МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Лаборатория математической физики

В.В. Бондаренко, В.М. Долгополов, И.Н. Родионова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Самара
Издательство «Универс групп»
2011

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

ББК 22.141
УДК 517.55
Б81

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.П. Радченко

Отв. редактор: к-т физ.-мат. наук, доц. М.В. Долгополов

Бондаренко, В.В.

Б81 Интегральное исчисление : учеб. пособие. Изд. 2-е , испр. и доп. / В.В. Бондаренко, В.М. Долгополов, И.Н. Родионова. – Самара : Изд-во «Универс групп», 2011. – 84 с.

ISBN 978-5-467-00224-8

Настоящее пособие является третьей частью конспекта лекций по курсу «Математический анализ», читаемых студентам направления «Физика». В нем достаточно полно изложен раздел «Неопределенный интеграл».

Кроме основных методов интегрирования в данном учебном пособии рассмотрены элементы теории многочленов, множество комплексных чисел и действия над ними в различных формах записи. После каждого параграфа читателю предлагается задание для самостоятельной работы.

Настоящее пособие может быть использовано также бакалаврами механико-математического, химического и биологического факультетов при изучении темы «Неопределенный интеграл».

Второе издание пособия подготовлено в рамках проекта № 3341 и 10854 Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки РФ.

ББК 22.141
УДК 517.55

ISBN 978-5-467-00224-8

Оглавление

1. Первообразная. Неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной данной функции. Если задано уравнение движения $s = s(t)$, то путем дифференцирования мы находим скорость

$$v = \frac{ds}{dt},$$

а затем и ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

движущейся точки. Зная массу $m = m(x)$, непрерывно распределенную вдоль прямолинейного отрезка $[0, x]$ оси OX, мы находим дифференцированием линейную плотность

$$\rho(x) = \frac{dm}{dx}.$$

Однако на практике часто приходится решать обратную задачу – восстановление функции по ее производной. По заданному ускорению $a = a(t)$ требуется восстановить скорость движущейся точки, а также уравнение движения. По заданному закону изменения плотности $\rho = \rho(x)$ найти величину массы. Восстановление функции по ее производной – основная задача интегрального исчисления.

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на множестве X, если для всех точек множества X выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, для функции $f(x) = 3x^2$ первообразной является функция $F(x) = x^3$ на множестве $X = (-\infty, +\infty)$, так как $(x^3)' = 3x^2$. На множестве $X = (-\infty, +\infty)$ для функции $f(x) = \cos x$ первообразная будет $F(x) = \sin x$, так как $(\sin x)' = \cos x$. Для

$f(x) = x^{-1}$ на множестве $X = (0, +\infty)$ – первообразная $F(x) = \ln(x)$, так как $(\ln x)' = x^{-1}$, а функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

на интервале $(-1, 1)$ имеет первообразную $F(x) = \arcsin x$, так как

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Разыскание для данной функции всех ее первообразных составляет одну из задач интегрального исчисления. Эта задача является обратной основной задаче дифференциального исчисления.

Пусть дана функция $y = f(x)$. Возникают вопросы: существует ли ее первообразная; сколько первообразных имеет данная функция; как их найти? Позднее, в теории определенного интеграла, будет доказано

Теорема 1.1. *Всякая непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция имеет на этом сегменте первообразную.*

Теорема 1.2. *Если в некотором промежутке X функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C – любая постоянная, также будет первообразной. Обратно: каждая функция, первообразная для $f(x)$ на множестве X, может быть представлена в виде $F(x) + C$.*

Доказательство.
Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то есть

$$F'(x) = f(x).$$

Но

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x),$$

откуда следует, что $F(x) + C$ – первообразная функции $f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$,

$$\Phi'(x) = f(x)$$

на множестве X. Но функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ имеют одну и ту же производную, следовательно, отличаются на постоянную, то есть

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что для функции $f(x)$ достаточно найти только одну первообразную функцию $F(x)$, чтобы знать все первообразные, так как они отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми.

Определение 1.2. **Неопределенным интегралом** функции $f(x)$ на множестве X называется совокупность всех первообразных данной функции на этом множестве и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то, по теореме 1.2,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Здесь $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Замечание. Под знаком интеграла пишут дифференциал искомой первообразной функции, а не производную. Целесообразность такого способа записи будет выяснена в теории определенного интеграла.

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие свойства:

I. $d\int f(x)dx = f(x)dx$, то есть знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, когда первый помещен перед вторым.

II. Так как $F(x)$ есть первообразная функции $F'(x)$, то имеем

$$\int F'(x) = F(x) + C,$$

или

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Отсюда следует, что знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются и тогда, когда первый стоит после второго, но только к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную.

2. Таблица неопределенных интегралов. Правила интегрирования

Каждая формула дифференциального исчисления, устанавливающая, что для некоторой функции $F(x)$ производной является $f(x)$ $[F'(x) = f(x)]$, приводит к соответствующей формуле интегрального исчисления:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Таким образом, таблицу интегралов можно получить из таблицы производных, если прочитать ее «задом наперед».

Перебрав формулы, по которым вычислялись производные элементарных функций, мы можем составить следующую таблицу интегралов:

1. $\int 0\, dx = C$, 2. $\int dx = x + C$,

3. $\int x^\alpha\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$,

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$,

5. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, 6. $\int e^x\, dx = e^x + C$,

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, 8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$,

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, 10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \quad |x| < 1$,

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$$

Эта таблица носит случайный характер, так как операция интегрирования определена не непосредственно, а как обратная операции дифференцирования. Поэтому мы далеко не всегда сумеем указать первообразную данной функции $f(x)$ даже тогда, когда заведомо знаем, что она существует. Для расширения класса функций, интегралы которых могут быть найдены, рассмотрим правила и методы интегрирования.

Существует два правила интегрирования.

I. Если a – постоянное число (константа), то

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$$

$$\text{II.} \int \Big[f(x) \pm g(x)\Big]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Для доказательства обоих правил достаточно показать, что выражение, стоящее в правой части равенства, есть первообразная подынтегральной функции в левой части. Для правила II имеем:

$$d\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right] = d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx =$$

$$= \Big[f(x) \pm g(x)\Big]dx,$$

что и требовалось доказать.

Правило I доказывается аналогично, предлагаем это сделать читателю.

Примеры. Вычислить интегралы, пользуясь таблицей интегралов и правилами интегрирования.

1. $$\int(\sqrt{x}-\sqrt[3]{7x}+2^x)dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-\sqrt[3]{7}\int x^{\frac{1}{3}}dx+\int 2^x dx=$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3\sqrt[3]{7}x^{4/3}}{4}+\frac{2^x}{\ln 2}+C.$$

2. $$\int\frac{1+\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int x^{-2/3}dx+\int x^{-1/6}dx+\int x^{1/3}dx=$$
$$=3x^{1/3}+\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{3}{4}x^{4/3}+C.$$

3. $$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=$$
$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg} x-x+C.$$

4. $$\int\frac{x^4\,dx}{1+x^2}=\int\frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\,dx=\int\frac{x^4-1}{1+x^2}\,dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{1+x^2}\,dx+\operatorname{arctg} x+C=$$
$$=\int(x^2-1)\,dx+\operatorname{arctg} x+C=$$
$$=\int x^2\,dx-\int dx+\operatorname{arctg} x+C=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x+C.$$

Задание для самостоятельной работы №1.
Вычислить интегралы.

1. $\int(6x^2-3x+5)\,dx;$ 2. $\int(1+\sqrt{x})^2\,dx;$

3. $\int(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx;$ 4. $\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+\sqrt{x}\cdot e^x+1}{\sqrt{x}}\,dx;$

6. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}\,dx;$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}}\,dx;$

8. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx;$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx;$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}.$

3. Интегрирование методом замены переменной

В интегральном исчислении существуют два наиболее сильных метода: метод замены переменной и метод интегрирования по частям. Формула, на которой основан метод замены переменной, получается из формулы производной сложной функции.

Теорема 3.1. *Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на сегменте $[a, b]$, а множество ее значений есть сегмент $[c, d]$. Пусть на $[c, d]$ функция $F(u)$ является первообразной для функции $g(u)$, тогда имеет место формула*

$$\int g\big[\varphi(x)\big]\varphi'(x)dx = F\big[\varphi(x)\big] + C. \tag{1}$$

Доказательство. Так как, по условию, $F'(u) = g(u)$, то по теореме о производной сложной функции имеем

$$\frac{d}{dx}\big[F(\varphi(x))\big] = F'_u(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x),$$

то есть $F\big[\varphi(x)\big]$ является первообразной для функции $g\big[\varphi(x)\big] \times$ $\times\, \varphi'(x)$, что доказывает справедливость формулы (1).

Теорема доказана.

Формулу (1) можно записать в виде

$$\int g\big[\varphi(x)\big]d\big[\varphi(x)\big] = F\big[\varphi(x)\big] + C,$$

или, полагая $\varphi(x) = u$, в виде

$$\int g(u)du = F(u) + C. \tag{2}$$

Формула (1) используется на практике двояко.

Первый способ. Требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, в котором $f(x)$ не имеет очевидной первообразной. Представим $f(x)$ в виде:

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

так, чтобы функция $g(u)$ имела легко вычисляемую первообразную $F(u)$. Далее получаем:

$$\int f(x)dx = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int g[\varphi(x)]d[\varphi(x)] =$$

$$= \int g(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C. \tag{3}$$

После вычисления первообразной – обязательное возвращение к старой переменной x.

Примеры.

1) $\int e^{x^2} \cdot 2xdx.$

Подынтегральная функция $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ не имеет очевидной первообразной. Однако следует отметить, что $2x = (x^2)'$ и данный интеграл, с учетом формулы (3), можно вычислить следующим образом:

$$\int e^{x^2} \cdot 2xdx = \int e^{x^2}(x^2)'dx = \int e^{x^2}d(x^2) =$$

$$= [x^2 = u] = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

(в нашем примере $\varphi(x) = x^2$).

При вычислении следующих интегралов по формуле (3) используется тот факт, что $d(x^2 + C) = 2xdx$.

