8.29. Найти прямолинейные образующие поверхности $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0$, проходящие через точку $(-1,-1,1)$.

§9. Ответы

1.4.

$$\overrightarrow{BC}=\frac{4\overrightarrow{AL}-2\overrightarrow{AK}}{3}, \quad \overrightarrow{CD}=\frac{2\overrightarrow{AL}-4\overrightarrow{AK}}{3}.$$

1.6. 1) тройка линейно независима; 2) тройка линейно зависима и $\mathbf{c}=-2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$; 3) тройка линейно зависима и вектор $\mathbf{c}$ не представим как линейная комбинация $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. **1.8**. $\{-4,10,3\}$.

2.1 a) $\sqrt{133}$; b) $\arccos(-\frac{6}{\sqrt{399}})$. **2.2**. $30-15\sqrt{2}$. **2.3**. -19). **2.4**. $-\frac{3}{4}\sqrt{2}$. **2.5**. 12. **2.6**. $A=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $B=\arccos\frac{5}{3\sqrt{3}}$, $C=\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$). **2.7**. Длина $\sqrt{10}$, угол $\arccos(8/15)$. **2.8**. Длина $\sqrt{3/2}$, угол $\arccos(5/6)$. **2.11**. 1) $\{-6,6,-3\}$, 2) $17/14\{2,3-1\}$. (**2.12**. 1) $\{6,6,0\}$; 2) $\frac{1}{81}\{32,-34,13\}$. **2.13**. $\{7,-5,9\}$. **2.14**. 1) 7; 2) 10.

3.1. 1) $\{4,-26,-14\}$, 2) $\{-14,24,-23\}$. **3.2**. $\{-\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{11}{\sqrt{2}},-\frac{4}{\sqrt{2}}\}$). **3.3**.1) 9; 2) $3/2\sqrt{5}$. **3.4**. 1) $V=5/6$, $h=\frac{5}{3\sqrt{59}}$; 2) $V=7/6$, $h=\frac{7}{3\sqrt{131}}$. **3.5**. $\phi=$

$= \arcsin\frac{4\sqrt{2}}{45}$. **3.6**. 1) $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{11}}$, 2) $\arcsin\frac{13}{\sqrt{205}}$. **3.7**. $\mathbf{c} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$. **3.8**. $\mathbf{c} = \{\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\}$). **3.9**. $\mathbf{d} = \{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. **3.10**. $\mathbf{d} = \{-\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}}, -\frac{2}{\sqrt{38}}\}$. **3.11**. $\mathbf{d} = \{-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\}$.