2) $$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \ln\sqrt{1+x^2} + C.$$

3) $$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

В примерах 2) и 3) мы создавали в числителе дроби дифференциал выражения $(1 + x^2)$, домножая числитель на 2 и вынося $1/2$ за знак интеграла, затем делали замену $1 + x^2 = u$, что приводило нас к табличным интегралам.

Аналогично вычисляем интегралы:

$$4) \int x \cdot \sqrt{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{4+x^2} \cdot 2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{4+x^2}d(4+x^2) = [4+x^2 = u] = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(4+x^2)^3} + C.$$

$$5) \int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = [x^2 = u] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + C.$$

При вычислении следующих интегралов методом замены переменной будем использовать равенства $d(\sin x) = \cos x dx$ и $d(\cos x) = -\sin x dx$.

$$6) \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx = -\int e^{\cos x} d(\cos x) = [\cos x = u] =$$

$$= -\int e^u du = -e^u + C = -e^{\cos x} + C.$$

$$7) \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x \, d(\sin x) = [\sin x = u] =$$

$$= \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$8)\ \int \sin x\sqrt[3]{2+\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{c} d(2+\cos x) = -\sin x dx, \\ 2+\cos x = u \end{array}\right] =$$

$$= -\int \sqrt[3]{u}du = -\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4} + C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(2+\cos x)^4} + C.$$

$$9)\ \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt[5]{\sin x}} = [\sin x = u] =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt[5]{u}} = \int u^{-\frac{1}{5}}du = \frac{5u^{\frac{4}{5}}}{4} + C = \frac{5}{4}\cdot\sqrt[5]{\sin^4 x} + C.$$

Формула $d(\ln x) = dx/x$ позволяет вычислить интегралы:

$$10)\ \int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d(\ln x) = [\ln x = u] =$$

$$= \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

$$11)\ \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

$$12)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left[\begin{array}{c} d(1+\ln x) = \dfrac{dx}{x}, \\ 1+\ln x = u \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1+\ln x} + C.$$

С помощью замены переменной вычислим некоторые важные интегралы и внесем их в основную таблицу.

$$1^\circ.\ \int \sin ax dx = \frac{1}{a}\int \sin ax\cdot adx = \left[\begin{array}{c} ax = u, \\ a\cdot dx = du \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\int \sin u\cdot du = -\frac{1}{a}\cos u + C = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

Аналогично

$$2^\circ.\ \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$$

$$3^\circ.\ \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,dx}{ax+b} = \begin{bmatrix} u = ax+b, \\ du = a\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{a}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

$$4^\circ.\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{dx}{a}}{1+(\frac{x}{a})^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \left[\frac{x}{a} = u\right] = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

$$5^\circ.\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} =$$

$$= \left[\frac{x}{a} = u\right] = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

$$6^\circ.\ \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(a-x)+(a+x)}{(a-x)(a+x)}dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\Big[\ln|a+x| - \ln|a-x|\Big] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

Замечание. При вычислении интеграла 6° применялся прием разложения рациональной дроби на простейшие. Числитель был представлен в виде суммы линейных множителей, стоящих в знаменателе, затем производилось почленное деление числителя на знаменатель. Полученные интегралы вычисляются по формуле 3°.

7°. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = [\cos x = t] =$$

$$= -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} + C = -\ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

8°. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \left[x + \frac{\pi}{2} = z\right] =$$

$$= \int \frac{dz}{\sin z} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

9°. $$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = [\varphi(x) = z] = \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \ln|z| + C = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Например,

10°. $$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

$$11^\circ.\ \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

$$12^\circ.\ \int [\varphi(x)]^\alpha \varphi'(x) dx = [\varphi(x) = t] =$$

$$= \int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{[\varphi(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

Второй способ применения формулы (1) называют чаще методом подстановки. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, в котором $f(x)$ не имеет очевидной первообразной. Положим $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$. В результате получим:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt,$$

причем $g(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ должна иметь легко вычисляемую первообразную $G(t)$. В результате имеем:

$$\int f(x)dx = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C,$$

где $t = \varphi^{-1}(x)$ – функция, обратная к $x = \varphi(t)$.

Рассмотрим примеры.

$$13^\circ.\ \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \begin{bmatrix} x = a \sin t, \\ dx = a \cos t\ dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\ a\ \cos t\ dt =$$

$$= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\ dt = a^2 \int \cos^2 t\ dt =$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\ dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t\ dt =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin 2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C.$$

14°. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$ (α – вещественное число).

Сделаем подстановку $\sqrt{x^2+\alpha} = t - x$, из которой найдем x и dx. Возведем обе части в квадрат $x^2 + \alpha = t^2 - 2xt + x^2$, откуда

$$x = \frac{t^2-\alpha}{2t} \text{ и } dx = \frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt.$$

Далее,

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - x = t - \frac{t^2-\alpha}{2t} = \frac{t^2+\alpha}{2t}.$$

Подставим в интеграл вместо $\sqrt{x^2+\alpha}$ и dx их выражения через переменную t, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int\frac{(t^2+\alpha)2tdt}{2t^2(t^2+\alpha)} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= [t = x + \sqrt{x^2+\alpha}] = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C.$$

Интегралы 13°, 14° рекомендуем внести в таблицу.

Предлагаем следующие интегралы для самостоятельного вычисления методом замены переменной (подстановки).

Задание для самостоятельной работы №2.
Вычислить интегралы.

1. $\int e^{x^3} x^2 dx;$

2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

3. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6};$

4. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$

5. $\int \frac{2+3\ln x}{x} dx;$

6. $\int (3x+5)^{11} dx;$

7. $\int x\sqrt{2x^2+7} dx;$

8. $\int \sin^5 x \cos x \, dx;$

9. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4+\cos^2 x}};$

10. $\int \frac{e^x dx}{4+3e^x};$

11. $\int \frac{e^x dx}{6+e^{2x}};$

12. $\int \frac{\cos t dt}{4-\sin^2 t};$

13. $\int \frac{\sin x^{-1} dx}{x^2};$

14. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x dx}{1+x^2};$

15. $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x \cdot \sqrt{1-x^2}};$

16. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

4. Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции. Найдем дифференциал от их произведения

$$d[uv] = udv + vdu,$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Проинтегрируем обе части последнего тождества

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{4}$$

Формула (4) называется формулой интегрирования по частям. Она сводит интегрирование выражения udv к интегрированию выражения vdu, более простого для интегрирования. Пусть требуется вычислить $\int f(x)dx$, где функция $f(x)$ не имеет очевидной первообразной. Подынтегральное выражение разбиваем на два множителя

$$f(x)dx = f_1(x)f_2(x)dx$$

и обозначим

$$f_1(x) = u, \quad f_2(x)dx = dv,$$

при этом $f_1(x)$ желательна такая, чтобы ее производная была проще, чем сама $f_1(x)$. За $f_2(x)$ берем функцию, от которой легко вычислить интеграл и он проще, или, по крайней мере, не сложнее, чем сама функция $f_2(x)$. Далее находим

$$du = f_1'(x)dx \quad \text{и} \quad v = \int f_2(x)dx$$

и применяем формулу (4).

Примеры.

1. $\int xe^x dx$. Очевидно, что за u надо принять x, так как $(x)' = 1$, а $dv = e^x dx$, откуда $v = \int e^x dx = e^x$. Нам достаточно найти одну первообразную, поэтому при отыскании v будем брать $C = 0$. Применяем формулу (4):

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2. $\int x^3 \ln x \, dx$. Заметим, что функция $\ln x$ имеет более простую производную, чем она сама, поэтому полагаем $u = \ln x$, а $dv = x^3 dx$, откуда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}.$$

По формуле (4)

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

В следующем примере, чтобы прийти к табличному интегралу, интегрирование по частям нужно произвести дважды.

3. $\int x^2 \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx, \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right] =$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \cos x \, dx, v = \sin x \end{array} \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

В интеграле $\int x^3 \cos x\, dx$ следует проинтегрировать по частям три раза. Предлагаем это проделать самостоятельно.

Можно сделать вывод, что интегралы вида

$$\int P(x) \cos x\, dx, \quad \int P(x) \sin x\, dx,$$

где $P(x)$ – многочлен, вычисляются методом интегрирования по частям, который повторяется столько раз, какова степень многочлена.

4. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. Отметим сразу, что при интегрировании по частям выражений, содержащих функции $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, последние принимаются за u.

Итак,

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad dx = dv, \quad x = v.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x\, dx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Существует тип интегралов, которые после двукратного интегрирования по частям выражаются через самих себя. Для их вычисления нужно решить линейное уравнение относительно искомого интеграла. Рассмотрим один из таких интегралов, часто встречающийся в приложениях.

5. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin bx, du = b \cos bx\, dx, \\ dv = e^{ax} dx, v = e^{ax}/a \end{array} \right] =$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \cos bx, dv = e^{ax}\ dx, \\ du = -b \sin bx\ dx, v = e^{ax}/a \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx\ dx \right).$$

Относительно интеграла 5 получили уравнение

$$\int e^{ax} \sin bx\ dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx\ dx.$$

Переносим искомый интеграл из правой части последнего равенства в левую

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx\ dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2}$$

и окончательно получаем

$$\int e^{ax} \sin bx\ dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$

Аналогичным способом вычисляется интеграл $\int e^{ax} \cos bx\ dx$. Предлагаем это проделать самостоятельно.

6. $\int \sqrt{x^2 + A} dx$, A – действительное число.

Положим $u = \sqrt{x^2 + A}$, тогда $du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + A}}$, а $dv = dx$ и $v = x$.

$$\int \sqrt{x^2 + A}\ dx = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{x^2 + A}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{(x^2 + A) - A}{\sqrt{x^2 + A}}\ dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 + A}{\sqrt{x^2 + A}}\ dx + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + A} - \int \sqrt{x^2 + A}\ dx + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}}.$$

Первый интеграл справа перенесем в левую часть равенства, второй интеграл вычисляется по формуле, полученной в пункте 14°.

$$\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 + A}}{2} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C. \qquad (5)$$

7. Для интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

(n – натуральное число), применяя формулу интегрирования по частям, выведем рекуррентную формулу, то есть такую, в которой данный интеграл выражается через интеграл такого же вида, но с более простым показателем.

Возьмем

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx,$$

откуда

$$v = x, \quad du = \frac{-2xn\, dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}.$$

Получаем

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\, dx - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}.$$

В результате приходим к равенству

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

из которого J_{n+1} выражаем через J_n

$$J_{n+1} = \frac{2n - 1}{2na^2} J_n + \frac{1}{2a^2 n} \frac{x}{(a^2 + x^2)^n}, \qquad (6)$$

где

$$J_{n+1} = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}}.$$

Получили рекуррентную формулу. Интеграл (5) и формулу (6) рекомендуется внести в таблицу интегралов.

Рассмотрим пример на применение формулы (6).

Вычислить $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^3}$. Здесь $n + 1 = 3, n = 2$, по формуле (6) получаем

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)^3} = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} + \frac{1}{4} \frac{x}{(1 + x^2)^2}.$$

К первому слагаемому правой части вновь применяем формулу (6) при $n + 1 = 2, n = 1$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{1}{2} \frac{x}{1 + x^2}\right) + \frac{1}{4} \frac{x}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{3}{8} \frac{x}{1 + x^2} + \frac{3}{16} \frac{x}{(1 + x^2)^2} + C.$$

Для подготовки к практическому занятию по теме «Метод интегрирования по частям» рекомендуем вычислить самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int x \cos x \, dx$;
2. $\int x^3 e^x \, dx$;
3. $\int \ln x \, dx$;
4. $\int \arcsin x \, dx$;
5. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$;
6. $\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x}$;
7. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} \, dx$;
8. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$;
9. $\int x \sin^2 x \, dx$.

5. Комплексные числа, действия над ними

Множество вещественных чисел, как и в свое время множество рациональных чисел, не может удовлетворить потребности даже элементарной математики, что привело к необходимости расширения этой числовой области. Например, известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет решения во множестве вещественных чисел, если его дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$. Отсюда следует, что не всякий многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ во множестве вещественных чисел может быть представлен в виде произведения линейных множителей вида $(x - x_0)$. Эта и многие другие задачи привели к необходимости введения нового понятия – комплексного числа. В настоящем параграфе мы только определим множество комплексных чисел, укажем их свойства и действия над ними. Более полное изложение будет дано в курсе «Теория функций комплексной переменной».

Определение 5.1. Комплексным числом называется упорядоченная пара вещественных чисел $z = (x, y)$, x называется вещественной частью комплексного числа z, y – мнимой. Обозначается: $x = \mathrm{Re}\ z$, $y = \mathrm{Im}\ z$. Определим множество комплексных чисел, которое обозначим буквой $\mathbb{C}$.

1°. Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются равными, если равны их вещественные и мнимые части $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

2°. Во множестве $\mathbb{C}$ существует нулевой элемент – пара $(0, 0) \stackrel{def}{=}$ $\stackrel{def}{=} 0$.

3°. Число вида $(a, 0)$, у которого мнимая часть равна нулю, является вещественным числом. Отсюда следует, что множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел является подмножеством множества комплексных чисел ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

4°. Во множестве $\mathbb{C}$ определена операция сложения следующим образом: $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$,

$$z_1 + z_2 \stackrel{def}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

которая обладает следующими свойствами:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

в) $z + 0 = z$;

г) $(\forall z \in \mathbb{C})(\exists z' \in \mathbb{C}) \Rightarrow (z + z' = 0), z' = (-x, -y)$.

Справедливость свойств доказывается непосредственным вычислением.

5°. Операция умножения комплексных чисел вводится следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 \stackrel{def}{=} (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2).$$

Столь сложное определение произведения вызвано требованием выполнения аксиом поля. Действительно, легко проверить, что выполняются свойства произведений:

а) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

б) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

в) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$;

г) во множестве $\mathbf{C}$ существует единственный единичный элемент $1 = (1, 0)$ такой, что $\forall z \in \mathbb{C}: \ z \cdot 1 = z$;

д) для любого, отличного от нуля, комплексного числа z существует обратный элемент z^{-1} такой, что $z \cdot z^{-1} = 1$.

Очевидно, что

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Рекомендуется студентам самостоятельно проверить справедливость свойств а) – д).

Из свойств 1° – 5° следует, что множество $\mathbb{C}$ – поле, однако, в отличие от множества $\mathbb{R}$, множество $\mathbb{C}$ является неупорядоченным полем, то есть в нем не определены понятия «больше», «меньше». Комплексные числа нельзя сравнивать.

Мнимая единица. Алгебраическая форма записи комплексных чисел

Мы определили во множестве комплексных чисел вещественную единицу $1 = (1, 0)$. Рассмотрим пару $(0, 1)$, которую обозначим символом $i = (0, 1)$ и назовем ее мнимой единицей. Легко видеть, что

$$i \cdot i = (i)^2 = -1.$$

По правилу сложения и умножения комплексных чисел имеем

$$x \cdot (1, 0) = (x, 0),$$

$$y \cdot (0, 1) = (0, y),$$

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy,$$

мы получили алгебраическую форму записи комплексного числа.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным числу $z = x + iy$. Легко видеть, что произведение взаимно сопряженных комплексных чисел есть вещественное число. Действительно, умножим $z \cdot \overline{z}$ по правилу перемножения двучленов, заменяя $(i)^2 = -1$:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + ixy - iyx - (iy)^2 = x^2 + y^2.$$

По такому же правилу умножаются любые комплексные числа в алгебраической форме. Действие над комплексными числами считается законченным, если выделены его вещественная и мнимая части, например

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + iy_2x_1 + (i)^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

При делении комплексных чисел следует числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2 - (i)^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Примеры. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме.

1) $(2 + 3i) + (5 - 8i) = (2 + 5) + (3i - 8i) = 7 - 5i;$

2) $(1 + 2i)(3 - 5i) = 3 + 6i - 5i - 10(i)^2 = 3 + i + 10 = 13 + i;$

3) $\dfrac{3 - 4i}{2 + 5i} = \dfrac{(3 - 4i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} =$

$$= \frac{6 - 8i - 15i + 20(i)^2}{4 + 25} = \frac{6 - 20 - 23i}{29} = -\frac{14}{29} - \frac{23}{29}i;$$

4) $(2 - 3i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot 3i + 3 \cdot 2(3i)^2 - (3i)^3 =$

$$= 8 - 36i - 54 - 27(i)^2 \cdot i = -46 - 19i.$$

Геометрическая иллюстрация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма записи

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости. Назовем ось OX вещественной осью, OY – мнимой осью. Комплексное число $z_0 = (x_0, y_0)$ – точка на плоскости, которую будем называть комплексной плоскостью (рис. 1).

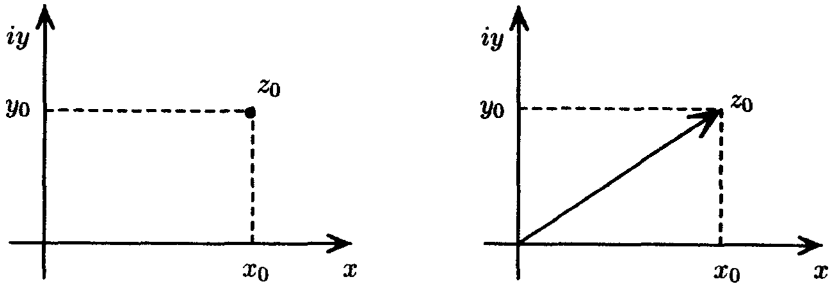

Рис. 1

Между точками комплексной плоскости и множеством $\mathbb{C}$ установлено взаимно однозначное соответствие. Однако наиболее удобным является представление комплексного числа z_0 вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой z_0. Геометрически сложение (вычитание) комплексных чисел есть сложение (вычитание) векторов, которое производится по правилу треугольника (рис. 2).

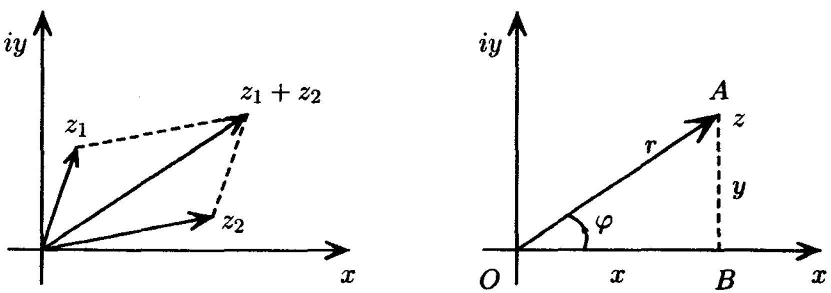

Рис. 2

Рассмотрим комплексное число z и соответствующий ему вектор на комплексной плоскости. Длина вектора называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z| = r$. Из треугольника OAB

получаем $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Угол, который образует вектор, изображающий комплексное число z, с вещественной осью OX называется аргументом комплексного числа z. Обозначается – $\arg z = \varphi$. Если модуль комплексного числа определяется однозначно, то аргумент – с точностью до кратного 2π. Совокупность всех значений аргумента комплексного числа z будем обозначать Arg z. Угол, заключенный в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$, назовем главным значением аргумента z и обозначим $\varphi = \arg z$. По определению, имеем Arg $z = \arg z + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Примеры. Найти модули и аргументы комплексных чисел:

1) $z_1 = 2+5i$;

2) $z_2 = 2-5i$;

3) $z_3 = -2+5i$;

4) $z_4 = -2-5i$.

Очевидно, что модули всех комплексных чисел равны

$$|z_k| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}, \quad k = \overline{1,4}.$$

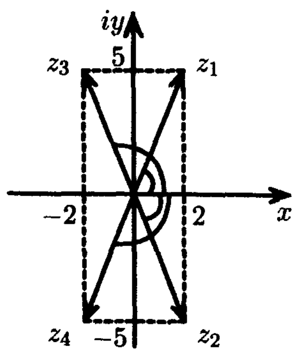

Рис. 3

Из рис. 3 видно, что

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{5}{2},$$

тогда

$$\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi n;$$

$$\arg z_2 = -\operatorname{arctg}\frac{5}{2}, \quad \operatorname{Arg} z_2 = -\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi n;$$

$$\arg z_3 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{2},$$

$$\operatorname{Arg} z_3 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi n = -\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + \pi(2n+1);$$

$$\arg z_4 = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{5}{2},$$

$$\operatorname{Arg} z_4 = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi n = \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + \pi(2n-1).$$

Кроме алгебраической, комплексные числа задаются в так называемой тригонометрической форме. Пусть $z = x + iy$ и $|z| = r$, $\arg z = \varphi$. Из прямоугольного треугольника OAB имеем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тогда

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это и есть тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Примеры. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

1) $z_1 = 1 + i$;
2) $z_2 = i$;
3) $z_3 = -1$;
4) $z_4 = 3 - 4i$.