4.1. 1),2),3) – прямые параллельны. **4.2** 1) $L_1 := 4x - 7y + 13 = 0$, $L_2 := = 7x + 4y - 2 = 0$; 2) $L_1 := 3x - y + 14 = 0$, $L_2 := x + 3y - 12 = 0$. **4.3**. $x - 3y - 7 = 0$, $2x + 5y - 3 = 0$). **4.4**.$x - y - 7 = 0$, $x - 2y = 0$). **4.5.** $AB: x + 7y + 22 = 0$, $AC: x - y - 10 = 0$, $BC: x - 5y - 14 = 0$. **4.6.** a) $m_B: x - 17y - 50 = 0$; b) $h_C = 7x - y - 64 = 0$; c) $\delta_A = = 3x + y - 14 = 0$; d) $S_\Delta = 12$, e) отрицательно ориентирован. **4.7.** a) $m_B: 6x - y - 19 = 0$; b) $h_C = 2x + y - 13 = 0$; c) $\delta_A = y + 5 = = 0$; d) $S_\Delta = 48$, e) положительно ориентирован. **4.8.** a) $m_B: 33x + + 19y - 15 = 0$; b) $h_C = x - 3y - 47 = 0$; c) $\delta_A = x - y - 11 = 0$; d) $S_\Delta = 60$, e) отрицательно ориентирован. **4.9**. 1) $(2, -7)$; 2)$(5, 8)$. **4.10**. 1) $M' = (2, 3)$; 2) $M' = (-11, -24)$. **4.11** $D_1 = (-5, 7)$, $C_1 = (0, 9)$ или $D_1 = (-1, -3)$, $C_1 = (4, -1)$. **4.12**. $B = (4, 3)$, $D = (-2, 5)$. **4.13**. Пересекает продолжение за отрезка за точку B. **4.14**. Прямая пересекает стороны AB и BC и продолжение стороны AC за точку A. **4.16**. 11. **4.17**. $x + 7y - 10 = 0$, $7x - y + 30 = 0$). **4.18**. $3x + y - 10 = 0$. **4.19**. 1) $4x - 4y + 5 = 0$), 2) $x + y + 5 = 0$. **4.20.** $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 8y + 12 = 0$. **4.21**. $x = 2$, $x - 3y + 13 = 0$. **4.22**. $29x - 2y + + 33 = 0$. **4.23**. $C = (2, 4)$. **4.24.** $x + y - 12 = 0$; $(0, 0)$, $(4, 8)$, $(2, 10)$. **4.25.** $5x - 3y - 1 = 0$. **4.26.** $16x + 13y - 68 = 0$, $17x + 11y - 106 = 0$. **4.27**. $3x - 5y - 13 = 0$, $8x - 3y + 17 = 0$, $2x + y - 7 = 0$. **4.28**. $2x - y + 3 = = 0$, $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$. **4.29**. $(2, -4)$. **4.30**. $4x - 3y + 10 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$. **4.31**. $4x + 7y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. **4.32**. $3x + 7y - 5 = 0$, $3x + 2y - 10 = 0$, $9x + 11y + + 5 = 0$. **4.33**. $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. **4.34**. $x + y - 7 = 0$, $x + 7y + 5 = 0$, $x - 8y + 20 = 0$. **4.35**. $2x + 9y - 65 = = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$. **4.36**. $3x - 2y + 11 = 0$, $2x + y - 9 = 0$, $x + 4y - 1 = 0$. **4.37**. $5x - 12y + 62 = 0$, $x - 2$. **4.38**. Основание $2x - 3y + 7 = 0$, боковые стороны $14x + 5y + 23 = 0$, $10x + 11y - 95 = 0$. **4.39**. $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $x + 2y - 23 = = 0$, $2x - y + 14 = 0$. 4.40. $5x - 12y - 6 = 0$, $5x - 12y + 36 = 0$, $9x + + 12y + 20 = 0$. **4.41**. $x - 3y - 5 = 0$, $3x + y - 5 = 0$. **4.42**. $C_1 = (-2, 4)$, $r_1 = \sqrt{2}$; $C_2 = (-3, 1)$, $r_2 = 2\sqrt{2}$. **4.43**. $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $r = \frac{1}{2}$. **4.44**. $AB: x + 2y - 3 = 0$, $CD: x + 2y - 23 = 0$, $B_1C_1: 2x - y - 6 = 0$,

$A_1D_1: \ 2x - y + 14 = 0$, $B_2C_2: \ 2x + y - 18 = 0$, $A_2D_2: \ 2x + y + 2 = 0$. **4.46**. $x + 2y = 0$, $23x + 25y = 0$. **4.47**. $8x - y - 24 = 0$. **4.48**. $3x + y = 0$, $x - 3y = 0$. **4.49**. $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24y - 61 = 0$. **4.50**. $4x - y - 5 = 0$. **4.51**. $x + 7y - 8 = 0$, $x + 7y - 58 = 0$, $3x - 4y - 24 = 0$, $4x + 3y + 18 = 0$. **4.52**. $x + 3y + 12 = 0$, $3x - y - 4 = 0$, $3x - y + 16 = 0$.