Найдем модули и аргументы данных комплексных чисел.

Из рис. 4 следует, что

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \arg z_3 = \pi, \quad \arg z_4 = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Вычисляем: $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = |z_3| = 1$, $|z_4| = 5$.

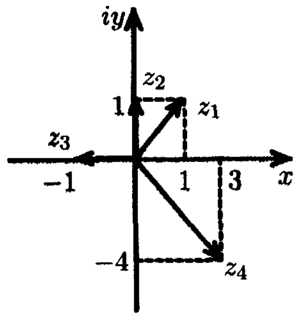

Рис. 4

Ответ:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}, \quad z_3 = \cos\pi + i\sin\pi,$$

$$z_4 = 5\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right) =$$

$$= 5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) - i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right).$$

Рассмотрим действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Пусть z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Перемножим

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$

$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Вывод: чтобы перемножить комплексные числа в тригонометрической форме, надо перемножить их модули и сложить аргументы.

Аналогично получаем для частного:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big].$$

Методом математической индукции можно получить формулу для возведения комплексного числа в целую положительную степень n, которая называется формулой Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа производится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = \overline{0, n-1}. \qquad (7)$$

Формулу (7) примем без доказательства. Из нее следует, что корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений. Все значения корня расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат и делят эту окружность на n равных частей (см. рисунок 5).

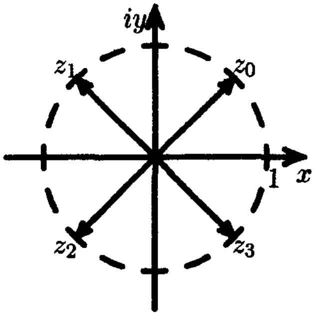

Рис. 5

Пример. Вычислить все значения $\sqrt[4]{-1}$.

Имеем $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$. По формуле (7)

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

При каждом значении k получаем соответствующее значение корня, которое обозначим z_k.

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i),$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i),$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i),$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

Задание для самостоятельной работы №3

I. Выполнить действия:

$$(7 - 8i)(5 + 4i), \quad \frac{10 - 2i}{5 + 3i}, \quad (1 + 3i)^4, \quad (1 + i)^{10}.$$

II. Изобразить числа на комплексной плоскости, найти их модуль и аргумент, представить в тригонометрической форме:

$z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = 5$, $z_4 = -6i$,
$z_5 = -2 - 4i$, $z_6 = 3 - 3i$.

III. Найти все значения корня из комплексных чисел:

$\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{2 - 2i}$, $\sqrt[3]{1 + i}$.

6. Многочлены и их свойства

Прежде чем перейти к одному из важных разделов интегрального исчисления — интегрированию рациональных дробей, рассмотрим необходимый для этого вспомогательный материал, касающийся многочленов. Основные положения теории многочленов сформулируем в виде теорем, некоторые из которых примем без доказательства, для других проведем либо доказательство, либо необходимые пояснения.

Определение 6.1. Многочленом или целой рациональной функцией называется выражение вида

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n.$$

В дальнейшем будем предполагать коэффициенты a_k вещественными числами, аргумент z комплексным числом.

Теорема 6.1. *Для того, чтобы два многочлена $P(z)$ и*

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n$$

были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны их коэффициенты при одинаковых степенях z, то есть $a_k = b_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Следствие. Для того, чтобы $P(z) \equiv 0$, необходимо и достаточно равенство нулю всех его коэффициентов.

Теорема 6.2. *Для любых двух многочленов $P(z)$ (степени n) и $Q(z)$ (степени m, $n \geq m$) можно найти такие многочлены $q(z)$ и $r(z)$ (степени k, где $0 \leq k < m$), что справедливо равенство*

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z).$$

При этом $P(z)$ – делимое, $Q(z)$ – делитель, $q(z)$ – частное, $r(z)$ – остаток.

Проиллюстрируем теорему 6.2 на примере.

Представить неправильную рациональную дробь

$$\frac{x^3+4x^2-6x+8}{x+1}$$

в виде многочлена и правильной рациональной дроби. Для решения задачи разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +4x^2 & -6x & +8 & \;x+1 \\ \cline{5-5}
-\;x^3 & +\;x^2 & & & \;x^2+3x-9 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & -6x & & \\
 & -\;3x^2 & +3x & & \\ \cline{2-3}
 & & -9x & +8 & \\
 & & -\;-9x & -9 & \\ \cline{3-4}
 & & & 17 &
\end{array}$$

В нашем примере

$$P(x) = x^3+4x^2-6x+8, \quad Q(x) = x+1,$$

$$q(x) = x^2+3x-9, \quad r(x) = 17$$

(x – вещественное число). В результате получаем

$$\frac{x^3+4x^2-6x+8}{x+1} = (x^2+3x-9) + \frac{17}{x+1}.$$

Рассмотренный процесс называется выделением целой части неправильной рациональной дроби и часто применяется при интегрировании рациональных дробей.

Определение 6.2. Число z_0 называется корнем многочлена $P(z)$, если $P(z_0) = 0$.

Теорема 6.3. **(Теорема Безу)** *Для того чтобы многочлен $P(z)$ делился без остатка на двучлен $(z-z_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $P(z_0)=0$.*

Доказательство. Необходимость.

Дано: $P(z)$ делится без остатка на $z-z_0$, то есть $r(z)\equiv 0$. Значит, в силу теоремы 6.2, $P(z)=(z-z_0)q(z)$. Положим в этом равенстве $z=z_0$, получим $P(z_0)=0$. Необходимость доказана.

Достаточность.

Дано: $P(z_0)=0$. В силу теоремы 6.2 $P(z)=(z-z_0)\cdot q(z)+r_0$, где r_0 – число (так как степень $r(z)$ меньше степени $z-z_0$). Полагая $z=z_0$, получаем $P(z_0)=r_0$. Но, так как по условию $P(z_0)=0$, то $r_0=0$, то есть $P(z)$ делится без остатка на $z-z_0$. Теорема доказана.

Например, легко видеть, что $P(z)=z^3+z^2+z-3$ делится нацело на $(z-1)$. Или $P(z)=z^4+2z^3+3z^2+4x-10$ также делится без остатка на $(z-1)$, а $P(z)=z^3+3z^2+3z+2$ на $(z+2)$.

Теорема 6.4. *Всякий многочлен степени $n\geq 1$ имеет, по крайней мере, один корень.*

Это значит, что $P(z)=(z-z_1)Q(z)$, где $Q(z)$ – многочлен степени меньше n. Применяя к $Q(z)$ теорему 6.4, получим $Q(z)=$ $=(z-z_2)R(z)$ и так далее. В результате приходим к следствию: всякий многочлен степени n во множестве комплексных чисел можно представить в виде

$$P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n),$$

где $z_1,z_2,\dots,z_n$ – корни многочлена.

Так как некоторые корни многочлена могут быть равными, то, перемножив одинаковые сомножители, получаем разложение

$$P(z)=a_n(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\dots(z-z_k)^{m_k}, \tag{8}$$

где $m_1+m_2+\dots+m_k=n$, m_k – кратность корня z_k.

Определение 6.3. Число z_0 называется корнем кратности m многочлена $P(z)$, если $P(z) = (z - z_0)^m Q(z)$, где $Q(z_0) \neq 0$.

Перед формулировкой следующей теоремы рассмотрим квадратное уравнение $z^2 - 4z + 8 = 0$, дискриминант которого отрицательный. Найдем его корни: $z = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$, $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 2 - 2i$.

Комплексные корни квадратного уравнения являются сопряженными. Имеем разложение

$$P(z) = z^2 - 4z + 8 = (z - 2 - 2i)(z - 2 + 2i).$$

Можно показать в общем виде, что произведение

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}),$$

где $z_0, \overline{z_0}$ – взаимно сопряженные комплексные числа, дает нам квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом.

Пусть $z_0 = \alpha + \beta i$, а $\overline{z_0} = \alpha - \beta i$. Рассмотрим

$$Q(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0}) = (z - (\alpha + \beta i))(z - (\alpha - \beta i)) =$$

$$= [(z - \alpha) - \beta i][(z - \alpha) + \beta i] = (z - \alpha)^2 + \beta^2 =$$

$$= z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2 = z^2 + pz + q,$$

($p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$). Дискриминант квадратного трехчлена меньше нуля, так как в противном случае он имел бы вещественные корни.

Теорема 6.5. *Если число $z_0 = \alpha + \beta i$ является корнем многочлена $P(z)$ с действительными коэффициентами кратности m, то число $\overline{z_0} = \alpha - \beta i$ также является корнем этого многочлена кратности m.*

Рассмотрим теперь основной вопрос – разложение многочлена на простейшие множители во множестве действительных чисел.

Для этого рассмотрим формулу (8) – разложение многочлена во множестве комплексных чисел и поступим следующим образом: если в разложении (8) $z - z_j$ содержит вещественный корень z_j, то множитель $(z-z_j)^{m_j}$ оставляем без изменения. Если z_j – комплексный корень, то в разложение (8) входит и множитель $(z - \overline{z_j})^{m_j}$ в силу теоремы 6.5. В этом случае мы перемножим $(z-z_j)^{m_j} \cdot (z-\overline{z_j})^{m_j}$ и получим квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом $(z^2 + pz + q)^{m_j}$. Таким образом, мы пришли к основной теореме:

Теорема 6.6. *Всякий многочлен $P(x)$ степени n во множестве действительных чисел можно представить в виде произведения*

$$P(x) =$$

$$= a_n(x-x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{m_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_lx+q_l)^{n_l}, \quad (9)$$

где $m_1+\ldots+m_k+2n_1+\ldots+2n_l = n$, $x_1, \ldots, x_k$ – вещественные корни, квадратные трехчлены имеют отрицательные дискриминанты.

Задание для самостоятельной работы №4.

1) Представить квадратные трехчлены в виде произведения линейных множителей

$$y = x^2 + x + 1,$$

$$y = x^2 - x + 1,$$

$$y = x^2 + 4x + 10,$$

$$y = x^2 + 3x + 9,$$

$$y = 3x^2 + 5x + 8.$$

2) Разложить на множители многочлены во множестве действительных чисел по теореме (6.6)

а) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x - 1;$

б) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$.

3) Разделить многочлен на многочлен, найти частное и остаток.

а) $(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1) : (x + 1)$;

б) $(3x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x + 5) : (x^2 - 1)$;

в) $(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6) : (x^2 + x + 1)$.

7. Интегрирование рациональных дробей

Определение 7.1. Отношение двух многочленов называется рациональной дробью.

Определение 7.2. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе, и неправильной, если многочлен в числителе имеет большую или равную степень со знаменателем.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с правильными дробями. Если дробь неправильная, то делением числителя на знаменатель ее представляют в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби. Например,

$$\frac{x^4}{x+1} = \frac{(x^4-1)+1}{x+1} = \frac{x^4-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = (x-1)(x^2+1) + \frac{1}{x+1} =$$

$$= (x^3-x^2+x-1) + \frac{1}{x+1}.$$

Рассмотрим вначале интегрирование простейших рациональных дробей.

Определение 7.3. Дроби четырех типов:

$$\frac{A}{x-a}, \tag{I}$$

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \tag{II}$$

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \tag{III}$$

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \tag{IV}$$

где A, M, N – числа, $n \in \mathbb{Z}^+$, называются простейшими рациональными дробями.

Интегрирование дробей типа (I) и (II) не составляет труда, это

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,dx = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C =$$
$$= \frac{A}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Рассмотрим интеграл от дроби (III)

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx.$$

Предлагаем следующие операции:

а) запишем в числителе выражение, равное производной знаменателя;

б) восстановим числитель так, чтобы дробь не изменилась;

в) почленно поделим числитель на знаменатель.

Это выглядит следующим образом:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\left(2x+p\right)\frac{M}{2} + \left(N - \frac{MP}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(N - \frac{MP}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

(если раскрыть скобки в числителе второй дроби и привести подобные, легко увидеть, что числитель остался прежним – $Mx+N$)

Первый интеграл табличный, так как числитель есть дифференциал знаменателя. Во втором интеграле знаменатель x^2+px+q имеет отрицательный дискриминант (в противном случае дробь (III)

можно было свести к дробям (I) или (II)), то есть число $\frac{p^2}{4} - q < 0$, или $q - \frac{p^2}{4} > 0$ и его можно обозначить $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

Выделим полный квадрат квадратного трехчлена с учетом введенного обозначения

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2.$$

И тогда получим

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} =$$

$$= \left[x + \frac{p}{2} = u\right] = \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C.$$

Возвращаясь к основному интегралу, получаем окончательный ответ

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx =$$

$$= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{2a} + C,$$

$$\left(a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right).$$

Пример.

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{\left(2x + 1\right)\frac{3}{2} - \left(5 - \frac{3}{2}\right)}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Рассмотрим теперь интегрирование рациональной дроби типа (IV). После аналогичных преобразований числителя дроби мы также приходим к двум интегралам, один из которых табличный, а второй, после выделения полного квадрата квадратного трехчлена, может быть вычислен по рекуррентной формуле (6). Действительно,

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{\frac{M}{2}\left(2x+p\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)+a^2\right]^n} =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}.$$

<u>Замечание</u>. Полученный интеграл

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$$

иногда бывает удобнее вычислить подстановкой $u = a\operatorname{tg} t$, чем по формуле (6), например,

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \left[\begin{array}{l} x = a\operatorname{tg} t, dx = \dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}, \\ a^2+x^2 = a^2(1+\operatorname{tg}^2 t) = \dfrac{a^2}{\cos^2 t} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{a\,dt}{\cos^2 t\left[\dfrac{a^2}{\cos^2 t}\right]^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{a^3}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^3}\frac{1}{2}\left[\int dt + \int \cos 2t\, dt\right] = \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\sin 2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C.$$

Подстановка $x = a\operatorname{tg} t$ при вычислении интеграла

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$$

значительно упрощает вычисления определенных интегралов вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} \quad (n > 1),$$

которые часто встречаются в приложениях.

Любая правильная рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ может быть представлена в виде суммы простейших рациональных дробей типов (I) – (IV). Чтобы это доказать, рассмотрим несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. Если a – действительный корень знаменателя дроби $P(x)/Q(x)$ кратности m, то есть $Q(x) = (x-a)^m Q_1(x)$, $Q_1(a) \neq \neq 0$, то правильная рациональная дробь может быть представлена в виде:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}Q_1(x)},$$

где A_m – число, а $P_1(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени знаменателя.

Для доказательства рассмотрим следующее тождество:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{P(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} - \frac{A_m}{(x-a)^m},$$

сложим второе и третье слагаемые, получим

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{P(x) - A_m Q_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}. \qquad (10)$$

Выберем число A_m так, чтобы многочлен $P(x)-A_m\cdot Q_1(x)$ делился без остатка на $(x-a)$. Для этого, в силу теоремы Безу, достаточно, чтобы a было корнем этого многочлена, то есть чтобы выполнялось равенство $P(a)-A_mQ_1(a)=0$ или $A_m=P(a)/Q_1(a)$. Так как $Q_1(a)\neq 0$, то такое число A_m выбрать возможно. А при таком выборе числа A_m получаем представление $P(x)-A_mQ_1(x)=(x-a)P_1(x)$. Подставим его в формулу (10):

$$\frac{P(x)}{(x-a)^mQ_1(x)}=\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)^mQ_1(x)}=$$

$$=\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}Q_1(x)}.$$

Получили то, что и требовалось доказать.

Замечание. Применяя к дроби

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}Q_1(x)}$$

лемму 1 $(m-1)$ раз, получим представление:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^mQ_1(x)}=$$

$$=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{P_m(x)}{Q_1(x)},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – числа, $P_m(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени знаменателя. Если многочлен $Q_1(x)$ имеет еще вещественные корни, то аналогично можно выделить соответствующие им простейшие дроби.

Пример. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{x^3+x+1}{(x-1)^2(x+1)^3(x+2)}.$$

Согласно лемме 1, имеем:

$$\frac{x^3+x+1}{(x-1)^2(x+1)^3(x+2)}=$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3} + \frac{C}{x+2},$$

где числа $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, C$ – неизвестные пока коэффициенты. Методы их отыскания будут указаны позднее.

Лемма 2. Если многочлен $Q(x)$ имеет комплексный корень α кратности m, то есть $Q(x) = (x^2+px+q)^m Q_1(x)$, где $x^2+px+q = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$, то правильная рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ может быть представлена в виде:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1} Q_1(x)},$$

где M, N – числа, а $P_1(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени знаменателя.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1. Мы его опускаем.

Замечание. Если к дроби

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1} Q_1(x)}$$

применить лемму 2 $(m-1)$ раз, то получим представление

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)} =$$

$$= \frac{M_1x+N1}{(x^2+px+q)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_m(x)}{Q_1(x)}.$$

Если многочлен $Q_1(x)$ имеет вещественные корни, то, применяя лемму 1, выделяем простейшие дроби вида

$$\frac{A_n}{(x-a)^n},$$

если многочлен $Q_1(x)$ имеет еще комплексно-сопряженные корни, то, в силу леммы 2, выделяем простейшие дроби вида

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}.$$

Из леммы 2 следует

Теорема 7.1. *Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ во множестве вещественных чисел можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей вида:*

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{B}{(x-a)^m},\ \frac{Cx+D}{x^2+px+q},\ \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^n}.$$

Рассмотрим теперь **способы отыскания коэффициентов разложения** рациональной дроби на простейшие. Для этого записывают разложение данной дроби $P(x)/Q(x)$ на простейшие с неопределенными коэффициентами. Пусть, например,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\frac{Kx+L}{x^2+p_2x+q_2}.$$

Затем в правой части равенства приводят к общему знаменателю, очевидно, это будет $Q(x)$. Мы получили равенство двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями, следовательно, равны и их числители, каждый из которых является многочленом. Слева стоит известный многочлен $P(x)$, а справа многочлен с неопределенными коэффициентами (A_1, A_2, ..., K, L). Как известно (теорема 6.1), два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях. Приравнивая коэффициенты слева и справа, получим систему n уравнений с n неизвестными коэффициентами, откуда их и находим. Проиллюстрируем этот способ на более конкретном примере:

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

После приведения к общему знаменателю приравняем числители

$$x^2+3x-1=A(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+$$

$$+(Mx+N)(x^2-2x+1).$$

В правой части раскроем скобки, приведем подобные члены и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$x^2+3x-1=x^3(M+B)+x^2(A-2M+N)+$$

$$+x(A+M-2N)+(A-B+N).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа

$$\begin{array}{c|l}
x^3 & M+B=0, \\
x^2 & A-2M+N=1, \\
x^1 & A+M-2N=3, \\
x^0 & A-B+N=-1,
\end{array}$$

и решим полученную систему. В результате находим, что

$$A=1,\ B=\frac{2}{3},\ M=-\frac{2}{3},\ N=-\frac{4}{3}.$$

Подставим значения коэффициентов в разложение

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{3(x-1)}-\frac{2x+4}{3(x^2+x+1)}.$$

Если знаменатель дроби имеет вещественные и различные корни, то удобнее применить **второй способ отыскания коэффициентов** разложения, который заключается в следующем.

После приведения к общему знаменателю $Q(x)$ и приравнивания числителей придают x различные значения, обычно равные вещественным корням знаменателя. При этом x дают столько значений, сколько неизвестных коэффициентов содержит разложение. В результате получаем n уравнений с n неизвестными (но более простых, чем при первом способе), откуда находим неизвестные коэффициенты разложения.