5.1. 1) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z-3}{-5}$; 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{-5}$. **5.2**. $15x + y - 10z - 51 = 0$. **5.3**. 1) $x + 2y + 3z - 7 = 0$; 2) $2x - 3y + z - 3 = 0$. **5.4**. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-5}{17}$. **5.5** 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(0, 0, -2)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости; 4) прямая и плоскость пересекаются в точке $(2, 3, 1)$. **5.6**. 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(2, 4, 6)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости. **5.7** 1) пересекаются в точке $(-3, 5, -5)$ и лежат в плоскости $9x + 10y - 7z - 58 = 0$; 2) скрещиваются: 3) параллельны и содержатся в плоскости $5x - 22y + 19z + 9 = 0$; 4) совпадают; 5) параллельны и содержатся в плоскости $12x - 3y + 8z = 0$; 6) пересекаются в точке $(10, -1, 0)$ и лежат в плоскости $x - 7y + 3z - 17 = 0$. **5.8**. Точки A и B лежат внутри одного угла; точки C и D лежат в вертикальных углах, смежных с углом, содержащим точку A; точка E лежит в угле, вертикальном к углу, содержащему точку A. **5.9**. Плоскость пересекает продолжение отрезка AB за точку A. **5.10**. 1) $(7, 1, 0)$, 2) $(1, 1, 14)$. **5.11**. 1) $(9, 2, 11)$, 2) $(-2, 1, 0)$. **5.12**. 1) $7x + z - 13 = 0$; 2) $41x - 19y + 52z - 68 = 0$, 3) $33x + 4y - 5z - 63 = 0$. **5.13**. $\sqrt{35/6}$. **5.14**. $\sqrt{14}$. **5.15**. 1) $18/\sqrt{110}$; 2) $16/\sqrt{102}$. **5.16**. 3. **5.17**. Центр $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, радиус $\frac{3}{2}$. **5.18**. $1/\sqrt{6}$. **5.19**. Четыре прямые $\frac{x-1}{\pm 2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\pm 2}$. **5.20**. Два решения $2x + y - 4z + 17 = 0$, $2x + y - 4z - 25 = 0$. **5.21**. $\arccos(-1/3)$. **5.21**. $\pm\frac{9}{2\sqrt{33}}$. **5.23**. $\arcsin(\frac{1}{10\sqrt{19}})$. **5.24**. $x + y + z - 1 = 0$, $x - 1 = 0$. **5.25**. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z-7}{6}$, $d = 7$. **5.26**. $x = -\frac{1}{3} + t$, $y = \frac{4}{3} - t$, $z = \frac{17}{3} - 4t$. **5.27**. 1) Три плоскости попарно параллельны; 2) три плоскости образуют призму; 3) первая и третья плоскости параллельны; вторая их пересекает. **5.28**. $x + 20y + 7z - 62 = 0$, $x - z + 2 = 0$. **5.29**. два решения $2x + y + z + 8 = 0$, $14x + 13y - 11z + 20 = 0$). **5.30**. $8x + 5y - 9z - 24 = 0$. **5.31**. $x = 1 + t$, $y = -2 + 5t$, $z = 3 - t$. **5.32**. $\begin{cases} 5x + y - 8z + 17 = 0, \\ 12x + 9y - 16z + 18 = 0. \end{cases}$

5.33. $\begin{cases} y - 2z + 4 = 0, \\ 3x + 4y - z - 10 = 0. \end{cases}$ **5.34**. $\begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0, \\ x - 2y - 5z + 9 - 0. \end{cases}$ **5.35**. $5y + 13z - 60 = 0$. **5.36**. $16x + 50y - 3z - 132 = 0$.

6.1. 1) $C=(0,-\frac{3}{2})$, $r=\frac{3}{2}$; 2) $C=(-1,2)$, $r=\sqrt{5}$; 3) $C=(1,-\frac{2}{3})$, $r=\frac{4}{3}$. **6.3.** 1) $F_1=(0,-4)$, $d_1: y=-5$; $F_2=(0,4)$, $d_2: y=5$; 2) $F_1=(0,-6)$, $d_1: y=-\frac{2}{3}$; $F_2=(0,6)$, $d_2: y=\frac{2}{3}$; 3) $F=(0,\frac{1}{3})$, $d: y=-\frac{1}{3}$. **6.4.** $F=(-2,\frac{1}{6})$, $d: y=\frac{17}{6}$. **6.5.** $F=(0,\frac{1}{4a})$, $d:\ y=-\frac{1}{4a}$. **6.6.** $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$. **6.7.** $x^2-4y^2+15=0$. **6.8.** $2x^2-8x+3y-10=0$. **6.9.** Две окружности $x^2+(y-5)^2=25$, $x^2+(y-45/4)^2=(45/4)^2$ **6.10.** $x^2+y^2-x-3y-10=0$. **6.11.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, второй фокус $(-2,0)$, вторая директриса $x=-8$. **6.12.** $3x^2-y^2-36x+96=0$, второй фокус $(10,0)$, вторая директриса $x=7$. **6.13.** $y^2+8x-32=0$. **6.14.** Два решения $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{80}=1$. **6.15.** $\frac{(x-3)^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. **6.16.** 1) $C=(1,-2,3)$, $r=6$; 2) $C=(0,0,3)$, $r=4$. **6.17.** 1) сфера $(x-1)^2+(y+\frac{2}{3})^2+z^2=\frac{16}{9}$, 2) круговой цилиндр $(x-1)^2+(y+\frac{2}{3})^2=\frac{16}{9}$, 3) круглый конус $(x-1)^2+(y+\frac{2}{3})^2-(z-\frac{2}{3})^2=0$, 4) эллипсоид $\frac{(x-3)^2}{49}+\frac{(y+1)^2}{49/4}+\frac{(z-2)^2}{49/4}=1$; 5) однополостной гиперболоид $-\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{(z+6)^2}{16}=1$; 6) круговой конус $(x-3)^2-\frac{(y-5)^2}{3}+(z+2)^2=1$; 7) эллиптический параболоид $x-10=-\frac{(y+\frac{1}{2})^2}{5/6}-\frac{(z+\frac{5}{2})^2}{5/6}$. **6.18.** $3x+4y-24=0$, $3x-28y-120=0$). **6.19.** $x=1$, $5x-2y+3=0$. **6.20.** 2. **6.21.** $x+y\pm5=0$. **6.22.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$.