Пример.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

После приведения к общему знаменателю и приравнивания числителей получаем

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1).$$

Будем придавать x последовательно значения $1, -1, 2$.

При $x = 1$: $1 = A \cdot 2(-1)$, откуда $A = -1/2$;

при $x = -1$: $-1 = B(-2)(-3)$, получаем $B = 1/6$ и

при $x = 2$: $2 = C \cdot 1 \cdot 3$, $C = 2/3$.

Ответ:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

На практике можно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов разложения. Рассмотрим еще пример на вычисление интеграла от правильной рациональной дроби.

Вычислить $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^3}$.

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) =$$
$$= (A + B)x^2 + x(B + C - A) + (A + C),$$

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A + B = 0, \\ x^1 & B + C - A = 1, \\ x^0 & A + C = 0, \end{array}$$

из системы имеем $A = -B$, $A = -C$, откуда $-3A = 1$ и

$$A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3}.$$

Подставим результат в интеграл

$$\int \frac{xdx}{1 + x^3} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1 + x} + \frac{1}{3}\int \frac{(x + 1)dx}{x^2 - x + 1} =$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|1 + x| + \frac{1}{3}\int \frac{(2x - 1)\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{x^2 - x + 1}dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|1 + x| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} =$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|1 + x| + \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2}\int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|1 + x| + \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Из сказанного в данном параграфе следует **вывод**: интегрирование любой рациональной дроби сводится к интегрированию полинома и правильной рациональной дроби, которая, в свою очередь, может быть представлена в виде суммы простейших рациональных дробей $I - IV$ типов. Интегралы от простейших рациональных дробей, как мы видели, выражаются через элементарные функции (рациональную, логарифмическую, арктангенс), которые связаны между собой операцией сложения, производящейся конечное число раз. Это обстоятельство выражается следующими словами: **интегралы от рациональных функций вычисляются в конечном виде.**

Естественно поэтому интегралы от других функций (иррациональных, тригонометрических и т. п.), насколько это возможно, попытаться свести путем той или иной подстановки к интегралам от рациональной функции. Этой задаче посвящаются следующие параграфы.

Задание для самостоятельной работы №5.

1. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{8x+7}{x^2+4x+10}dx$; б) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{6x-1}{x^2+3x+3}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

2. Разложить правильную рациональную дробь на простейшие, найти коэффициенты разложения:

а) $\displaystyle\frac{x^2+x+1}{(x+3)(x-4)(x-5)}$; б) $\displaystyle\frac{x^3+x-2}{(x-4)^2(x+1)^3(x-2)}$;

в) $\displaystyle\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x^2+x-1)}$; г) $\displaystyle\frac{2x+1}{(x^2+1)^2(x^2-1)}$.

3. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$; г) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-1)(x+3)}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$.

8. Интегрирование иррациональных функций

В настоящем параграфе рассмотрим некоторые классы иррациональных функций, интегралы от которых поддаются рационализации.

I. $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}})\, dx.$

Подынтегральная функция содержит x и дробные степени x. Символ R означает, что над x и его дробными степенями производятся только рациональные действия, $m_1, \ldots, m_k$, $n_1, \ldots, n_k$ – целые числа. Обозначим за n наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Осуществим подстановку $x = z^n$, которая преобразует подынтегральную функцию в рациональную функцию от z. Действительно,

$$dx = nz^{n-1}dz, \quad x^{\frac{m_1}{n_1}} = z^{\frac{m_1 \cdot n}{n_1}}, \ \ldots, \ x^{\frac{m_k}{n_k}} = z^{\frac{n \cdot m_k}{n_k}}.$$

Так как, по условию, n делится нацело на $n_1, n_2, \ldots, n_k$, то показатели z целые. Так как dx и степени x выражаются через z рационально, значит, данная подстановка преобразует подынтегральную функцию в рациональную от z. Например,

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})} = \left[\begin{array}{l} x = z^{10}, \\ dx = 10z^9dz \end{array} \right] = 10 \int \frac{z^9dz}{z^{10}(z^5 + z^4)} =$$

$$= 10 \int \frac{dz}{z^5(z+1)}.$$

Полученный интеграл вычисляется разложением подынтегральной дроби на простейшие с последующей заменой $z = \sqrt[10]{x}$, предлагаем читателю это проделать самостоятельно.

II. $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right] dx.$

Подынтегральная функция содержит x и дробные степени дробно-линейной функции $\frac{ax+b}{cx+d}$. Символ R также означает рациональные действия. Осуществим подстановку

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n,$$

где n – наименьшее общее кратное знаменателей $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Покажем, что такая подстановка приводит к интегралу от рациональной функции от z. Выразим x через z, получим

$$x = \frac{z^n d - b}{a - cz^n},$$

откуда

$$dx = \frac{nz^{n-1}[ad - cb]\, dz}{(a - cz^n)^2}.$$

Итак, x и dx выражаются через z рационально, степени дробно-линейной функции

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}} = z^{\frac{n\cdot m_k}{n_k}}$$

также выражаются через z рационально $(n \vdots n_k)$. Что и требовалось доказать.

Пример.

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx = \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x+1} = z^2, x = \dfrac{1+z^2}{1-z^2}, \\ dx = \dfrac{4z dz}{(1-z^2)^2} \end{array}\right] = 4\int \frac{z^2 dz}{(1-z^2)^2}.$$

Рекомендуем читателю закончить самостоятельно вычисление интеграла от рациональной дроби.

III. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx.$

Подынтегральная функция есть рациональная функция от x и от $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Рассмотрим общие методы интегрирования функций такого вида. Рассмотрим три подстановки, называемые подстановками Эйлера, с помощью которых данный интеграл приводится к интегралу от рациональной функции.

Первая подстановка Эйлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z\pm\sqrt{a}x.$$

Эта подстановка применима, когда $a>0$. Знак перед корнем можно взять любой, иногда выбор знака упрощает вычисления. Возьмем перед корнем знак плюс, возведем обе части равенства в квадрат, получим

$$ax^2+bx+c=z^2+2\sqrt{a}xz+ax^2,$$

откуда

$$x=\frac{z^2-c}{b-2\sqrt{a}z}.$$

Мы видим, что x выражается через z рационально, следовательно, dx также выражается рационально через z. Выразим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z+\frac{\sqrt{a}(z^2-c)}{b^2-2az},$$

получим рациональную функцию от z. Если подставить все полученные вычисления в данный интеграл, то придем к интегралу от рациональной функции.

Вторая подстановка Эйлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$$

осуществляется для $c>0$. Возьмем перед корнем знак плюс и возведем обе части в квадрат

$$ax^2+bx+c=x^2z^2+2xz\sqrt{c}+c,$$

откуда

$$x=\frac{2z\sqrt{c}-b}{a-z^2},$$

x выражается через z рационально, следовательно, dx также выражается через z рационально, вычислим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{2z^2\sqrt{c}-bz}{a-z^2}+\sqrt{c}.$$

Подставляя полученные результаты в интеграл, получим интеграл от рациональной функции.

Третья подстановка Эйлера применима тогда, когда квадратный трехчлен имеет действительные и различные корни. Обозначим их α и β, тогда

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Положим

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = z(x - \alpha)$$

или

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = z(x - \beta).$$

Возведем обе части в квадрат и найдем x:

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = z^2(x - \alpha)^2, \quad x = \frac{a\beta - \alpha z^2}{a - z^2}.$$

Мы видим, что x, а следовательно, и dx выражаются через z рационально. Найдем

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = z\left(\frac{a\beta - \alpha z^2}{a - z^2} - \alpha\right)$$

и подставим полученные вычисления в интеграл, придем к интегралу от рациональной функции.

Покажем теперь, что подстановки Эйлера охватывают все возможные случаи. Первая применима при $a > 0$, вторая – при $c > 0$, третья при вещественных, различных корнях трехчлена. Пусть ни один из этих трех случаев не имеет места, то есть $a < 0$, $c < 0$, корни трехчлена либо равны, либо мнимые. В этом случае знак квадратного трехчлена при любом x совпадает со знаком a, но $a < 0$, следовательно, имеем квадратный корень из отрицательного числа, и подынтегральная функция во множестве вещественных чисел не имеет смысла. Три подстановки Эйлера охватывают все возможные случаи.

Пример. Вычислить

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Возьмем подстановку $\sqrt{x^2+1} = z - x$, откуда $z = x + \sqrt{x^2+1}$. (В этом примере выбор знака значительно облегчает вычисления). Возведем обе части в квадрат и найдем x:

$$x^2+1 = z^2 - 2xz + x^2, \quad x = \frac{z^2-1}{2z},$$

откуда

$$dx = \frac{z^2+1}{2z^2}\,dz.$$

Подставляя полученные значения в интеграл, будем иметь:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{z^2+1}{z^3}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| - \frac{1}{4z^2} + C = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}| - \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})} + C.$$

Хотя подстановки Эйлера охватывают все возможные случаи, однако применение их для вычисления интегралов типа III на практике приводит к громоздким вычислениям. Поэтому, наряду с общими методами, рассмотрим частные методы вычисления интегралов типа III.

1°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$

Выделяя полный квадрат квадратного трехчлена и делая замену, сводим первый интеграл к табличному

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} \text{ либо } \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}.$$

Второй интеграл – к табличному

$$\int \sqrt{u^2+\alpha}\, du \quad \text{либо к} \quad \int \sqrt{a^2-u^2}\, du.$$

Рассмотрим примеры.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+4)+2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+2}} = [x+2=u] =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C.$$

2. $$\int \sqrt{6x-x^2-5}dx = \int \sqrt{4-(x-3)^2}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x-3=u, \\ du=dx \end{array}\right] = \int \sqrt{4-u^2}du =$$

$$= (\text{интеграл } 13^\circ) = 2\arcsin\frac{u}{2} + \frac{u\sqrt{4-u^2}}{2} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x-3}{2} + \frac{(x-3)\sqrt{6x-x^2-5}}{2} + C.$$

2°. Интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx, \qquad \int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\, dx.$$

В обоих интегралах запишем в числителе выражение, равное производной подкоренного выражения, затем восстановим подынтегральную функцию, разобьем на два интеграла, один из которых табличный, а второй типа 1°. Действительно,

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \int \frac{\left(2ax+b\right)\dfrac{M}{2a} + N - \dfrac{Mb}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{d\sqrt{ax^2+bx+c}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Примеры.

1. $$\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+4x+9}}\,dx = \int \frac{(8x+4)\cdot\frac{3}{8}+\frac{7}{2}}{\sqrt{4x^2+4x+9}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{d(4x^2+4x+9)}{\sqrt{4x^2+4x+9}} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+9}} =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+9} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+8}} =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+9} + \frac{7}{2}\frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+8}} =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+9} + \frac{7}{4}\ln\left|(2x+1)+\sqrt{(2x+1)^2+8}\right| + C.$$

2. $$\int (5x+1)\sqrt{x^2+6x+8}\,dx =$$

$$= \int \left[(2x+6)\cdot\frac{5}{2} - 14\right]\cdot\sqrt{x^2+6x+8}\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \sqrt{x^2+6x+8}\,d(x^2+6x+8) - 14\int \sqrt{x^2+6x+8}\,dx =$$

$$= \frac{5\cdot 2\sqrt{(x^2+6x+8)^3}}{2\cdot 3} - 14\int \sqrt{(x+3)^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt{(x^2+6x+8)^3} - 7(x+3)\sqrt{(x+3)^2-1} +$$

$$+7\ln\left|(x+3)+\sqrt{(x+3)^2-1}\right| + C.$$

Второй интеграл, после замены $x + 3 = u$, вычисляется по формуле (5).

3°. Рассмотрим интегралы вида

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где $P(x)$ – многочлен n-й степени.

Для вычисления таких интегралов применяют метод неопределенных коэффициентов. Пусть $Q(x)$ – многочлен степени на единицу ниже, чем $P(x)$, то есть

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

у которого коэффициенты пока не определены. Будем искать данный интеграл в виде:

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где λ также неизвестный пока коэффициент. Для нахождения коэффициентов a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, λ поступают следующим образом: дифференцируют обе части данного тождества и после приведения к общему знаменателю приравнивают числители, которые представляют собой многочлен n-й степени. Причем, слева – известный многочлен $P(x)$, а справа – многочлен с неизвестными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему $(n + 1)$-го уравнения с $(n + 1)$ неизвестными, из которой и находим коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \lambda$. После дифференцирования получаем

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2}) \times$$

$$\times \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}) +$$

$$+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

После приведения к общему знаменателю $\sqrt{ax^2+bx+c}$ будем иметь

$$P(x) = (a_1 + 2a_2x + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2})(ax^2+bx+c)+$$

$$+\left(ax+\frac{b}{2}\right)(a_0+\ldots+a_{n-1}x^{n-1})+\lambda,$$

откуда, перемножая и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = (ax+b)\sqrt{x^2+4x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Продифференцируем обе части тождества

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4x+5}} = a\sqrt{x^2+4x+5}+$$

$$+(ax+b)\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}},$$

далее получаем

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \frac{a(x^2+4x+5)+(ax+b)(x+2)+\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}},$$

$$x^2+1 = a(x^2+4x+5)+(ax+b)(x+2)+\lambda$$

или

$$x^2+1 = 2ax^2+(2a+b+4a)x+(5a+2b+\lambda),$$

откуда

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ 6a+b = 0, \\ 5a+2b+\lambda = 1. \end{cases}$$

Из системы находим

$$a = \frac{1}{2},\ b = -3,\ \lambda = \frac{9}{2}.$$

В результате имеем

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 3\right)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{9}{2}\ln\left|(x+2) + \sqrt{x^2+4x+5}\right| + C.$$

4°. Интегралы типа

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где n – натуральное число, α – любое вещественное число. С помощью подстановки

$$x - \alpha = \frac{1}{t}$$

данный интеграл приводится к только что рассмотренному интегралу типа 3°. Покажем это:

$$x = \frac{1}{t} + \alpha, \quad dx = -\frac{dt}{t^2},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(\frac{1+\alpha t}{t}\right)^2 + b\left(\frac{1+\alpha t}{t}\right) + c} =$$

$$= \frac{1}{t}\sqrt{(\alpha^2+b\alpha+c)t^2 + (2\alpha+b)t + a} = \frac{1}{t}\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}.$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + b\alpha + c = a_1, \\ 2\alpha + b = b_1, \\ c_1 = a. \end{cases}$$

Подставляя вычисления в интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}},$$

а это и есть интеграл типа 3°.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Полагаем

$$x+1 = \frac{1}{t},$$

откуда

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad x = \frac{1-t}{t},$$

$$x^2+x+1 = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + \frac{1-t}{t} + 1 =$$

$$= \frac{(1-t)^2+(1-t)t+t^2}{t^2} = \frac{t^2-t+1}{t^2}.$$

Подставляем в интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{t^2-t+1}{t^2}}} =$$

$$= -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\int \frac{(2t-1)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2-t+1}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= -\sqrt{t^2-t+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{\sqrt{3}(1+x)} + C$$

(возвращаемся к старой переменной, полагая $t = 1/(x+1)$).

9. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Определение 9.1. Биномиальным дифференциалом или дифференциальным биномом называется выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

где a, b – вещественные числа, m, n, p – рациональные.

Чебышев показал, что интегрирование дифференциального бинома, то есть вычисление интеграла вида

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

сводится к интегрированию рациональной функции только в трех случаях

1) p – целое,

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое,

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое.

Если p – дробное, то случаи 2) и 3) одновременно быть не могут. Рассмотрим каждый случай.

1. Пусть p – целое, m, n – любые рациональные числа, то есть

$$m=\frac{r}{s_1},\quad n=\frac{q}{s_2},$$

где s_1, s_2, r, q – целые числа. В этом случае имеем

$$\int x^{\frac{r}{s_1}}(a+bx^{\frac{q}{s_2}})^p dx,$$

но это есть интеграл типа I, рассмотренного ранее. Подстановка $x=z^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел s_1 и s_2, приводит его к интегралу от рациональной функции.

2. Пусть p – дробное, то есть $p = r/s$, но $(m+1)/n$ – целое. Покажем, что подстановка $a+bx^n = z^s$ приводит интеграл от биномиального дифференциала к интегралу от рациональной функции. В самом деле:

$$x^n = \frac{z^s - a}{b},$$

откуда

$$x = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \frac{sz^{s-1}}{b} dz.$$

Подставим эти замены в интеграл и получим

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{z^r}{n} \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \frac{s \cdot z^{s-1}}{b} dz =$$

$$= \frac{s}{b \cdot n} \int z^{r+s-1} \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Здесь z – в целой степени, $(m+1)/n$ по условию целое, и $(m+1)/n-1$ – целое. Получим интеграл от рациональной функции.

3. Пусть p – дробное, $p = r/s$, а $(m+1)/n+p$ – целое. Осуществим подстановку $a + bx^n = x^n z^s$, где s – знаменатель p. Отсюда

$$x^n = \frac{a}{z^s - b}, \quad x = \left(\frac{a}{z^s - b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$dx = -\frac{1}{n}\left(\frac{a}{z^s - b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \frac{a \cdot s \cdot z^{s-1}}{(z^s - b)^2} dz.$$

Подставим в интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx =$$

$$= -\frac{as}{n} \int \left(\frac{a}{z^s - b}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{az^s}{z^s - b}\right)^p \left(\frac{a}{z^s - b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \frac{z^{s-1}}{(z^s - b)^2} dz =$$

$$= -\frac{a^{\frac{m+1}{n}+p} s}{n} \cdot \int \frac{z^{r+s-1}dz}{(z^s - b)^{\frac{m+1}{n}+p+1}}.$$

Видно, что z в целой $r+s-1$ степени и $z^s - b$ также в целой степени, так как по условию $(m+1)/n + p$ – целое. Пришли к интегралу от рациональной функции.

Рассмотренные нами подстановки называются подстановками Чебышева. При выполнении указанных выше условий интегралы от дифферинциальных биномов сводятся к интегралам от рациональных функций, а те, как было указано ранее, выражаются в конечном виде через элементарные функции (арктангенс, логарифм, квадратный корень). Возникает вопрос, существуют ли случаи, при которых интеграл от дифференциального бинома выражается в конечном виде? (Например, p – дробное, $(m+1)/n$ – дробное, $(m+1)/n + p$ – дробное). В середине XIX века известный русский математик Чебышев показал, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет.

Рассмотрим примеры.

1. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx$. Здесь

$$p = \frac{1}{3}, \quad m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2.$$

Имеем второй случай интегрируемости, делаем подстановку

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = z^3,$$

откуда

$$x = (z^3-1)^4, \quad dx = 12z^2(z^3-1)^3dz,$$

тогда

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 12\int (z^3-1)^{-2}z^3(z^3-1)^3dz =$$

$$= 12\int (z^6 - z^3)dz = \frac{12z^7}{7} - \frac{12z^4}{4} + C =$$

$$= \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx$. На этот раз

$$m = 0, \quad n = 4, \quad p = -\frac{1}{4},$$

и мы имеем третий случай интегрируемости, так как

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Подстановка $1 + x^4 = x^4z^4$, откуда

$$x = (z^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \; dx = -z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz, \; \sqrt[4]{1+x^2} = z(z^4-1)^{-\frac{1}{4}},$$

так что

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{z^2dz}{z^4-1} = -\int \frac{z^2dz}{(z^2-1)(z^2+1)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(z^2-1)+(z^2+1)dz}{(z^2-1)(z^2+1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right| + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx$. Здесь

$$m = 0, n = 4, p = -\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = \frac{1}{4}, \frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

ни один из трех случаев интегрируемости не имеет места. Интеграл в конечном виде не выражается.

Задание для самостоятельной работы №6.
Вычислить интегралы

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;
2. $\int \sqrt{1+x-x^2}dx$;
3. $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$;
4. $\int (x+3)\cdot\sqrt{3-2x-x^2}dx$;
5. $\int \frac{1}{1-2x}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}dx$;
6. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$;
7. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}$;
8. $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{3x-2-x^2}}$;
9. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x+3}}$;
10. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$;
11. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$;
12. $\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt{x}}dx$.