7.1. 1) Эллипс $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $O'=(2,3)$, $\mathbf{e}'_1=(\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5})$, $\mathbf{e}'_2=(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5})$;
2) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'=(1,1)$, $\mathbf{e}'_1=(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}})$, $\mathbf{e}'_2=(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}})$;
3) парабола $y'^2=\frac{1}{\sqrt5}x'$, $O'=(3,2)$, $\mathbf{e}'_1=(-\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5})$, $\mathbf{e}'_2=(\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5})$;
4) пересекающиеся прямые $x-y-1=0$, $x-4y+2=0$;
5) параллельные прямые $2x-3y+1=0$, $2x-3y-2=0$;
6) эллипс $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$, $O'=(-\frac{4}{5},\frac{2}{5})$, $\mathbf{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5})$, $\mathbf{e}'_2=(-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5})$;
7) гипербола $\frac{x'^2}{1}-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'=(2,-1)$, $\mathbf{e}'_1=(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}})$, $\mathbf{e}'_2=(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}})$;
8) парабола $y'^2=4\sqrt2x'$, $O'=(2,1)$, $\mathbf{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$, $\mathbf{e}'_2=(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$;
9)пересекающиеся прямые $2x+3y-5=0$, $x-4y+2=0$;
10) параллельные прямые $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$;
11) эллипс $\frac{x'^2}{35/6}+\frac{y'^2}{35/36}=1$, $O'=(\frac{7}{6},\frac{1}{3})$, $\mathbf{e}'_1=(\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5})$, $\mathbf{e}'_2=(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5})$;
12) гипербола $\frac{x'^2}{9/8}-\frac{y'^2}{9/5}=1$, $O'=(0,1)$, $\mathbf{e}'_1=(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}})$, $\mathbf{e}'_2=(-\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}})$;
13) парабола $y'^2=10x'$, $O'=(-1,2)$, $\mathbf{e}'_1=(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$, $\mathbf{e}'_2=(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$;
14) пересекающиеся прямые $x+y-2=0$, $3x-2y+1=0$;
15) параллельные прямые $2x-3y-2=0$, $2x-3y-8=0$;

7.3. 1) круговой конус $-x'^2+y'^2+z'^2=0$, угол между образующими и осью конуса равен $\frac{\pi}{4}$, вершина $(0,0,0)$, направляющий вектор оси конуса $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$;
2) гиперболический параболоид $x'^2-y'^2=2z'$;
3) параболический цилиндр $x'^2-5y'=0$.
7.4. 1) Однополостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{2/3}+\frac{y'^2}{2/3}-\frac{z'^2}{1/3}=1$, центр $O'=(1,1,-1)$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$;
2) параболоид вращения $x'^2+y'^2=\frac{2}{3}z$, центр $O'=(1,0,-1)$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$;
3) двуполостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{1/2}+\frac{y'^2}{1/2}-\frac{z'^2}{1/4}=-1$, центр $O'=$ $=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$;
4) эллипсоид вращения $x'^2+y'^2+\frac{z'^2}{4}=1$, центр $O'=(1,1,1)$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$;
5) двуполостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{1/6}+\frac{y'^2}{1/6}-\frac{z'^2}{1/2}=-1$, центр $O'=$ $=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ж
6) круглый цилиндр $x'^2+y'^2=\frac{1}{6}$, линия центров $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$;
7) круглый цилиндр $x'^2+y'^2=\frac{2}{3}$, линия центров $x=y=z$;
8) круговой конус $x'^2+y'^2-2z'^2=0$, центр $O'=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$;
7.5. 1) Параболический цилиндр $y'^2=\frac{4}{3}x'$; $p=\frac{2}{3}$, $O'=(2,1,-1)$, $\mathbf{e}_1'=$ $=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $\mathbf{e}_2'=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_3'=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$;
2) эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$; $O'=(0,1,0)$, $\mathbf{e}_1'=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_2'=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{e}_3'=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$;
3) эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{2/3}=2z$; $O'=(2,2,1)$, $\mathbf{e}_1'=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\mathbf{e}_2'=(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{4}{3\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_3'=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$;
4) гиперболический параболоид $x'^2-y'^2=2z$; $O'=(0,0,1)$, $\mathbf{e}_1'=$ $=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\mathbf{e}_2'=(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{4}{3\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_3'=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$;
5) эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=2z$, $O'=(1,2,3)$, $\mathbf{e}_1'=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_2'=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_3'=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$;
6) эллипсоид $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{2/3}=1$, $O'=(1,2,-1)$, $\mathbf{e}_1'=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_2'=$ $=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_3'=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$;
7) двуполостный гиперболоид $\frac{x'^2}{4/5}+\frac{y'^2}{4/15}-\frac{z'^2}{4/25}=-1$, $O'=(0,2,-\frac{2}{5})$, $\mathbf{e}_1'=$ $=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\mathbf{e}_2'=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\mathbf{e}_3'=(0,0,1)$;

8) эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{\frac{5\sqrt{2}}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2z'$; $O' = (-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2})$, $\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$;

9) однополостный гиперболоид $\frac{x'^2}{1/3} + \frac{y'^2}{1/6} + \frac{z'^2}{1/2} = 1$, $O' = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$;

10) гиперболический цилиндр $x'^2 - y'^2 = \frac{1}{3}$, $O' = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$,

11) эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{4/3} = 1$, $O' = (-2, -2, 0)$, $\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

8.1. $F_1 = (a, a)$, $d_1 :\ x + y - a = 0$, $F_2 = (-a, -a)$, $d_1 :\ x + y + a = 0$. **8.2**. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$. **9.3**. $4xy + 3y^2 + 4y - 11 = 0$. **8.4**. $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0$. **8.5**. $3xy - 2x - 2y = 0$. **8.6**. Два решения $(x-1)(y+1) = 1/2$, $(x-1)(y-1) = -1/2$. **8.7**. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$. **8.8**. 1) $3x + 4y + 14 = 0$, $x + y - 3 = 0$; 2) $x = 3$, $y = -1/3x + 1$. **8.9**. $\frac{(x-y+1)^2}{32} + \frac{(x+y-2z)^2}{24} + \frac{(x+y+z-1)^2}{3} = 1$. **8.10**. Однополостный гиперболоид $4x^2 - y^2 - z^2 - 10xy - 10xz - y - z = 0$; каноническое уравнение $12x'^2 - 18y'^2 + 2z'^2 = 1$. **8.11**. Две плоскости $x + y + z \pm 1 = 0$. **8.12**. 1) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8yz + 4xz + 16x + 14y + 22z - 39 = 0$; 2) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 2yz - 4xz + 20x - 8y - 32z + 54 = 0$. **8.13**. 1) $11x^2 + 11y^2 + 23z^2 - 32xy + 16xz + 16yz - 6x - 60y - 186z + 342 = 0$, 2) $-2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 16xy + 8xz + 16yz - 36y - 36z = 0$. **8.14**. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$. **8.15**. 1) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz - 6x + 6y + 6z + 10 = 0$, 2) $10x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz - 2yz - 28x - 32y + 8z + 34 = 0$. **8.16**. 1) парабола с параметром $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) эллипс с полуосями $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) парабола с параметром $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) парабола с параметром $p = \frac{3}{2\sqrt{2}}$; 5) гипербола $\frac{x'^2}{6/7} + \frac{y'^2}{54/49} = 1$. **8.17**. $8x + 4y + z - 100 = 0$, $2x - 2y + z - 28 = 0$. **8.18**. $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 12$, $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 27$. **8.19**. $3x + 4y - 24 = 0$, $3x - 28y - 120 = 0$. **9.20**. $z = 2$, $x + 2y = 8$. **8.21**. $2x - y - 2z - 8 = 0$, $14x - 3y - 6z - 144 = 0$. **8.22**. $4x - 5y - 2z + 2 = 0$. **8.23**. $x + 2y - 2 = 0$, $x + 2y = 0$. **8.24**. 1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, 2) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-8}{2}$, $\frac{x-1}{8} = \frac{y-4}{15} = \frac{z-8}{34}$. **8.25**. $2x + 3y - z + 32 = 0$, $\frac{x-4}{1} = \frac{y+24}{2} = \frac{z+32}{8}$, $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+24}{2} = \frac{z+32}{4}$. **8.26**. Точки $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, -1)$, угол $\frac{\pi}{3}$. **8.27**. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{2}$. **8.28**. $\frac{x+48}{4} = \frac{y+36}{-3} = \frac{z}{-24}$. **8.29**. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Оглавление