10. Интегрирование тригонометрических функций

В настоящем параграфе рассмотрим интегралы типа

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

в которых подынтегральная функция есть рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. Подстановка

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$$

всегда приводит данный интеграл к интегралу от рациональной функции и потому называется **универсальной подстановкой**. В самом деле,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

тогда

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

то есть $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через z рационально. Далее

$$x = 2\operatorname{arctg} z$$

и

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2},$$

то есть dx также выражается через z рационально. Подставляя найденные выражения в интеграл, придем к интегралу от рациональной функции. Таким образом, интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

всегда берутся в конечном виде и для их выражения, кроме функций, встречающихся при интегрировании рациональных дробей, нужны еще тригонометрические функции.

Пример.

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{\left(1+\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{1+z^2+2z}{2z}dz = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\int zdz + \int dz =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2} + z + C = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Хотя подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ является универсальной, однако на практике она часто приводит к громоздким вычислениям. Поэтому, где возможно, применяются другие методы интегрирования функций вида $R(\sin x, \cos x)$. Так например, если подынтегральная функция есть четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то вместо подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ применяют более простую $\operatorname{tg} x = z$. Действительно, рассмотрим

пример

$$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin x\cdot\cos x + c}.$$

Подынтегральная функция – четная относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поделим на $\cos^2 x$ числитель и знаменатель, получим

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a + b\operatorname{tg} x + c(1+\operatorname{tg}^2 x)} = \left[\begin{array}{c}\operatorname{tg} x = z\\ dz = \dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{dz}{a+bz+c(1+z^2)} = \int \frac{dz}{cz^2+bz+(a+c)}.$$

Пришли к интегралу от рациональной функции.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи функций вида $R(\sin x, \cos x)$ и соответствующие им методы интегрирования.

I. $\int \sin^p x \cdot \cos^q x dx$, где p, q – любые целые числа. Ясно, что возможны следующие типы этих интегралов:

1°. $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$;

2°. $\int \sin^n x \cos^m x dx$;

3°. $\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx$; $\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^m x}$;

4°. $\int \frac{dx}{\sin^n x}$, $\int \frac{dx}{\cos^n x}$;

5°. $\int \frac{dx}{\sin^n x \cdot \cos^m x}$,

где m, n – целые положительные числа. Вначале рассмотрим случай, когда в интегралах типа I, по крайней мере, одно из чисел p или q положительное, нечетное. Этот случай носит название «случай легкой интегрируемости».

Пусть в интеграле I $q = 2m + 1$, m – натуральное число. Тогда будем иметь

$$\int \sin^p x \cdot \cos^{2m+1} x dx = \int \sin^p x (1 - \sin^2)^m \cos x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sin x = u \\ du = \cos x dx \end{array} \right] = \int u^p (1 - u^2)^m du.$$

Пришли к интегралу от рациональной функции.

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d(\sin x)}{\sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{(1 - u^2) du}{u^2} = \int \frac{du}{u^2} - \int du = -\frac{1}{u} - u + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

$$=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Для любых m и n, пользуясь формулой интегрирования по частям, можно получить рекуррентную формулу

$$\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{c} u=\sin^{n-1}x,\quad dv=\cos^m x\sin xdx,\\ du=(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos xdx,\\ v=\int\cos^m x\cdot\sin xdx=\\ =-\int\cos^m xd(\cos x)=-\dfrac{\cos^{m+1}x}{m+1}, \end{array}\right]=$$

$$=-\frac{\sin^{n-1}x\cdot\cos^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^{m+2}x\sin^{n-2}xdx=$$

$$=-\frac{\sin^{n-1}x\cdot\cos^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^m x(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx=$$

$$=-\frac{\sin^{n-1}x\cdot\cos^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^m x\cdot\sin^{n-2}xdx-$$

$$-\frac{n-1}{m+1}\int\cos^m x\cdot\sin^n xdx.$$

Последний интеграл отнесем в левую часть равенства к исходному интегралу и, выразив его, получим

$$\int\sin^n x\cos^m xdx=$$

$$=-\frac{\sin^{n-1}x\cdot\cos^{m+1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\sin^{n-2}x\cdot\cos^m xdx.$$

3°. $\displaystyle\int\frac{\sin^n xdx}{\cos^m x},\int\frac{\cos^n xdx}{\sin^m x}$:

а) если n – нечетное, то имеет место случай легкой интегрируемости;

б) если m и n оба четные или оба нечетные, тогда удобно отношение одинаковых степеней синуса и косинуса выразить через тангенс или котангенс, например:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^6 x d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C.$$

Для любых m и n, проинтегрировав по частям, можно получить рекуррентную формулу:

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = \sin^{n-1} x, \quad du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, \\ dv = \dfrac{\sin x}{\cos^m x} dx; \\ \\ v = \displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\cos^m x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^m x} = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1} x} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos m - 2x} dx.$$

(Полученная формула применяется, когда n – четное, m – нечетное).

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

4°. $\int \frac{dx}{\sin^n x}, \int \frac{dx}{\cos^n x}$:

а) если n – четное, то подынтегральную функцию можно выразить через тангенс или котангенс, например:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C;$$

б) для любого n можно получить рекуррентную формулу, записав в числителе тригонометрическую единицу

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^n x},$$

второй интеграл – типа 3°.

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C =$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

5°. $\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$:

а) если m и n оба четные или оба нечетные, то подынтегральную функцию можно выразить через $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$, например:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x \cdot \sin^5 x} = \int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^5 x} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{\cos^5 x}{\cos^6 x \sin^5 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3}{\operatorname{tg}^5 x} d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= [\operatorname{tg} x = u] = \int \frac{(1+u^2)^3}{u^5} du = \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{u^5} du =$$

$$= \int \frac{du}{u^5} + 3\int \frac{du}{u^3} + 3\int \frac{du}{u} + \int u du =$$

$$= -\frac{1}{4u^4} - \frac{3}{2u^2} + 3\ln|u| + \frac{u^2}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C;$$

б) для любых m и n можно получить рекуррентную формулу, записав в числителе тригонометрическую единицу

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x \cdot \cos^m x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos^m x} + \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^{m-2} x}.$$

II. Рассмотрим интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, где n – натуральное число.

При $n = 1$ мы получаем табличные интегралы

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C,$$

если $n \geq 2$, то можно вывести рекуррентную формулу

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x d(\operatorname{tg} x) -$$

$$- \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx.$$

Пример.

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

III. Это интегралы вида $\int \sin px \cos qx dx$, $\int \cos px \cdot \cos qx dx$, $\int \sin px \cdot \sin qx dx$ (p, q – любые вещественные числа).

Эти интегралы сводятся к табличным $\int \sin ax dx$, $\int \cos bx dx$ с помощью тригонометрических формул, преобразующих произведение в сумму:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Пример.

$$\int \sin(px) \cdot \sin(qx) dx = \int \frac{\cos[(p-q)x] - \cos[(p+q)x]}{2} dx =$$

$$= \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + C.$$

В заключение темы «Неопределенный интеграл» вернемся еще раз к вопросу об интегрировании функций в конечном виде, которому посвятим следующий параграф.

Задания для самостоятельной работы №7 по теме «Интегрирование тригонометрических функций»

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$;

3. $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x\ dx$;

4. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\ dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\ dx$;

6. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\ dx$;

7. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x\ dx$;

8. $\displaystyle\int \sin^6 x\ dx$;

9. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}\ dx$;

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^5 x}$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\ \cos^4 x}$;

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\ \cos^3 x}$;

13. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^6 x\ dx$;

14. $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^3 x\ dx$.

11. Вопрос об интегрируемости функций в конечном виде

Мы познакомились с элементарными приемами вычисления интегралов. Вычисление интеграла считали законченным, если удавалось найти выражение первообразной функции через элементарные функции с помощью конечного числа арифметических операций. В этом случае говорили, что неопределенный интеграл выражается в конечном виде. Однако существуют функции, интегралы от которых в конечном виде не выражаются. К числу таких интегралов относятся следующие:

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

и так далее.

Важно отметить, что все подынтегральные функции имеют первообразную, так как они являются непрерывными на некотором промежутке, только они не могут быть выражены в конечном виде через элементарные функции. Указанные интегралы представляют собой совершенно новые функции, не являющиеся элементарными. Следовательно, интегрирование приводит нас к новым функциям. Наиболее важные из них изучены, исследованы их свойства, составлены таблицы их значений. Например,

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{Si}\ x -$$

интегральный синус,

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{Li}\ x -$$

интегральный логарифм.

Мы рассмотрели интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

которые всегда вычисляются в конечном виде. Интегралы же вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d})dx$$

и

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})dx$$

в конечном виде не выражаются, за исключением некоторых частных случаев. Они носят название эллиптических интегралов, так как впервые с ними столкнулись при вычислении длины дуги эллипса. Важнейшие эллиптические интегралы при помощи ряда подстановок приводятся к двум интегралам:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

которые называются, соответственно, эллиптическими интегралами I и II рода. При помощи подстановки $z = \sin\varphi$, где $0 < \varphi < \pi/2$, первый интеграл преобразуется к виду:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = F(k, \varphi),$$

а второй к сумме интегралов $F(k, \varphi)$ и

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = E(k, \varphi).$$

Интегралы $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$ называются эллиптическими интегралами I и II рода в форме Лежандра. В них, кроме независимой переменной φ, указан также параметр k, называемый модулем. Лежандром были составлены таблицы функции $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$ при различных значениях φ и k, изучены свойства этих функций, установлен ряд относящихся к ним формул. Благодаря этому функции Лежандра $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$ используются в математическом анализе и его приложениях наравне с элементарными функциями.

Учебное издание

Бондаренко Владимир Владимирович,
Долгополов Вячеслав Михайлович,
Родионова Ирина Николаевна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Корректор В.В. Трифонова
Компьютерная верстка, макет В.И. Никонова

Подписано в печать 07.02.11. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.печ.л. 5,25. Уч.-изд.л 4,02.Тираж 100 экз. Заказ N 1968.
Издательство «Универс групп», 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Отпечатано с готового оригинал-макета на УОП СамГУ.